
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.925.7

О РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИЕЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В. И. ГРОМАК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматриваются аналитические свойства решений нелинейных стационарных уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве и связанных с ней иерархий первого уравнения Пенлеве и уравнения P_{34} из классификационного списка Пенлеве. Исследуются локальные свойства решений: разложение решений в окрестности подвижных полюсов, построение целых функций (тау-функций), дающих представление мероморфных решений. Для рассматриваемых стационарных иерархий приводятся преобразования и автопреобразования Беклунда, с помощью которых строятся трансцендентные и рациональные решения. Для начальных уравнений исследуемых иерархий получены первые интегралы, которые далее используются для доказательства вложимости множества решений уравнения иерархии с меньшим номером во множество решений уравнения иерархии с большим номером. Приводятся соотношения между параметрами уравнений с вложимыми множествами решений.

Ключевые слова: иерархии уравнений Пенлеве; мероморфные решения; преобразования Беклунда.

Образец цитирования:

Громак В.И. О решениях нелинейных стационарных уравнений, связанных с обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1:40–50.
EDN: MTWOJQ

For citation:

Gromak VI. On the solutions of the non-linear stationary equations related to the generalised hierarchy of the second Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:40–50. Russian.
EDN: MTWOJQ

Автор:

Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Author:

Valeri I. Gromak, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.
vgromak@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1868-2313>

ON THE SOLUTIONS OF THE NON-LINEAR STATIONARY EQUATIONS RELATED TO THE GENERALISED HIERARCHY OF THE SECOND PAINLEVÉ EQUATION

V. I. GROMAK^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. This paper considers the analytical properties of the solutions of non-linear stationary equations of the generalised hierarchy of the second Painlevé equation and the hierarchies of the first Painlevé equation related with it, as well as the equation P_{34} from the Painlevé classification list. The local properties of the solutions are investigated, namely, expansion of the solutions in the neighbourhood of moving poles, construction of entire functions (tau functions) that provide a representation of meromorphic solutions. For the stationary hierarchies under consideration, Bäcklund transformations and auto-transformations are given, with the help of which transcendental and rational solutions are constructed. For the initial equations of the hierarchies under investigation, the first integrals are obtained, which are then used to prove the embeddability of the set of solutions of the hierarchy equation with a smaller number in the set of solutions of the hierarchy equation with a larger number. The relationships between the parameters of the equations with embeddable sets of solutions are given.

Keywords: hierarchies of Painlevé equations; meromorphic solutions; Bäcklund transformations.

Введение

Уравнения Пенлеве ($P_1 - P_6$) являются решением классификационной проблемы относительно свойства Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и в общем случае определяют новые трансцендентные функции [1–3], которые находят приложения как в различных математических проблемах, так и в вопросах математической физики [4–8]. Также представляет интерес изучение иерархий уравнений Пенлеве, являющихся бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру. Первые члены таких иерархий есть уравнения Пенлеве [9–16]. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, обладают симметриями, индуцированными преобразованиями Беклунда. При некоторых значениях параметров уравнения иерархий имеют специальные классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения. При этом для рациональных решений возникает задача представления их через специальные полиномы. Для второго уравнения Пенлеве и его иерархии это полиномы Яблонского – Воробьева и их обобщения, которые также позволяют построить рациональные решения уравнений иерархии уравнения Кортевега – де Фриза.

Преобразования Беклунда являются мощным инструментом для исследования свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений [17–19]. В частности, для уравнений Пенлеве и их высших аналогов преобразования Беклунда наряду с построением различных классов решений в некоторых случаях позволили доказать их трансцендентность [20–22].

Рассмотрим обобщенную иерархию второго уравнения Пенлеве в виде [23]

$$P_2^{[2n]} : \left(\frac{d}{dz} + 2w \right) L_n [w' - w^2] - (k_n z + p_n) w - \alpha_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где оператор L_n определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz} L_{n+1} [u] = \left(\frac{d^3}{dz^3} + (4u + \beta_n) \frac{d}{dz} + 2u_z \right) L_n [u], \quad L_1 [u(z)] = u(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

а $\alpha_n, \beta_n, k_n, p_n$ – параметры.

Первые уравнения иерархии (1) при $n = 1, 2, 3, 4$ имеют вид

$$w'' = 2w^3 + (k_1 z + p_1) w + \alpha_1, \quad (2)$$

$$w^{(4)} = 10w^2 w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + (k_2 z + p_2) w + \alpha_2, \quad (3)$$

$$w^{(6)} = 10(w')^2 (s_1 w - 14w^3 + 7w'') + w'' (10s_1 w^2 - s_2 - 70w^4 + 42ww'') + \\ + 56ww'w^{(3)} - (s_1 - 14w^2) w^{(4)} + 2s_2 w^3 - 6s_1 w^5 + 20w^7 + (k_3 z + p_3) w + \alpha_3, \quad (4)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$ и $s_2 = \beta_1\beta_2$,

$$\begin{aligned} w^{(8)} = & 2b_3w^3 - 6b_2w^5 + 20b_1w^7 - 798w(w')^4 + 42w(b_1 - 18w^2)(w'')^2 + \\ & + 182(w'')^3 - b_2w^{(4)} + w''(228ww^{(4)} - b_3 + 10w^2(b_2 - 7b_1w^2 + 42w^4)) - \\ & - (b_1 - 18w^2)w^{(6)} - 70w^9 + 10(w')^2(b_2w - 14b_1w^3 + 126w^5 + 21w^{(4)}) + \\ & + 4w'(7(2b_1w - 36w^3 + 27w'')w^{(3)} + 27ww^{(5)}) + 2w(69(w^{(3)})^2 + 7w(b_1 - 9w^2)w^{(4)}) + \\ & + 14(w')^2(5b_1 - 222w^2)w'' + (k_4z + p_4)w + \alpha_4, \end{aligned} \quad (5)$$

где $b_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $b_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3$ и $b_3 = \beta_1\beta_2\beta_3$.

Уравнение (1) порождается оператором L_n , имеет порядок $2n$ и при $k_1 = 1$, $p_1 = 0$ определяет нестационарную иерархию второго уравнения Пенлеве $P_2^{[2n]}$, так как первое уравнение иерархии (2) при $k_1 = 1$, $p_1 = 0$ есть второе уравнение Пенлеве $P_2^{[2]}$ в канонической форме. Свойству решений уравнений иерархии $P_2^{[2n]}$ посвящено много работ. В частности, для этой иерархии известно преобразование Беклунда (см., например, [23]), позволившее построить различные классы решений, включая рациональные решения.

В настоящей работе рассмотрим иерархию уравнений (1) при $k_n = 0$, которую при выполнении этого условия будем называть стационарной иерархией второго уравнения Пенлеве и обозначать через (1'). Уравнения (2)–(5) при $k_n = 0$ будем обозначать через (2')–(5') соответственно.

Локальные свойства решений уравнения (1')

Решения уравнения (1), так же как и решения уравнения (1'), обладают свойством нечетности относительно параметра α_n , т. е. имеют дискретную симметрию¹

$$S: w(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow -w(z, -\alpha_n, \beta, p_n).$$

Доминантные члены уравнений (1) и (1') определяются оператором L_n и являются одинаковыми. В силу этого совпадают также порядки подвижных полюсов решений уравнений (1) и (1'), причем в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ решение имеет представление

$$w(z) \sim c(z - z_0)^{-1} + c_1(z - z_0) + O(z - z_0)^2, \quad (6)$$

где вычет $c \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$. Заметим, что в силу совпадения доминантных членов уравнения (1) и (1') имеют одинаковые резонансные полиномы, которые можно выписать в явной форме. При этом положительные резонансы определяют номера коэффициентов разложения (6), являющиеся произвольными. В частности, для уравнения (4') в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ справедливо одно из следующих трех разложений:

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} + h_1t + h_2t^2 + h_3t^3 + h_4t^4 + c_5t^5 + \sum_{j=6}^{\infty} c_jt^j, \quad (7)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1 , h_2 , h_3 и h_4 – произвольные постоянные, а $c_5 = \frac{-\varepsilon(420\varepsilon h_1^3 - 112h_2^2 - 504h_1h_3 + p_3 - 50h_1^2s_1 + 20\varepsilon h_3s_1 + 6\varepsilon h_1s_2)}{336}$, $c_7 = h_5$ и все остальные коэффициенты c_j , $j \geq 6$, однозначно определяются через $h_1, \dots, h_5$ и параметры s_1, s_2, p_3, α_3 ;

$$w(z) = \frac{2\varepsilon}{t} + h_1t + c_3t^3 + h_2t^4 + \sum_{j=5}^{\infty} c_jt^j, \quad (8)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1 и h_2 – произвольные постоянные, а $c_3 = \frac{-\varepsilon(770h_1^2 - 30\varepsilon h_1s_1 + s_2)}{140}$, $c_7 = h_3$, $c_9 = h_4$ и все остальные коэффициенты c_j , $j \geq 5$, однозначно определяются через $h_1, \dots, h_4$ и параметры s_1, s_2, p_3, α_3 ;

¹Здесь и далее $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$.

$$w(z) = \frac{3\varepsilon}{t} + \frac{s_1\varepsilon}{70}t + \sum_{j=4}^{\infty} c_j t^j, \quad (9)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{\varepsilon(19s_1^2 - 70s_2)}{88 \cdot 200}$, $c_7 = h_1$, $c_9 = h_2$, $c_{11} = h_3$ – произвольные постоянные и все

остальные коэффициенты c_j , $j \geq 4$, однозначно определяются через h_1 , h_2 , h_3 и параметры s_1 , s_2 , p_3 , α_3 .

Для рациональных решений бесконечно удаленная точка $z = \infty$ есть точка голоморфности.

Теорема 1. Для мероморфных решений уравнения (1') функция

$$u(z) = \exp \left(- \int \left(\int^z w^2(z) dz \right) dz \right) \quad (10)$$

является целой. При этом нули $u(z)$ имеют кратность k^2 и являются полюсами $w(z)$ с вычетами $\pm k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Действительно, из определения функции (10) непосредственно вытекает, что нулями $u(z)$ могут быть лишь полюсы $w(z)$. Характер кратности нулей следует из непосредственной подстановки представления (6) в правую часть выражения (10). В частности, для уравнения (4') справедливость утверждения теоремы 1 следует из подстановки разложений (7)–(9) в правую часть выражения (10).

Мероморфное решение $w(z)$ n -го уравнения (1') можно представить в виде $w(z) = \frac{v(z)}{u(z)}$, где $u(z)$ и $v(z)$ – целые функции. В качестве $u(z)$ возьмем функцию (10), а $v(z) = w(z)u(z)$. Тогда целые функции $u(z)$ и $v(z)$ удовлетворяют системе

$$uu'' - (u')^2 + v^2 = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + 2 \frac{v}{u} \right) L_n \left[u^{-2} (v'u - vu' - v^2) \right] - p_n \frac{v}{u} - \alpha_n = 0. \quad (12)$$

При этом уравнение (11) получено дифференцированием функции (10), а уравнение (12) – подстановкой $w(z) = \frac{v(z)}{u(z)}$ в исходное уравнение (1'). Следовательно, справедливо и обратное утверждение: если пара целых функций $(v(z), u(z))$ – решение системы уравнений (11), (12), то их отношение есть мероморфное решение исходного уравнения (1').

Вложение множеств решений иерархии уравнений (1')

Уравнение (2') в общем случае интегрируется в эллиптических функциях, а уравнение (3') – в гиперэллиптических функциях [24]. Заметим, что уравнения (2')–(4') имеют первые интегралы

$$(w')^2 = w^4 + p_1 w^2 + 2\alpha_1 w + C_1, \quad (13)$$

$$2w'w^{(3)} = (w'')^2 + (10w^2 - \beta_1)(w')^2 + \beta_1 w^4 + 2\alpha_2 w - 2w^6 + p_2 w^2 + C_2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 2w'w^{(5)} = & 2w''w^{(4)} - (w^{(3)})^2 - 2(s_1 - 14w^2)w'w^{(3)} + (s_1 - 14w^2)(w'')^2 + 56w(w')^2 w'' + \\ & + 21(w')^4 - (s_2 - 10s_1 w^2 + 70w^4)(w')^2 - 2s_1 w^6 + 5w^8 + s_2 w^4 + p_3 w^2 + 2\alpha_3 w + C_3 \end{aligned} \quad (15)$$

соответственно. Обозначим через H_n множество решений n -го уравнения (1') при фиксированном значении параметров α_n , β , p_n . Тогда справедливо включение $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset H_4$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. 1. Пусть $w = w(z, \alpha_1, p_1)$ – произвольное решение уравнения (2') с начальными данными w_0 , w'_0 при фиксированных значениях параметров α_1 , p_1 . Тогда $w = w(z, \alpha_1, p_1)$ есть решение уравнения (3') при условиях

$$\alpha_2 = \alpha_1(p_1 + \beta_1), \quad p_2 = 2C_1 + p_1(p_1 + \beta_1), \quad (16)$$

где $C_1 = (w'_0)^2 - w_0^4 - p_1 w_0^2 - 2\alpha_1 w_0$.

2. Пусть $w = w(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ – произвольное решение уравнения (3') при фиксированных значениях параметров α_2, β_1, p_2 . Тогда $w = w(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ есть решение уравнения (4') при условиях

$$\alpha_3 = \alpha_2(s_1 - \beta_1), p_3 = 2C_2 + p_2(s_1 - \beta_1), s_2 = -p_2 + \beta_1(s_1 - \beta_1), \quad (17)$$

где C_2 определяется первым интегралом (14) и начальными данными решения.

3. Пусть $w = w(z, \alpha_3, s_1, s_2, p_3)$ – произвольное решение уравнения (4') при фиксированных значениях параметров α_3, s_1, s_2, p_3 . Тогда $w = w(z, \alpha_3, s_1, s_2, p_3)$ есть решение уравнения (5') при условиях

$$b_2 = b_1 s_1 - s_1^2 + s_2, b_3 = -p_3 + s_2(b_1 - s_1),$$

$$\alpha_4 = \alpha_3(b_1 - s_1), p_4 = 2C_3 + p_3(b_1 - s_1),$$

где C_3 определяется первым интегралом (15) и начальными данными решения.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (2'), находим

$$w^{(3)} = 6w^2 w' + p_1 w', w^{(4)} = 12w(w')^2 + (6w^2 + p_1)w''. \quad (18)$$

Подстановка w' из первого интеграла (13), w'' из уравнения (2') и производных (18) при выполнении условия на параметры (16) обращает уравнение (3') в тождество, откуда и следует первое утверждение теоремы. Для доказательства второго утверждения дифференцируем уравнение (3') трижды и, подставляя найденные производные $w^{(4)}, w^{(5)}, w^{(6)}$ и третью производную из первого интеграла (14) в уравнение (4'), убеждаемся, что последнее обращается в тождество при выполнении условия (17). Аналогично доказывается третье утверждение теоремы.

Преобразование Беклунда уравнения (1')

Относительно преобразований Беклунда уравнения (1') справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть в уравнении (1) $k_n = 0, \alpha_n \neq 0$ и $w = w(z, \alpha_n, \beta, p_n)$ – решение при фиксированных значениях параметров. Тогда преобразование

$$T: w \rightarrow \tilde{w} = w - \frac{2\alpha_n}{2L_n[w' - w^2] - p_n} \quad (19)$$

определяет решение $\tilde{w}$ уравнения (1') при $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n, \tilde{\beta} = \beta, \tilde{p}_n = p_n$.

Доказательство. Используем метод доказательства аналогичного утверждения для уравнения (1) при $k_n = 1$ [23]. Введем функции

$$q(z) = w'(z) - w^2(z), \Psi(q(z)) = L_n[q(z)] - \frac{p_n}{2}. \quad (20)$$

Тогда уравнение (1') можно записать в виде эквивалентной системы

$$w' = q + w^2, \Psi' + 2\Psi w - \alpha_n = 0, \quad (21)$$

где $\Psi = \Psi(z); (\cdot)' = \frac{d}{dz}(\cdot)$. При этом функция $q(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi'' - \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\alpha_n^2}{2\Psi} = 0, \Psi(q(z)) \neq 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) в соответствии с работой [25] можно назвать стационарной иерархией уравнения P_{34} из классификационного списка Пенлеве [1], а уравнение $\Psi(q(z)) = 0$ при $\alpha_n = 0$ определяет стационарную иерархию первого уравнения Пенлеве. Эти иерархии будут рассмотрены ниже.

Далее считаем, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда $\Psi(q(z)) \neq 0$. В этом случае система (21) определяет соотношение между решениями уравнений (1') и (22) в соответствии с функциями (20) и преобразованиями

$$G: w = w(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow q(z, \alpha_n, \beta, p_n) = w'(z, \alpha_n, \beta, p_n) - w^2(z, \alpha_n, \beta, p_n),$$

$$M: q = q(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow w(z, \alpha_n, \beta, p_n) = \frac{\alpha_n - \Psi'(q)}{2\Psi(q)}.$$

Так как параметр α_n входит в уравнение (22) в виде α_n^2 , то уравнение (22) имеет дискретную симметрию

$$S_0 : q(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow \tilde{q}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n) = q(z, -\alpha_n, \beta, p_n).$$

Используем преобразования G , M и S_0 для построения преобразования Беклунда уравнения (1').

Пусть $w = w(z, \alpha_n, \beta, p_n)$ – решение уравнения (1') при фиксированных значениях параметров α_n, β, p_n . «Новое» решение $\tilde{w} = \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n)$ уравнения (1') будем строить по схеме

$$w \xrightarrow{G} q(z, \alpha_n, \beta, p_n) \xrightarrow{S_0} \tilde{q}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n) \xrightarrow{M} \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n), \quad (23)$$

где $q = \tilde{q}$ и $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n, \tilde{\beta} = \beta, \tilde{p}_n = p_n$, или в явной форме

$$\tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{p}) = \frac{\tilde{\alpha}_n - \Psi'(\tilde{q})}{2\Psi(\tilde{q})} = \frac{-\alpha_n - \Psi'(q)}{2\Psi(q)} = w - \frac{2\alpha_n}{2L_n[q] - p_n},$$

откуда и следует справедливость теоремы 3.

Рассматривая схему (23) в обратном порядке, находим обратное преобразование

$$T^{-1} : \tilde{w} \rightarrow w = \tilde{w} - \frac{2\tilde{\alpha}_n}{2L_n[\tilde{w}' - \tilde{w}^2] - \tilde{p}_n},$$

так что $T^{-1}T = I$.

Отметим, что для решений $w, \tilde{w}$, связанных преобразованием Беклунда (19), в силу $q = \tilde{q}$ справедливо соотношение $w' - w^2 = \tilde{w}' - \tilde{w}^2$ при $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n, \tilde{\beta} = \beta, \tilde{p}_n = p_n$.

Преобразование Беклунда уравнения (2')

Для уравнения (1') при $n = 1$, т. е. уравнения (2'), преобразование Беклунда (19) имеет вид

$$T : w \rightarrow \tilde{w} = w - \frac{2\alpha_1}{2w' - 2w^2 - p_1} \quad (24)$$

и ранее было приведено в работе [26]. Покажем, что преобразование Беклунда (24) в этом случае аналогично формуле теоремы сложения для эллиптической функции Вейерштрасса [27].

В первом интеграле (13) уравнения (2') положим, что $w = \frac{1}{u}$. Тогда получим уравнение

$$(u')^2 = C_1 u^4 + 2\alpha_1 u^3 + p_1 u^2 + 1. \quad (25)$$

В силу теоремы 3 для уравнения (25) справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения (25) при некоторых фиксированных значениях параметров α_1, p_1 и постоянной интегрирования C_1 . Тогда функция

$$\tilde{u}(z) = u - \frac{2\alpha_1 u^4}{2 + p_1 u^2 + 2\alpha_1 u^3 + 2u'} \quad (26)$$

является решением уравнения (25) при $\tilde{\alpha} = -\alpha_1$ и тех же значениях C_1, p_1 .

Далее будем считать, что $\alpha_1 \neq 0$, так как из определения функции (26) при $\alpha_1 = 0$ имеем $\tilde{u}(z) = u(z)$. Пусть в уравнении (25) $C_1 = 0$ и корни правой части относительно $u = u(z)$ различны. При наличии кратных корней уравнение (25) интегрируется в элементарных функциях. Приведем уравнение (25) к канонической форме, сделав замену

$$u = \mu_1 v + \mu_2, \quad \mu_1 = \frac{2}{\alpha_1}, \quad \mu_2 = -\frac{p_1}{6\alpha_1}. \quad (27)$$

Тогда для определения функции $v(z)$ получаем уравнение

$$(v')^2 = 4v^3 - g_2 v - g_3, \quad (28)$$

где инварианты

$$g_2 = \frac{p_1^2}{12}, \quad g_3 = -\frac{\alpha_1^2}{4} - \frac{p_1^3}{216}. \quad (29)$$

При этом общее решение уравнения (28) имеет вид $v(z) = \wp(z + K; g_2, g_3)$, где $\wp(z; g_2, g_3)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами (29), а K – постоянная интегрирования. В силу соот-

ношения (26) и замены (27), если известно решение $v = v(z)$ уравнения (28), то «новое» решение этого уравнения можно построить по формуле

$$\tilde{v}(z) = \frac{1}{6}(p_1 - 6v) + \frac{(p_1 - 12v)^4}{24(108\alpha_1^2 + p_1^3 - 18p_1^2v + 864v^3 + 216\alpha_1v')} \quad (30)$$

при $\tilde{\alpha} = -\alpha_1$, $\tilde{p} = p$. Следовательно, если $v = \wp(z)$ с инвариантами (29), то существует такая постоянная K , что $\tilde{v}(z) = \wp(z + K; g_2, g_3)$, поскольку g_2, g_3 – инвариантны при $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1$. Раскладывая в ряд в окрестности $z = 0$ левую и правую части соотношения (30), для определения постоянной K , соответствующей решению $\tilde{v}(z)$, находим

$$\wp(K) = -\frac{p_1}{6}, \wp'(K) = \frac{\alpha_1}{2}. \quad (31)$$

После преобразования соотношения (30) с учетом инвариантов (29) имеем

$$\wp(z + K) = -\wp(K) - \wp(z) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(K) - \wp'(z)}{\wp(K) - \wp(z)} \right)^2,$$

где $\wp(K)$, $\wp'(K)$ задаются соотношениями (31), что и определяет формулу теоремы сложения для эллиптической функции $\wp(z)$ с инвариантами (29).

Рассмотрим уравнение (25) при $C_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ и различных корнях e_j правой части. При наличии кратных корней e_j уравнение (25) интегрируется в элементарных функциях. Приведем уравнение (25) к канонической форме.

Пусть $e_1 = r$ – один из корней e_j . Тогда в уравнении (25) можно считать, что

$$C_1 = \frac{-1 - p_1r^2 - 2\alpha_1r^3}{r^4}.$$

В уравнении (25) выполним замену

$$u(z) = r + \frac{1}{\mu_1 v(z) + \mu_2}, \quad (32)$$

где

$$\mu_1 = -\frac{2r}{2 + p_1r^2 + \alpha_1r^3}, \quad \mu_2 = -\frac{6 + 5p_1r^2 + 6\alpha_1r^3}{6r(2 + p_1r^2 + \alpha_1r^3)}.$$

Тогда для определения функции $v(z)$ имеем уравнение (28), где

$$g_2 = \frac{p_1^2}{12} - \frac{p_1}{r^2} - \frac{1 + 2\alpha_1r^3}{r^4}, \quad g_3 = -\frac{\alpha_1^2}{4} - \frac{p_1^3}{216} - \frac{p_1}{6r^4} - \frac{p_1^2}{6r^2} - \frac{\alpha_1p_1}{3r}. \quad (33)$$

Пусть теперь $v(z) = \wp(z)$ с инвариантами (33). Тогда «новое» решение $\tilde{v}(z)$ уравнения (25) в силу замены (32) имеет вид

$$\tilde{u}(z) = -r + \frac{1}{-\mu_1 v_1(z) - \mu_2}.$$

При этом $\tilde{v}(z) = \wp(z + K)$ и постоянная K , так же как и в случае, когда $C_1 = 0$, определяется соотношениями (31). Проведя аналогичные преобразования, как и при $C_1 = 0$, убеждаемся, что соотношение (26) определяет формулу теоремы сложения для функции $\wp(z + K)$ с инвариантами (33).

Автопреобразования Беклунда уравнения (1')

Относительно преобразований S и T справедливо равенство $S^2 = T^2 = I$. При этом преобразования S и T в общем случае не коммутируют, что можно использовать для построения различных решений уравнения (1') при фиксированных значениях параметров.

Пример 1. Функция

$$w_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4 - 2\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)}$$

есть решение уравнения (2') при $\alpha_1 = -\frac{1}{8}$, $p_1 = -\frac{3}{4}$, а также уравнений (3')–(5') в соответствии с теоремой 2. Тогда решение $w_1 = Tw_0$ уравнения (2') при $\alpha_1 = \frac{1}{8}$, $p_1 = -\frac{3}{4}$ имеет вид

$$w_1 = w_0 + \frac{2 \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{3}z}{2} \right) - 2 \right)^2}{21 - 32 \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{3}z}{2} \right) + \operatorname{ch}(\sqrt{3}z) + 12\sqrt{3} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{3}z}{2} \right)}.$$

Следовательно, функция $Sw_1 = -w_1$ также есть решение уравнения (2') при исходных значениях параметров $\alpha_1 = -\frac{1}{8}$, $p_1 = -\frac{3}{4}$, т. е. преобразования $S \circ T$ и $T \circ S$ являются автопреобразованиями уравнения (2').

Пример 2. Функция

$$w_0 = 1 + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

есть рациональное решение уравнения (3') при $(\alpha_1, \beta, p_1) = (4, 7, -12)$. Тогда последовательное m -кратное применение преобразований $S \circ T$ и $T \circ S$ дает

$$(S \circ T)^m w_0 = 1 + \frac{1}{z-m-2} - \frac{1}{z-m-1}, \quad (T \circ S)^m w_0 = 1 + \frac{1}{z+m-2} - \frac{1}{z+m-1}.$$

Эти решения различные, так как имеют разные полюсы, т. е. автопреобразования $S \circ T$ и $T \circ S$ определяют две различные бесконечные серии рациональных решений для параметров $(\alpha_1, \beta, p_1) = (4, 7, -12)$.

Вложение множеств решений стационарной иерархии уравнения P_{34}

Первые три уравнения стационарной иерархии уравнения P_{34} (22) имеют вид

$$(p_1 - 2q)^2 q - (q')^2 - (p_1 - 2q)q'' + \alpha_1^2 = 0, \quad (34)$$

$$q(p_2 - 2q(3q + \beta_1) - 2q'')^2 - ((6q + \beta_1)q' + q^{(3)})^2 - \\ - (p_2 - 2q(3q + \beta_1) - 2q'')(6(q')^2 + (6q + \beta_1)q'' + q^{(4)}) + \alpha_2^2 = 0, \quad (35)$$

$$4q \left(\frac{-p_3}{2} + q(10q^2 + s_2 + 3s_1q) + 5(q')^2 + (10q + s_1)q'' + q^{(4)} \right)^2 - \\ - \left(q'(s_2 + 6s_1q + 30q^2 + 20q'') + (s_1 + 10q)q^{(3)} + q^{(5)} \right)^2 - \\ - \left(p_3 - 2q(10q^2 + s_2 + 3s_1q) - 10(q')^2 - 2(10q + s_1)q'' - 2q^{(4)} \right) \left(6s_1(q')^2 + 30q^2q'' + \right. \\ \left. + q''(s_2 + 20q'') + 30q'q^{(3)} + s_1q^{(4)} + 2q(30(q')^2 + 3s_1q'' + 5q^{(4)}) + q^{(6)} \right) + \alpha_3^2 = 0. \quad (36)$$

Заметим, что уравнение (34), которое линейной заменой (z, q) приводится к стационарному виду уравнения Пенлеве P_{34} [1], допускает первый интеграл

$$C_1(p_1 - 2q) - \alpha_1^2 - p_1q^2 + 2q^3 + (q')^2 = 0, \quad (37)$$

а уравнение (35) имеет первый интеграл

$$C_2 = \left(\alpha_2^2 - 14\beta_1q^4 - 24q^5 + q^2 \left(-30(q')^2 + \beta_1(p_2 - 6q'') \right) + \right. \\ + q^3(4p_2 - 2\beta_1^2 - 20q'') - (q')^2(p_2 + \beta_1^2 - 2q'') - 2\beta_1q'q^{(3)} - (q^{(3)})^2 - \\ \left. - 2q(5\beta_1(q')^2 + q''(-p_2 + 2q'') + 6q'q^{(3)}) \right) (p_2 - 2q(\beta_1 + 3q) - 2q'')^{-1}. \quad (38)$$

При этом для уравнений (35) и (36) в силу соотношения между решениями стационарных уравнений (1') и (22) в соответствии с функциями (20), так же как и для уравнений (2')–(5'), справедлива следующая теорема.

Теорема 4. 1. Пусть $q = q(z, \alpha_1, p_1)$ – решение уравнения (34) при фиксированных значениях параметров α_1, p_1 . Тогда $q = q(z, \alpha_1, p_1)$ есть решение уравнения (35) при выполнении условия на параметры (16), где постоянная интегрирования C_1 определяется через начальные данные решения q_0, q'_0 в соответствии с первым интегралом (37).

2. Пусть $q = q(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ – решение уравнения (35) при фиксированных значениях параметров α_2, β_1, p_2 . Тогда $q = q(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ есть решение уравнения (36) при выполнении условия на параметры (17), где постоянная интегрирования C_2 определяется через начальные данные решения q в соответствии с первым интегралом (38).

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2. Заметим также, что утверждение теоремы 4 относительно вложимости решений справедливо и для уравнения (36), но оно не приводится здесь в силу громоздкости выражений.

Вложение множеств решений стационарной иерархии первого уравнения Пенлеве

Из системы (21) следует, что все решения $w(z)$ уравнения Риккати $w' = q + w^2$, где $q(z)$ определяется уравнением $\Psi(q(z)) = 0$, т. е.

$$P_1^{[2n-2]} : L_n[q(z)] - \frac{P_n}{2} = 0, \quad n \in N, \quad (39)$$

являются решениями уравнения (1') при $\alpha_n = 0$.

Уравнения стационарной иерархии $P_1^{[2n-2]}$ имеют порядок $2n - 2$. При $n = 1$ в определении иерархии (39) не получаем дифференциальное уравнение относительно $q(z)$, но имеем свойство, состоящее в том, что все решения уравнения Риккати $w' = w^2 + \frac{P_1}{2}$ являются решениями стационарного второго уравнения Пенлеве (2') при $\alpha_1 = 0$.

Первые уравнения иерархии (39) при $n = 2, 3, 4$ имеют вид

$$q'' = -3q^2 - q\beta_1 + \frac{P_2}{2}, \quad (40)$$

$$q^{(4)} = -10q^3 - 3s_1q^2 - 5(q')^2 - s_1q'' - s_2q - 10qq'' + \frac{P_3}{2}, \quad (41)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$ и $s_2 = \beta_1\beta_2$,

$$q^{(6)} = -35q^4 - 10b_1q^3 - 5b_1(q')^2 - b_2q'' - 21(q'')^2 - 3b_2q^2 - 70q^2q'' - \\ - 28q'q^{(3)} - b_1q^{(4)} - q(b_3 + 70(q')^2 + 10b_1q'' + 14q^{(4)}) + \frac{P_4}{2}, \quad (42)$$

где $b_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $b_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3$ и $b_3 = \beta_1\beta_2\beta_3$.

Уравнение (40) есть стационарное первое уравнение Пенлеве, что и объясняет название иерархии (39). Обозначим через G_{2n-2} множество решений уравнения $P_1^{[2n-2]}$ при фиксированных значениях параметров β_n, p_n . Тогда справедливо включение

$$G_{2n-2} \subset H_{2n}, \quad q(z) = w'(z) - w^2(z), \quad \alpha_n = 0, \quad n \in N,$$

которое, по сути, означает, что уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ при $\alpha_n = 0$ связаны преобразованием Миуры, это справедливо и в нестационарном случае [9; 11].

Для уравнений иерархии $P_1^{[2n-2]}$ также выполняется свойство вложения множеств решений. Действительно, уравнения (40) и (41) имеют первые интегралы

$$C_1 = p_2q - \beta_1q^2 - 2q^3 - (q')^2, \quad (43)$$

$$C_2 = q(p_3 - 10(q')^2) + (q'')^2 - 2q'q^{(3)} - s_2q^2 - 2s_1q^3 - 5q^4 - s_1(q')^2 \quad (44)$$

соответственно.

Теорема 5. 1. Пусть $q = q(z, \beta_1, p_2)$ – произвольное решение уравнения (40) с начальными данными q_0, q'_0 при фиксированных значениях параметров β_1, p_2 . Тогда это решение также есть решение уравнения (41) при выполнении условий на параметры

$$p_2 + s_2 - \beta_1(s_1 - \beta_1) = 0, 2C_1 - p_3 + p_2(s_1 - \beta_1) = 0, \quad (45)$$

где $C_1 = p_2 q_0 - \beta_1 q_0^2 - 2q_0^3 - (q'_0)^2$.

2. Пусть $q = q(z, s_1, s_2, p_3)$ – произвольное решение уравнения (41) при фиксированных значениях параметров s_1, s_2, p_3 . Тогда это решение также есть решение уравнения (42) при выполнении условий на параметры

$$b_2 - (b_1 - s_1)s_1 - s_2 = 0, b_3 + p_3 - (b_1 - s_1)s_2 = 0, 2C_2 + (b_1 - s_1)p_3 - p_4 = 0.$$

При этом постоянная C_2 определяется через параметры и начальные данные решения $q = q(z, s_1, s_2, p_3)$ в соответствии с первым интегралом (44).

Доказательство. Дифференцируя уравнение (40), находим

$$q^{(3)} = -(6q + \beta_1)q', q^{(4)} = (6q + \beta_1)\frac{6q^2 + 2\beta_1 q - p_2}{2} - 6(q')^2. \quad (46)$$

Подстановка q' из первого интеграла (43), q'' из уравнения (40), а также $q^{(3)}$ и $q^{(4)}$ из соотношений (46) в уравнение (41) при выполнении условия на параметры (45) обращает его в тождество, откуда и следует первое утверждение теоремы. Аналогично доказывается второе утверждение.

Заметим, что некоторые свойства решений первых уравнений (2')–(4') иерархии (1'), касающиеся преобразований Беклунда и свойства вложимости множеств решений, были приведены ранее в работе [28].

Библиографические ссылки

1. Айнс ЭЛ. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Эфрос АМ, редактор. Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины; 1939. 719 с.
2. Iwasaki K, Kimura H, Shimomura S, Yoshida M. *From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions*. Braunschweig: Vieweg; 1991. X, 347 p. (Diederich K, editor. Aspects of mathematics; volume E16). DOI: 10.1007/978-3-322-90163-7.
3. Кудряшов НА. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. 2-е издание. Москва: Институт компьютерных исследований; 2004. 360 с. (Современная математика).
4. Its AR, Novokshenov VYu. *The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations*. Berlin: Springer-Verlag; 1986. IV, 313 p. (Dold A, Eckmann B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 1191). DOI: 10.1007/BFb0076661.
5. Kitaev AV. Special functions of the isomonodromy type. *Acta Applicandae Mathematicae*. 2000;64(1):1–32. DOI: 10.1023/A:1006390032014.
6. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane*. Berlin: Walter de Gruyter; 2002. VIII, 303 p. (Kenig C, Ranicki A, Röckner M, editors. de Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.
7. Итс АР, Капаев АА, Новокшенов ВЮ, Фокас АС. *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*. Москва: Институт компьютерных исследований; 2005. 728 с. Совместно с научно-издательским центром «Регулярная и хаотическая динамика».
8. Clarkson PA. Painlevé equations – nonlinear special functions. In: Marcellán F, Van Assche W, editors. *Orthogonal polynomials and special functions: computation and applications*. Berlin: Springer-Verlag; 2006. p. 331–411 (Morel J-M, Takens F, Teissier B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 1883). DOI: 10.1007/b128597.
9. Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Studies in Applied Mathematics*. 1979;61(1):31–53. DOI: 10.1002/sapm197961131.
10. Noumi M, Yamada Y. Higher order Painlevé equations of type $A_1^{(1)}$. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1998;41(3):483–503.
11. Kudryashov NA. The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them. *Physics Letters A*. 1997;224(6):353–360. DOI: 10.1016/S0375-9601(96)00795-5.
12. Gordoа PR, Pickering A. Nonisospectral scattering problems: a key to integrable hierarchies. *Journal of Mathematical Physics*. 1999;40(11):5749–5786. DOI: 10.1063/1.533055.
13. Joshi N. The second Painlevé hierarchy and the stationary KdV hierarchy. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*. 2004;40(3):1039–1061. DOI: 10.2977/prims/1145475502.
14. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009;42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.
15. Clarkson PA, Mansfield EL. The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. *Nonlinearity*. 2003;16(3):R1–R26. DOI: 10.1088/0951-7715/16/3/201.
16. Bobrova I. On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications. arXiv:2010.10617v4 [Preprint]. 2023 [cited 2025 January 10]; [25 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2010.10617v4>.
17. Clarkson PA, Joshi N, Pickering A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach. *Inverse Problems*. 1999;15(1):175–187. DOI: 10.1088/0266-5611/15/1/019.
18. Gromak VI. Bäcklund transformations of Painlevé equations and their applications. In: Conte R, editor. *The Painlevé property: one century later*. New York: Springer; 1999. p. 687–734 (CRM series in mathematical physics). DOI: 10.1007/978-1-4612-1532-5_12.

19. Gordoа PR, Muĝan U, Pickering A, Sakka A. Bäcklund transformations for higher order Painlevé equations. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2004;22(5):1103–1115. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.02.055.
20. Громак ВИ. О трансцендентности уравнений Пенлеве. *Дифференциальные уравнения*. 1996;32(2):154–160. EDN: WNZFYM.
21. Громак ВИ. О трансцендентности пятого и шестого уравнений Пенлеве. *Дифференциальные уравнения*. 1996;32(4):559–561. EDN: DETNFQ.
22. Żoładek H, Filipuk G. Painlevé equations, elliptic integrals and elementary functions. *Journal of Differential Equations*. 2015;258(4):1303–1355. DOI: 10.1016/j.jde.2014.10.018.
23. Громак ВИ. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференциальные уравнения*. 2020;56(8):1017–1033. EDN: BJNNZD.
24. Cosgrove CM. Higher-order Painlevé equations in the polynomial class II: Bureau symbol P_1 . *Studies in Applied Mathematics*. 2006;116(4):321–413. DOI: 10.1111/j.1467-9590.2006.00346.x.
25. Громак ВИ. О свойствах решений уравнений обобщенной иерархии уравнения $P_{3,4}$. *Дифференциальные уравнения*. 2022;58(2):153–163. EDN: AUZJAR.
26. Громак ВИ. О преобразованиях Беклунда нелинейных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 1993;29(6):1067–1068. EDN: OMHBOU.
27. Уиттекер ЭТ, Ватсон ДжН. *Курс современного анализа. Часть I, Основные операции анализа*. Широков ФВ, редактор. 2-е издание. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1963. 343 с.
28. Громак ВИ. О преобразованиях Беклунда стационарных уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2024;60(3):195–202. DOI: 10.29235/1561-2430-2024-60-3-195-202.

Получена 29.01.2025 / исправлена 20.02.2025 / принята 25.02.2025.
Received 29.01.2025 / revised 20.02.2025 / accepted 25.02.2025.