

УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ f -СТРУКТУРЫ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ГРУППЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

В. В. БАЛАЩЕНКО¹⁾, В. Н. КУНИЦА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Исследуется четырехмерная группа осциллятора с точки зрения обобщенной эрмитовой геометрии. Эта разрешимая группа Ли является полупрямым произведением классической трехмерной группы Гейзенберга и вещественной прямой. С использованием соответствующей алгебры Ли построены и изучены шесть базовых левоинвариантных метрических f -структур ранга 2 на группе осциллятора. В результате чего появляется возможность предъявить новые примеры левоинвариантных приближенно келеровых, обобщенных приближенно келеровых и эрмитовых f -структур на разрешимых группах Ли.

Ключевые слова: группа осциллятора; разрешимая группа Ли; разрешимая алгебра Ли; левоинвариантная метрическая f -структура; приближенно келерова f -структура; эрмитова f -структура; обобщенная эрмитова геометрия.

Благодарность. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского государственного университета в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», научно-исследовательская работа «Структуры на линейных алгебраических группах, обобщенных главных G -расслоениях, однородных многообразиях и группах Ли», № гос. регистрации 20211882).

Образец цитирования:

Балащенко ВВ, Куница ВН. Инвариантные f -структуры на четырехмерной группе осциллятора. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1:51–57.
EDN: UQZTOH

For citation:

Balashchenko VV, Kunitsa VN. Invariant f -structures on the four-dimensional oscillator group. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:51–57. Russian.
EDN: UQZTOH

Авторы:

Виталий Владимирович Балащенко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Виктория Николаевна Куница – аспирантка кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. В. Балащенко.

Authors:

Vitaly V. Balashchenko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

balashchenko@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-9366-2411>

Victoria N. Kunitsa, postgraduate student at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

vikakunica@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0002-6756-0056>

INVARIANT f -STRUCTURES ON THE FOUR-DIMENSIONAL OSCILLATOR GROUP

V. V. BALASHCHENKO^a, V. N. KUNITSA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. N. Kunitsa (vikakunica@gmail.com)

Abstract. In this paper, we investigate the four-dimensional oscillator group from the point of view of the generalised Hermitian geometry. This solvable Lie group is a semi-direct product of the classical three-dimensional Heisenberg group by a real line. Using the corresponding Lie algebra, we construct and study six basic left-invariant metric f -structures of rank 2 on the oscillator group. As a result, it gives the opportunity to present new examples of left-invariant nearly Kähler, generalised nearly Kähler and Hermitian f -structures on solvable Lie groups.

Keywords: oscillator group; solvable Lie group; solvable Lie algebra; left-invariant metric f -structure; nearly Kähler f -structure; Hermitian f -structure; generalised Hermitian geometry.

Acknowledgements. The work was carried out with the financial support by the Belarusian State University within the framework of the state programme of the scientific research of the Republic of Belarus for 2021–2025 «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», research work «Structures on linear algebraic groups, generalised principal G -bundles, homogeneous manifolds and Lie groups», state registration No. 20211882).

Введение

Важными объектами исследования в дифференциальной геометрии являются аффинорные структуры на гладких многообразиях, т. е. гладкие тензорные поля типа $(1, 1)$, реализованные в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к многообразию. И хотя число видов таких структур велико, интенсивно изучаемыми традиционно являются почти комплексные структуры, структуры почти произведения, почти контактные структуры и др. С 1960-х гг. значительную роль стали играть f -структуры Яно [1] ($f^3 + f = 0$), которые обобщают почти комплексные и почти контактные структуры. Вместе с согласованной (псевдо)римановой метрикой на многообразии метрические f -структуры включают классы почти эрмитовых структур и метрических почти контактных структур, роль которых в дифференциальной геометрии и ее многочисленных приложениях чрезвычайно велика. В свою очередь, метрические f -структуры являются важнейшим объектом в обширной обобщенной эрмитовой геометрии – области современной дифференциальной геометрии, развиваемой с середины 1980-х гг. [2–4].

Что касается дифференциальной геометрии однородных многообразий групп Ли, то исследования инвариантных структур на таких многообразиях продолжают оставаться актуальными в связи с рядом задач дифференциальной геометрии, теории гамильтоновых систем, теоретической физики. Отметим здесь эффективное применение метода канонических структур на однородных k -симметрических пространствах, заложенного и развитого в работах геометров Беларуси, России, Великобритании, США, Чехии и других стран [5–11]. В случае с естественно-редуктивной метрикой на однородных k -симметрических пространствах был обнаружен широкий класс инвариантных f -структур, реализующих основные классы в обобщенной эрмитовой геометрии [12–19].

Отметим далее, что многие важные (в известном смысле модельные) примеры возникают при построении и изучении левоинвариантных структур на группах Ли. В силу этого класс нильпотентных групп Ли, включающий группы Гейзенберга и их обобщения, а также более широкий класс разрешимых групп Ли являются перспективными и входят в число основных объектов исследования однородных многообразий, риманова метрика которых не является естественно-редуктивной. Краткий обзор результатов в этом направлении приведен ниже в тексте статьи.

В настоящей работе основным объектом исследования является одна из активно исследуемых разрешимых групп Ли – четырехмерная группа осциллятора. Эта группа играет особую роль в дифференциальной геометрии, гармоническом анализе, субримановой геометрии, теории управления [20–22]. В данной статье установлена связь построенных на группе осциллятора левоинвариантных метрических f -структур ранга 2 с основными классами в обобщенной эрмитовой геометрии.

Метрические f -структуры на гладких многообразиях

Классическими примерами аффинорных структур являются почти комплексные структуры J ($J^2 = -id$), структуры почти произведения P ($P^2 = id$) и др. В 1960-х гг. К. Яно [1] ввел f -структуры, определяемые условием $f^3 + f = 0$. Оказалось [23], что число $r = \dim \operatorname{Im} f$ постоянно для всех точек из M . Это число

является четным и называется рангом структуры, а число $\dim \operatorname{Ker} f = \dim M - r$ называют дефектом структуры и обозначают через $\operatorname{def} f$. Отметим, что частный случай $\operatorname{def} f = 0$ дает почти комплексные структуры $f = J$, а случай $\operatorname{def} f = 1$ приводит к классу почти контактных структур.

Задание f -структуры на M порождает пару взаимно дополнительных распределений $\mathcal{L} = \operatorname{Im} f$ и $\mathcal{M} = \operatorname{Ker} f$, которые называют первым и вторым фундаментальными распределениями f -структуры соответственно. При этом эндоморфизмы $l = -f^2$ и $m = id + f^2$ являются взаимно дополнительными проекторами на распределения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно [24]. Отметим также, что ограничение $\mathcal{F}$ заданной f -структуры на распределение $\mathcal{L}$ задает на нем почти комплексную структуру, т. е. $\mathcal{F}^2 = -id$.

Пусть далее на многообразии M задана риманова метрика $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. В этом случае f -структура на (M, g) называется метрической, если $\langle fX, Y \rangle + \langle X, fY \rangle = 0$ для всех гладких векторных полей X, Y на M [2; 3]. Для метрического f -многообразия первое ($\mathcal{L} = \operatorname{Im} f$) и второе ($\mathcal{M} = \operatorname{Ker} f$) фундаментальные распределения взаимно ортогональны.

При этом ограничение $(\mathcal{F}, g)$ метрической f -структуры на $\mathcal{L}$ есть почти эрмитова структура, т. е. $\mathcal{F}^2 = -id$, $\langle \mathcal{F}X, \mathcal{F}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ для всех $X, Y \in \mathcal{L}$. В частных случаях $\operatorname{def} f = 0$ и $\operatorname{def} f = 1$ получаем почти эрмитовы структуры и почти контактные метрические структуры соответственно.

Упомянутые выше почти эрмитовы структуры, метрические почти контактные структуры, метрические f -структуры легли в основу широкого научного направления, заложенного в работах В. Ф. Кириченко в 1980-х гг. Основным объектом изучения здесь стали обобщенные почти эрмитовы структуры (*generalised almost Hermitian structures*, ГАН) произвольного ранга r . Такое направление называют обобщенной эрмитовой геометрией. Не вдаваясь в детали общего определения ГАН-структуры ранга r , ограничимся рассмотрением важнейшего частного случая ГАН-структур ранга 1, т. е. метрических f -структур.

Фундаментальную роль в геометрии ГАН-структур (в частности, метрических f -структур) играет специальный тензор T типа $(2, 1)$, называемый композиционным тензором. Такой тензор позволяет задать алгебраическую структуру присоединенной Q -алгебры в модуле гладких векторных полей на многообразии M посредством формулы $X * Y = T(X, Y)$ [3; 4]. На основании естественных свойств присоединенной Q -алгебры стало возможным определить некоторые классы ГАН-структур. Заметим, что для метрических f -структур такой тензор был в точности вычислен в работе [3]:

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f \left(\nabla_{fX}(f) fY - \nabla_{f^2X}(f) f^2Y \right), \quad (1)$$

где ∇ – связность Леви-Чивиты риманова многообразия (M, g) ; X, Y – гладкие векторные поля на M .

Приведем здесь некоторые классы метрических структур, указав для них определяющие свойства.

1. Kf – келерова f -структура: $\nabla f = 0$.

2. Hf – эрмитова f -структура: $T(X, Y) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ есть абелева Q -алгебра.

3. G_1f – f -структура класса G_1 : $T(X, X) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ есть антикоммутативная Q -алгебра.

4. $\operatorname{Kill} f$ – киллингова f -структура: $\nabla_X(f)X = 0$.

5. NKf – приближенно келерова f -структура или NKf -структура (*nearly Kähler f-structure*): $\nabla_{fX}(f) fX = 0$.

6. $GNKf$ – обобщенная приближенно келерова f -структура, или $GNKf$ -структура: $f(\nabla_{fX}(f) fX) = 0$.

Классы Kf , Hf , G_1f были введены (в более общей ситуации) в работе [2] (см. также [25]). Киллинговы f -многообразия $\operatorname{Kill} f$ впервые описаны в [26; 27]. Класс NKf был введен в работах [15; 16].

Приведем включения между классами метрических f -структур:

$$Kf \subset Hf \subset G_1f, Kf \subset \operatorname{Kill} f \subset NKf \subset GNKf.$$

Следует заметить, что в частном случае $f = J$ получаем соответствующие классы почти эрмитовых структур, описанных в работе Грея – Хервеллы [28]. Особо необходимо обозначить, что для $f = J$ классы $\operatorname{Kill} f$, NKf и $GNKf$ дают в точности важнейший и широко известный класс NK приближенно келеровых структур. Значительная содержательная информация о классах метрических f -структур представлена в книге [4].

Инвариантные f -структуры на однородных пространствах и группах Ли

Инвариантные структуры на однородных многообразиях групп Ли играют особую роль в дифференциальной геометрии, поскольку эти структуры позволяют использовать развитую алгебро-геометрическую технику групп Ли и алгебр Ли. В частности, в теории почти эрмитовых структур широкий класс инвариантных примеров был построен на основе канонической почти комплексной структуры, которой обладают однородные пространства, порожденные автоморфизмами групп Ли порядка 3 (однородные 3-симметрические пространства) [6; 7; 10; 11].

Что касается обобщенной эрмитовой геометрии, то здесь длительный период отсутствовали содержательные инвариантные примеры. Ситуация качественно изменилась после обнаружения широкого запаса канонических структур классического типа на регулярных Φ -пространствах (в частности, на однородных k -симметрических пространствах) [12]. Это позволило предъявить обширный ресурс примеров метрических f -структур отмеченных выше классов Hf , NKf и др. [13–16].

Более того, в работе [17] были построены инвариантные ГАН-структуры произвольного ранга r .

Пусть G/H есть однородное редуктивное пространство связной группы Ли G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G , где через $\mathfrak{h}$ обозначена подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, отвечающая подгруппе Ли H . Здесь линейное подпространство $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$ отождествляется, как обычно, с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Рассмотрим на G/H инвариантную относительно группы G риманову метрику $g = \langle, \rangle$ и инвариантную метрическую f -структуру. Такие структуры полностью определяются своими значениями в точке o , инвариантными относительно $Ad_G(H)$. Условимся в связи с этим в дальнейшем не различать в обозначениях инвариантные структуры на G/H и их значения в точке o .

Связность Леви-Чивиты инвариантной римановой метрики $g = \langle, \rangle$ на G/H задается следующей формулой [29, с. 187]:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y), \quad (2)$$

где U – симметрическое билинейное отображение из $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ в $\mathfrak{m}$, определяемое из равенства

$$2 \langle U(X, Y), Z \rangle = \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle \quad (3)$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

Инвариантная метрическая f -структура на G/H порождает разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \text{Im } f$ и $\mathfrak{m}_2 = \text{Ker } f$ полностью определяют первые и вторые фундаментальные распределения соответственно, причем эти подпространства ортогональны относительно метрики g . В случае с естественно-редуктивной метрикой значительная информация о классах метрических f -структур получена в работах [13–16; 18; 19; 30].

Большой интерес представляет ситуация, когда метрика g не является естественно-редуктивной. Таковыми случаями являются, например, многие группы Ли с левоинвариантными римановыми метриками. Группу Ли G с действием левыми сдвигами можно рассматривать как однородное пространство G/H с тривиальной группой $H = \{e\}$. Таким образом, возникает тривиальное редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \{0\} \oplus \mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, и инвариантная метрическая f -структура становится левоинвариантной. При этом $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ есть соответствующее такой f -структуре разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Важными классами групп Ли являются нильпотентные и разрешимые группы Ли. Связь левоинвариантных f -структур с обобщенной эрмитовой геометрией отражена в серии работ. Например, на трехмерной разрешимой группе Ли гиперболических движений плоскости построена каноническая f -структура, которая принадлежит классу Hf , но не входит в класс NKf [16]. Рассмотрена также серия нильпотентных групп Ли индекса 2. В частности, на шестимерной обобщенной группе Гейзенберга представлены канонические f -структуры классов NKf и Hf [31], а в работе [32] в этом смысле исследованы канонические f -структуры на пятимерной матричной группе Гейзенберга. Широкий класс левоинвариантных эрмитовых f -структур указан на шестимерных филиформных группах Ли [33].

Геометрия группы осциллятора

Связность Леви-Чивиты. Приведем необходимые сведения о группе осциллятора, следуя в основном работе [20].

Алгебра Ли четырехмерной группы осциллятора может быть реализована как матричная алгебра Ли вида

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -y & z & -2x \\ 0 & 0 & \theta & z \\ 0 & -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(x, y, z, \theta), \text{ где } x, y, z, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Естественный базис этой алгебры Ли задается матрицами $e_1 = M(1, 0, 0, 0)$, $e_2 = M(0, 1, 0, 0)$, $e_3 = M(0, 0, 1, 0)$, $e_4 = M(0, 0, 0, 1)$. Таким образом, структура алгебры Ли $\mathfrak{osc}$ полностью определяется коммутаторными соотношениями

$$[e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = -e_3, [e_3, e_4] = e_2.$$

Легко заметить, что $\mathfrak{osc}$ является разрешимой алгеброй Ли. При этом ее центр есть линейная оболочка вектора e_1 .

Соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{osc}$ связная односвязная группа Ли Osc может быть представлена матрицами вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -y \cos \theta - z \sin \theta & z \cos \theta - y \sin \theta & -2x \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & z \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = m(x, y, z, \theta), \text{ где } x, y, z, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Определим на группе Osc левоинвариантную риманову метрику $g = \langle, \rangle$ тем требованием, что $e_1, \dots, e_4$ есть ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathfrak{osc}$. Связность Леви-Чивиты этой метрики можно вычислить, адаптируя формулы (2) и (3) для групп Ли (т. е. $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} = \mathfrak{osc}$).

Используя (3), для базисных векторов алгебры Ли $\mathfrak{osc}$ можем вычислить

$$\begin{aligned} U(e_1, e_2) &= -\frac{1}{2}e_3, U(e_1, e_3) = \frac{1}{2}e_2, U(e_1, e_4) = 0, U(e_2, e_3) = 0, \\ U(e_2, e_4) &= \frac{1}{2}e_3, U(e_3, e_4) = -\frac{1}{2}e_2, U(e_i, e_i) = 0, i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Представляя теперь векторы $X, Y \in \mathfrak{osc}$ в виде $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$, $Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4$ и используя (2) и (5), получим

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}(e_1(x_2y_3 - x_3y_2) + e_2(x_1y_3 + x_3y_1 - 2x_4y_3) + e_3(-x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_4y_2)).$$

Базовые f -структуры ранга 2. Перейдем теперь к рассмотрению левоинвариантных метрических f -структур на группе Osc . Поскольку ранг 2 любой f -структуры есть четное число, имеем две возможности: $r = 2$ или $r = 4$ (случай почти эрмитовой структуры $f = J$ на Osc). Любая левоинвариантная метрическая f -структура ранга 2 может быть представлена соответствующим оператором f на алгебре Ли $\mathfrak{osc}$ таким, что его образом является двумерное подпространство с действием комплексной структуры на нем, а ядро есть ортогональное дополнение к этому подпространству.

Будем рассматривать так называемые базовые f -структуры, которые порождаются двумерными координатными подпространствами базиса e_1, e_2, e_3, e_4 . Легко видеть, что имеется шесть (с точностью до знака) таких левоинвариантных метрических f -структур.

Последовательно рассмотрим все эти f -структуры и установим их связь с указанными ранее классами обобщенной эрмитовой геометрии.

1. Рассмотрим структуру f_1 , задаваемую следующим образом:

$$f_1(e_1) = f_1(e_4) = 0, f_1(e_2) = -e_3, f_1(e_3) = e_2.$$

В приведенных выше обозначениях это означает, что

$$f_1(X) = -x_2e_3 + x_3e_2, \text{ откуда } f_1^2(X) = -x_2e_2 - x_3e_3. \quad (5)$$

Выясним, принадлежит ли структура f_1 классу NKf приближенно келеровых f -структур. С этой целью вычислим выражение $\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X = \nabla_{f_1X}f_1^2X - f_1\nabla_{f_1X}f_1X$. Последовательно получим, используя (4) и (5),

$$\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X = \frac{1}{2}[f_1X, f_1^2X] + U(f_1X, f_1^2X) = -\frac{1}{2}e_1(x_2^2 + x_3^2) + 0 = -\frac{1}{2}e_1(x_2^2 + x_3^2).$$

Далее

$$\nabla_{f_1X}f_1X = \frac{1}{2}[f_1X, f_1X] + U(f_1X, f_1X) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, $\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X = -\frac{1}{2}e_1(x_2^2 + x_3^2) \neq 0$. В то же время очевидно, что $f_1(\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X) = 0$. Следовательно, структура f_1 не является приближенно келеровой f -структурой, однако входит в класс обобщенных приближенно келеровых f -структур.

Исследуем теперь структуру f_1 на принадлежность классу эрмитовых f -структур. С этой целью вычислим композиционный тензор T , задаваемый условием (1).

Далее удобно рассмотреть отдельно выражение из формулы (1) для композиционного тензора T . Обозначим

$$S(f) = \nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y.$$

Вычислим это выражение для структуры f_1 с учетом $f_1^3 = -f_1$ и используем введенные ранее обозначения:

$$\begin{aligned} S(f_1) &= \nabla_{f_1X}(f_1)f_1Y - \nabla_{f_1^2X}(f_1)f_1^2Y = \nabla_{f_1X}f_1^2Y - f_1\nabla_{f_1X}f_1^2Y + \nabla_{f_1^2X}f_1Y + f_1\nabla_{f_1^2X}f_1^2Y = \\ &= \frac{1}{2}e_1(-x_2y_2 - x_3y_3) - f_1\left(\frac{1}{2}e_1(-x_2y_3 - x_3y_2)\right) + \frac{1}{2}e_1(x_2y_2 + x_3y_3) + f_1\left(\frac{1}{2}e_1(x_2y_3 - x_3y_2)\right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для структуры f_1 $T(X, Y) = \frac{1}{4}f_1(0) = 0$, т. е. f_1 является эрмитовой f -структурой.

2. Рассмотрим далее структуру f_2 , определяемую следующими условиями:

$$f_2(e_1) = f_2(e_2) = 0, f_2(e_3) = -e_4, f_2(e_4) = e_3.$$

Используя прежние обозначения и методы вычислений, получим

$$\nabla_{f_2X}(f_2)f_2X = e_2x_3^2 \neq 0.$$

Отсюда следует, что f_2 не является приближенно келеровой f -структурой, однако входит в класс $\text{GNK}f$, поскольку $e_2 \in \text{Ker } f_1$.

Дальнейшие вычисления для структуры f_2 приводят к такому результату:

$$S(f_2) = -e_2(x_3y_3 - x_4y_4).$$

Следовательно, f_2 является эрмитовой f -структурой.

Приведем далее результаты для всех остальных базовых f -структур.

3. Рассмотрим структуру f_3 , задаваемую условиями

$$f_3(e_2) = f_3(e_4) = 0, f_3(e_1) = -e_3, f_3(e_3) = e_1.$$

Для этого случая имеем

$$\nabla_{f_3X}(f_3)f_3X = \frac{1}{2}e_2(x_1^2 - x_3^2), S(f_3) = e_2(x_1y_1 - x_3y_3).$$

Следовательно, структура f_3 входит в классы $\text{GNK}f$ и $\text{H}f$.

4. Перейдем к рассмотрению структуры f_4 :

$$f_4(e_2) = f_4(e_3) = 0, f_4(e_1) = -e_4, f_4(e_4) = e_1.$$

Здесь результаты вычислений таковы:

$$\nabla_{f_4X}(f_4)f_4X = 0, S(f_4) = 0, \nabla_X(f_4)X = \frac{1}{2}e_2x_3x_4 - \frac{1}{2}e_3x_2x_4.$$

Это означает, что f_4 является приближенно келеровой и эрмитовой f -структурой.

5. Рассмотрим далее структуру f_5 :

$$f_5(e_1) = f_5(e_3) = 0, f_5(e_2) = -e_4, f_5(e_4) = e_2.$$

После проведенных вычислений получим

$$\nabla_{f_5X}(f_5)f_5X = e_3(x_2^2), S(f_5) = e_3(x_2y_2 - x_4y_4).$$

Таким образом, f_5 принадлежит классам $\text{H}f$ и $\text{GNK}f$.

6. В конечном итоге рассмотрим структуру f_6 , задаваемую условиями

$$f_6(e_3) = f_6(e_4) = 0, f_6(e_1) = -e_2, f_6(e_2) = e_1.$$

Приведем результаты вычислений:

$$\nabla_{f_6X}(f_6)f_6X = e_3(x_2^2), S(f_6) = e_3(x_2y_2 + x_4y_4).$$

Здесь снова структура f_5 входит в классы $\text{H}f$ и $\text{GNK}f$.

Итогом всех проведенных рассуждений и вычислений является следующая теорема.

Теорема. На четырехмерной группе осциллятора Osc левоинвариантные базовые f -структуры ранга 2 f_i , $i = 1, 6$, обладают следующими свойствами:

- 1) структура f_4 является приближенно келеровой f -структурой, остальные пять f -структур являются обобщенными приближенно келеровыми f -структурами;
- 2) все шесть рассмотренных f -структур являются эрмитовыми f -структурами.

Библиографические ссылки

1. Yano K. On a structure defined by a tensor field f of type $(1, 1)$ satisfying $f^3 + f = 0$. *Tensor*. 1963;14:99–109.
2. Кириченко ВФ. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*. 1983;47(6):1208–1223.
3. Кириченко ВФ. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий. В: Михайлов АИ, Остиану НМ, редакторы. *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Том 18*. Москва: ВИНТИ; 1986. с. 25–71.
4. Кириченко ВФ. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Москва: Московский педагогический государственный университет; 2003. 495 с.
5. Степанов НА. Основные факты теории ϕ -пространств. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1967;3:88–95.
6. Wolf JA, Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. I. *Journal of Differential Geometry*. 1968;2(1):77–114. DOI: 10.4310/jdg/1214501139.
7. Wolf JA, Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. II. *Journal of Differential Geometry*. 1968;2(2):115–159. DOI: 10.4310/jdg/1214428252.
8. Феденко АС. *Пространства с симметриями*. Минск: Издательство Белорусского государственного университета; 1977. 168 с.
9. Ковальский О. *Обобщенные симметрические пространства*. Сабинин ЛВ, переводчик. Москва: Мир; 1984. 240 с.
10. Степанов НА. Однородные 3-циклические пространства. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1967;12:65–74.
11. Gray A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3. *Journal of Differential Geometry*. 1972;7(3–4):343–369. DOI: 10.4310/jdg/1214431159.
12. Балащенко ВВ, Степанов НА. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах. *Математический сборник*. 1995;186(11):3–34. EDN: XNEJKX.
13. Балащенко ВВ. Естественно-редуктивные киллинговы f -многообразия. *Успехи математических наук*. 1999;54(3):151–152. EDN: XNDZCP.
14. Балащенко ВВ. Однородные эрмитовы f -многообразия. *Успехи математических наук*. 2001;56(3):159–160. EDN: XNDRJB.
15. Балащенко ВВ. Однородные приближенно келеровы f -многообразия. *Доклады Академии наук*. 2001;376(4):439–441. EDN: CSLRXP.
16. Balashchenko VV. Invariant nearly Kähler f -structures on homogeneous spaces. In: Fernández M, Wolf JA, editors. *Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray. International congress on differential geometry; 2000 September 18–23; Bilbao, Spain*. Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 263–267 (Contemporary mathematics; volume 288).
17. Балащенко ВВ, Вылегжанин ДВ. Обобщенная эрмитова геометрия на однородных Φ -пространствах конечного порядка. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2004;10:33–44. EDN: HQUNGD.
18. Балащенко ВВ, Самсонов АС. Приближенно келеровы и эрмитовы f -структуры на однородных k -симметрических пространствах. *Доклады Академии наук*. 2010;432(3):295–298. EDN: MSRBAL.
19. Самсонов АС. Приближенно келеровы и эрмитовы f -структуры на однородных Φ -пространствах порядка k в случае специальных метрик. *Сибирский математический журнал*. 2011;52(6):1373–1388. EDN: OKFOYR.
20. Biggs R, Remsing CC. Some remarks on the oscillator group. *Differential Geometry and its Applications*. 2014;35(supplement):199–209. DOI: 10.1016/j.difgeo.2014.03.003.
21. Fischer M, Kath I. Spectra of compact quotients of the oscillator group. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*. 2021;17:051. DOI: 10.3842/sigma.2021.051.
22. Biggs R, Nagy PT. On extensions of sub-Riemannian structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 2016;46:25–38. DOI: 10.1016/j.difgeo.2016.02.001.
23. Stong RE. The rank of an f -structure. *Kodai Mathematical Seminar Reports*. 1977;29(1–2):207–209. DOI: 10.2996/kmj/1138833583.
24. Яно К, Кон М. *CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях*. Остиану НМ, переводчик. Москва: Наука; 1990. 189 с.
25. Singh KD, Singh R. Some $f(3, \epsilon)$ -structure manifolds. *Demonstratio Mathematica*. 1977;10(3–4):637–645. DOI: 10.1515/dema-1977-3-411.
26. Грицанс АС. О геометрии киллинговых f -многообразий. *Успехи математических наук*. 1990;45(4):149–150.
27. Грицанс АС. О строении киллинговых f -многообразий. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1992;6:49–57.
28. Gray A, Hervella LM. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1980;123:35–58. DOI: 10.1007/BF01796539.
29. Кобаяси Ш, Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии. Том 2*. Сабинин ЛВ, переводчик. Москва: Наука; 1981. 416 с.
30. Балащенко ВВ. Инвариантные f -структуры на естественно-редуктивных однородных пространствах. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2008;4:3–15. EDN: JHIOHT.
31. Balashchenko VV. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group. *Kragujevac Journal of Mathematics*. 2011;35(2):209–222.
32. Балащенко ВВ, Дубовик ПА. Левоинвариантные f -структуры на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2, 1)$. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2013;3:112–117. EDN: TDNKBV.
33. Дубовик ПА. Эрмитовы f -структуры на 6-мерных филиформных группах Ли. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2016;7:34–43. EDN: VTFUMH.