



ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

1

2025

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Босяков С. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бухштаб В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демид Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоноров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузигов А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижики С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	KROTOV V. G. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by
	DUDIN A. N. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by
Ablameyko S. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H.	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M.	Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Bosyakov S. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I.	University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A.	National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G.	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A.	Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P.	Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U.	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A.	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovik V. V.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W.	University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D.	Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H.	University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I.	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P.	Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K.	Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I.	Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V.	Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 512.552

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ С ЗАДАНЫМИ КОРНЯМИ НАД НЕКОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

А. Г. ГУТОР¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассмотрен вопрос существования многочленов с заданными корнями над ассоциативными некоммутативными кольцами. Показано, что для произвольных n элементов ассоциативного кольца с делением найдется многочлен степени n , корнями которого они являются. Определены достаточные условия существования такого многочлена для элементов произвольного (не обязательно с делением) ассоциативного кольца с единицей. Для многочленов, определенных над кольцом квадратных матриц над полем, получен критерий существования многочлена второй степени с заданными корнями, а также приведены примеры построения многочленов с заданными корнями.

Ключевые слова: кольцо; кольцо с делением; многочлен; кольцо квадратных матриц.

Благодарность. Автор выражает признательность кандидату физико-математических наук, доценту С. В. Тихонову за интересные идеи и полезные замечания.

Образец цитирования:

Гутор АГ. Существование многочленов с заданными корнями над некоммутативными кольцами. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;1:6–13.
EDN: DDWGOW

For citation:

Goutor AG. The existence of polynomials with given roots over non-commutative rings. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;1:6–13. Russian.
EDN: DDWGOW

Автор:

Алина Геннадьевна Гутор – старший преподаватель кафедры интеллектуальных методов моделирования механико-математического факультета.

Author:

Alina G. Goutor, senior lecturer at the department of intelligent modelling methods, faculty of mechanics and mathematics.
goutor7@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-4586-0480>

THE EXISTENCE OF POLYNOMIALS WITH GIVEN ROOTS OVER NON-COMMUTATIVE RINGS

A. G. GOUTOR^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. This paper studies the problem of the existence of polynomials with given roots over associative non-commutative rings. It is shown that for arbitrary n elements of an associative division ring there exists a polynomial of degree n whose roots are these elements. The sufficient conditions for the existence of such a polynomial for elements of an arbitrary (not necessarily division) associative ring with unity are determined. For polynomials defined over a ring of square matrices over a field, a criterion for the existence of a second-degree polynomial with given roots is obtained, and examples of constructing polynomials with given roots are given.

Keywords: ring; division ring; polynomial; ring of square matrices.

Acknowledgements. The author express gratitude to PhD (physics and mathematics), docent S. V. Tikhonov for interesting ideas and useful comments.

Введение

В работе исследуется вопрос существования многочленов с заданными корнями в кольцах многочленов над ассоциативными кольцами с единицей.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Будем рассматривать многочлены вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \in R, \quad (1)$$

где переменная x коммутирует с коэффициентами a_k . Кольцо таких многочленов будем обозначать через $R[x]$. Сложение многочленов из $R[x]$ определяется привычным образом, а умножение выполняется по правилу

$$(a_n x^n + \dots + a_0)(b_m x^m + \dots + b_0) = (c_{m+n} x^{m+n} + \dots + c_0),$$

где $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. Степень многочлена вида (1) также определяется привычным образом, она равна n , если $a_n \neq 0$.

Для $a \in R$ определим

$$P(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0.$$

Назовем $a \in R$ (правым) корнем $P(x)$, если $P(a) = 0$. Известно, что $a \in R$ будет корнем ненулевого многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $x - a$ является правым делителем $P(x)$ в $R[x]$ [1, propos. 16.2], т. е. $P(x) = F(x)(x - a)$ для некоторого многочлена $F(x)$ из $R[x]$.

Вопрос нахождения корней многочленов над кольцами с делением исследуется в теории колец и прикладной математике.

Наиболее изученным является случай многочленов с коэффициентами в алгебре $\mathbb{H}$ гамильтоновых кватернионов (см., например, [2–6] и др.). Известно, что любой многочлен из $\mathbb{H}[x]$ разлагается в произведение линейных множителей. В работе [7] получены формулы для нахождения корней таких многочленов в специальных случаях. В статье [2] представлена формула для нахождения корней квадратного многочлена в $\mathbb{H}[x]$. Эта формула была обобщена на случай произвольной алгебры кватернионов в публикациях [3; 4]. В работе [5] показано, что корни любого многочлена из $\mathbb{H}[x]$ являются корнями так называемого многочлена-компаньона с действительными коэффициентами. В статье [8] приведен алгоритм нахождения всех корней многочлена из $\mathbb{H}[x]$ с использованием многочленов-компаньонов. Некоторые из этих результатов были обобщены на случай произвольной алгебры с делением в публикации [6]. В работе [9] получены формулы для нахождения корней многочленов с коэффициентами над кольцами с делением в специальных случаях, а также показано, что нахождение корней многочленов над кольцом с делением размерности над центром более 4 усложняется по сравнению с их нахождением в алгебре кватернионов.

Однако важной является и обратная задача – нахождение многочленов с заданными корнями. В статье [10] рассмотрен вопрос существования многочленов с заданными корнями в кольцах многочленов над кольцами матриц. В частности, показано, что для двух матриц не всегда существует квадратный многочлен, имеющий в качестве своих корней эти матрицы. Отметим, что для любых элементов $x_1, \dots, x_n$ коммутативного кольца всегда существует многочлен $(x - x_1) \dots (x - x_n)$ степени n , корнями которого являются данные элементы. Однако для некоммутативных колец ситуация принципиально иная. Задача существования многочленов с заданными корнями над кольцами с делением рассматривалась также в работах [11; 12]. Ниже построен пример, когда не существует многочленов с заданными корнями.

Случай произвольного ассоциативного кольца с единицей

Сформулируем лемму о корнях многочленов над ассоциативными кольцами с единицей. Аналогичное утверждение имеется для ассоциативного кольца с делением (см., например, [1, propos. 16.3]). Его доказательство легко обобщается на случай ассоциативных колец с единицей. Для удобства читателя приведем данное доказательство.

Лемма 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей и $P(x) = L(x)Q(x) \in R[x]$, $a, d \in R$ такое, что элемент $h := Q(d)$ обратим. Тогда

$$P(d) = L(hdh^{-1})Q(d).$$

В частности, если hdh^{-1} – корень многочлена $L(x)$, то d – корень многочлена $P(x)$.

Доказательство. Пусть $L(x) = \sum a_i x^i$, тогда $P(x) = \sum a_i x^i Q(x) = \sum a_i Q(x) x^i$. Имеем

$$P(d) = \sum a_i Q(d) d^i = \sum a_i h d^i h^{-1} h = \sum a_i (hdh^{-1})^i h = L(hdh^{-1})Q(d).$$

Из леммы 1 следует, что элемент d будет корнем произведения, если он является корнем правого множителя либо если корнем левого множителя является элемент hdh^{-1} (с нужным h). Однако, поскольку в произвольном кольце могут присутствовать делители нуля, у произведения могут быть и другие корни.

Пусть заданы различные элементы $x_1, \dots, x_n \in R$. Положим, что $Q_1(x) = x - x_1$. Далее для $i \in \{1, \dots, n-1\}$ в случае, когда $Q_i(x_{i+1})$ – обратимый элемент в R , рекурсивно определим

$$Q_{i+1}(x) = \left(x - Q_i(x_{i+1})x_{i+1} \left(Q_i(x_{i+1}) \right)^{-1} \right) Q_i(x).$$

Получаем следующую теорему.

Теорема 1. Если для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ элемент $Q_i(x_{i+1})$ обратим в R , то $Q_n(x_i) = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Используя индукцию, докажем, что $x_1, \dots, x_i$ являются корнями $Q_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. Действительно, при $i = 1$ элемент x_1 будет корнем многочлена $Q_1(x) = x - x_1$. Пусть утверждение верно для i , иными словами, предположим, что $x_1, \dots, x_i$ являются корнями $Q_i(x)$. Докажем утверждение для $i + 1$, т. е. покажем, что $x_1, \dots, x_{i+1}$ – корни многочлена $Q_{i+1}(x)$. Имеем

$$Q_{i+1}(x) = \left(x - Q_i(x_{i+1})x_{i+1} \left(Q_i(x_{i+1}) \right)^{-1} \right) Q_i(x).$$

По предположению индукции $x_1, \dots, x_i$ – корни правого множителя $Q_i(x)$, а следовательно, и всего произведения, т. е. многочлена $Q_{i+1}(x)$. Осталось показать, что элемент x_{i+1} также является корнем многочлена $Q_{i+1}(x)$. Это следует из леммы 1.

Иными словами, в случае обратимости элементов $Q_i(x_{i+1})$ в R для любых различных элементов $x_1, \dots, x_n \in R$ найдется такой многочлен из $R[x]$ степени n , что $x_1, \dots, x_n$ будут его корнями.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 верно равенство $Q_i(x_{i+1}) = 0$ для некоторого i , то можно взять $Q_{i+1}(x) = Q_i(x)$. Если нужен многочлен степени $i + 1$, то можно взять, например, $Q_{i+1}(x) = xQ_i(x)$. Таким образом, и в этом случае также найдется многочлен из $R[x]$ степени, меньшей либо равной n , корнями которого будут различные элементы $x_1, \dots, x_n \in R$.

Теорема 2. Пусть D – ассоциативное кольцо с делением. Тогда для любых различных элементов $x_1, \dots, x_n \in D$ существует такой многочлен $F(x)$ степени n , что $F(x_i) = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Доказательство данной теоремы следует из теоремы 1 и замечания 1.

Итак, построение многочлена из теоремы 2 происходит по следующему алгоритму нахождения многочлена степени n , корнями которого являются различные фиксированные элементы $x_1, \dots, x_n$. Сначала рассматривается многочлен $F_1(x) = x - x_1$, корнем которого является x_1 . Затем по нему строится многочлен $F_2(x) = (x - x_2)(x - x_1)$ так, чтобы его корнями были x_1 и x_2 . Для этого x_2 берется равным $(x_2 - x_1)x_2(x_2 - x_1)^{-1}$. Для построения многочлена $F_3(x)$, корнями которого являются x_1, x_2 и x_3 , необходимо проверить, будет ли x_3 корнем многочлена $F_2(x)$. Если будет, то $F_3(x) = xF_2(x)$, в противном случае $F_3(x) = (x - x_3)F_2(x)$, где x_3 берется из леммы 1 так, чтобы x_3 был корнем $F_3(x)$, а именно $x_3 = F_2(x_3)x_3(F_2(x_3))^{-1}$. Таким образом,

$$F_3(x) = \left(x - \left((x_3 - (x_2 - x_1)x_2(x_2 - x_1)^{-1})(x_3 - x_1) \right) x_3 \left((x_3 - (x_2 - x_1)x_2(x_2 - x_1)^{-1})(x_3 - x_1) \right)^{-1} \right) \times \\ \times \left(x - (x_2 - x_1)x_2(x_2 - x_1)^{-1} \right) (x - x_1).$$

Далее построение продолжается аналогично до тех пор, пока не будет получен многочлен $F(x) = F_n(x)$, корнями которого являются $x_1, \dots, x_n$.

Отдельно рассмотрим случай многочленов второй степени с двумя заданными различными корнями x_1 и x_2 .

Перейдем к вопросу: «Когда для конкретных элементов x_1 и x_2 ассоциативного кольца с единицей R существует многочлен вида $F(x) = x^2 + a_1x + a_0$, корнями которого являются x_1 и x_2 ?»

Рассмотрим уравнение

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (2)$$

и предположим, что x_1 и x_2 — его решения.

Подставляя в уравнение (2) сначала x_1 , затем x_2 , а потом отнимая от одного равенства другое, получаем [10, р. 2]

$$x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0, \quad x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 + a_1(x_1 - x_2) = 0. \quad (3)$$

Последнее равенство перепишем следующим образом:

$$a_1(x_1 - x_2) = x_2^2 - x_1^2. \quad (4)$$

Лемма 2. Для элементов x_1 и x_2 найдется уравнение вида (2), имеющее решения x_1 и x_2 , тогда и только тогда, когда существует элемент a_1 , удовлетворяющий равенству (4).

Доказательство. Очевидно, что если для x_1 и x_2 существует уравнение вида (2), то a_1 удовлетворяет равенству (4). Докажем лемму 2 в обратную сторону. Пусть для данных x_1 и x_2 существует элемент a_1 , удовлетворяющий равенству (4). Это равносильно тому, что $x_1^2 + a_1x_1 = x_2^2 + a_1x_2$. Если теперь a_0 взять равным $-x_1^2 - a_1x_1 = -x_2^2 - a_1x_2$, то x_1 и x_2 будут решениями уравнения (2).

Заметим, что если существует $(x_1 - x_2)^{-1}$, то найдется уравнение вида (2) такое, что x_1 и x_2 будут его решениями (это следует и из теоремы 1). В данном случае a_1 однозначно выражается из равенства (4), а a_0 также однозначно находится из одного из равенств (3).

Если для некоторых элементов x_1 и x_2 существует уравнение вида (2), решениями которого они являются, то для них существует и уравнение степени $n > 2$, решениями которого они являются. Данное уравнение можно получить путем умножения уравнения (2), например, на x^{n-2} .

Теорема 3. Для элементов $x_1 \neq x_2$ ассоциативного кольца с единицей R достаточным условием существования уравнения степени n вида

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (5)$$

решениями которого они являются, будет невырожденность одного из следующих элементов: $x_1 - x_2$, $x_1^2 - x_2^2, \dots, x_1^{n-1} - x_2^{n-1}$.

Доказательство. Пусть, например, элемент $x_1 - x_2$ обратим и $a_i, i = 2, \dots, n-1$, — произвольные элементы кольца R . Положим, что

$$a_1 = (x_2^n - x_1^n)(x_1 - x_2)^{-1} - a_{n-1}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2)^{-1} - \dots - a_2(x_1^2 - x_2^2)(x_1 - x_2)^{-1}.$$

Тогда

$$a_1(x_1 - x_2) = x_2^n - x_1^n - a_{n-1}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}) - \dots - a_2(x_1^2 - x_2^2).$$

Положим также, что

$$a_0 = -a_1x_1 - a_2x_1^2 - \dots - a_{n-1}x_1^{n-1} - x_1^n = -a_1x_2 - a_2x_2^2 - \dots - a_{n-1}x_2^{n-1} - x_2^n.$$

Тогда x_1 и x_2 – решения уравнения $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$. Таким образом, искомое уравнение найдено.

Аналогичные рассуждения справедливы и в случае обратимости одного из следующих элементов: $x_1^2 - x_2^2, \dots, x_1^{n-1} - x_2^{n-1}$.

Как проверить, существует ли уравнение вида (2), решениями которого являются элементы x_1 и x_2 , если элемент $x_1 - x_2$ необратим? Ответ на этот вопрос в случае, когда R – кольцо квадратных матриц над полем, рассмотрен в следующем разделе.

Случай кольца квадратных матриц над полем

Пусть R – кольцо квадратных матриц над полем. Как показывает пример из публикации [10, р. 3], существуют такие матрицы x_1 и x_2 , что не найдется уравнения второй степени из $R[x]$, решениями которого являлись бы эти матрицы. Еще один пример подобного типа приводится ниже (см. пример 3). Для кольца квадратных матриц над полем получены следующие критерии существования уравнения второй степени с заданными решениями.

Теорема 4. Пусть R – кольцо квадратных матриц порядка k над полем. Для x_1 и x_2 из R найдется уравнение вида (2), решениями которого они являются, тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(x_1 - x_2)^T$ равен рангу матрицы $\left((x_1 - x_2)^T \left| \begin{pmatrix} x_2^T \\ x_1^T \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{pmatrix}^2 \right) \right)$, полученной дописыванием строк матрицы $\begin{pmatrix} x_2^T \\ x_1^T \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{pmatrix}^2$ справа к строкам матрицы $(x_1 - x_2)^T$.

Доказательство. Напомним, что ввиду леммы 2 для матриц x_1 и x_2 найдется уравнение вида (2), решениями которого они являются, тогда и только тогда, когда существует матрица a_1 , удовлетворяющая равенству (4). Транспонируем равенство (4):

$$(x_1 - x_2)^T a_1^T = \begin{pmatrix} x_2^T \\ x_1^T \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{pmatrix}^2. \quad (6)$$

С учетом предыдущего равенства заметим, что j -й элемент i -го столбца матрицы $\begin{pmatrix} x_2^T \\ x_1^T \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{pmatrix}^2$ получается путем умножения j -й строки матрицы $(x_1 - x_2)^T$ на i -й столбец матрицы a_1^T . Введем обозначения $a_1^T = (q_1, \dots, q_k)$, где q_i – i -й столбец матрицы a_1^T , и $\begin{pmatrix} x_2^T \\ x_1^T \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{pmatrix}^2 = (b_1, \dots, b_k)$, где b_i – i -й столбец матрицы $\begin{pmatrix} x_2^T \\ x_1^T \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{pmatrix}^2$. Из равенства (6) получаем следующие уравнения для нахождения столбцов матрицы a_1^T :

$$(x_1 - x_2)^T q_i = b_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Теорема Кронекера – Капелли говорит о том, что все эти системы совместны (относительно q_i) тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(x_1 - x_2)^T$ равен рангам матриц $\left((x_1 - x_2)^T | b_i \right)$ для любого i . Следовательно, матричное уравнение (6) имеет решение (существует a_1^T) тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(x_1 - x_2)^T$ равен рангу матрицы $\left((x_1 - x_2)^T \left| \begin{pmatrix} x_2^T \\ x_1^T \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{pmatrix}^2 \right) \right)$. Если найдется матрица a_1^T , то по ней с помощью транспонирования также найдется матрица a_1 . Далее можно найти матрицу a_0 из одного из равенств (3), а значит, в этом случае найдется уравнение вида (2) такое, что x_1 и x_2 будут его решениями.

Данное утверждение можно сформулировать и в терминах исходных матриц.

Следствие 1. Для квадратных матриц x_1 и x_2 порядка k найдется уравнение вида (2), решениями которого они являются, тогда и только тогда, когда ранг матрицы $x_1 - x_2$ равен рангу матрицы $\left(\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix} \right)$, полученной дописыванием строк матрицы $x_2^2 - x_1^2$ снизу к строкам матрицы $x_1 - x_2$.

Доказательство. Транспонируя матрицы из теоремы 4, получаем матрицы из следствия 1. Поскольку ранг матриц при транспонировании сохраняется, имеем требуемое.

Пример 1. Приведем пример таких комплексных матриц порядка 2, что не существует обратной матрицы к матрице $x_1 - x_2$, но при этом существует уравнение вида (2), решениями которого являются x_1 и x_2 . Подходящими матрицами будут, например, $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где α и β – ненулевые комплексные числа, при этом $\alpha \neq \beta$. Поскольку $x_1^2 = x_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_1^2 - x_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то ранг матрицы $x_1 - x_2$ совпадает с рангом матрицы $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$. Из равенства (4) находим, что $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где c – любое ненулевое комплексное число. Из одного из равенств (3) получаем, что a_0 – нулевая матрица. Итак, данным матрицам x_1 и x_2 соответствует континуум уравнений вида (2), решениями которых они являются.

В приведенном примере матрицы x_1 и x_2 были вырожденными. Построим пример с невырожденными матрицами x_1 и x_2 .

Пример 2. Рассмотрим матрицы $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $x_1 - x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ имеет ранг 1. Далее получаем $x_1^2 = x_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, значит, $x_1^2 - x_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, ранг матрицы $x_1 - x_2$ совпадает с рангом матрицы $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$. Таким образом, существует уравнение вида (2), решениями которого являются x_1 и x_2 . Из равенства (4) найдем a_1 :

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $a_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Подставляя его в предыдущее равенство, находим

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ c-d & -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, получаем, что a_1 – любая матрица порядка 2, у которой $a = b$ и $c = d$. Пусть $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тогда из равенств (3) имеем $a_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что для матриц x_1 и x_2 также найдется бесконечное число уравнений вида (2), решениями которых они являются.

Предложение 1. Если для двух квадратных матриц x_1 и x_2 уравнение (4) имеет решение a_1 при условии, что не существует $(x_1 - x_2)^{-1}$, то таких решений уравнения (4) бесконечно много (а значит, бесконечно много и уравнений вида (2) с корнями x_1 и x_2).

Доказательство. Посмотрим на равенство (4) как на матричное уравнение относительно a_1 , тогда оно имеет вид $XA = B$, где $X = a_1$, а A и B – известные матрицы. Введем обозначения $a_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_k \end{pmatrix}$, где

q_i – строки матрицы a_1 , и $x_2^2 - x_1^2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}$, где b_i – строки матрицы $x_2^2 - x_1^2$. Тогда матричное уравнение (4) равносильно системе уравнений

$$q_i(x_1 - x_2) = b_i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Известно, что матричное уравнение (4) имеет решение, значит, и уравнения системы (7) имеют решения. Также известно, что матрица $x_1 - x_2$ каждого уравнения системы (7) является вырожденной, следовательно, у системы уравнений (7), а значит, и у матричного уравнения (4) бесконечно много решений.

Приведем пример, показывающий, что достаточные условия из теоремы 3 не являются необходимыми условиями для существования уравнения третьей степени, решениями которого были бы данные

две квадратные матрицы, а также то, что квадратные матрицы, не удовлетворяющие достаточным условиям из теоремы 3, существуют.

Пример 3. Рассмотрим матрицы $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что матрицы $x_1 - x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $x_1^2 - x_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ являются вырожденными. Значит, не выполнены достаточные условия существования уравнения третьей степени, решениями которого были бы x_1 и x_2 . Также не существует уравнения второй степени для данных матриц, поскольку ранг матрицы $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$ равен 2, т. е. не совпадает с рангом матрицы $x_1 - x_2$. Покажем, что, несмотря на это, для x_1 и x_2 существует уравнение вида (5) при $n = 3$. Подставив в уравнение (5) при $n = 3$ сначала x_1 , затем x_2 , а потом отняв от одного равенства другое, получим

$$a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть a_2 – нулевая матрица. Матрицу a_1 будем искать в виде $a_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $b = 0$, $d = -1$, a и c – любые комплексные числа. Положим, что $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Подставляя a_1 , a_2 и x_2 в уравнение (5) при $n = 3$, находим a_0 . Полученное уравнение третьей степени, решениями которого являются x_1 и x_2 , имеет вид

$$x^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = 0.$$

Пример 4. Приведем пример, показывающий, что не для всех матриц x_1 и x_2 существует уравнение третьей степени, решениями которого они являются. В частности, такое уравнение не существует, если первый столбец у матриц $x_1 - x_2$ и $x_1^2 - x_2^2$ нулевой, а первый столбец у матрицы $x_1^3 - x_2^3$ уже не нулевой.

Подходящими матрицами будут, например, $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если в уравнение (5) при $n = 3$ подставить сначала x_1 , затем x_2 , а потом отнять от одного равенства другое, получим

$$a_2 \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Какими бы ни были элементы на месте $(1, 1)$ в матрицах a_1 и a_2 , в левой части предыдущего матричного равенства на месте $(1, 1)$ находится 0, тогда как в правой его части на этом месте стоит -2 . Значит, не существует уравнения вида (5) при $n = 3$, решениями которого являлись бы данные матрицы x_1 и x_2 .

Заключение

Таким образом, показано, что для произвольных n элементов ассоциативного кольца с делением существует многочлен степени n , корнями которого они являются. Определены достаточные условия существования такого многочлена для элементов произвольного (не обязательно с делением) ассоциативного кольца с единицей. Отдельно рассмотрен случай многочленов, определенных над кольцом квадратных матриц над полем. Для этого случая получен критерий существования многочлена второй степени с заданными корнями, а также приведены примеры построения многочленов с заданными корнями.

Библиографические ссылки

1. Lam TY. *A first course in noncommutative rings*. 2nd edition. New York: Springer-Verlag; 2001. XIX, 388 p. (Axler S, Gehring FW, Ribet KA, editors. Graduate texts in mathematics; volume 131). DOI: 10.1007/978-1-4419-8616-0.
2. Huang L, So W. Quadratic formulas for quaternions. *Applied Mathematics Letters*. 2002;15(5):533–540. DOI: 10.1016/S0893-9659(02)80003-9.
3. Abrate M. Quadratic formulas for generalized quaternions. *Journal of Algebra and Its Applications*. 2009;8(3):289–306. DOI: 10.1142/S0219498809003308.
4. Chapman A. Quaternion quadratic equations in characteristic 2. *Journal of Algebra and Its Applications*. 2015;14(3):1550033. DOI: 10.1142/S0219498815500334.
5. Serôdio R, Pereira E, Vitória J. Computing the zeros of quaternion polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*. 2001;42(8–9):1229–1237. DOI: 10.1016/S0898-1221(01)00235-8.
6. Chapman A, Machen C. Standard polynomial equations over division algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2017;27(2):1065–1072. DOI: 10.1007/s00006-016-0740-4.
7. Falcão MI, Miranda F, Severino R, Soares MJ. Mathematica tools for quaternionic polynomials. In: Gervasi O, Murgante B, Misra S, Borruso G, Torre CM, Rocha AMAC, et al., editors. *Computational science and its applications – ICCSA 2017. Proceedings of the 17th International conference; 2017 July 3–6; Trieste, Italy. Part 2*. Cham: Springer; 2017. p. 394–408 (Lecture notes in computer science; volume 10405). DOI: 10.1007/978-3-319-62395-5_27.
8. Janovská D, Opfer G. A note on the computation of all zeros of simple quaternionic polynomials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2010;48(1):244–256. DOI: 10.1137/090748871.
9. Goutor AG, Tikhonov SV. Roots of polynomials over division rings. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2024;68(5):359–364. DOI: 10.29235/1561-8323-2024-68-5-359-364.
10. Wilson RL. *Polynomial equations over matrices* [Internet]. Piscataway: Rutgers University; [cited 2024 November 12]. 20 p. Available from: https://sites.math.rutgers.edu/~rwilson/polynomial_equations.pdf.
11. Bray U, Whaples G. Polynomials with coefficients from a division ring. *Canadian Journal Mathematics*. 1983;35(3):509–515. DOI: 10.4153/CJM-1983-028-1.
12. Beck B. Sur les équations polynomiales dans les quaternions. *L'Enseignement mathématique. 2^e Série*. 1979;25(3–4):193–201. DOI: 10.5169/seals-50378.

Получена 28.11.2024 / исправлена 20.02.2025 / принята 20.02.2025.
Received 28.11.2024 / revised 20.02.2025 / accepted 20.02.2025.

УДК 512.542

ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ: F-РАДИКАЛ И F-ДЛИНА

В. И. МУРАШКО¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь

Аннотация. Для композиционной формации Фиттинга $\mathcal{F}$ конечных групп предложен алгоритм вычисления $\mathcal{F}$ -радикала конечной группы перестановок степени n , работающий за полиномиальное время от n . Показано, как можно вычислить $\mathcal{F}$ -радикал в случае, когда $\mathcal{F}$ является примитивной насыщенной формацией разрешимых конечных групп. Представлены алгоритмы вычисления различных длин, связанных с конечной группой, включающих обобщенную высоту Фиттинга и не p -разрешимую длину, которые для группы перестановок степени n работают за полиномиальное время от n .

Ключевые слова: конечная группа; вычисления в группах перестановок; композиционная формация; формация Фиттинга; $\mathcal{F}$ -радикал; $\mathcal{F}$ -длина; полиномиальный алгоритм.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф23РНФ-237).

FORMATIONS OF FINITE GROUPS IN POLYNOMIAL TIME: THE $\mathcal{F}$ -RADICAL AND THE $\mathcal{F}$ -LENGTH

V. I. MURASHKA^a

^aFrancisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomel 246028, Belarus

Abstract. For a Baer-local (composition) Fitting formation $\mathcal{F}$ of finite groups the algorithm for the computation of the $\mathcal{F}$ -radical of a permutation finite group which runs in polynomial time from its degree is herein suggested. It is shown how one can compute the $\mathcal{F}$ -radical in case when $\mathcal{F}$ is a primitive saturated formation of soluble finite groups. The algorithms for the computation of different lengths associated with a finite group (the generalised Fitting height, the non- p -soluble length and etc.) are presented. In the case of a permutation group these algorithms run in polynomial time from its degree.

Keywords: finite group; permutation group computation; Baer-local formation; Fitting formation; $\mathcal{F}$ -radical; $\mathcal{F}$ -length; polynomial time algorithm.

Acknowledgements. This work is supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (F23RNF-237).

Образец цитирования:

Мурашко В.И. Формации конечных групп за полиномиальное время: $\mathcal{F}$ -радикал и $\mathcal{F}$ -длина. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025; 1:14–22 (на англ.).
EDN: DFRMNH

For citation:

Murashka V.I. Formations of finite groups in polynomial time: the $\mathcal{F}$ -radical and the $\mathcal{F}$ -length. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:14–22.
EDN: DFRMNH

Автор:

Вячеслав Игоревич Мурашко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры алгебры и геометрии факультета математики и технологий программирования, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского сектора.

Author:

Viachaslau I. Murashka, PhD (physics and mathematics), do-cent; associate professor at the department of algebra and geometry, faculty of mathematics and technologies of programming, and leading researcher of research sector.
mvimath@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0002-0769-2519>

Introduction and the main result

All groups considered here are finite. Fitting showed that the product of two normal nilpotent subgroups is again nilpotent, i. e. in every group there exists the greatest normal nilpotent subgroup which is called the Fitting subgroup. Recall that a class of groups is a collection $\mathfrak{X}$ of groups with the property that if $G \in \mathfrak{X}$ and if $H \approx G$, then $H \in \mathfrak{X}$. A group $G \in \mathfrak{X}$ is called an $\mathfrak{X}$ -group. The greatest normal $\mathfrak{X}$ -subgroup of a group G is called the $\mathfrak{X}$ -radical and is denoted by $G_{\mathfrak{X}}$. It always exists in case when $\mathfrak{X}$ is a Fitting class. From the fundamental result of R. A. Bryce and J. Cossey [1] it follows that the hereditary non-empty Fitting class of soluble groups is a primitive local (saturated) formation. The similar result for the quotient group closed Fitting classes of metanilpotent groups was obtained in [2].

The computational theory of formations, Fitting and Schunk classes was discussed in [3–5]. The algorithm for computing the $\mathfrak{X}$ -radical (of a soluble group) was presented only in [3]. Note that as was mentioned in [3] the suggested there algorithm (even when $\mathfrak{X}$ is the class of all nilpotent groups) for a permutation group of degree $3n$ may require to check for nilpotency 2^n subgroups. The main idea of that algorithm was to extend the $\mathfrak{X}$ -radical from the given member of chief series to the next one. It was written in [3, p. 507]: «Note that for many Fitting classes $\mathfrak{F}$, more efficient algorithms for $\mathfrak{F}$ -radicals can be obtained from the theoretical knowledge about $\mathfrak{F}$ ». Nevertheless, the methods how one can obtain such algorithms were not presented. The aim of this paper is to suggest an algorithm for the computation of the $\mathfrak{F}$ -radical (which runs in polynomial time for permutation groups) for a Baer-local (composition) formation $\mathfrak{F}$.

Recall that the Fitting subgroup $F(G)$, the p -nilpotent radical $O_{p',p}(G)$, the soluble radical $R(G)$ of a group G are just the intersection of centralisers of all chief factors, all divisible by p chief factors and all non-abelian chief factors respectively. Recall that for a chief factor H/K of G the subgroup $HC_G(H/K)$ is called the inneriser of H/K . By its definition the generalised Fitting subgroup (the quasiniptotent radical) $F^*(G)$ is the intersection of innerisers of all chief factors of G . The first three radicals are associated with local Fitting formations and the last one is associated with a Baer-local Fitting formation.

Note that L. A. Shemetkov [6] obtained similar characterisations of the $\mathfrak{F}$ -radical for a Baer-local Fitting formation $\mathfrak{F}$ using the generalisation of the centraliser of a chief factor. We cannot use the results from [6] directly for three reasons. Formations $\mathfrak{F}$ in [6] are defined with the integrated Baer-local function, i. e. $f(H/K) \subseteq \mathfrak{F}$ for all chief factors H/K . In some applications (such as primitive saturated formations) the functions will not necessarily satisfy this condition. The characterisation of $G_{\mathfrak{F}}$ is obtained only in case $f(H/K) \neq \emptyset$ for all chief factors H/K of G . Also the constructive description of the generalised centraliser was not presented in [6].

Let f be a function which assigns to every simple group J a possibly empty formation $f(J)$. Now extend the domain of f . If G is the direct product of simple groups isomorphic to J , then we say that G has type J and let $f(G) = f(J)$. If J is a cyclic group of order p , then let $f(p) = f(J)$. Such functions f are called Baer functions. A formation $\mathfrak{F}$ is called Baer-local [7, chap. IV, definitions 4.9] (or composition (see [6] or [8, p. 4])) if for some Baer function f

$$\mathfrak{F} = (G \mid G/C_G(H/K) \in f(H/K) \text{ for every chief factor } H/K \text{ of } G).$$

Such a formation $\mathfrak{F}$ is denoted by $BLF(f)$. The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a Baer-local Fitting formation defined by f such that $f(J)$ is a Fitting formation for any simple group J . Assume that $(G/K)_{f(J)}$ can be computed in polynomial time in n for every permutation group G of degree n , its normal subgroup K and a simple group J . Then $(G/K)_{\mathfrak{F}}$ can be computed in polynomial time in n for every permutation group G of degree n and its normal subgroup K .*

Note that if $f(J) = \emptyset$, then $G_{f(J)}$ is not defined for any group G . A Baer-local formation defined by the Baer function f is called local if $f(J) = \bigcap_{p \in \pi(J)} f(p)$ for every simple group J .

Corollary. *Let $\mathfrak{F}$ be a local Fitting formation defined by f such that $f(p)$ is a Fitting formation for all prime p . Assume that $(G/K)_{f(p)}$ can be computed in polynomial time in n for every permutation group G of degree n , its normal subgroup K and prime p . Then $(G/K)_{\mathfrak{F}}$ can be computed in polynomial time in n for every permutation group G of degree n and its normal subgroup K .*

Preliminaries

Recall that a formation is a class of groups $\mathfrak{F}$ that is closed under taking epimorphic images (i. e. from $G \in \mathfrak{F}$ and $N \trianglelefteq G$ it follows that $G/N \in \mathfrak{F}$) and subdirect products (i. e. from $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ and $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ it follows that

$G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$). A class of groups $\mathfrak{F}$ is called a Fitting class if it is normally hereditary (i. e. from $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$ it follows that $N \in \mathfrak{F}$) and N_0 -closed (i. e. from $N_1, N_2 \leq G$ and $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$ it follows that $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$). If $\mathfrak{F}$ is a Fitting class and a formation, then $\mathfrak{F}$ is called the Fitting formation.

For a class of groups $\mathfrak{X}$ recall that $E\mathfrak{X}$ denotes the class of groups with a normal series whose factors are $\mathfrak{X}$ -groups. If $\mathfrak{F}$ is a Fitting formation, then $E\mathfrak{F}$ is also a Fitting formation and is closed by extensions. Here $O_\Sigma(G)$ denotes the greatest normal subgroup of G all whose composition factors belong to Σ for a class of simple groups Σ .

Recall that S_n denotes the symmetric group of degree n . We use standard computational conventions of abstract finite groups equipped with polynomial-time procedures to compute products and inverses of elements [9, chap. 2]. For both input and output, groups are specified by generators. We will consider only $G = \langle S \rangle \leq S_n$ with $|S| \leq n^2$. If it is necessary, Sims algorithm [16, parts 4.1 and 4.2] can be used to arrange that $|S| \leq n^2$. Quotient groups are specified by generators of a group and its normal subgroup. Note [10] that there exists a permutation group of degree n such that it has a quotient with no faithful representations of degree less than $2^{n/4}$.

For the rest of the paper n is used to denote the degree of the input permutations. A polynomial-time algorithm is an algorithm whose running time is upper-bounded by some polynomial function of n .

We need the following well known basic tools in our proofs (see, for example, [9] or [11]). Note that (1)–(4) are obtained with the help of the classification of finite simple groups.

Theorem 2. *Given normal subgroups A and B of a permutation group G of degree n with $A \leq B$, in polynomial time one can solve the following problems:*

- (1) Find the centraliser $C_{G/A}(B/A)$ of B/A in G/A [11, P6(i)].
- (2) Find a chief series for G containing A and B [11, P11].
- (3) Test if G/A is simple [9, P10(i)]; if it is not, find a proper normal subgroup N/A of G/A [9, P10(ii)]; if it is, find the name of G/A [11, P12]. In particular, find a type of a chief factor.
- (4) Find $O_\Sigma(G/A)$ for a class Σ of simple groups [11, P16(i)].
- (5) Given $H \leq G$, find $H \cap A$ [11, P4(i)].
- (6) Find the derived subgroup $(G/A)'$ of G/A [11, P10(ii)].
- (7) Find the order $|G/A|$ of G/A [11, P1].

The following lemma restricts the length of a chief series of a permutation group.

Lemma 1 [12]. *If $G \leq S_n$, then the length of every subgroup chain in G is at the most $2n - 3$ for $n \geq 2$.*

Proof of theorem 1

In this section $\mathfrak{F}$ is a Baer-local Fitting formation defined by f such that $f(J)$ is a Fitting formation for any simple group J . The idea of the theorem proof is to obtain the $\mathfrak{F}$ -radical as the intersection of generalised centralisers of chief factors in the sense of the following definition.

Definition 1. For a chief factor H/K of G with $f(H/K) \neq \emptyset$ let $C_{G,f}(H/K)$ be defined by (a) $C_G(H/K) \subseteq C_{G,f}(H/K)$ and (b) $C_{G,f}(H/K)/C_G(H/K) = (G/C_G(H/K))_{f(H/K)}$.

Lemma 2. *Let B/A be a chief factor of a group G with $f(B/A) \neq \emptyset$ and N be a normal subgroup of G with $N \leq A$. Then*

$$C_{G/N,f}((B/N)/(A/N)) = C_{G,f}(B/A)/N.$$

Proof. Note that

$$\begin{aligned} C_{G/N}((B/N)/(A/N)) &= \{gN \in G/N \mid [gN, g_i N] \in A/N \text{ for all } g_i N \in B/N\} = \\ &= \{g \in G \mid [g, g_i] N \in A/N \text{ for all } g_i \in B\} / N = C_G(B/A) / N. \end{aligned}$$

Now

$$(G/N) / C_{G/N}((B/N)/(A/N)) = (G/N) / (C_G(B/A) / N) \cong G / C_G(B/A).$$

This isomorphism induces the isomorphism between (B/A) -radicals of the left and the right hands parts. It means that if $F/C_G(B/A) = (G/C_G(B/A))_{f(B/A)}$, then

$$(F/N) / (C_G(B/A) / N) = (F/N) / C_{G/N}((B/N)/(A/N)) = ((G/N) / C_{G/N}((B/N)/(A/N)))_{f(B/A)}.$$

Thus $C_{G/N, f}((B/N)/(A/N)) = C_{G, f}(B/A)/N$. The proof is completed.

Lemma 3. *Let H/K be a chief factor of a group G with $f(H/K) \neq \emptyset$. Then $G_{\mathfrak{F}} \leq C_{G, f}(H/K)$.*

Proof. If $H/K \notin \mathfrak{F}$, then from $G_{\mathfrak{F}}K/K \in \mathfrak{F}$ it follows that $H/K \cap G_{\mathfrak{F}}K/K = K/K$. Therefore $HG_{\mathfrak{F}}/K = (H/K) \times G_{\mathfrak{F}}K/K$. It means that $G_{\mathfrak{F}} \leq C_G(H/K) \leq C_{G, f}(H/K)$.

Assume that $H/K \in \mathfrak{F}$ and $p \in \pi(H/K)$. Since $\mathfrak{F}$ is N_0 -closed, we see that $T/K = HG_{\mathfrak{F}}/K \in \mathfrak{F}$. For a subgroup L of G with $K \subseteq L$ denote L/K by $\bar{L}$. Now $\bar{T}/C_{\bar{T}}(\bar{M}/\bar{N}) \in f(\bar{M}/\bar{N}) = f(H/K)$ for every chief factor $\bar{M}/\bar{N}$ of $\bar{T}$ below $\bar{H}$.

If H/K is abelian, then H/K is a p -group for some prime p . Let $\bar{K} = \bar{H}_0 \trianglelefteq \bar{H}_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \bar{H}_m = \bar{H}$ be a part of chief series of $\bar{T}$. Then $\bar{T}/C_{\bar{T}}(\bar{H}_i/\bar{H}_{i-1}) \in f(p) = f(H/K)$. Let $\bar{C} = \bigcap_{i=1}^m C_{\bar{T}}(\bar{H}_i/\bar{H}_{i-1})$. Now $\bar{C}/C_{\bar{T}}(\bar{H})$ is a p -group by [7, chap. A, corollary 12.4(a)]. Since $f(p)$ is a formation, $\bar{T}/\bar{C} = (T/K)/(C/K) \in f(p)$. Thus $(T/K)/C_{T/K}(H/K) \in \mathfrak{N}_p f(p)$. Note that

$$(T/K)/C_{T/K}(H/K) \simeq (T/K)C_{G/K}(H/K)/C_{G/K}(H/K) \trianglelefteq (G/K)/C_{G/K}(H/K).$$

Since H/K is a chief factor of G/K , we see that $O_p((G/K)/C_{G/K}(H/K)) \simeq 1$ by [7, chap. A, lemma 13.6]. Hence $O_p((T/K)C_{G/K}(H/K)/C_{G/K}(H/K)) \simeq 1$. Thus

$$(T/K)/C_{T/K}(H/K) \simeq (T/K)C_{G/K}(H/K)/C_{G/K}(H/K) \in f(p) = f(H/K).$$

If H/K is non-abelian, then H/K is the direct product of minimal normal subgroups H_i/K of T/K by [7, chap. A, lemma 4.14]. Since $f(p)$ is a formation, from $C_{T/K}(H/K) = \bigcap_i C_{T/K}(H_i/K)$ it follows that $(T/K)/C_{T/K}(H/K) \in f(H/K)$. Since $f(H/K)$ is a Fitting formation, we see that

$$\begin{aligned} (T/K)/C_{T/K}(H/K) &= (T/K)/(C_T(H/K)/K) \simeq T/C_T(H/K) \simeq \\ &\simeq TC_G(H/K)/C_G(H/K) \subseteq (G/C_G(H/K))_{f(H/K)} = C_{G, f}(H/K)/C_G(H/K). \end{aligned}$$

Therefore $G_{\mathfrak{F}} \leq T \leq C_{G, f}(H/K)$. The proof is completed.

Theorem 3. *Let $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ be a chief series of a group G . Then*

$$G_{\mathfrak{F}} = \left(\bigcap_{i=1, f(G_i/G_{i-1}) \neq \emptyset}^m C_{G, f}(G_i/G_{i-1}) \right)_{E_{\mathfrak{F}}}.$$

Proof. We assume that every intersection of empty collection of subgroups of G coincides with G . Let

$$D = \bigcap_{i=1, f(G_i/G_{i-1}) \neq \emptyset}^m C_{G, f}(G_i/G_{i-1}).$$

From lemma 3 it follows that $G_{\mathfrak{F}} \subseteq D$. Note that $G_{\mathfrak{F}} \in E_{\mathfrak{F}}$. Thus $G_{\mathfrak{F}} \leq D_{E_{\mathfrak{F}}}$. Let $1 = D_0 \trianglelefteq D_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq D_l = D_{E_{\mathfrak{F}}}$ be a part of chief series of G below $D_{E_{\mathfrak{F}}}$. Then by the Jordan – Hölder theorem there is $\rho: \{1, \dots, l\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ such that D_i/D_{i-1} is G -isomorphic to $G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1}$ for all $i \in \{1, \dots, l\}$. Now $C_G(G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1}) = C_G(D_i/D_{i-1})$ for all $i \in \{1, \dots, l\}$. Hence $C_{G, f}(G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1}) = C_{G, f}(D_i/D_{i-1})$ by definition 1. Note that

$$\begin{aligned} D_{E_{\mathfrak{F}}}/C_{D_{E_{\mathfrak{F}}}}(D_i/D_{i-1}) &\simeq D_{E_{\mathfrak{F}}}C_G(D_i/D_{i-1})/C_G(D_i/D_{i-1}) = D_{E_{\mathfrak{F}}}C_G(G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1})/C_G(G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1}) \trianglelefteq \\ &\trianglelefteq C_{G, f}(G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1})/C_G(G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1}) \in f(G_{\rho(i)}/G_{\rho(i)-1}) = f(D_i/D_{i-1}). \end{aligned}$$

Since $f(D_i/D_{i-1})$ is normally hereditary we see that $D_{E_{\mathfrak{F}}}/C_{D_{E_{\mathfrak{F}}}}(D_i/D_{i-1}) \in f(D_i/D_{i-1})$. Since $f(D_i/D_{i-1})$ is closed under taking quotients, we see that

$$D_{E_{\mathfrak{F}}}/C_{D_{E_{\mathfrak{F}}}}(H/K) \in f(D_i/D_{i-1}) = f(H/K)$$

for all chief factors H/K of $D_{E\mathfrak{F}}$ between D_{i-1} and D_i for all $i \in \{1, \dots, l\}$. From the Jordan – Hölder theorem it follows that $D_{E\mathfrak{F}}/C_{D_{E\mathfrak{F}}}(H/K) \in f(H/K)$ for all chief factors H/K of $D_{E\mathfrak{F}}$. Therefore $D_{E\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Thus $D_{E\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. The proof is completed.

Lemma 4. *Let B/A be a chief factor of G . Then $C_{G,f}(B/A)$ can be computed in polynomial time (in the assumptions of theorem 1).*

Proof. Note that $T/A = C_{G/A}(B/A)$ can be computed in polynomial time by theorem 2(1) and $T = C_G(B/A)$. Now $G/C_G(B/A) = G/T$. By our assumption $(G/T)_{f(B/A)}$ can be computed in polynomial time. The proof is completed.

Lemma 5. *A chief factor H/K of a group G belongs to $\mathfrak{F}$ iff $(H/K)'_{f(H/K)} = (H/K)'$.*

Proof. Let H/K be a non-abelian chief factor of G of type J . We claim that $H/K \in \mathfrak{F}$ iff $(H/K)_{f(J)} = H/K$. Note that H/K is a direct product of groups isomorphic to J . If $(H/K)_{f(J)} = H/K$, then since $f(J)$ is normally hereditary, $J \in f(J)$. Now $J \in \mathfrak{F}$ by the definition of the Baer-local formation. Since $\mathfrak{F}$ is N_0 -closed, $H/K \in \mathfrak{F}$. Assume now that $H/K \in \mathfrak{F}$. Hence $J \in \mathfrak{F}$. Since J is non-abelian, $J \simeq J/C_G(J) \in f(J)$. Therefore $H/K = (H/K)_{f(J)}$ as a direct product of $f(J)$ -groups.

Let H/K be an abelian chief factor. We claim that $H/K \in \mathfrak{F}$ iff $f(H/K) \neq \emptyset$. It is clear that if $H/K \in \mathfrak{F}$, then $f(H/K) \neq \emptyset$. Assume that $f(H/K) \neq \emptyset$. Hence $1 \in f(H/K)$. Now $(H/K)/C_{H/K}(U/V) \simeq 1 \in f(H/K) = f(U/V)$ for any chief factor U/V of H/K . Thus $H/K \in \mathfrak{F}$ by the definition of the Baer-local formation.

Note that the two above mentioned cases are equivalent to $H/K \in \mathfrak{F}$ iff

$$(H/K)'_{f(H/K)} = (H/K)'.$$

The proof is completed.

Lemma 6. *In the assumptions of theorem 1 we can compute $(G/K)_{E\mathfrak{F}}$ in polynomial time.*

Proof. If H/K is a chief factor of G , then we can check if $H/K \in \mathfrak{F}$ in polynomial time by our assumptions, lemma 5 and theorem 2(6).

We can compute a part of the chief series $K = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ of a group G in polynomial time by theorem 2(2). Define F_i by $F_i/K = (G_i/K)_{E\mathfrak{F}}$. Note that $F_i \cap G_{i-1} = F_{i-1}$ and $F_0 = K$. Now

$$F_i/F_{i-1} = F_i/(F_i \cap G_{i-1}) \simeq F_i G_{i-1}/G_{i-1} \trianglelefteq G_i/G_{i-1}.$$

Therefore F_i/F_{i-1} is isomorphic to either 1 or G_i/G_{i-1} . If $G_i/G_{i-1} \notin \mathfrak{F}$, then $F_i = F_{i-1}$. Assume that $G_i/G_{i-1} \in \mathfrak{F}$. If G_i/G_{i-1} is a group of type J , then F_i/F_{i-1} is also such a group. Since $E\mathfrak{F}$ is closed under extensions, we see that $F_i/F_{i-1} = O_{(J)}(G_i/F_{i-1})$. Hence F_i can be computed in polynomial time by statements (3) and (4) of theorem 2.

Algorithm 1. EFRADICAL $(G, K, \mathfrak{F})$.

Result. $(G/K)_{E\mathfrak{F}}$.

Data. A normal subgroup K of a group G , $\mathfrak{F} = BLF(f)$.

Compute a chief series $K = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$;

$F \leftarrow K$;

for $i \in \{1, \dots, m\}$ **do**

if $(G_i/G_{i-1})'_{f(G_i/G_{i-1})} = (G_i/G_{i-1})'$ **then**

$J \leftarrow$ type of G_i/G_{i-1} ;

$F_1/F \leftarrow O_{(J)}(G_i/F)$;

$F \leftarrow F_1$;

return F/K .

Proof of theorem 1. Let $K = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ be a part of chief series of G (it can be computed in polynomial time by theorem 2(2)). Now by lemma 2

$$I/K = \bigcap_{i=1, f((G_i/K)/(G_{i-1}/K)) \neq \emptyset}^m C_{G/K, f}((G_i/K)/(G_{i-1}/K)) = \bigcap_{i=1, f(G_i/G_{i-1}) \neq \emptyset}^m C_{G, f}(G_i/G_{i-1})/K.$$

Hence this subgroup can be computed in a polynomial time by theorem 2(5) and lemma 4. Using lemma 6 we can compute $R/K = (I/K)_{E\mathfrak{F}}$. Now $(G/K)_{\mathfrak{F}} = (I/K)_{E\mathfrak{F}}$ by theorem 3.

Algorithm 2. FRADICAL($G, K, \mathfrak{F}$).

Result. $(G/K)_{\mathfrak{F}}$.

Data. A normal subgroup K of a group G , $\mathfrak{F} = BLF(f)$.

Compute a chief series $K = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ of G ;

$T \leftarrow G$;

for $i \in \{1, \dots, m\}$ **do**

if $f(G_i/G_{i-1}) \neq \emptyset$ **then**

$C/G_{i-1} \leftarrow C_{G/G_{i-1}}(G_i/G_{i-1})$;

$F/C \leftarrow (G/C)_{f(G/G_{i-1})}$;

$T/K \leftarrow T/K \cap F/K$;

return EFRADICAL($T, K, \mathfrak{F}$).

Applications

The $\mathfrak{F}$ -radical for a primitive saturated formation. Let $\mathcal{F}_0$ denote the family consisting of the empty set, the formation of groups of order one, and the formation of all soluble groups, and then, for $i > 0$, define $\mathcal{F}_i$ inductively by $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}_i$ if either $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}_{i-1}$ or $\mathfrak{F}$ is a local formation, with local definition f such that $f(p) \in \mathcal{F}_{i-1}$ for all prime p . Finally let $\mathcal{F}$ be the family comprising all formations $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{F} = \bigcup_j \mathfrak{F}_j$ with each $\mathfrak{F}_j \in \bigcup_i \mathcal{F}_i$ and $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}_{j+1}$. Formations from $\mathcal{F}$ are called primitive [7, chap. VII, definition 3.1]. As was mentioned in [13] if $G \in \mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ and the nilpotent length of G is less than m , then there exists $\mathfrak{H} \in \mathcal{F}_m$ with $G \in \mathfrak{H}$.

Theorem 4. Let m be a natural number. If $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}_m$ and $K \trianglelefteq G \leq S_n$, then $(G/K)_{\mathfrak{F}}$ can be computed in polynomial time (in n).

Proof. It is clear that if $\mathfrak{H} \in \mathcal{F}_0$, then $(G/K)_{\mathfrak{H}}$ can be computed in polynomial time by theorem 2(4). Assume that we can compute $(G/K)_{\mathfrak{H}}$ in polynomial time for every $\mathfrak{H} \in \mathcal{F}_{i-1}$. Let prove that we can do so for every $\mathfrak{H} \in \mathcal{F}_i$. If $\mathfrak{H} \in \mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$, then the values $f(p)$ of local definition f of $\mathfrak{H}$ are in $\mathcal{F}_{i-1}$. By our assumption we can compute the $f(p)$ -radicals of G/K in polynomial time for every $K \trianglelefteq G \leq S_n$. Hence we can compute the $\mathfrak{H}$ -radical of G/K in polynomial time in n for every $K \trianglelefteq G \leq S_n$ and every $\mathfrak{H} \in \mathcal{F}_i$ by theorem 1. Thus $(G/K)_{\mathfrak{F}}$ can be computed in polynomial time for every $K \trianglelefteq G \leq S_n$.

The $\mathfrak{F}$ -length. The lengths of a group associated with some of its radical (the nilpotent length, the p -length and etc.) play an important role in the theory of groups. Some approaches how one could introduce the $\mathfrak{F}$ -length were suggested in [14, paragraph 5; 15]. Using the ideas of those approaches we introduce the following definition.

Definition 2. For Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ the $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ -length $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G)$ of a group G is equal to m if $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_{2m+1} = G$ where $G_i/G_{i-1} = (G/G_{i-1})_{\mathfrak{F}}$ for odd i and $G_i/G_{i-1} = (G/G_{i-1})_{\mathfrak{H}} \neq 1$ for even i . Note that the $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ -length is defined only in case $G \in E(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$.

Remark 1. In some cases of this definition $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ is the class of all identity groups. If $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ then the $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ -length is just the $\mathfrak{F}$ -length and it will be denoted by $l_{\mathfrak{F}}(G)$ for a group G .

Remark 2. If $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups, then $l_{\mathfrak{N}}(G) = h(G)$ is the nilpotent length of G and defined only for soluble groups G . If $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$ is the class of all p -groups and $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{p'}$ is the class of all p' -groups, then $l_{\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}_{p'}}(G) = l_p(G)$ is the p -length of G and defined only for p -soluble groups G .

Recall that E. I. Khukhro and P. Shumyatsky suggested the interesting generalisations of these lengths.

Definition 3 [16; 17]. (1) The generalised Fitting height $h^*(G)$ of a group G is the least number h such that $F_{(h)}^*(G) = G$ where $F_{(0)}^*(G) = 1$, and $F_{(i+1)}^*(G)$ is the inverse image of the generalised Fitting subgroup $F^*(G/F_{(i)}^*(G))$.

(2) Let p be a prime, $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{2h+1} = G$ be the shortest normal series in which for i odd the factor G_{i+1}/G_i is p -soluble (possibly trivial), and for i even the factor G_{i+1}/G_i is a (non-empty) direct product of non-abelian simple groups. Then $h = \lambda_p(G)$ is called the non- p -soluble length of a group G .

(3) $\lambda_2(G) = \lambda(G)$ is the non-soluble length of a group G .

Remark 3. If $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^*$ is the class of all quasinilpotent groups, then $l_{\mathfrak{N}^*}(G) = h^*(G)$. If $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}^p$ is the class of all p -soluble groups, then from [18, lemma 2.7] it follows that $l_{\mathfrak{N}^*, \mathfrak{S}^p}(G) = \lambda_p(G)$.

Note that for Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ the class $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \diamond \mathfrak{F} = (G | G/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$ is also a Fitting class and $G_{\mathfrak{K}}/G_{\mathfrak{H}} = (G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{F}}$ by [7, chap. IX, theorem 1.12]. Hence the $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ -length can be defined by $\mathfrak{K}$ in the following way: if $G_{\mathfrak{K}} = G_{\mathfrak{H}} \neq G$, then $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G) = \infty$, else if $G \in \mathfrak{H}$, then $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G) = 0$, otherwise $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G) = l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G/G_{\mathfrak{K}}) + 1$.

Theorem 5. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be Fitting classes. Assume that $(G/K)_{\mathfrak{F}}$ and $(G/K)_{\mathfrak{H}}$ can be computed in polynomial time for any $K \trianglelefteq G \leq S_n$. Then $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G/K)$ can be computed in polynomial time for any $K \trianglelefteq G \leq S_n$.*

Proof. From the statement of the theorem it follows that $(G/K)_{\mathfrak{K}} = R/K$ can be computed in polynomial time for any $K \trianglelefteq G \leq S_n$ by $R_0/K = (G/K)_{\mathfrak{H}}$ and $R/R_0 = (G/R_0)_{\mathfrak{F}}$. Now from theorem 2 we can compute $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G/K)$ in polynomial time by NAIVELENGTH.

Algorithm 3. NAIVELENGTH($G, K, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$).

Result. $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G/K)$.

Data. A normal subgroup K of a group G .

if $|(G/K)_{\mathfrak{K}}| = |(G/K)_{\mathfrak{H}}| \neq |G/K|$ **then return** ∞ ;

if $|G/K| = |(G/K)_{\mathfrak{H}}|$ **then return** 0;

else

$R/K \leftarrow (G/K)_{\mathfrak{K}}$;

return NAIVELENGTH($G, R, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$) + 1.

We use $R_p(G)$ to denote the p -soluble radical of a group G . Let $\bar{F}_p^*(G)$ be the inverse image of $F^*(G/R_p(G))$.

Lemma 7. *For any $K \trianglelefteq G \leq S_n$ one can compute $F(G/K)$, $O_{p',p}(G/K)$, $F^*(G/K)$ and $\bar{F}_p^*(G/K)$ in polynomial time.*

Proof. Recall that the generalised Fitting subgroup of a group is its $\mathfrak{N}^*$ -radical. This class is a Baer-local formation defined by h where $h(J) = 1$ if J is abelian and $h(J) = D_0(J)$ otherwise [7, chap. IX, lemma 2.6]. Hence $C_{G,h}(H/K) = C_G(H/K) = HC_G(H/K)$ if H/K is abelian. Note that if H/K is non-abelian (of type J), then $G/C_G(H/K)$ has the unique minimal normal subgroup which is isomorphic to H/K and hence coincides with the $h(J)$ -radical of $G/C_G(H/K)$. Thus $C_{G,h}(H/K) = HC_G(H/K)$ in this case. From $C_G(H/K)/K = C_{G/K}(H/K)$ it follows that $C_G(H/K)$ can be computed in polynomial time by theorem 2(1). Now the generating set of $HC_G(H/K)$ is the joining of generating sets of H and $C_G(H/K)$. Thus $HC_G(H/K)$ can be computed in polynomial time. Hence from the proof of theorem 1 it follows that $F^*(G/K)$ can be computed in polynomial time. Note that $R_p(G/K)$ can be computed in polynomial time by theorem 2(4). Therefore we can compute $\bar{F}_p^*(G/K)$ in polynomial time.

Recall that the classes of all nilpotent and p -nilpotent groups can be locally defined by f_1 and f_2 respectively where $f_1(q) = 1$ for all prime q and $f_2(p) = 1$ for all prime $q \neq p$ and $f_2(q) = \mathfrak{G}$, where $\mathfrak{G}$ is the class of all groups. Hence $F(G/K)$ and $O_{p',p}(G/K)$ can be computed in polynomial time by theorem 1. The proof is completed.

From theorems 2 and 5, and lemma 7 the following result directly follows.

Theorem 6. *If $K \trianglelefteq G \leq S_n$ and p is a prime, then $h(G/K)$, $l_p(G/K)$, $h^*(G/K)$, $\lambda_p(G/K)$, $\lambda(G/K)$ can be computed in a polynomial time.*

The main problem of NAIVELENGTH is that we need to recompute the $\mathfrak{K}$ -radicals in quotient groups. Note that if $\mathfrak{K}$ is a Baer-local formation and we know $C_{G,f}(H/K)$ for every chief factor H/K from some chief series of G , then we can compute the $\mathfrak{K}$ -radical in every quotient group of G .

Theorem 7. *Let $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{F}$ be Fitting classes such that $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \diamond \mathfrak{F}$ is a Baer-local Fitting formation defined by f where $f(J)$ is a Fitting formation for every simple group J . Assume that for any $K \trianglelefteq G \leq S_n$ one in polynomial time can check if $G/K \in \mathfrak{H}$ and compute $(G/K)_{f(J)}$ for every simple group J . Then $l_{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}}(G/K)$ can be computed in polynomial time for any $K \trianglelefteq G \leq S_n$.*

Proof. Let $K = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ be a part of chief series of G . Then $G/K \in E\mathfrak{K}$ iff $G_i/G_{i-1} \in \mathfrak{K}$ for every i iff $(G_i/G_{i-1})'_{f(G_i/G_{i-1})} = (G_i/G_{i-1})'$ for every i by lemma 5. Note that if $G/K \in E\mathfrak{K}$, then every its normal

subgroup also belongs to $E\mathfrak{K}$. Hence we don't need to use EFRADICAL in the computation of the $\mathfrak{K}$ -radical in every quotient group of G .

If $K \leq F \trianglelefteq G \leq S_n$, then $G_i F / G_{i-1} F \cong G_i / (G_i \cap G_{i-1} F) = G_i / (G_{i-1} (G_i \cap F))$ is G -isomorphic to either 1 or G_i / G_{i-1} . Hence $F = KF = G_0 F \trianglelefteq G_1 F \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m F = G$ after we remove the repetitive terms will become the part of chief series of G above F . Note that $C_{G,f}(M/N) = C_{G,f}(L/T)$ for any G -isomorphic chief factors M/N and L/T of G . So if we know $C_{G,f}(G_i/G_{i-1})$ and $FG_i/FG_{i-1} \neq 1$ (it can be checked by theorem 2), then we know $C_{G,f}(FG_i/FG_{i-1})$. Now we can compute $(G/F)_{\mathfrak{K}}$ using lemma 2 and theorem 3. By the statement of theorem we can check if $(G/F)_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{H}$, i. e. $(G/F)_{\mathfrak{K}} / (G/F)_{\mathfrak{H}} \cong 1$. Therefore $l_{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}}(G/K)$ can be computed in polynomial time for any $K \trianglelefteq G \leq S_n$.

Algorithm 4. FLENGTH($G, K, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$).

Result. $l_{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}}(G/K)$.

Data. A normal subgroup K of a group G .

Compute a chief series $K = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ of G ;

if $G/K \in \mathfrak{H}$ **then**

return 0;

else

$l \leftarrow 1$;

$L \leftarrow []$, $T \leftarrow G$;

for $i \in \{1, \dots, m\}$ **do**

if $(G_i/G_{i-1})'_{f(G_i/G_{i-1})} = (G_i/G_{i-1})'$ **then**

$C/G_{i-1} \leftarrow C_{G/G_{i-1}}(G_i/G_{i-1})$;

$F/C \leftarrow (G/C)_{f(G_i/G_{i-1})}$;

$\text{add}(L, (G_{i-1}, G_i, F))$;

$T/K \leftarrow T/K \cap F/K$;

else

return ∞ ;

if $T/K \in \mathfrak{H}$ **then**

return ∞ ;

while $G/T \notin \mathfrak{H}$ **do**

$l \leftarrow l + 1$;

$F \leftarrow G$;

for $R \in L$ **do**

if $TR[1] = TR[2]$ **then**

$\text{remove}(L, R)$;

else

$F \leftarrow F \cap R[3]$;

if $F/T \in \mathfrak{H}$ **then**

return ∞ ;

$T \leftarrow F$;

return l .

Conclusions

This work belongs to a series of works [5; 19] dedicated to the computational recognition of formations and the computation of associated with them subgroups in every group. The key object of those works was the notion of a chief factor function. Recall [5] that a function f that associates 0 or 1 with every chief factor H/K of a group G is called a chief factor function if $f(H/K, G) = f(M/N, G)$ whenever H/K and M/N are G -isomorphic chief factors of G , and $f(H/K, G) = f((H/N)/(K/N), G/N)$ for every $N \trianglelefteq G$ with $N \leq K$. With every such function one can associate the formation $\mathcal{C}(f)$ of groups G such that $G \cong 1$ or $f(H/K, G) = 1$ for every

chief factor H/K of the group G . The family of such formations includes all Baer-local formations. In [5; 19] the algorithms for the computation of the $\mathfrak{F}$ -residual and the $\mathfrak{F}$ -hypercenter where $\mathfrak{F} = \mathcal{C}(f)$ were suggested respectively. Therefore the following questions seem interesting.

Question 1. Find conditions (*) (or prove that such conditions do not exist) on a chief factor functions f such that $\mathcal{C}(f)$ is a Fitting formation if f satisfies (*) and for each Fitting formation of the form $\mathcal{C}(f)$ there is a chief factor function f_1 which satisfies (*) and $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f_1)$.

Question 2. If f is a chief factor function, conditions (*) from question 1 exist and $f(H/K, G)$ can be computed in polynomial time for every chief factor H/K of a group $G \leq S_n$, then can one compute $(G/K)_{\mathcal{C}(f)}$ in polynomial time for every $K \triangleleft G \leq S_n$?

The algorithms constructed in the paper are purely theoretical. They are based on known algorithms about permutation groups (see theorem 2). Not all of these algorithms were fully implemented in computer algebra systems. That is why the question of implementation of the constructed algorithms remains open.

In [20] Fitting formations were used in the study of sublattices of the lattice of all subgroups. The results of this paper can be used to compute the sublattices described in [20]. One of the modern directions in the theory of formations is the study of σ -local and Baer σ -local formations [21; 22]. These formations are defined with the help of the generalisations of p -nilpotent radical. The results of this paper can be used to compute those radicals and hence to check if a given group belongs to such a formation.

References

1. Bryce RA, Cossey J. Subgroup closed Fitting classes are formations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1982;91(2):225–258. DOI: 10.1017/S0305004100059272.
2. Berger TR, Bryce RA, Cossey J. Quotient closed metanilpotent Fitting classes. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 1985;38(2):157–163. DOI: 10.1017/S1446788700023004.
3. Höfling B. Computing projectors, injectors, residuals and radicals of finite soluble groups. *Journal of Symbolic Computation*. 2001;32(5):499–511. DOI: 10.1006/jsc.2001.0477.
4. Eick B, Wright CRB. Computing subgroups by exhibition in finite solvable groups. *Journal of Symbolic Computation*. 2002;33(2):129–143. DOI: 10.1006/jsc.2000.0503.
5. Murashka VI. Formations of finite groups in polynomial time: $\mathfrak{F}$ -residuals and $\mathfrak{F}$ -subnormality. *Journal of Symbolic Computation*. 2024;122:102271. DOI: 10.1016/j.jsc.2023.102271.
6. Shemetkov LA. Composition formations and radicals of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1988;40:318–322. DOI: 10.1007/BF01061312.
7. Doerk K, Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin: Walter de Gruyter; 1992. 893 p. (De Gruyter expositions in mathematics; volume 4). DOI: 10.1515/9783110870138.
8. Guo W. *Structure theory for canonical classes of finite groups*. Berlin: Springer; 2015. 359 p. DOI: 10.1007/978-3-662-45747-4.
9. Seress Á. *Permutation group algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press; 2003. 264 p. DOI: 10.1017/CBO9780511546549.
10. Neumann PM. Some algorithms for computing with finite permutation groups. In: Robertson EF, Campbell CM, editors. *Proceedings of groups – St. Andrews 1985*. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. p. 59–92 (London Mathematical Society Lecture Note Series; volume 121). DOI: 10.1017/CBO9780511600647.006.
11. Kantor WM, Luks EM. Computing in quotient groups. In: Ortiz H, editor. *Proceedings of the twenty-second annual ACM symposium on theory of computing; 1990 May 13–17; Baltimore, Maryland, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 1990. p. 524–534. DOI: 10.1145/100216.100290.
12. Babai L. On the length of subgroup chains in the symmetric group. *Communications in Algebra*. 1986;14(9):1729–1736. DOI: 10.1080/00927878608823393.
13. Bryce RA, Cossey J. Fitting formations of finite soluble groups. *Mathematische Zeitschrift*. 1972;127(3):217–223. DOI: 10.1007/BF01114925.
14. Shemetkov LA. *Formations of finite groups*. Moscow: Nauka; 1978. 272 p. Russian.
15. Makan AR. The Fitting length of a finite soluble group and the number of conjugacy classes of its maximal metanilpotent subgroups. *Canadian Mathematical Bulletin*. 1973;16(2):233–237. DOI: 10.4153/CMB-1973-040-3.
16. Khukhro EI, Shumyatsky P. Nonsoluble and non- p -soluble length of finite groups. *Israel Journal of Mathematics*. 2015;207(2):507–525. DOI: 10.1007/s11856-015-1180-x.
17. Khukhro EI, Shumyatsky P. On the length of finite factorized groups. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 2015;194(6):1775–1780. DOI: 10.1007/s10231-014-0443-1.
18. Murashka VI, Vasil'ev AF. On the lengths of mutually permutable products of finite groups. *Acta Mathematica Hungarica*. 2023;170(1):412–429. DOI: 10.1007/s10474-023-01346-2.
19. Murashka VI. Formations of finite groups in polynomial time II: the $\mathfrak{F}$ -hypercenter and its generalizations. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. 2025;31(1):154–165. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-154-165.
20. Skiba AN. On some classes of sublattices of the subgroup lattice. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:35–47. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-35-47.
21. Safonov VG, Safonova IN, Skiba AN. On Baer- σ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*. 2020;48(9):4002–4012. DOI: 10.1080/00927872.2020.1753760.
22. Safonova IN, Safonov VG. On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:6–16. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-6-16.

УДК 519.632.4, 519.624.2

ПРИМЕНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В РАЗРЫВНОМ МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

М. С. МАКСИМОВ¹⁾, С. В. ЛЕМЕШЕВСКИЙ²⁾

¹⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

²⁾Научно-технический центр «Симмэйкерс», территория инновационного центра «Сколково»,
бул. Большой, 42, стр. 1, 121205, г. Москва, Россия

Аннотация. Для решения задачи в неограниченной области, соответствующей уравнению Пуассона в сферически-симметричном случае, построен численный метод, основанный на разрывном методе Галёркина, и проведен его анализ. Для работы с неограниченной областью были использованы рациональные функции, полученные из композиции полиномов с алгебраическим преобразованием полубесконечного интервала. Среди особенностей данного варианта анализа можно выделить использование пространств Соболева с различными весами в зависимости от производных.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина; полубесконечный интервал; уравнение Пуассона; весовые пространства Соболева; полиномиальная аппроксимация с весами; анализ сходимости.

Образец цитирования:

Максимов МС, Лемешевский СВ. Применение рациональной аппроксимации в разрывном методе Галёркина на полубесконечном интервале. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;1: 23–39.
EDN: GMWWQR

For citation:

Maksimau MS, Lemeshevsky SV. Application of a rational approximation in the discontinuous Galerkin method on a semi-infinite interval. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;1:23–39. Russian.
EDN: GMWWQR

Авторы:

Михаил Сергеевич Максимов – младший научный сотрудник отдела вычислительной математики и математического моделирования.

Сергей Владимирович Лемешевский – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник.

Authors:

Mikhail S. Maksimau, junior researcher at the department of computational mathematics and mathematical modelling.
maksimau.mikhail@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0000-2344-4403>

Sergey V. Lemeshevsky, PhD (physics and mathematics); researcher.
sergey.lemeshevsky@simmakers.ru
<https://orcid.org/0000-0001-6213-4176>

APPLICATION OF A RATIONAL APPROXIMATION IN THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD ON A SEMI-INFINITE INTERVAL

M. S. MAKSIMAU^a, S. V. LEMESHEVSKY^b

^a*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganova Street, Minsk 220072, Belarus*

^b*Simmakers, Innovation Centre «Skolkovo», 42 Bolshoj Boulevard, 1 building, Moscow 121205, Russia*

Corresponding author: M. S. Maksimau (maksimau.mikhail@gmail.com)

Abstract. To solve a problem on an unbounded domain corresponding to the Poisson equation in the spherically symmetric case, a numerical method based on the discontinuous Galerkin method was developed and analysed. To address the unbounded domain, the rational functions were constructed by composing polynomials with an algebraic mapping of a semi-infinite interval. A notable feature of this approach is the use of Sobolev spaces with different weights depending on the derivatives.

Keywords: discontinuous Galerkin method; semi-infinite interval; Poisson equation; weighted Sobolev spaces; polynomial approximation with weights; convergence analysis.

Введение

Многие физические модели, описывающие различные явления, формулируются в неограниченных областях. Примеры таких моделей встречаются в квантовой механике [1; 2], астрофизике [3; 4], электрохимии [5] и др. В некоторых случаях модель предполагает решение уравнения Пуассона.

При решении задач в неограниченной области можно использовать спектральные методы, обзор которых приведен в работах [6; 7]. Применяя один из описанных подходов, заключающийся в использовании отображений полиномов Якоби (или неклассических полиномов), можно строить многодоменные спектральные методы [8], в которых часть элементов разбиения области решения являются неограниченными.

Разрывный метод Галёркина в эллиптических задачах позволяет без особых трудностей вводить базисные функции, узлы которых не совпадают на соседних элементах разбиения области решения, что является привлекательным свойством при использовании базисов высоких порядков [9]. Методы декомпозиции области решения также часто формулируются в рамках разрывного метода Галёркина [10; 11]. Можно отметить большую популярность разрывного метода в нестационарных задачах (в частности, связанных с гидродинамикой в астрофизике [12; 13]). В некоторых случаях результаты, полученные для эллиптических задач, затем используются и в нестационарных задачах [9].

Численному решению уравнения Пуассона в сферических координатах в неограниченной области посвящено много работ в сфере вычислительной физики (см., например, [14–18]). Часто эти методы основаны на разложении решения u в ряд по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Так как сферические функции являются собственными функциями сферической части оператора Лапласа (или оператора Лапласа – Бельтрами [19]), после разложения и интегрирования получается набор обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для $\hat{u}_{lm}(r)$. Однако во всех приведенных работах отсутствует анализ сходимости решения. Ниже перечислены публикации, в которых предлагаются различные методы решения ОДУ указанного типа.

В работе [17] для построения решения используется функция Грина, в которой предполагается аппроксимировать интегралы. В более современной публикации того же автора [16] применяется метод конечных объемов второго порядка с последующим быстрым преобразованием Фурье для проведения расчетов. При аппроксимации по r для граничного условия на бесконечности используется асимптотическое выражение, полученное при определенных предположениях о функции. Как указано в работе [16], метод конечных объемов в данной задаче позволяет строить консервативные методы для определенных уравнений ньютоновской гидродинамики [20]. В этом контексте разрывные методы Галёркина можно рассматривать как расширение методов конечных объемов [21] и ожидать от них большей эффективности при правильном построении для конкретных случаев.

В статье [15] используется аналогичное приведенному в настоящей работе преобразование полубесконечного интервала в ограниченный, после чего применяется семиточечная конечно-разностная схема. Этот вариант можно рассматривать как один из самых простых подходов к решению подобных ОДУ, но с ограниченной эффективностью.

В публикации [18] используется разложение с помощью спектральных форм, введенных в указанной работе. Для быстрой сходимости предполагается высокая гладкость решения.

В работе [14] область решения разбивается на три части: первая из них (*kernel*) включает начало координат, вторая (*shell*) состоит из отрезков, а третья (*external*) представляет собой полубесконечный интервал. На каждой из этих частей функция аппроксимируется суммой отображенных на соответствующий интервал полиномов Чебышева. Данный подход ближе всего к приведенному в настоящей работе. Основные отличия состоят в разных отображениях на полубесконечном интервале и использовании разрывной аппроксимации с соответствующей билинейной формой.

Работы, посвященные численному анализу приближенных методов решения дифференциальных уравнений в неограниченной области, в основном касаются спектральных однодоменных методов [6], но в контексте практических методов, описанных выше, часто более предпочтительными оказываются многодоменные, консервативные методы. Кроме того, применяя схему анализа сходимости [22], можно ожидать, что часть разработанной теории может быть использована и при рассмотрении задач на собственные значения в неограниченной области.

В данной работе исследуются вопросы аппроксимации в неограниченной области. Чтобы сфокусироваться на основной идее, по примеру публикации [23] будем рассматривать случай центральной симметрии, т. е. уравнение, соответствующее $\hat{u}_{00}(r)$. Можно отметить, что, как и в указанной публикации, решение рассматривается в неравномерных (*nonuniform*) пространствах Соболева. Расчетный метод Галёркина, предлагаемый в настоящей работе, основывается на главной формулировке (*primal formulation*) и соответствует варианту SIPG метода [21].

Работа построена следующим образом. В разделе «Модельная задача» приведены постановка задачи и используемые обозначения. В разделе «Дискретизация разрывным методом Галёркина» построены дискретная задача, билинейная форма численного метода. В разделе «Вспомогательные результаты» представлены необходимые при анализе неравенства. В разделах «Коэрцитивность и непрерывность билинейной формы численного метода» и «Оценка скорости сходимости» исследованы свойства билинейной формы численного метода и приведена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному. В разделе «Тестовые расчеты» выполнены тестовые расчеты для некоторых простых физических моделей.

Модельная задача

В настоящей работе рассматривается следующая задача: для $r^2 f \in L^2(\Omega)$ найти u такое, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du(r)}{dr} \right) &= f(r) \text{ в } \Omega, \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \frac{du(r)}{dr} &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega = (0, \infty)$.

Обозначим слабую производную через $\partial : L^1_{\text{loc}}(U) \rightarrow L^1_{\text{loc}}(U)$, где U – открытое множество. В качестве пространств Соболева, в которых исследуются решения задачи, будем рассматривать вариант с различными весами для каждой из производных:

$$H^\alpha(U, \omega) = \{u \in L^2(U, \omega_0) : \partial^i u \in L^2(U, \omega_i), i \in \{1, \dots, \alpha\}\}.$$

Пространства Соболева с используемыми в работе весами являются полными пространствами [24]. Соответствие между $H^1(U, \omega)$, локально абсолютно непрерывными функциями $AC_{\text{loc}}(U)$ и их производными можно показать, основываясь на публикации [25].

Введем обозначение $\mathcal{H} = H^1(\Omega, \omega)$ с весовой функцией ω , которая имеет вид $\omega_i = r^{2i}$, т. е. сами функции интегрируются с весом $\omega_0 = 1$, производные – с весом $\omega_1 = r^2$ и т. д.

При выборе нормы $\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\infty u^2 dr + \int_0^\infty r^2 (\partial u)^2 dr$, используя неравенство Харди [26, формула (9.9.10)], можно показать, что норма $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ эквивалентна норме $\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\infty r^2 (\partial u)^2 dr$, с которой пространство $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ имеет все нужные свойства.

Слабая формулировка, соответствующая задаче (1), состоит в том, чтобы найти $u \in \mathcal{H}$ такое, что

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}, \quad (2)$$

$$B(u, v) = \int_0^\infty r^2 \partial u \partial v dr, \quad l(v) = \int_0^\infty r^2 f v dr = (r^2 f, v)_\Omega. \quad (3)$$

Из приведенных определений непосредственно следует непрерывность и коэрцитивность билинейной формы: $|B(u, v)| \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}$, $B(u, u) \geq \|u\|_{\mathcal{H}}^2$, откуда на основании теоремы Лакса – Мильграма [24] вытекает существование и единственность решения задачи (2), (3) в пространстве $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

В задаче (2) из существования решения $u \in H^1(\Omega, \omega)$ следует, что $u \in H^2(\Omega, \omega)$. Для того чтобы убедиться, что $r^2 \partial^2 u \in L^2(\Omega)$, достаточно записать выражение

$$\int_0^\infty r^2 \partial u \partial \psi dr = \int_0^\infty r^2 f \psi dr, \quad \psi(r) = \int_r^\infty \frac{1}{s^2} \partial \varphi(s) ds, \quad \psi \in H^1(\Omega, \omega), \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Используя $r^2 f = \partial \int_0^r s^2 f(s) ds$ и интегрирование по частям, приходим к $\int_0^\infty \partial \left(\int_0^r s^2 f ds \right) \left(\int_r^\infty \frac{\partial \varphi}{s^2} ds \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_0^r s^2 f ds \right) \frac{\partial \varphi}{r^2} dr$, откуда следует, что $\int_0^\infty \partial u \partial \varphi dr = \int_0^\infty \partial \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r s^2 f ds \right) \varphi dr$. Учитывая неравенство (9.9.1) из работы [26], получаем оценку

$$\int_0^\infty r^4 (\partial^2 u)^2 dr \leq \int_0^\infty r^4 \left(|f(r)| + \frac{2}{r^3} \int_0^r |s^2 f| ds \right)^2 dr \leq 2 \int_0^\infty r^4 f^2 dr + 8 \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \int_0^r |s^2 f| ds \right)^2 dr \leq 34 \int_0^\infty r^4 f^2 dr.$$

Дискретизация разрывным методом Галёркина

Перед тем как ввести пространства функций, которые будут использоваться для построения и анализа решения, определим разбиение области T на интервалы K_i :

$$T = \{K_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad K_i = \begin{cases} (r_{i-1}, r_i), & i=1, \dots, n-1, \\ (r_{n-1}, \infty), & i=n, \end{cases} \quad r_i \in \mathbb{R}, \quad r_0 = 0, \quad r_{i-1} < r_i, \quad r_{n-1} \geq 1.$$

Затем припишем каждому из них набор параметров

$$k = \{k_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad p = \{p_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad h = \{h_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad h_i = \begin{cases} r_i - r_{i-1}, & i=1, \dots, n-1, \\ 1, & i=n, \end{cases}$$

где k_i будет соответствовать гладкости решения u на интервале K_i , а p_i – размерности аппроксимирующего пространства на интервале K_i .

Предполагается, что существуют константы C_T и C_G , для которых выполняются неравенства

$$C_T d(K_i) \leq d(r_i) \leq C_G d(K_i), \quad d(K_i) = \frac{h_i}{p_i^2}, \quad d(r_i) = \frac{1}{2} \frac{h_i + h_{i+1}}{p_i^2 + p_{i+1}^2}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем говорить о конечномерных пространствах, которые строятся с помощью множества полиномов $P_n(I)$, заданных на интервале $I = (-1, 1)$, и преобразования $\xi_K: I \rightarrow K$, $\xi_K \in C^\infty(I)$. В качестве функций ξ_K используются два отображения:

$$\xi_{(a,b)}(x) = qx + p, \quad \xi_{(a,b)}^{-1}(r) = \frac{r-p}{q}, \quad q = \frac{b-a}{2}, \quad p = \frac{b+a}{2},$$

для ограниченного интервала и

$$\xi_{(a,\infty)}(x) = \frac{2a}{1-x}, \quad \xi_{(a,\infty)}^{-1}(r) = \frac{r-2a}{r}$$

для полубесконечного интервала. Отображение $\xi_{(a,\infty)}$ соответствует алгебраическому отображению (*algebraic mapping*) [7; 27] $L \frac{1+x}{1-x}$, модифицированному для описываемого метода.

Введем конечномерное пространство

$$S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega, \omega_0) : v|_{K_i} \in V_{p_i}(K_i, \xi_{K_i}, \omega) \right\},$$

где $v|_{K_i}$ обозначает сужение функции v на интервал K_i и

$$V_{p_i}(K_i, \xi_{K_i}, \omega) = \left\{ v \in L^2(K_i, \omega_0) : v \in H^2(K_i, \omega) \cap (v \circ \xi_{K_i} \in P_{p_i}(I)) \right\}.$$

В сужениях содержатся все рациональные функции (в композиции с ξ_{K_i} являющиеся полиномами), которые при этом принадлежат соответствующему бесконечномерному пространству. С использованием веса ω определим также пространства Соболева специального вида (*broken Sobolev spaces*) (будут использоваться в дальнейшем)

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega, \omega_0) : v|_{K_i} \in H^{k_i}(K_i, \omega) \quad \forall K_i \in \mathcal{T} \right\},$$

для которых верно, что $S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega) \subset H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$.

Кроме стандартных для введенных пространств норм и полунорм, определенных через суммы норм функции на каждом из элементов разбиения,

$$\|u\|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \|u\|_{H^{k_i}(K_i, \mathcal{T}, \omega)}^2, \quad |u|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 = \sum_{i=1}^n |u|_{H^{k_i}(K_i, \mathcal{T}, \omega)}^2,$$

введем норму $\|\cdot\|$ в пространствах $H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$, $S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$.

$$\|u\|^2 = |u|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 + J^\sigma(u, u), \quad J^\sigma(u, v) = \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \sigma(r_i) [u]_{r_i} [v]_{r_i}, \quad (5)$$

где $[u]_r = u(r^-) - u(r^+)$; $\sigma(r_i) = \frac{C_\sigma}{d(r_i)}$.

В данном варианте разрывного метода Галёркина используется билинейная форма $A(u, v)$, определенная следующим образом:

$$A(u, v) = a(u, v) + J^\sigma(u, v), \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{K_i} r^2 \partial u \partial v dr - \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \left(\langle \partial u \rangle_{r_i} [v]_{r_i} + \langle \partial v \rangle_{r_i} [u]_{r_i} \right), \quad (6)$$

где $\langle u \rangle_r = \frac{1}{2} (u(r^-) + u(r^+))$.

Численный метод заключается в том, чтобы найти $u_h \in S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$ такое, что

$$A(u_h, v_h) = (r^2 f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega).$$

Введение штрафного слагаемого $J^\sigma(u, v)$ в норму $\|\cdot\|$ и билинейной форме $A(u, v)$ обусловлено тем, что в разрывных пространствах только при достаточно большом значении штрафного параметра C_σ билинейная форма будет коэрцитивной [9].

Ниже показаны непрерывность и коэрцитивность формы $A(\cdot, \cdot)$. Из этих свойств на основании теоремы Лакса – Мильграма [24] следует существование и единственность численного решения в пространстве $(S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega), \|\cdot\|)$. Также из непрерывности и коэрцитивности формы $A(\cdot, \cdot)$ получена оценка выражения $\|u_h - u\|$ через параметры h, p , что дает оценку скорости сходимости метода. Аналогичный подход описан в публикациях [9; 21] и многих других работах.

Вспомогательные результаты

Неравенства Маркова. Приведем оценки со значениями констант, связывающих нормы полиномов и их производных. Далее в работе будет видно, что наличие таких оценок позволяет оценить и константу штрафного слагаемого C_σ . С помощью оценок для полиномов Якоби из статьи [28] можно получить неравенства для $v \in V_n(K, \xi_K, \omega)$:

$$\|\partial v\|_{L^2(K, r^2)} \leq \frac{c_{ab} n^2}{b-a} \|v\|_{L^2(K, r^2)}, \quad K = (a, b), \quad c_{ab} = 4\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad (7)$$

$$\|\partial v\|_{L^2(K)} \leq c_a n^2 \|v\|_{L^2(K, r^{-4})}, \quad K = (a, \infty), \quad c_a = 2\sqrt{10}a.$$

Поведение функций на границах интервалов. В данном разделе символ u обозначает элемент пространства Соболева, не обязательно являющийся решением задачи (1). При рассмотрении значений функций на границах интервалов имеются в виду соответствующие пределы. Нетрудно показать, что для $u \in H^2((0, a), \omega)$ справедливы равенства $\lim_{r \rightarrow 0^+} ru(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \partial u(r) = 0$, а для $u \in H^2((a, \infty), \omega)$ справедливы равенства $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} r \partial u(r) = 0$.

Для получения оценок граничных значений функций при различных вариантах локально абсолютно непрерывных функций $f \in AC_{loc}(K)$ и $p \in C^\infty(K)$ используется формула

$$pf^2 \Big|_a^b = \int_a^b f^2 \partial p dr + 2 \int_a^b pf \partial f dr. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть $u \in H^2((0, a), \omega)$. Тогда на границах интервала для функции u и ее производной выполняются неравенства

$$a^2 u^2(a) \leq \frac{2}{a^3} \int_0^a r^4 u^2 dr + \frac{2}{a^2} \left(\int_0^a r^4 u^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_0^a v^2 dr \right)^{1/2}, \quad (9)$$

$$a^2 (\partial u(a))^2 \leq 8u^2 + \frac{4}{a^3} \int_0^a v^2 dr + \frac{4}{a^2} \left(\int_0^a v^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_0^a (\partial v)^2 dr \right)^{1/2}, \quad (10)$$

где $v = \partial(r^2 u(r))$.

Доказательство. Используем равенство (8) с $p = \frac{2r}{b} - 1$, $f(r) = r^2 u(r)$ при $a = \frac{1}{n}$, $b = a - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда, исходя из поведения функций на границе интервалов и теоремы о монотонной сходимости, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^4 u^2 \Big|_{\frac{1}{n}}^{a - \frac{1}{n}} = a^4 u^2(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{a - \frac{1}{n}} |r^2 u| |\partial(r^2 u)| dr = \int_0^a |r^2 u| |\partial(r^2 u)| dr,$$

откуда при использовании равенства (8) непосредственно следует неравенство (9).

Оценка для производной получается аналогично. Снова используем равенство (8), но в этот раз с $f(r) = \partial(r^2 u(r))$. Перенесем некоторые слагаемые в правую часть, чтобы получить $a^4 (\partial u(a))^2 \leq \int_a^b f^2 \partial p dr + 2 \int_a^b pf \partial f dr - 4a^4 u^2(a) + 4a^3 |u(a)| |\partial u(a)|$, после чего остается применить к $4a^3 |u(a)| |\partial u(a)|$ неравенство Юнга с $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Оценки для граничных значений на интервале (a, b) общеизвестны:

$$u^2(a) + u^2(b) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b u^2 dr + 2 \left(\int_a^b u^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^b (\partial u)^2 dr \right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$(\partial u(r))^2(b) + (\partial u(r))^2(a) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b (\partial u)^2 dr + 2 \left(\int_a^b (\partial u)^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^b (\partial^2 u)^2 dr \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Из-за ограничений, накладываемых в дальнейшем оценкой полиномиальной аппроксимации, понадобится оценка нормы $\|\partial u\|_{L^2((a, \infty), r^2)}$ через норму $\|\partial(r^2 \partial u)\|_{L^2((a, \infty))}$.

Лемма 2. Пусть $u \in H^2((a, \infty), \omega)$. Тогда для нормы $\|\partial u\|_{L^2((a, \infty), r^2)}$ справедлива оценка

$$\|\partial u\|_{L^2((a, \infty), r^2)}^2 \leq 2a^3 (\partial u(a))^2 + 8 \|\partial(r^2 \partial u)\|_{L^2((a, \infty))}^2, \quad (13)$$

а для граничных значений выполняются неравенства

$$u^2(a) \leq 4a^3 \int_a^\infty \frac{1}{r^4} u^2 dr + 2a^2 \left(\int_a^\infty \frac{1}{r^4} u^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^\infty (\partial u)^2 dr \right)^{1/2}, \quad (14)$$

$$(\partial u(a))^2 \leq 4a^{-1} \int_a^\infty (\partial u)^2 dr + 2a^{-2} \left(\int_a^\infty (\partial u)^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^\infty (\partial(r^2 \partial u))^2 dr \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Доказательство. Начнем с оценки нормы в $L^2((a, \infty), r^2)$. Из того, что $\partial u \in AC_{loc}((a, \infty))$, следует равенство $r^2 \partial u(r) = a^2 \partial u(a) + \int_a^r \partial(s^2 \partial u(s)) ds$.

Используем неравенство Коши для интеграла

$$|r^2 \partial u(r)| \leq |a^2 \partial u(a)| + \left(\int_a^r s^{-1/2} ds \right)^{1/2} \left(\int_a^r s^{1/2} (\partial(s^2 \partial u(s)))^2 ds \right)^{1/2}.$$

Возведем выражение в квадрат и приведем к нужному виду:

$$r^4 (\partial u(r))^2 \leq 2a^4 (\partial u(a))^2 + 4(r^{1/2} - a^{1/2}) \int_a^r s^{1/2} (\partial(s^2 \partial u(s)))^2 ds.$$

Проинтегрируем неравенство от a до ∞ и изменим порядок интегрирования:

$$\int_a^\infty r^2 (\partial u(r))^2 dr \leq 2a^3 (\partial u(a))^2 + 4 \int_a^\infty s^{1/2} (\partial(s^2 \partial u(s)))^2 \int_s^\infty r^{-2} (r^{1/2} - a^{1/2}) dr ds,$$

откуда следует оценка (13).

Оценки граничных значений получим с помощью равенства (8). В случае с $u^2(a)$ выберем $p = r^{-2}(1 - 2ar^{-1})$, $f = u$, а в случае с $(\partial u(a))^2$ возьмем такое же p и $f(r) = r^2 \partial u$.

Для интегралов на интервале $(0, a)$ используем следующие обозначения:

$$A_1 = \int_0^{r_1} r^4 u^2 dr, \quad B_1 = \int_0^{r_1} (\partial(r^2 u))^2 dr, \quad C_1 = \int_0^{r_1} (\partial^2(r^2 u))^2 dr.$$

Тогда неравенства (9), (10) можно переписать в виде

$$r_1^2 u^2(r_1) \leq \frac{2}{r_1^3} A_1 + \frac{2}{r_1^2} A_1^{1/2} B_1^{1/2}, \quad r_1^2 (\partial u(r_1))^2 \leq \frac{16}{r_1^5} A_1 + \frac{16}{r_1^4} A_1^{1/2} B_1^{1/2} + \frac{4}{r_1^3} B_1 + \frac{2}{r_1^2} B_1^{1/2} C_1^{1/2}.$$

Для интегралов на интервале (a, b) введем обозначения

$$A_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} u^2 dr, \quad B_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} (\partial u)^2 dr, \quad C_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} (\partial^2 u)^2 dr, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

при которых неравенства (11), (12) принимают вид

$$u^2(r_i) + u^2(r_{i+1}) \leq \frac{2}{h_i} A_i + 2A_i^{1/2} B_i^{1/2}, \quad (\partial u(r_i))^2 + (\partial u(r_{i+1}))^2 \leq \frac{2}{h_i} B_i + 2B_i^{1/2} C_i^{1/2}.$$

Для интегралов на полубесконечном интервале (a, ∞) используем обозначения

$$A_n = \int_{r_{n-1}}^\infty \frac{u^2}{r^4} dr, \quad B_n = \int_{r_{n-1}}^\infty (\partial u)^2 dr, \quad C_n = \int_{r_{n-1}}^\infty (\partial(r^2 \partial u))^2 dr,$$

с которыми неравенства (14), (15), а также оценку (13) можно переписать в виде

$$u^2(r_{n-1}) \leq 4r_{n-1}^3 A_n + 2r_{n-1}^2 A_n^{1/2} B_n^{1/2}, \quad (\partial u(r_{n-1}))^2 \leq 4r_{n-1}^{-1} B_n + 2r_{n-1}^{-2} B_n^{1/2} C_n^{1/2},$$

$$\|\partial u\|_{L^2(K_n, r^2)}^2 \leq 8r_{n-1}^2 B_n + 4r_{n-1} B_n^{1/2} C_n^{1/2} + 8C_n.$$

Лемма 3. Для $v \in V_n(K, \xi_K, \omega)$ выполняются неравенства

$$\|v\|_{L^2(\partial K, r^2)}^2 \leq \frac{2}{b-a} \|v\|_{L^2(K, r^2)}^2 (3 + c_{ab} n^2), \quad K = (a, b), \quad (16)$$

$$a^2 v^2(a^+) \leq 4a \|v\|_{L^2(K, r^{-4})}^2 (1 + \sqrt{10} n^2), \quad K = (a, \infty). \quad (17)$$

Доказательство. В обеих частях доказательства $\hat{v} = v \circ \xi_K \in P_n(I)$. Для доказательства на ограниченном интервале запишем равенство (8) при $p = x(qx + p)^2$, $f(x) = \hat{v}(x)$, $a = -1$, $b = 1$:

$$b^2 \hat{v}^2(1^-) + a^2 \hat{v}^2(-1^+) = \int_{-1}^1 (qx + p)(3qx + p) \hat{v}^2 dx + 2 \int_{-1}^1 x(qx + p)^2 \hat{v} \partial \hat{v} dx.$$

Из этого можно получить неравенство

$$b^2 \hat{v}^2(1^-) + a^2 \hat{v}^2(-1^+) \leq 3 \int_{-1}^1 (qx + p)^2 \hat{v}^2 dx + 2 \int_{-1}^1 |x| (qx + p)^2 |\hat{v}| |\partial \hat{v}| dx.$$

Используем неравенство Коши и перейдем к интервалу (a, b) с помощью $\xi_{(a,b)}^{-1}$:

$$b^2 v^2(b^-) + a^2 v^2(a^+) \leq \frac{6}{b-a} \int_a^b r^2 v^2 dr + 2 \left(\int_a^b r^2 v^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^b r^2 (\partial v)^2 dr \right)^{1/2},$$

после чего остается воспользоваться неравенством (7).

Для полубесконечного интервала (a, ∞) доказательство проводится аналогично при $p = x(1-x)^2$.

Полиномиальная аппроксимация в пространствах Соболева. В разрывных методах Галёркина данный вопрос является более сложным, чем в непрерывных методах Галёркина, из-за необходимости оценки погрешности аппроксимации до второй производной включительно, что может быть сложнее ее оценки только до первой производной. В статье [7] приведены некоторые подходы к анализу полиномиальных аппроксимаций в неограниченной области, но они работают только для оценок функции и ее первой производной.

В качестве теоретической основы для оценки полиномиальной аппроксимации возьмем работу [29], в которой используется следующий вариант пространства Соболева:

$$W_p^n([-1, 1], \omega_\alpha^\beta) = \left\{ f \in C^{n-1}([-1, 1]) : \partial^n f \in L^p(\omega_\alpha^\beta) \right\}.$$

Также в ней приведена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $f \in W_2^n([-1, 1], \omega_\alpha^\beta)$. Тогда существует полином $p \in P_n([-1, 1])$ такой, что

$$\|f^{(k)} - p^{(k)}\|_{L^2([-1, 1], \omega_\alpha^\beta)} \leq c n^{s-k} \|f^{(s)}\|_{L^2([-1, 1], \omega_\alpha^\beta)}, \quad 0 \leq k \leq s,$$

при выполнении условия $\alpha = 0$ или $\beta = 0$.

Введем обозначение $D = r^2 \partial$. Основываясь на указанной теореме, можно сформулировать следствие об аппроксимации.

Следствие 1. При $s \geq k$ и $s \geq 2$ выполняются следующие оценки полиномиальной аппроксимации:

- для $u_1 \in H^s(K_1, \omega)$ существует $P_1 \in V_n(K_1, \xi_{(0, r_1)}, \omega)$ такое, что

$$\|\partial^k(r^2 u_1) - \partial^k P_1\|_{L^2(K_1)} \leq c_1 \cdot 2^{k-s} \frac{p_1^{k-s}}{h_1^{k-s}} \|\partial^s(r^2 u_1)\|_{L^2(K_1)}, \quad K_1 = (0, r_1); \quad (18)$$

- для $u_2 \in H^s(K_i, \omega)$ существует $P_2 \in V_n(K_i, \xi_{(r_{i-1}, r_i)}, \omega)$, $i = 2, \dots, n-1$, такое, что

$$\|\partial^k u_2 - \partial^k P_2\|_{L^2(K_i)} \leq c_2 \cdot 2^{k-s} \frac{p_i^{k-s}}{h_i^{k-s}} \|\partial^s u_2\|_{L^2(K_i)}, \quad K_i = (r_i, r_{i+1}); \quad (19)$$

• для $u_3 \in H^s(K_n, \omega)$ существует $P_3 \in V_n(K_n, \xi_{(a, \infty)}, \omega)$ такое, что при $k \geq 1$

$$\|D^k u_3 - D^k P_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})} \leq c_3 \cdot 2^{k-s} r_{n-1}^{k-s} p_n^{k-s} \|D^s u_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})}, \quad K_n = (r_n, \infty), \quad (20)$$

а при $k = 0$

$$\|u_3 - P_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})} \leq c_4 \sum_{j=0}^2 2^{-s} r_{n-1}^{-s} p_n^{j-s} \|D^{j+s} u_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})}, \quad K_n = (r_n, \infty). \quad (21)$$

Первые три неравенства можно получить, перейдя к интервалу $(-1, 1)$ и применив теорему 1, а для получения последнего неравенства достаточно рассмотреть аппроксимирующий полином $p_n(x) = \mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f(x) - \mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f(1)$, где $\mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f$ является частичной суммой разложения f в ряд Фурье с ортогональными функциями, определенными в работе [29]:

$$\mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f := \sum_{k=0}^n \hat{f}_k^{\alpha-s, \beta-s} J_{k, \theta}^{\alpha-s, \beta-s}, \quad J_{k, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} := \begin{cases} \frac{(x-\theta)^n}{n!}, & 0 \leq n \leq s-1, \\ \int_{\theta}^x \frac{(x-t)^{s-1}}{(s-1)!} J_{n-s}^{\alpha-s, \beta-s}(t) dt, & n \geq s, \end{cases}$$

здесь $J_{n-s}^{\alpha-s, \beta-s}$ — полиномы Якоби.

Коэрцитивность и непрерывность билинейной формы численного метода

Билинейную форму $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть коэрцитивной относительно нормы $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, если существует такое $C > 0$, что выполняется неравенство $a(v, v) \geq C \|v\|^2 \forall v \in V$.

Лемма 4. Пусть выполняются неравенства (4), а также $C_\sigma \geq 4C_G C_{ab}^a$. Тогда справедливо неравенство $A(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 \forall v \in S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$ ($A(v, v)$ и $\|v\|$ определены в формулах (6) и (5) соответственно).

Доказательство. Для билинейной формы $a(v, v)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \int_{K_i} r^2 (\partial v)^2 dr - 2 \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i} [v]_{r_i} &\geq |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - 2 \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2} \sqrt{\delta \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 [v]_{r_i}^2} \geq \\ &\geq \overbrace{|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2}^{\chi_1} - \overbrace{\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n-1} d(r_i) r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2}^{\chi_2} - \delta \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{d(r_i)} r_i^2 [v]_{r_i}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим слагаемое χ_2 из последней части неравенства (22) через норму χ_1 .

Учитывая условия на сетку (4), можно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(r_i) r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2 \leq C_G \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} d(K_i) \|\partial v\|_{L^2([r_{i-1}, r_i], r^2)}^2 + d(K_n) r_{n-1}^2 (\partial v(r_{n-1}^+))^2 \right)}^{\chi(v)}. \quad (23)$$

Используя оценки (16) и (17), выражение $\chi(v)$ из неравенства (23) можно оценить следующим образом:

$$\chi(v) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{p_i^2} h_i^{-1} |v|_{H^1(K_i, r^2)}^2 (3 + c_{ab} p_i^2) + 4 \frac{r_{n-1}}{p_n^2} \|\partial v\|_{L^2(K_n)}^2 (1 + \sqrt{10} p_n^2).$$

Исходя из того, что $p_i^2 > 1$, $r_{n-1} \geq 1$ и $\int_{r_{n-1}}^{\infty} (\partial v)^2 dr \leq r_{n-1}^{-2} \int_{r_{n-1}}^{\infty} r^2 (\partial v)^2 dr$, получаем

$$\chi(v) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} |v|_{H^1(K_i, r^2)}^2 (3 + c_{ab}) + 4 |v|_{H^1(K_n, r^2)}^2 (1 + \sqrt{10}).$$

Вынесем константу $C_{ab}^a = \max\left(2(3 + c_{ab}), 4(1 + \sqrt{10})\right)$ и получим необходимую оценку через норму производной:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(r_i) r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2 \leq C_G C_{ab}^a |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2. \quad (24)$$

Возвращаясь к неравенству (22) с $\delta = 2C_G C_{ab}^a$, имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d(r_i)}{\delta} r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2 - \frac{\delta}{C_\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - 2 \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \geq \frac{1}{2} \left(|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \right). \end{aligned}$$

Тогда из определения формы $A(\cdot, \cdot)$ следует, что

$$A(v, v) \geq \frac{1}{2} \left(|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \right) = \frac{1}{2} \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{S}_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega).$$

Для того чтобы показать сходимость метода, также потребуются различные неравенства для $a(u, v)$, $J^\sigma(u, v)$, $\|\cdot\|_{1,\sigma}$, которые приведены ниже.

Для билинейной формы $a(u, v)$ выполняется неравенство

$$a(u, v) \leq \|u\|_{1,\sigma} \|v\|_{1,\sigma} \quad \forall u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}, \omega), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\sigma}^2 &= \|u\|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(r_i))^{-1} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2 = \\ &= |u|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [u]_{r_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(r_i))^{-1} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2, \end{aligned}$$

что можно увидеть, проведя доказательство по аналогии с доказательством, описанным в работе [21].

Лемма 5. Для $u, v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$ справедливы следующие неравенства:

$$|J^\sigma(u, v)| \leq \sqrt{J^\sigma(u, u)} \sqrt{J^\sigma(v, v)}, \quad J^\sigma(u, u) \leq \|u\|_{1,\sigma}^2, \quad (26)$$

$$J^\sigma(u, u) \leq C_\sigma C_T^{-1} \left(\xi_1(u) + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \xi_i(u) + r_{n-1}^2 \xi_n(u) \right), \quad (27)$$

где при $i = 2, \dots, n-1$

$$\xi_1(u) = 3 \frac{p_1^3}{h_1^4} A_1 + \frac{p_1}{h_1^2} B_1, \quad \xi_i(u) = 3 \frac{p_i^3}{h_i^2} A_i + p_i B_i, \quad \xi_n(u) = 5 p_n^3 r_{n-1}^4 A_n + p_n B_n.$$

Доказательство. По аналогии с неравенством (23) можно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [u]_{r_i}^2 \leq C_\sigma C_T^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (d(K_i))^{-1} \overbrace{\|u\|_{L^2(\partial[r_{i-1}, r_i], r^2)}^2}^{\chi_1} + (d(K_n))^{-1} \overbrace{r_{n-1}^2 u^2(r_{n-1}^+)}^{\chi_2} \right). \quad (28)$$

Применив оценки (9), (11) к χ_1 и оценку (14) к χ_2 из неравенства (28), имеем

$$\begin{aligned} J^\sigma(u, u) &\leq C_\sigma C_T^{-1} \left(\xi'_1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \xi'_i + r_{n-1}^2 \xi'_n \right), \quad \xi'_i = \frac{p_i^2}{h_i} \left(\frac{2}{h_i} A_i + 2 A_i^{1/2} B_i^{1/2} \right), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \xi'_1 &= \frac{p_1^2}{h_1} \left(\frac{2}{h_1^3} A_1 + \frac{2}{h_1^2} A_1^{1/2} B_1^{1/2} \right), \quad \xi'_n = p_n^2 (4 r_{n-1}^3 A_n + 2 r_{n-1}^2 A_n^{1/2} B_n^{1/2}). \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга и перераспределив некоторые множители, получим искомый результат.

Лемма 6. Для $u \in H^2(\Omega, T, \omega)$ и $v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{1,\sigma} \leq \sqrt{C_r R(u)}, \quad \|v_h\|_{1,\sigma} \leq \sqrt{\left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma}\right)} \|v_h\|, \quad (29)$$

где $C_r = \max(C_\sigma C_T^{-1}, C_\sigma^{-1} C_G, 1)$, а $R(u) = \eta_1(u) + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \eta_i(u) + r_{n-1}^2 \eta_n(u)$,

$$\eta_1(u) = 27 \frac{p_1^3}{h_1^4} A_1 + 15 \frac{p_1}{h_1^2} B_1 + \frac{2}{p_1^2} C_1, \quad \eta_n(u) = 5 p_n^3 r_{n-1}^6 A_n + 16 p_n r_{n-1}^2 B_n + (p_n^{-2} + 10) C_n,$$

$$\eta_i(u) = 3 \frac{p_i^3}{h_i^2} A_i + 4 p_i B_i + \frac{h_i^2}{p_i^2} C_i, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Доказательство. Запишем еще раз определение нормы $\|u\|_{1,\sigma}$:

$$\|u\|_{1,\sigma}^2 = |u|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2 + \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [u]_{r_i}^2}^{\chi_1} + \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(r_i))^{-1} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2}^{\chi_2}.$$

Чтобы получить нужный результат, оценим слагаемое χ_2 и воспользуемся неравенством (27) для слагаемого χ_1 .

Выражение χ_2 аналогично неравенству (23) с отличием в том, что теперь функции u могут принадлежать бесконечномерному пространству. Как и в неравенстве (23), введем обозначение $\chi(u)$ и воспользуемся неравенствами (10), (12), (15), чтобы получить

$$\chi_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d(r_i)}{C_\sigma} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2 \leq \frac{C_G}{C_\sigma} \chi(u) \leq \frac{C_G}{C_\sigma} \left(\eta_1'' + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \eta_i'' + r_{n-1}^2 \eta_n'' \right), \quad (30)$$

$$\eta_1'' = \frac{h_1}{p_1^2} \left(\frac{16}{h_1^5} A_1 + \frac{16}{h_1^4} A_1^{1/2} B_1^{1/2} + \frac{4}{h_1^3} B_1 + \frac{4}{h_1^2} B_1^{1/2} C_1^{1/2} \right), \quad \eta_n'' = p_n^{-2} (4 r_{n-1}^2 B_n + 2 B_n^{1/2} C_n^{1/2}),$$

$$\eta_i'' = \frac{h_i}{p_i^2} \left(\frac{2}{h_i} B_i + 2 B_i^{1/2} C_i^{1/2} \right), \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Применим неравенство Юнга к произведениям норм:

$$\eta_1'' \leq \eta_1' = \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{24}{h_1^4} A_1 + \frac{14}{h_1^2} B_1 + 2 C_1 \right), \quad \eta_n'' \leq \eta_n' = p_n^{-2} (5 r_{n-1}^2 B_n + C_n),$$

$$\eta_i'' \leq \eta_i' = \frac{3}{p_i^2} B_i + \frac{h_i^2}{p_i^2} C_i, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Из неравенства (27) для χ_1 и неравенства (30) (с учетом применения неравенства Юнга) для χ_2 следует, что

$$\|u\|_{1,\sigma}^2 \leq |u|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2 + \frac{C_\sigma}{C_T} \left(\xi_1 + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \xi_i + r_{n-1}^2 \xi_n \right) + \frac{C_G}{C_\sigma} \left(\eta_1' + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \eta_i' + r_{n-1}^2 \eta_n' \right),$$

откуда после вынесения констант с учетом оценки (13) для $|u|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2$ получим искомое выражение.

В случае с конечномерным пространством используем неравенство (24), чтобы получить искомое неравенство

$$\|v_h\|_{1,\sigma}^2 \leq \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \right) |v_h|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v_h]_{r_i}^2 \leq \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \right) \|v_h\|^2.$$

Следствие 2. Пусть $u \in H^2(\Omega, T, \omega)$ и $v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$. Тогда для $A(u, v_h)$ справедливо неравенство

$$|A(u, v_h)| \leq 2 \sqrt{C_r \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} R(u) \right)} \|v_h\|. \quad (31)$$

Доказательство. Из неравенства (25) для $a(u, v)$ и неравенства (26) для $J^\sigma(u, v)$ следует, что

$$\begin{aligned} |A(u, v_h)| &\leq |a(u, v_h)| + |J^\sigma(u, v_h)| \leq \|u\|_{1,\sigma} \|v_h\|_{1,\sigma} + \sqrt{J^\sigma(u, u)} \sqrt{J^\sigma(v_h, v_h)}, \\ |A(u, v_h)| &\leq 2 \|u\|_{1,\sigma} \|v_h\|_{1,\sigma}. \end{aligned} \quad (32)$$

Применив оценки (29) к неравенству (32), получим искомое выражение.

Следствием результатов данного раздела также является то, что для каждого $f \in L^2(\Omega, r^4)$ существует единственное решение $u_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$, определяемое равенством

$$A(u_h, v_h) = (r^2 f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega).$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы Лакса – Мильграма, коэрцитивности билинейной формы (лемма 4) и неравенства $A(u_h, v_h) \leq 2 \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \right) \|u_h\| \|v_h\|$, которое получается из неравенств (29) и (32).

Оценка скорости сходимости

По аналогии с работой [22] определим операторы точного и численного решения:

- $T : L^2(\Omega, r^4) \rightarrow H^2(\Omega, \omega)$ такой, что $B(Tf, v) = (r^2 f, v)_\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega, \omega)$;
 - $T_h : L^2(\Omega, r^4) \rightarrow S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ такой, что $A(T_h f, v_h) = (r^2 f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$.
- Нетрудно показать, что для всех $f \in L^2(\Omega, r^4)$

$$A(Tf - T_h f, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega). \quad (33)$$

Теорема 2. Пусть $f \in L^2(\Omega, r^4)$, $u = Tf$, $u_h = T_h f$, $C_\sigma \geq 4C_G C_{ab}^a$. Тогда существуют оператор $\mathcal{I} : H^2(\Omega, T, \omega) \rightarrow S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ и константа C_{AE} такая, что

$$\|u - u_h\|^2 \leq C_{AE} R(\mathcal{I}u - u). \quad (34)$$

Доказательство. Представим погрешность e метода в виде

$$e = u_h - u = \xi + \eta, \quad \xi = u_h - \mathcal{I}u, \quad \eta = \mathcal{I}u - u,$$

где $\xi \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$, $\eta \in H^2(\Omega, T, \omega)$.

Из выражения (33) следует равенство $A(\xi, v_h) + A(\eta, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$, а из неравенства (31) и коэрцитивности билинейной формы (лемма 4) – неравенство

$$|A(\eta, \xi)| \leq 2 \sqrt{C_r \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} R(\eta) \right)} \|\xi\|, \quad \|\xi\| \leq 4 \sqrt{C_r \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} R(\eta) \right)}.$$

Из первого из неравенств (29) и того, что $\|\eta\| \leq \|\eta\|_{1,\sigma}$, получаем $\|\eta\| \leq \sqrt{C_r R(\eta)}$.

Возвращаясь к оценке погрешности, имеем

$$\|e\|^2 \leq 2 \|\eta\|^2 + 2 \|\xi\|^2 \leq 2C_r \left(16 \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{\sigma} \right) + 1 \right) R(\eta).$$

Теорема 3. Для решений $u = Tf \in H^2(\Omega, \omega)$, $u_h = T_h f \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ при выполнении условия $C_\sigma \geq 4C_G C_{ab}^a$ справедливо неравенство

$$\|u_h - u\|^2 \leq C_R \left(2^{-2s_1+4} \frac{h_i^{2s_1-4}}{p_i^{2s_1-3}} \|\partial^{s_1}(r^2 u)\|_{L^2(K_1)}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{-2s_i+4} r_i^2 \frac{h_i^{2s_i-2}}{p_i^{2s_i-3}} \|\partial^{s_i} u\|_{L^2(K_i)}^2 + \varepsilon_n \right), \quad (35)$$

$$\varepsilon_n = 2^{-2s_n+4} r_{n-1}^{-2s_n+10} p_n^{-2s_n+11} \sum_{i=0}^2 \|D^{s_n-i} u\|_{L^2(K_n, r^{-4})}^2,$$

для $s_i = 2$ и $s_i > 2$, $i = 1, \dots, n$, при условии существования соответствующих норм.

Доказательство теоремы следует из неравенства (34), определения $R(\eta)$ и оценок полиномиальной аппроксимации (18)–(21).

Воспользуемся билинейной формой из слабой постановки задачи $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, так что новая задача будет иметь вид

$$\int_0^\infty r^2 \partial u \partial v dr = \int_0^\infty f v dr \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (36)$$

для $u \in \mathcal{H}$, $f \in L^2(\Omega)$. В такой постановке видно, что для $f \in L^2(\Omega)$ существует единственное решение $u \in \mathcal{H}$, $\partial(r^2 \partial u) \in L^2(\Omega)$, $r^2 \partial^2 u \in L^2(\Omega)$, и выполняются равенства $\partial(r^2 \partial u) = -f$,

$$A(u, v_h) = (f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in H^2(\Omega, \mathcal{T}, \omega).$$

Используя задачу (36), можно получить оценку погрешности в норме L^2 : возьмем в качестве правой части равенства (36) $e = T_h f - Tf \in H^2(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$, а соответствующее решение обозначим через ψ . Применив элементарные преобразования к $A(\psi, e_h) = (e_h, e_h)_\Omega$, можно получить

$$\int_0^\infty e^2 dr \leq \left(\sum_{i=1}^n \int_{K_i} r^2 (\partial e)^2 dr \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \int_{K_i} r^2 (\partial \psi)^2 dr \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \langle \partial \psi \rangle_{r_i} [e]_{r_i}.$$

Так как ψ является решением задачи, можно перейти к неравенству

$$\int_0^\infty e^2 dr \leq |e|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)} \|e\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 |\partial \psi_{r_i}| [e]_{r_i}.$$

Из $\partial(r^2 \partial \psi) = e$ и $r^2 \partial \psi_{r_i} = \int_0^{r_i} \partial(r^2 \partial \psi) dr$ следует, что $\int_0^\infty e^2 dr \leq |e|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)} \|e\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{r_i} |e| dr [e]_{r_i}$, откуда получаем оценку погрешности в норме L^2 :

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2|e|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \sigma(r_i) [e]_{r_i}^2.$$

Тестовые расчеты

Проведем численные расчеты для некоторых астрофизических и квантово-механических задач. Во всех расчетах $f(r)$ из задачи (1) соответствует плотности, умноженной на 4π , а решение задачи (1) соответствует потенциалу.

Классические подходы к расчету основных состояний многоэлектронных атомов включают в себя метод Хартри – Фока (HF), теорию функционала плотности (DFT) [30]. В этих методах итеративно происходит приближенный поиск решения. На каждой итерации можно выделить этап, на котором выполняется

расчет интеграла $v(\mathbf{r}) = \int \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$. В зависимости от метода этот интеграл называется самосогласован-

ным потенциалом, потенциалом Хартри. Часто расчет этого интеграла заменяют на решение уравнения Пуассона $\Delta v(\mathbf{r}) = -4\pi f(\mathbf{r})$, которое в сферически-симметричном случае соответствует задаче (1).

В качестве начального приближения для атома гелия в методах HF, DFT можно использовать плотность, соответствующую двум электронам на уровне $1s$. Тогда плотность распределения электронов и потенциал определяются следующим образом:

$$f_{\text{Hartree}}(r) = \pi^{-1} e^{-2r}, \quad v_{\text{Hartree}} = r^{-1} (1 - e^{-2r} (1 + r)).$$

При решении вида v_{Hartree} все производные, входящие в оценку численного метода, ограничены, и можно ожидать, что увеличение степеней аппроксимации будет наиболее эффективным способом повышения точности приближенного решения.

Из области астрофизики рассмотрим некоторые модельные задачи, описанные в работе [4], при единичных значениях параметров моделей. Кроме того, для тестирования различного поведения численного алгоритма рассмотрим модель распределения плотности темной материи, основанную на модели *broken power law* (BPL) [31].

Одними из самых простых моделей для численного метода являются однородная сфера с плотностью и потенциалом вида

$$\rho_{\text{sphere}}(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad v_{\text{sphere}}(r) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}(3 - r^2), & r \leq 1, \\ \frac{4\pi}{3r}, & r > 1, \end{cases}$$

и модель Пламмера с плотностью и потенциалом вида

$$\rho_{\text{Plummer}}(r) = \frac{3}{(1 + r^2)^{5/2}}, \quad v_{\text{Plummer}}(r) = \frac{4\pi}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

В случае с однородной сферой можно ожидать, что численный метод будет давать точное решение. В случае с моделью Пламмера все производные из оценки сходимости численного метода ограничены, и характер сходимости должен быть аналогичен характеру сходимости в случае с потенциалом Хартри.

На рис. 1–3 приведены графики погрешностей численного метода. Погрешности (*error*) соответствуют выражениям $\int_0^\infty (u(r) - u_h(r))^2 dr$, где $u(r)$ и $u_h(r)$ – точное и приближенное решения соответствующих задач.

На большинстве графиков используются две величины для оси абсцисс – количество степеней свободы (количество всех базисных функций, которые аппроксимируют решение) и количество ненулевых элементов в матрице, получающейся в результате выбора базиса. Для базисов одинакового размера матрица может заметно отличаться – от трехдиагональной матрицы в случае с методами низкого порядка аппроксимации до полной матрицы в случае со спектральными чебышевскими матрицами дифференцирования [27]. Количество операций для решения системы линейных алгебраических уравнений или умножения таких матриц на вектор значительно отличается. Часто лучшим будет вариант базиса, который при одинаковой погрешности решения имеет матрицу с меньшим количеством ненулевых элементов.

На рис. 1 приведены погрешности для потенциалов v_{Plummer} , v_{sphere} , v_{Hartree} .

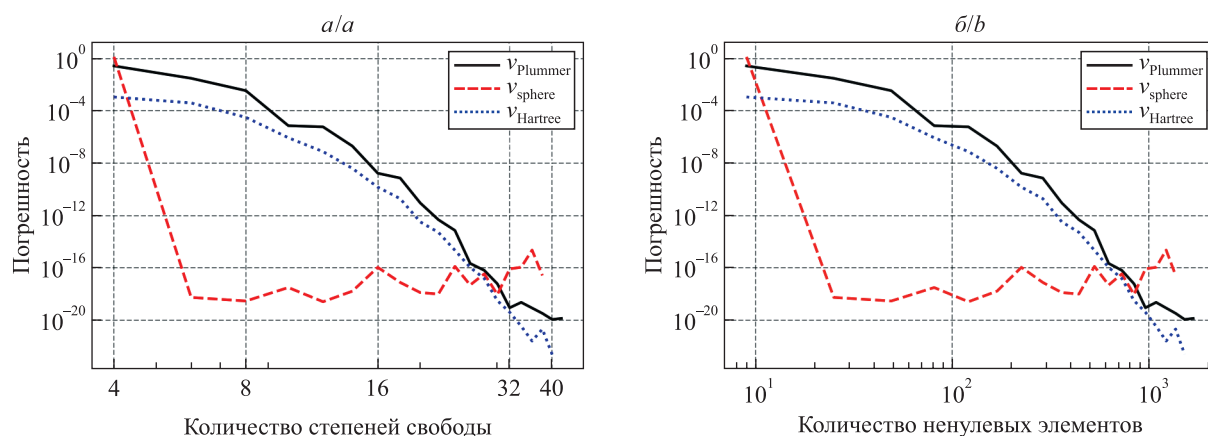


Рис. 1. Зависимость погрешности численного решения от количества степеней свободы (а), количества ненулевых элементов в матрице численного метода (б).

В легенде v_{Plummer} , v_{sphere} , v_{Hartree} соответствуют описанным в разделе потенциалам различных физических моделей

Fig. 1. Dependence of the error in the numerical solution on the number of degrees of freedom (а), amount of non-zero elements in the matrix of numerical method (б).

In the legend, v_{Plummer} , v_{sphere} , v_{Hartree} corresponds to the potentials of various physical models described in the section

В случае с однородной сферой при выборе разбиения, соответствующего задаче, приближенное решение совпадает с точным решением при $p > 2$. Также видно, как рост числа обусловленности матрицы (и, возможно, других вычислительных ошибок) вызывает увеличение погрешности.

В случае с моделью Пламмера и потенциалом Хартри область решения разбивалась на две части и увеличивалась степень аппроксимации. При этом точка разбиения выбиралась так, чтобы минимизировать погрешность. Из рис. 1 видно, что скорость сходимости возрастает по мере увеличения степени аппроксимации, что согласуется с оценками.

Вместо популярной модели NFW [32] была рассмотрена модель BPL [31], которая при параметрах $\alpha = 2$, $\beta = 3$ имеет плотность и потенциал вида

$$\rho_{\text{BPL}}(r) = \begin{cases} r^{-2}, & r \leq 1, \\ r^{-3}, & r > 1, \end{cases} \quad v_{\text{BPL}}(r) = \begin{cases} 4\pi(2 - \ln(r)), & r \leq 1, \\ 4\pi(2 + \ln(r))r^{-1}, & r > 1. \end{cases}$$

Поведение модели BPL на бесконечности аналогично поведению модели NFW, к которой добавляется неограниченность решения в нуле. Из оценки сходимости численного метода видно, что выражение $\|\delta^{s_1}(r^2 u)\|_{L^2(K_1)}$ не ограничено при $s_1 \geq 3$, что снижает эффективность аппроксимации высоких порядков в данной области.

Погрешности расчетов для модели BPL приведены на рис. 2 и 3.

Из рис. 2 видно, как выбор сетки и степеней аппроксимации каждого элемента может влиять на скорость сходимости метода. В качестве разбиения для случая с неоптимизированной фиксированной сеткой ($v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$) использовались узлы $0, 10^{-14}, 10^{-13}, \dots, 10^2, 10^3, \infty$. В случае с оптимизированными порядками аппроксимации ($v_{\text{BPL}}^{\text{optimised } p}$) степени фиксировались после достижения определенной точности на данном элементе.

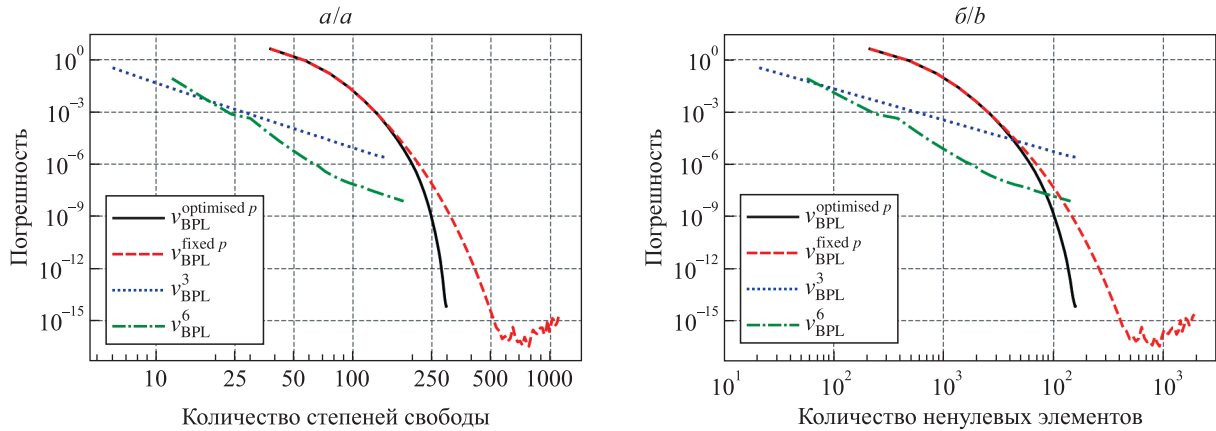


Рис. 2. Зависимость погрешности численного решения от количества степеней свободы (а), количества ненулевых элементов в матрице численного метода (б).

В легенде v_{BPL}^3 , v_{BPL}^6 соответствуют численным решениям при оптимальном разбиении области на 3, 6 частей, $v_{\text{BPL}}^{\text{optimised } p}$, $v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$ соответствуют численным решениям при фиксированном разбиении области на 19 частей (в случае с fixed p порядок аппроксимации на каждом элементе одинаковый, а в случае с optimised p порядки аппроксимации различные)

Fig. 2. Dependence of the error in the numerical solution on the number of degrees of freedom (a), amount of non-zero elements in the matrix of the numerical method (b).

In the legend, v_{BPL}^3 , v_{BPL}^6 correspond to the numerical solutions with an optimal partitioning of the domain into 3, 6 parts, $v_{\text{BPL}}^{\text{optimised } p}$, $v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$ correspond to the numerical solutions with a fixed partitioning of the domain into 19 parts (in the case of fixed p , the order of approximation on each element is the same, while in the case of optimised p , the orders of approximation are distinct)

На рис. 3 для вычисления влияния одиночного элемента на погрешность была взята сетка, на которой уже достигнута большая точность решения, после чего степень аппроксимации выбранного элемента уменьшалась.

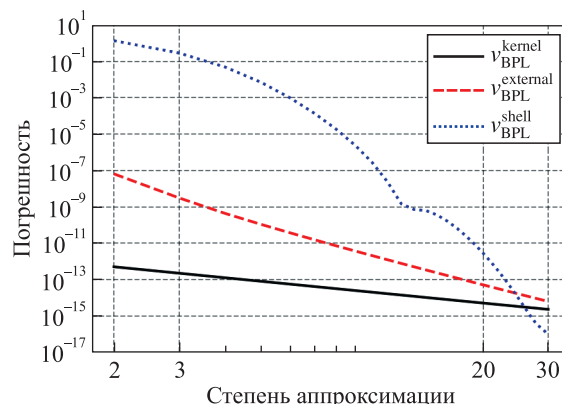


Рис. 3. Зависимость погрешности численного решения от степени аппроксимации соответствующего элемента. В легенде v_{BPL}^{kernel} соответствует вкладу погрешности от элемента на интервале $(0, 10^{-12})$, v_{BPL}^{shell} – вкладу погрешности от элемента на интервале $(1, 10)$, $v_{BPL}^{external}$ – вкладу погрешности от элемента на полубесконечном интервале $(10^2, \infty)$.

Разбиение области решения, кроме интервалов v_{BPL}^{kernel} и $v_{BPL}^{external}$, совпадает с разбиением, использованным для $v_{BPL}^{fixed p}$.

Fig. 3. Dependence of the error in the numerical solution on the degree of approximation of the corresponding element. In the legend, v_{BPL}^{kernel} corresponds to the contribution of the error from the element in the interval $(0, 10^{-12})$,

v_{BPL}^{shell} corresponds to the contribution of the error from the element in the interval $(1, 10)$,

$v_{BPL}^{external}$ corresponds to the contribution of the error from the element in the semi-infinite interval $(10^2, \infty)$.

The solution domain partitioning, except for intervals v_{BPL}^{kernel} and $v_{BPL}^{external}$, coincides with the partitioning used for $v_{BPL}^{fixed p}$.

В случае с v_{BPL}^{shell} все производные ограничены и растут не слишком быстро, так что сходимость решения ускоряется при увеличении степени аппроксимации. В случае с v_{BPL}^{kernel} экспериментальная скорость сходимости (p^{-2}) оказалась быстрее полученной из оценки (35) скорости сходимости (p^{-1}). В случае с $v_{BPL}^{external}$ экспериментальная скорость сходимости близка к p^{-6} , а теоретическая – к p^7 , это говорит о том, что полученная оценка достаточно грубая. Теоретическая оценка скорости сходимости дает отрицательные степени при p только при существовании норм с $s_n \geq 6$.

Заключение

В работе построен разрывный метод Галёркина для уравнения Пуассона в неограниченной области и проведен его анализ. Из тестовых расчетов видно, что в некоторых случаях экспериментальная сходимость заметно лучше теоретической. Скорее всего, это связано с ограничениями, наложенными на веса теоремой о полиномиальной аппроксимации. Представляется возможным улучшить оценку погрешности, применяя теорию, связанную с ортогональными полиномами Соболева [33], модифицируя теорию из работы [29] или используя полиномы Якоби с отрицательными параметрами [34].

Предполагается провести анализ численного метода для многомерного случая в сферических координатах с использованием теории аппроксимации на сферах [19].

Библиографические ссылки

1. Hartree DR. *The calculation of atomic structures*. New York: John Wiley & Sons; 1957. XIV, 181 p. (Goeppert Mayer M, editor. Structure of matter series). Co-published by the «Chapman & Hall».
2. Kohn W, Sham LJ. Self-consistent equations including exchange and correlation effects. *Physical Review*. 1965;140(4A): A1133–A1138. DOI: 10.1103/PhysRev.140.A1133.
3. Truelove JK, Klein RI, McKee CF, Holliman JH 2nd, Howell LH, Greenough JA, et al. Self-gravitational hydrodynamics with three-dimensional adaptive mesh refinement: methodology and applications to molecular cloud collapse and fragmentation. *The Astrophysical Journal*. 1998;495(2):821–852. DOI: 10.1086/305329.
4. Binney J, Tremaine S. *Galactic dynamics*. 2nd edition. Princeton: Princeton University Press; 2011. XVI, 885 p. (Spergel DN, editor. Princeton series in astrophysics).

5. Lu B, Zhou YC. Poisson – Nernst – Planck equations for simulating biomolecular diffusion-reaction processes II: size effects on ionic distributions and diffusion-reaction rates. *Biophysical Journal*. 2011;100(10):2475–2485.
6. Guo B. Some progress in spectral methods. *Science China Mathematics*. 2013;56(12):2411–2438. DOI: 10.1007/s11425-013-4660-7.
7. Shen J, Wang L-L. Some recent advances on spectral methods for unbounded domains. *Communications in Computational Physics*. 2009;5(2–4):195–241.
8. Canuto C, Hussaini MY, Quarteroni A, Zang TA. *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. Berlin: Springer; 2007. XXX, 596 p. (Chattot J-J, Colella P, E W, Glowinski R, Holt M, Hussaini Y, et al., editors. Scientific computation). DOI: 10.1007/978-3-540-30728-0.
9. Arnold DN, Brezzi F, Cockburn B, Marini LD. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 2002;39(5):1749–1779. DOI: 10.1137/S0036142901384162.
10. do Carmo EGD, Duarte AVC. A discontinuous finite element-based domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;190(8–10):825–843. DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00216-4.
11. Becker R, Hansbo P, Stenberg R. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2003;37(2):209–225. DOI: 10.1051/m2an:2003023.
12. Radice D, Rezzolla L. Discontinuous Galerkin methods for general-relativistic hydrodynamics: formulation and application to spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*. 2011;84(2):024010. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.024010.
13. Zhang W, Xing Y, Endeve E. Energy conserving and well-balanced discontinuous Galerkin methods for the Euler – Poisson equations in spherical symmetry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022;514(1):370–389. DOI: 10.1093/mnras/stac1257.
14. Grandclément P, Bonazzola S,ourgoulhon E, Marck J-A. A multidomain spectral method for scalar and vectorial Poisson equations with noncompact sources. *Journal of Computational Physics*. 2001;170(1):231–260. DOI: 10.1006/jcph.2001.6734.
15. Becke AD, Dickson RM. Numerical solution of Poisson’s equation in polyatomic molecules. *The Journal of Chemical Physics*. 1988;89(5):2993–2997. DOI: 10.1063/1.455005.
16. Müller B, Chan C. An FFT-based solution method for the Poisson equation on 3D spherical polar grids. *The Astrophysical Journal*. 2019;870(1):43. DOI: 10.3847/1538-4357/aaf100.
17. Müller E, Steinmetz M. Simulating self-gravitating hydrodynamic flows. *Computer Physics Communications*. 1995;89(1–3):45–58. DOI: 10.1016/0010-4655(94)00185-5.
18. Weatherford C, Red E, Hoggan P. Solution of Poisson’s equation using spectral forms. *Molecular Physics*. 2005;103(15–16):2169–2172. DOI: 10.1080/00268970500137261.
19. Dai F, Xu Y. *Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls*. New York: Springer; 2013. XVIII, 440 p. (Springer monographs in mathematics).
20. Mueller B, Janka H-T, Dimmelmeier H. A new multi-dimensional general relativistic neutrino hydrodynamics code for core-collapse supernovae. I. Method and code tests in spherical symmetry. arXiv:1001.4841 [Preprint]. 2010 [cited 2023 July 17]: [37 p.]. Available from: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1001.4841>.
21. Dolejší V, Feistauer M. *Discontinuous Galerkin method: analysis and applications to compressible flow*. Cham: Springer; 2015. XIV, 572 p. (Springer series in computational mathematics; volume 48). DOI: 10.1007/978-3-319-19267-3.
22. Antonietti PF, Buffa A, Perugia I. Discontinuous Galerkin approximation of the Laplace eigenproblem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006;195(25–28):3483–3503. DOI: 10.1016/j.cma.2005.06.023.
23. Guo B-Y, Zhang X-Y. A new generalized Laguerre spectral approximation and its applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2005;181(2):342–363. DOI: 10.1016/j.cam.2004.12.008.
24. Evans LC. *Partial differential equations*. 2nd edition. Providence: American Mathematical Society; 2010. XXI, 749 p. (Graduate studies in mathematics; volume 19).
25. Leoni G. *A first course in Sobolev spaces*. Providence: American Mathematical Society; 2009. XVI, 607 p. (Graduate studies in mathematics; volume 105).
26. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Inequalities*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1952. XII, 324 p. (Cambridge mathematical library).
27. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2nd edition. Mineola: Dover Publications; 2001. XVI, 668 p.
28. Draux A, Moalla B, Sadik M. Generalized qd algorithm and Markov – Bernstein inequalities for Jacobi weight. *Numerical Algorithms*. 2009;51(4):429–447. DOI: 10.1007/s11075-008-9241-4.
29. Xu Y. Approximation by polynomials in Sobolev spaces with Jacobi weight. *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 2018;24(6):1438–1459. DOI: 10.1007/s00041-017-9581-3.
30. Thijssen JM. *Computational physics*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2007. XVI, 620 p.
31. Baes M, Camps P. The dynamical structure of broken power-law and double power-law models for dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2021;503(2):2955–2965. DOI: 10.1093/mnras/stab634.
32. Navarro JF, Frenk CS, White SDM. The structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*. 1996;462(2):563–575. DOI: 10.1086/177173.
33. Marcellán F, Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *Expositiones Mathematicae*. 2015;33(3):308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
34. Guo B-Y, Shen J, Wang L-L. Generalized Jacobi polynomials/functions and their applications. *Applied Numerical Mathematics*. 2009;59(5):1011–1028. DOI: 10.1016/j.apnum.2008.04.003.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.925.7

О РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИЕЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В. И. ГРОМАК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматриваются аналитические свойства решений нелинейных стационарных уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве и связанных с ней иерархий первого уравнения Пенлеве и уравнения P_{34} из классификационного списка Пенлеве. Исследуются локальные свойства решений: разложение решений в окрестности подвижных полюсов, построение целых функций (тау-функций), дающих представление мероморфных решений. Для рассматриваемых стационарных иерархий приводятся преобразования и автопреобразования Беклунда, с помощью которых строятся трансцендентные и рациональные решения. Для начальных уравнений исследуемых иерархий получены первые интегралы, которые далее используются для доказательства вложимости множества решений уравнения иерархии с меньшим номером во множество решений уравнения иерархии с большим номером. Приводятся соотношения между параметрами уравнений с вложимыми множествами решений.

Ключевые слова: иерархии уравнений Пенлеве; мероморфные решения; преобразования Беклунда.

Образец цитирования:

Громак В.И. О решениях нелинейных стационарных уравнений, связанных с обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1:40–50. EDN: MTWOJQ

For citation:

Gromak VI. On the solutions of the non-linear stationary equations related to the generalised hierarchy of the second Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:40–50. Russian. EDN: MTWOJQ

Автор:

Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Author:

Valeri I. Gromak, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics. vgromak@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1868-2313>

ON THE SOLUTIONS OF THE NON-LINEAR STATIONARY EQUATIONS RELATED TO THE GENERALISED HIERARCHY OF THE SECOND PAINLEVÉ EQUATION

V. I. GROMAK^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. This paper considers the analytical properties of the solutions of non-linear stationary equations of the generalised hierarchy of the second Painlevé equation and the hierarchies of the first Painlevé equation related with it, as well as the equation P_{34} from the Painlevé classification list. The local properties of the solutions are investigated, namely, expansion of the solutions in the neighbourhood of moving poles, construction of entire functions (tau functions) that provide a representation of meromorphic solutions. For the stationary hierarchies under consideration, Bäcklund transformations and auto-transformations are given, with the help of which transcendental and rational solutions are constructed. For the initial equations of the hierarchies under investigation, the first integrals are obtained, which are then used to prove the embeddability of the set of solutions of the hierarchy equation with a smaller number in the set of solutions of the hierarchy equation with a larger number. The relationships between the parameters of the equations with embeddable sets of solutions are given.

Keywords: hierarchies of Painlevé equations; meromorphic solutions; Bäcklund transformations.

Введение

Уравнения Пенлеве ($P_1 - P_6$) являются решением классификационной проблемы относительно свойства Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и в общем случае определяют новые трансцендентные функции [1–3], которые находят приложения как в различных математических проблемах, так и в вопросах математической физики [4–8]. Также представляет интерес изучение иерархий уравнений Пенлеве, являющихся бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру. Первые члены таких иерархий есть уравнения Пенлеве [9–16]. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, обладают симметриями, индуцированными преобразованиями Беклунда. При некоторых значениях параметров уравнения иерархий имеют специальные классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения. При этом для рациональных решений возникает задача представления их через специальные полиномы. Для второго уравнения Пенлеве и его иерархии это полиномы Яблонского – Воробьева и их обобщения, которые также позволяют построить рациональные решения уравнений иерархии уравнения Кортевега – де Фриза.

Преобразования Беклунда являются мощным инструментом для исследования свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений [17–19]. В частности, для уравнений Пенлеве и их высших аналогов преобразования Беклунда наряду с построением различных классов решений в некоторых случаях позволили доказать их трансцендентность [20–22].

Рассмотрим обобщенную иерархию второго уравнения Пенлеве в виде [23]

$$P_2^{[2n]} : \left(\frac{d}{dz} + 2w \right) L_n [w' - w^2] - (k_n z + p_n) w - \alpha_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где оператор L_n определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz} L_{n+1} [u] = \left(\frac{d^3}{dz^3} + (4u + \beta_n) \frac{d}{dz} + 2u_z \right) L_n [u], \quad L_1 [u(z)] = u(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

а $\alpha_n, \beta_n, k_n, p_n$ – параметры.

Первые уравнения иерархии (1) при $n = 1, 2, 3, 4$ имеют вид

$$w'' = 2w^3 + (k_1 z + p_1) w + \alpha_1, \quad (2)$$

$$w^{(4)} = 10w^2 w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + (k_2 z + p_2) w + \alpha_2, \quad (3)$$

$$w^{(6)} = 10(w')^2 (s_1 w - 14w^3 + 7w'') + w'' (10s_1 w^2 - s_2 - 70w^4 + 42ww'') + \\ + 56ww'w^{(3)} - (s_1 - 14w^2)w^{(4)} + 2s_2 w^3 - 6s_1 w^5 + 20w^7 + (k_3 z + p_3) w + \alpha_3, \quad (4)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$ и $s_2 = \beta_1\beta_2$,

$$\begin{aligned} w^{(8)} = & 2b_3w^3 - 6b_2w^5 + 20b_1w^7 - 798w(w')^4 + 42w(b_1 - 18w^2)(w'')^2 + \\ & + 182(w'')^3 - b_2w^{(4)} + w''(228ww^{(4)} - b_3 + 10w^2(b_2 - 7b_1w^2 + 42w^4)) - \\ & - (b_1 - 18w^2)w^{(6)} - 70w^9 + 10(w')^2(b_2w - 14b_1w^3 + 126w^5 + 21w^{(4)}) + \\ & + 4w'(7(2b_1w - 36w^3 + 27w'')w^{(3)} + 27ww^{(5)}) + 2w(69(w^{(3)})^2 + 7w(b_1 - 9w^2)w^{(4)}) + \\ & + 14(w')^2(5b_1 - 222w^2)w'' + (k_4z + p_4)w + \alpha_4, \end{aligned} \quad (5)$$

где $b_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $b_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3$ и $b_3 = \beta_1\beta_2\beta_3$.

Уравнение (1) порождается оператором L_n , имеет порядок $2n$ и при $k_1 = 1$, $p_1 = 0$ определяет нестационарную иерархию второго уравнения Пенлеве $P_2^{[2n]}$, так как первое уравнение иерархии (2) при $k_1 = 1$, $p_1 = 0$ есть второе уравнение Пенлеве $P_2^{[2]}$ в канонической форме. Свойству решений уравнений иерархии $P_2^{[2n]}$ посвящено много работ. В частности, для этой иерархии известно преобразование Беклунда (см., например, [23]), позволившее построить различные классы решений, включая рациональные решения.

В настоящей работе рассмотрим иерархию уравнений (1) при $k_n = 0$, которую при выполнении этого условия будем называть стационарной иерархией второго уравнения Пенлеве и обозначать через (1'). Уравнения (2)–(5) при $k_n = 0$ будем обозначать через (2')–(5') соответственно.

Локальные свойства решений уравнения (1')

Решения уравнения (1), так же как и решения уравнения (1'), обладают свойством нечетности относительно параметра α_n , т. е. имеют дискретную симметрию¹

$$S: w(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow -w(z, -\alpha_n, \beta, p_n).$$

Доминантные члены уравнений (1) и (1') определяются оператором L_n и являются одинаковыми. В силу этого совпадают также порядки подвижных полюсов решений уравнений (1) и (1'), причем в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ решение имеет представление

$$w(z) \sim c(z - z_0)^{-1} + c_1(z - z_0) + O(z - z_0)^2, \quad (6)$$

где вычет $c \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$. Заметим, что в силу совпадения доминантных членов уравнения (1) и (1') имеют одинаковые резонансные полиномы, которые можно выписать в явной форме. При этом положительные резонансы определяют номера коэффициентов разложения (6), являющиеся произвольными. В частности, для уравнения (4') в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ справедливо одно из следующих трех разложений:

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} + h_1t + h_2t^2 + h_3t^3 + h_4t^4 + c_5t^5 + \sum_{j=6}^{\infty} c_jt^j, \quad (7)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1 , h_2 , h_3 и h_4 – произвольные постоянные, а $c_5 = \frac{-\varepsilon(420\varepsilon h_1^3 - 112h_2^2 - 504h_1h_3 + p_3 - 50h_1^2s_1 + 20\varepsilon h_3s_1 + 6\varepsilon h_1s_2)}{336}$, $c_7 = h_5$ и все остальные коэффициенты c_j , $j \geq 6$, однозначно определяются через $h_1, \dots, h_5$ и параметры s_1, s_2, p_3, α_3 ;

$$w(z) = \frac{2\varepsilon}{t} + h_1t + c_3t^3 + h_2t^4 + \sum_{j=5}^{\infty} c_jt^j, \quad (8)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1 и h_2 – произвольные постоянные, а $c_3 = \frac{-\varepsilon(770h_1^2 - 30\varepsilon h_1s_1 + s_2)}{140}$, $c_7 = h_3$, $c_9 = h_4$ и все остальные коэффициенты c_j , $j \geq 5$, однозначно определяются через $h_1, \dots, h_4$ и параметры s_1, s_2, p_3, α_3 ;

¹Здесь и далее $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$.

$$w(z) = \frac{3\varepsilon}{t} + \frac{s_1\varepsilon}{70}t + \sum_{j=4}^{\infty} c_j t^j, \quad (9)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{\varepsilon(19s_1^2 - 70s_2)}{88 \cdot 200}$, $c_7 = h_1$, $c_9 = h_2$, $c_{11} = h_3$ – произвольные постоянные и все

остальные коэффициенты c_j , $j \geq 4$, однозначно определяются через h_1 , h_2 , h_3 и параметры s_1 , s_2 , p_3 , α_3 .

Для рациональных решений бесконечно удаленная точка $z = \infty$ есть точка голоморфности.

Теорема 1. Для мероморфных решений уравнения (1') функция

$$u(z) = \exp \left(- \int \left(\int^z w^2(z) dz \right) dz \right) \quad (10)$$

является целой. При этом нули $u(z)$ имеют кратность k^2 и являются полюсами $w(z)$ с вычетами $\pm k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Действительно, из определения функции (10) непосредственно вытекает, что нулями $u(z)$ могут быть лишь полюсы $w(z)$. Характер кратности нулей следует из непосредственной подстановки представления (6) в правую часть выражения (10). В частности, для уравнения (4') справедливость утверждения теоремы 1 следует из подстановки разложений (7)–(9) в правую часть выражения (10).

Мероморфное решение $w(z)$ n -го уравнения (1') можно представить в виде $w(z) = \frac{v(z)}{u(z)}$, где $u(z)$ и $v(z)$ – целые функции. В качестве $u(z)$ возьмем функцию (10), а $v(z) = w(z)u(z)$. Тогда целые функции $u(z)$ и $v(z)$ удовлетворяют системе

$$uu'' - (u')^2 + v^2 = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + 2\frac{v}{u} \right) L_n \left[u^{-2} (v'u - vu' - v^2) \right] - p_n \frac{v}{u} - \alpha_n = 0. \quad (12)$$

При этом уравнение (11) получено дифференцированием функции (10), а уравнение (12) – подстановкой $w(z) = \frac{v(z)}{u(z)}$ в исходное уравнение (1'). Следовательно, справедливо и обратное утверждение: если пара целых функций $(v(z), u(z))$ – решение системы уравнений (11), (12), то их отношение есть мероморфное решение исходного уравнения (1').

Вложение множеств решений иерархии уравнений (1')

Уравнение (2') в общем случае интегрируется в эллиптических функциях, а уравнение (3') – в гиперэллиптических функциях [24]. Заметим, что уравнения (2')–(4') имеют первые интегралы

$$(w')^2 = w^4 + p_1 w^2 + 2\alpha_1 w + C_1, \quad (13)$$

$$2w'w^{(3)} = (w'')^2 + (10w^2 - \beta_1)(w')^2 + \beta_1 w^4 + 2\alpha_2 w - 2w^6 + p_2 w^2 + C_2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 2w'w^{(5)} = & 2w''w^{(4)} - (w^{(3)})^2 - 2(s_1 - 14w^2)w'w^{(3)} + (s_1 - 14w^2)(w'')^2 + 56w(w')^2 w'' + \\ & + 21(w')^4 - (s_2 - 10s_1 w^2 + 70w^4)(w')^2 - 2s_1 w^6 + 5w^8 + s_2 w^4 + p_3 w^2 + 2\alpha_3 w + C_3 \end{aligned} \quad (15)$$

соответственно. Обозначим через H_n множество решений n -го уравнения (1') при фиксированном значении параметров α_n , β , p_n . Тогда справедливо включение $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset H_4$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. 1. Пусть $w = w(z, \alpha_1, p_1)$ – произвольное решение уравнения (2') с начальными данными w_0 , w'_0 при фиксированных значениях параметров α_1 , p_1 . Тогда $w = w(z, \alpha_1, p_1)$ есть решение уравнения (3') при условиях

$$\alpha_2 = \alpha_1(p_1 + \beta_1), \quad p_2 = 2C_1 + p_1(p_1 + \beta_1), \quad (16)$$

где $C_1 = (w'_0)^2 - w_0^4 - p_1 w_0^2 - 2\alpha_1 w_0$.

2. Пусть $w = w(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ – произвольное решение уравнения (3') при фиксированных значениях параметров α_2, β_1, p_2 . Тогда $w = w(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ есть решение уравнения (4') при условиях

$$\alpha_3 = \alpha_2(s_1 - \beta_1), p_3 = 2C_2 + p_2(s_1 - \beta_1), s_2 = -p_2 + \beta_1(s_1 - \beta_1), \quad (17)$$

где C_2 определяется первым интегралом (14) и начальными данными решения.

3. Пусть $w = w(z, \alpha_3, s_1, s_2, p_3)$ – произвольное решение уравнения (4') при фиксированных значениях параметров α_3, s_1, s_2, p_3 . Тогда $w = w(z, \alpha_3, s_1, s_2, p_3)$ есть решение уравнения (5') при условиях

$$b_2 = b_1 s_1 - s_1^2 + s_2, b_3 = -p_3 + s_2(b_1 - s_1),$$

$$\alpha_4 = \alpha_3(b_1 - s_1), p_4 = 2C_3 + p_3(b_1 - s_1),$$

где C_3 определяется первым интегралом (15) и начальными данными решения.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (2'), находим

$$w^{(3)} = 6w^2 w' + p_1 w', w^{(4)} = 12w(w')^2 + (6w^2 + p_1)w''. \quad (18)$$

Подстановка w' из первого интеграла (13), w'' из уравнения (2') и производных (18) при выполнении условия на параметры (16) обращает уравнение (3') в тождество, откуда и следует первое утверждение теоремы. Для доказательства второго утверждения дифференцируем уравнение (3') трижды и, подставляя найденные производные $w^{(4)}, w^{(5)}, w^{(6)}$ и третью производную из первого интеграла (14) в уравнение (4'), убеждаемся, что последнее обращается в тождество при выполнении условия (17). Аналогично доказывается третье утверждение теоремы.

Преобразование Беклунда уравнения (1')

Относительно преобразований Беклунда уравнения (1') справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть в уравнении (1) $k_n = 0, \alpha_n \neq 0$ и $w = w(z, \alpha_n, \beta, p_n)$ – решение при фиксированных значениях параметров. Тогда преобразование

$$T: w \rightarrow \tilde{w} = w - \frac{2\alpha_n}{2L_n[w' - w^2] - p_n} \quad (19)$$

определяет решение $\tilde{w}$ уравнения (1') при $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n, \tilde{\beta} = \beta, \tilde{p}_n = p_n$.

Доказательство. Используем метод доказательства аналогичного утверждения для уравнения (1) при $k_n = 1$ [23]. Введем функции

$$q(z) = w'(z) - w^2(z), \Psi(q(z)) = L_n[q(z)] - \frac{p_n}{2}. \quad (20)$$

Тогда уравнение (1') можно записать в виде эквивалентной системы

$$w' = q + w^2, \Psi' + 2\Psi w - \alpha_n = 0, \quad (21)$$

где $\Psi = \Psi(z); (\cdot)' = \frac{d}{dz}(\cdot)$. При этом функция $q(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi'' - \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\alpha_n^2}{2\Psi} = 0, \Psi(q(z)) \neq 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) в соответствии с работой [25] можно назвать стационарной иерархией уравнения P_{34} из классификационного списка Пенлеве [1], а уравнение $\Psi(q(z)) = 0$ при $\alpha_n = 0$ определяет стационарную иерархию первого уравнения Пенлеве. Эти иерархии будут рассмотрены ниже.

Далее считаем, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда $\Psi(q(z)) \neq 0$. В этом случае система (21) определяет соотношение между решениями уравнений (1') и (22) в соответствии с функциями (20) и преобразованиями

$$G: w = w(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow q(z, \alpha_n, \beta, p_n) = w'(z, \alpha_n, \beta, p_n) - w^2(z, \alpha_n, \beta, p_n),$$

$$M: q = q(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow w(z, \alpha_n, \beta, p_n) = \frac{\alpha_n - \Psi'(q)}{2\Psi(q)}.$$

Так как параметр α_n входит в уравнение (22) в виде α_n^2 , то уравнение (22) имеет дискретную симметрию

$$S_0 : q(z, \alpha_n, \beta, p_n) \rightarrow \tilde{q}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n) = q(z, -\alpha_n, \beta, p_n).$$

Используем преобразования G , M и S_0 для построения преобразования Беклунда уравнения (1').

Пусть $w = w(z, \alpha_n, \beta, p_n)$ – решение уравнения (1') при фиксированных значениях параметров α_n, β, p_n . «Новое» решение $\tilde{w} = \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n)$ уравнения (1') будем строить по схеме

$$w \xrightarrow{G} q(z, \alpha_n, \beta, p_n) \xrightarrow{S_0} \tilde{q}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n) \xrightarrow{M} \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}, \tilde{p}_n), \quad (23)$$

где $q = \tilde{q}$ и $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n, \tilde{\beta} = \beta, \tilde{p}_n = p_n$, или в явной форме

$$\tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{p}) = \frac{\tilde{\alpha}_n - \Psi'(\tilde{q})}{2\Psi(\tilde{q})} = \frac{-\alpha_n - \Psi'(q)}{2\Psi(q)} = w - \frac{2\alpha_n}{2L_n[q] - p_n},$$

откуда и следует справедливость теоремы 3.

Рассматривая схему (23) в обратном порядке, находим обратное преобразование

$$T^{-1} : \tilde{w} \rightarrow w = \tilde{w} - \frac{2\tilde{\alpha}_n}{2L_n[\tilde{w}' - \tilde{w}^2] - \tilde{p}_n},$$

так что $T^{-1}T = I$.

Отметим, что для решений $w, \tilde{w}$, связанных преобразованием Беклунда (19), в силу $q = \tilde{q}$ справедливо соотношение $w' - w^2 = \tilde{w}' - \tilde{w}^2$ при $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n, \tilde{\beta} = \beta, \tilde{p}_n = p_n$.

Преобразование Беклунда уравнения (2')

Для уравнения (1') при $n = 1$, т. е. уравнения (2'), преобразование Беклунда (19) имеет вид

$$T : w \rightarrow \tilde{w} = w - \frac{2\alpha_1}{2w' - 2w^2 - p_1} \quad (24)$$

и ранее было приведено в работе [26]. Покажем, что преобразование Беклунда (24) в этом случае аналогично формуле теоремы сложения для эллиптической функции Вейерштрасса [27].

В первом интеграле (13) уравнения (2') положим, что $w = \frac{1}{u}$. Тогда получим уравнение

$$(u')^2 = C_1 u^4 + 2\alpha_1 u^3 + p_1 u^2 + 1. \quad (25)$$

В силу теоремы 3 для уравнения (25) справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения (25) при некоторых фиксированных значениях параметров α_1, p_1 и постоянной интегрирования C_1 . Тогда функция

$$\tilde{u}(z) = u - \frac{2\alpha_1 u^4}{2 + p_1 u^2 + 2\alpha_1 u^3 + 2u'} \quad (26)$$

является решением уравнения (25) при $\tilde{\alpha} = -\alpha_1$ и тех же значениях C_1, p_1 .

Далее будем считать, что $\alpha_1 \neq 0$, так как из определения функции (26) при $\alpha_1 = 0$ имеем $\tilde{u}(z) = u(z)$. Пусть в уравнении (25) $C_1 = 0$ и корни правой части относительно $u = u(z)$ различны. При наличии кратных корней уравнение (25) интегрируется в элементарных функциях. Приведем уравнение (25) к канонической форме, сделав замену

$$u = \mu_1 v + \mu_2, \quad \mu_1 = \frac{2}{\alpha_1}, \quad \mu_2 = -\frac{p_1}{6\alpha_1}. \quad (27)$$

Тогда для определения функции $v(z)$ получаем уравнение

$$(v')^2 = 4v^3 - g_2 v - g_3, \quad (28)$$

где инварианты

$$g_2 = \frac{p_1^2}{12}, \quad g_3 = -\frac{\alpha_1^2}{4} - \frac{p_1^3}{216}. \quad (29)$$

При этом общее решение уравнения (28) имеет вид $v(z) = \wp(z + K; g_2, g_3)$, где $\wp(z; g_2, g_3)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами (29), а K – постоянная интегрирования. В силу соот-

ношения (26) и замены (27), если известно решение $v = v(z)$ уравнения (28), то «новое» решение этого уравнения можно построить по формуле

$$\tilde{v}(z) = \frac{1}{6}(p_1 - 6v) + \frac{(p_1 - 12v)^4}{24(108\alpha_1^2 + p_1^3 - 18p_1^2v + 864v^3 + 216\alpha_1v')} \quad (30)$$

при $\tilde{\alpha} = -\alpha_1$, $\tilde{p} = p$. Следовательно, если $v = \wp(z)$ с инвариантами (29), то существует такая постоянная K , что $\tilde{v}(z) = \wp(z + K; g_2, g_3)$, поскольку g_2, g_3 – инвариантны при $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1$. Раскладывая в ряд в окрестности $z = 0$ левую и правую части соотношения (30), для определения постоянной K , соответствующей решению $\tilde{v}(z)$, находим

$$\wp(K) = -\frac{p_1}{6}, \wp'(K) = \frac{\alpha_1}{2}. \quad (31)$$

После преобразования соотношения (30) с учетом инвариантов (29) имеем

$$\wp(z + K) = -\wp(K) - \wp(z) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(K) - \wp'(z)}{\wp(K) - \wp(z)} \right)^2,$$

где $\wp(K)$, $\wp'(K)$ задаются соотношениями (31), что и определяет формулу теоремы сложения для эллиптической функции $\wp(z)$ с инвариантами (29).

Рассмотрим уравнение (25) при $C_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ и различных корнях e_j правой части. При наличии кратных корней e_j уравнение (25) интегрируется в элементарных функциях. Приведем уравнение (25) к канонической форме.

Пусть $e_1 = r$ – один из корней e_j . Тогда в уравнении (25) можно считать, что

$$C_1 = \frac{-1 - p_1r^2 - 2\alpha_1r^3}{r^4}.$$

В уравнении (25) выполним замену

$$u(z) = r + \frac{1}{\mu_1 v(z) + \mu_2}, \quad (32)$$

где

$$\mu_1 = -\frac{2r}{2 + p_1r^2 + \alpha_1r^3}, \quad \mu_2 = -\frac{6 + 5p_1r^2 + 6\alpha_1r^3}{6r(2 + p_1r^2 + \alpha_1r^3)}.$$

Тогда для определения функции $v(z)$ имеем уравнение (28), где

$$g_2 = \frac{p_1^2}{12} - \frac{p_1}{r^2} - \frac{1 + 2\alpha_1r^3}{r^4}, \quad g_3 = -\frac{\alpha_1^2}{4} - \frac{p_1^3}{216} - \frac{p_1}{6r^4} - \frac{p_1^2}{6r^2} - \frac{\alpha_1p_1}{3r}. \quad (33)$$

Пусть теперь $v(z) = \wp(z)$ с инвариантами (33). Тогда «новое» решение $\tilde{v}(z)$ уравнения (25) в силу замены (32) имеет вид

$$\tilde{u}(z) = -r + \frac{1}{-\mu_1 v_1(z) - \mu_2}.$$

При этом $\tilde{v}(z) = \wp(z + K)$ и постоянная K , так же как и в случае, когда $C_1 = 0$, определяется соотношениями (31). Проведя аналогичные преобразования, как и при $C_1 = 0$, убеждаемся, что соотношение (26) определяет формулу теоремы сложения для функции $\wp(z + K)$ с инвариантами (33).

Автопреобразования Беклунда уравнения (1')

Относительно преобразований S и T справедливо равенство $S^2 = T^2 = I$. При этом преобразования S и T в общем случае не коммутируют, что можно использовать для построения различных решений уравнения (1') при фиксированных значениях параметров.

Пример 1. Функция

$$w_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4 - 2\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)}$$

есть решение уравнения (2') при $\alpha_1 = -\frac{1}{8}$, $p_1 = -\frac{3}{4}$, а также уравнений (3')–(5') в соответствии с теоремой 2. Тогда решение $w_1 = Tw_0$ уравнения (2') при $\alpha_1 = \frac{1}{8}$, $p_1 = -\frac{3}{4}$ имеет вид

$$w_1 = w_0 + \frac{2 \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{3}z}{2} \right) - 2 \right)^2}{21 - 32 \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{3}z}{2} \right) + \operatorname{ch}(\sqrt{3}z) + 12\sqrt{3} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{3}z}{2} \right)}.$$

Следовательно, функция $Sw_1 = -w_1$ также есть решение уравнения (2') при исходных значениях параметров $\alpha_1 = -\frac{1}{8}$, $p_1 = -\frac{3}{4}$, т. е. преобразования $S \circ T$ и $T \circ S$ являются автопреобразованиями уравнения (2').

Пример 2. Функция

$$w_0 = 1 + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

есть рациональное решение уравнения (3') при $(\alpha_1, \beta, p_1) = (4, 7, -12)$. Тогда последовательное m -кратное применение преобразований $S \circ T$ и $T \circ S$ дает

$$(S \circ T)^m w_0 = 1 + \frac{1}{z-m-2} - \frac{1}{z-m-1}, \quad (T \circ S)^m w_0 = 1 + \frac{1}{z+m-2} - \frac{1}{z+m-1}.$$

Эти решения различные, так как имеют разные полюсы, т. е. автопреобразования $S \circ T$ и $T \circ S$ определяют две различные бесконечные серии рациональных решений для параметров $(\alpha_1, \beta, p_1) = (4, 7, -12)$.

Вложение множеств решений стационарной иерархии уравнения P_{34}

Первые три уравнения стационарной иерархии уравнения P_{34} (22) имеют вид

$$(p_1 - 2q)^2 q - (q')^2 - (p_1 - 2q)q'' + \alpha_1^2 = 0, \quad (34)$$

$$q(p_2 - 2q(3q + \beta_1) - 2q'')^2 - ((6q + \beta_1)q' + q^{(3)})^2 - \\ - (p_2 - 2q(3q + \beta_1) - 2q'')(6(q')^2 + (6q + \beta_1)q'' + q^{(4)}) + \alpha_2^2 = 0, \quad (35)$$

$$4q \left(\frac{-p_3}{2} + q(10q^2 + s_2 + 3s_1q) + 5(q')^2 + (10q + s_1)q'' + q^{(4)} \right)^2 - \\ - \left(q'(s_2 + 6s_1q + 30q^2 + 20q'') + (s_1 + 10q)q^{(3)} + q^{(5)} \right)^2 - \\ - \left(p_3 - 2q(10q^2 + s_2 + 3s_1q) - 10(q')^2 - 2(10q + s_1)q'' - 2q^{(4)} \right) \left(6s_1(q')^2 + 30q^2q'' + \right. \\ \left. + q''(s_2 + 20q'') + 30q'q^{(3)} + s_1q^{(4)} + 2q(30(q')^2 + 3s_1q'' + 5q^{(4)}) + q^{(6)} \right) + \alpha_3^2 = 0. \quad (36)$$

Заметим, что уравнение (34), которое линейной заменой (z, q) приводится к стационарному виду уравнения Пенлеве P_{34} [1], допускает первый интеграл

$$C_1(p_1 - 2q) - \alpha_1^2 - p_1q^2 + 2q^3 + (q')^2 = 0, \quad (37)$$

а уравнение (35) имеет первый интеграл

$$C_2 = \left(\alpha_2^2 - 14\beta_1q^4 - 24q^5 + q^2 \left(-30(q')^2 + \beta_1(p_2 - 6q'') \right) + \right. \\ \left. + q^3(4p_2 - 2\beta_1^2 - 20q'') - (q')^2(p_2 + \beta_1^2 - 2q'') - 2\beta_1q'q^{(3)} - (q^{(3)})^2 - \right. \\ \left. - 2q(5\beta_1(q')^2 + q''(-p_2 + 2q'') + 6q'q^{(3)}) \right) (p_2 - 2q(\beta_1 + 3q) - 2q'')^{-1}. \quad (38)$$

При этом для уравнений (35) и (36) в силу соотношения между решениями стационарных уравнений (1') и (22) в соответствии с функциями (20), так же как и для уравнений (2')–(5'), справедлива следующая теорема.

Теорема 4. 1. Пусть $q = q(z, \alpha_1, p_1)$ – решение уравнения (34) при фиксированных значениях параметров α_1, p_1 . Тогда $q = q(z, \alpha_1, p_1)$ есть решение уравнения (35) при выполнении условия на параметры (16), где постоянная интегрирования C_1 определяется через начальные данные решения q_0, q'_0 в соответствии с первым интегралом (37).

2. Пусть $q = q(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ – решение уравнения (35) при фиксированных значениях параметров α_2, β_1, p_2 . Тогда $q = q(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ есть решение уравнения (36) при выполнении условия на параметры (17), где постоянная интегрирования C_2 определяется через начальные данные решения q в соответствии с первым интегралом (38).

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2. Заметим также, что утверждение теоремы 4 относительно вложимости решений справедливо и для уравнения (36), но оно не приводится здесь в силу громоздкости выражений.

Вложение множеств решений стационарной иерархии первого уравнения Пенлеве

Из системы (21) следует, что все решения $w(z)$ уравнения Риккати $w' = q + w^2$, где $q(z)$ определяется уравнением $\Psi(q(z)) = 0$, т. е.

$$P_1^{[2n-2]} : L_n[q(z)] - \frac{P_n}{2} = 0, \quad n \in N, \quad (39)$$

являются решениями уравнения (1') при $\alpha_n = 0$.

Уравнения стационарной иерархии $P_1^{[2n-2]}$ имеют порядок $2n - 2$. При $n = 1$ в определении иерархии (39) не получаем дифференциальное уравнение относительно $q(z)$, но имеем свойство, состоящее в том, что все решения уравнения Риккати $w' = w^2 + \frac{P_1}{2}$ являются решениями стационарного второго уравнения Пенлеве (2') при $\alpha_1 = 0$.

Первые уравнения иерархии (39) при $n = 2, 3, 4$ имеют вид

$$q'' = -3q^2 - q\beta_1 + \frac{P_2}{2}, \quad (40)$$

$$q^{(4)} = -10q^3 - 3s_1q^2 - 5(q')^2 - s_1q'' - s_2q - 10qq'' + \frac{P_3}{2}, \quad (41)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$ и $s_2 = \beta_1\beta_2$,

$$q^{(6)} = -35q^4 - 10b_1q^3 - 5b_1(q')^2 - b_2q'' - 21(q'')^2 - 3b_2q^2 - 70q^2q'' - \\ - 28q'q^{(3)} - b_1q^{(4)} - q(b_3 + 70(q')^2 + 10b_1q'' + 14q^{(4)}) + \frac{P_4}{2}, \quad (42)$$

где $b_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $b_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3$ и $b_3 = \beta_1\beta_2\beta_3$.

Уравнение (40) есть стационарное первое уравнение Пенлеве, что и объясняет название иерархии (39). Обозначим через G_{2n-2} множество решений уравнения $P_1^{[2n-2]}$ при фиксированных значениях параметров β_n, p_n . Тогда справедливо включение

$$G_{2n-2} \subset H_{2n}, \quad q(z) = w'(z) - w^2(z), \quad \alpha_n = 0, \quad n \in N,$$

которое, по сути, означает, что уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ при $\alpha_n = 0$ связаны преобразованием Миуры, это справедливо и в нестационарном случае [9; 11].

Для уравнений иерархии $P_1^{[2n-2]}$ также выполняется свойство вложения множеств решений. Действительно, уравнения (40) и (41) имеют первые интегралы

$$C_1 = p_2q - \beta_1q^2 - 2q^3 - (q')^2, \quad (43)$$

$$C_2 = q(p_3 - 10(q')^2) + (q'')^2 - 2q'q^{(3)} - s_2q^2 - 2s_1q^3 - 5q^4 - s_1(q')^2 \quad (44)$$

соответственно.

Теорема 5. 1. Пусть $q = q(z, \beta_1, p_2)$ – произвольное решение уравнения (40) с начальными данными q_0, q'_0 при фиксированных значениях параметров β_1, p_2 . Тогда это решение также есть решение уравнения (41) при выполнении условий на параметры

$$p_2 + s_2 - \beta_1(s_1 - \beta_1) = 0, 2C_1 - p_3 + p_2(s_1 - \beta_1) = 0, \quad (45)$$

где $C_1 = p_2 q_0 - \beta_1 q_0^2 - 2q_0^3 - (q'_0)^2$.

2. Пусть $q = q(z, s_1, s_2, p_3)$ – произвольное решение уравнения (41) при фиксированных значениях параметров s_1, s_2, p_3 . Тогда это решение также есть решение уравнения (42) при выполнении условий на параметры

$$b_2 - (b_1 - s_1)s_1 - s_2 = 0, b_3 + p_3 - (b_1 - s_1)s_2 = 0, 2C_2 + (b_1 - s_1)p_3 - p_4 = 0.$$

При этом постоянная C_2 определяется через параметры и начальные данные решения $q = q(z, s_1, s_2, p_3)$ в соответствии с первым интегралом (44).

Доказательство. Дифференцируя уравнение (40), находим

$$q^{(3)} = -(6q + \beta_1)q', q^{(4)} = (6q + \beta_1)\frac{6q^2 + 2\beta_1 q - p_2}{2} - 6(q')^2. \quad (46)$$

Подстановка q' из первого интеграла (43), q'' из уравнения (40), а также $q^{(3)}$ и $q^{(4)}$ из соотношений (46) в уравнение (41) при выполнении условия на параметры (45) обращает его в тождество, откуда и следует первое утверждение теоремы. Аналогично доказывается второе утверждение.

Заметим, что некоторые свойства решений первых уравнений (2')–(4') иерархии (1'), касающиеся преобразований Беклунда и свойства вложимости множеств решений, были приведены ранее в работе [28].

Библиографические ссылки

1. Айнс ЭЛ. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Эфрос АМ, редактор. Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины; 1939. 719 с.
2. Iwasaki K, Kimura H, Shimomura S, Yoshida M. *From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions*. Braunschweig: Vieweg; 1991. X, 347 p. (Diederich K, editor. Aspects of mathematics; volume E16). DOI: 10.1007/978-3-322-90163-7.
3. Кудряшов НА. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. 2-е издание. Москва: Институт компьютерных исследований; 2004. 360 с. (Современная математика).
4. Its AR, Novokshenov VYu. *The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations*. Berlin: Springer-Verlag; 1986. IV, 313 p. (Dold A, Eckmann B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 1191). DOI: 10.1007/BFb0076661.
5. Kitaev AV. Special functions of the isomonodromy type. *Acta Applicandae Mathematicae*. 2000;64(1):1–32. DOI: 10.1023/A:1006390032014.
6. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane*. Berlin: Walter de Gruyter; 2002. VIII, 303 p. (Kenig C, Ranicki A, Röckner M, editors. de Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.
7. Итс АР, Капаев АА, Новокшенов ВЮ, Фокас АС. *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*. Москва: Институт компьютерных исследований; 2005. 728 с. Совместно с научно-издательским центром «Регулярная и хаотическая динамика».
8. Clarkson PA. Painlevé equations – nonlinear special functions. In: Marcellán F, Van Assche W, editors. *Orthogonal polynomials and special functions: computation and applications*. Berlin: Springer-Verlag; 2006. p. 331–411 (Morel J-M, Takens F, Teissier B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 1883). DOI: 10.1007/b128597.
9. Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Studies in Applied Mathematics*. 1979;61(1):31–53. DOI: 10.1002/sapm197961131.
10. Noumi M, Yamada Y. Higher order Painlevé equations of type $A_1^{(1)}$. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1998;41(3):483–503.
11. Kudryashov NA. The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them. *Physics Letters A*. 1997;224(6):353–360. DOI: 10.1016/S0375-9601(96)00795-5.
12. Gordoа PR, Pickering A. Nonisospectral scattering problems: a key to integrable hierarchies. *Journal of Mathematical Physics*. 1999;40(11):5749–5786. DOI: 10.1063/1.533055.
13. Joshi N. The second Painlevé hierarchy and the stationary KdV hierarchy. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*. 2004;40(3):1039–1061. DOI: 10.2977/prims/1145475502.
14. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009;42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.
15. Clarkson PA, Mansfield EL. The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. *Nonlinearity*. 2003;16(3):R1–R26. DOI: 10.1088/0951-7715/16/3/201.
16. Bobrova I. On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications. arXiv:2010.10617v4 [Preprint]. 2023 [cited 2025 January 10]; [25 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2010.10617v4>.
17. Clarkson PA, Joshi N, Pickering A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach. *Inverse Problems*. 1999;15(1):175–187. DOI: 10.1088/0266-5611/15/1/019.
18. Gromak VI. Bäcklund transformations of Painlevé equations and their applications. In: Conte R, editor. *The Painlevé property: one century later*. New York: Springer; 1999. p. 687–734 (CRM series in mathematical physics). DOI: 10.1007/978-1-4612-1532-5_12.

19. Gordoа PR, Muĝan U, Pickering A, Sakka A. Bäcklund transformations for higher order Painlevé equations. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2004;22(5):1103–1115. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.02.055.
20. Громак ВИ. О трансцендентности уравнений Пенлеве. *Дифференциальные уравнения*. 1996;32(2):154–160. EDN: WNZFYM.
21. Громак ВИ. О трансцендентности пятого и шестого уравнений Пенлеве. *Дифференциальные уравнения*. 1996;32(4):559–561. EDN: DETNFQ.
22. Żoładek H, Filipuk G. Painlevé equations, elliptic integrals and elementary functions. *Journal of Differential Equations*. 2015;258(4):1303–1355. DOI: 10.1016/j.jde.2014.10.018.
23. Громак ВИ. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференциальные уравнения*. 2020;56(8):1017–1033. EDN: BJNNZD.
24. Cosgrove CM. Higher-order Painlevé equations in the polynomial class II: Bureau symbol P_1 . *Studies in Applied Mathematics*. 2006;116(4):321–413. DOI: 10.1111/j.1467-9590.2006.00346.x.
25. Громак ВИ. О свойствах решений уравнений обобщенной иерархии уравнения $P_{3,4}$. *Дифференциальные уравнения*. 2022;58(2):153–163. EDN: AUZJAR.
26. Громак ВИ. О преобразованиях Беклунда нелинейных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 1993;29(6):1067–1068. EDN: OMHBOU.
27. Уиттекер ЭТ, Ватсон ДжН. *Курс современного анализа. Часть I, Основные операции анализа*. Широков ФВ, редактор. 2-е издание. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1963. 343 с.
28. Громак ВИ. О преобразованиях Беклунда стационарных уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2024;60(3):195–202. DOI: 10.29235/1561-2430-2024-60-3-195-202.

Получена 29.01.2025 / исправлена 20.02.2025 / принята 25.02.2025.
Received 29.01.2025 / revised 20.02.2025 / accepted 25.02.2025.

УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ f -СТРУКТУРЫ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ГРУППЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

В. В. БАЛАЩЕНКО¹⁾, В. Н. КУНИЦА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Исследуется четырехмерная группа осциллятора с точки зрения обобщенной эрмитовой геометрии. Эта разрешимая группа Ли является полупрямым произведением классической трехмерной группы Гейзенберга и вещественной прямой. С использованием соответствующей алгебры Ли построены и изучены шесть базовых левоинвариантных метрических f -структур ранга 2 на группе осциллятора. В результате чего появляется возможность предъявить новые примеры левоинвариантных приближенно келеровых, обобщенных приближенно келеровых и эрмитовых f -структур на разрешимых группах Ли.

Ключевые слова: группа осциллятора; разрешимая группа Ли; разрешимая алгебра Ли; левоинвариантная метрическая f -структура; приближенно келерова f -структура; эрмитова f -структура; обобщенная эрмитова геометрия.

Благодарность. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского государственного университета в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», научно-исследовательская работа «Структуры на линейных алгебраических группах, обобщенных главных G -расслоениях, однородных многообразиях и группах Ли», № гос. регистрации 20211882).

Образец цитирования:

Балащенко ВВ, Куница ВН. Инвариантные f -структуры на четырехмерной группе осциллятора. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1:51–57.
EDN: UQZTOH

For citation:

Balashchenko VV, Kunitsa VN. Invariant f -structures on the four-dimensional oscillator group. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:51–57. Russian.
EDN: UQZTOH

Авторы:

Виталий Владимирович Балащенко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Виктория Николаевна Куница – аспирантка кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. В. Балащенко.

Authors:

Vitaly V. Balashchenko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

balashchenko@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-9366-2411>

Victoria N. Kunitsa, postgraduate student at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

vikakunica@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0002-6756-0056>

INVARIANT f -STRUCTURES ON THE FOUR-DIMENSIONAL OSCILLATOR GROUP

V. V. BALASHCHENKO^a, V. N. KUNITSA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. N. Kunita (vikakunica@gmail.com)

Abstract. In this paper, we investigate the four-dimensional oscillator group from the point of view of the generalised Hermitian geometry. This solvable Lie group is a semi-direct product of the classical three-dimensional Heisenberg group by a real line. Using the corresponding Lie algebra, we construct and study six basic left-invariant metric f -structures of rank 2 on the oscillator group. As a result, it gives the opportunity to present new examples of left-invariant nearly Kähler, generalised nearly Kähler and Hermitian f -structures on solvable Lie groups.

Keywords: oscillator group; solvable Lie group; solvable Lie algebra; left-invariant metric f -structure; nearly Kähler f -structure; Hermitian f -structure; generalised Hermitian geometry.

Acknowledgements. The work was carried out with the financial support by the Belarusian State University within the framework of the state programme of the scientific research of the Republic of Belarus for 2021–2025 «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», research work «Structures on linear algebraic groups, generalised principal G -bundles, homogeneous manifolds and Lie groups», state registration No. 20211882).

Введение

Важными объектами исследования в дифференциальной геометрии являются аффинорные структуры на гладких многообразиях, т. е. гладкие тензорные поля типа $(1, 1)$, реализованные в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к многообразию. И хотя число видов таких структур велико, интенсивно изучаемыми традиционно являются почти комплексные структуры, структуры почти произведения, почти контактные структуры и др. С 1960-х гг. значительную роль стали играть f -структуры Яно [1] ($f^3 + f = 0$), которые обобщают почти комплексные и почти контактные структуры. Вместе с согласованной (псевдо)римановой метрикой на многообразии метрические f -структуры включают классы почти эрмитовых структур и метрических почти контактных структур, роль которых в дифференциальной геометрии и ее многочисленных приложениях чрезвычайно велика. В свою очередь, метрические f -структуры являются важнейшим объектом в обширной обобщенной эрмитовой геометрии – области современной дифференциальной геометрии, развиваемой с середины 1980-х гг. [2–4].

Что касается дифференциальной геометрии однородных многообразий групп Ли, то исследования инвариантных структур на таких многообразиях продолжают оставаться актуальными в связи с рядом задач дифференциальной геометрии, теории гамильтоновых систем, теоретической физики. Отметим здесь эффективное применение метода канонических структур на однородных k -симметрических пространствах, заложенного и развитого в работах геометров Беларуси, России, Великобритании, США, Чехии и других стран [5–11]. В случае с естественно-редуктивной метрикой на однородных k -симметрических пространствах был обнаружен широкий класс инвариантных f -структур, реализующих основные классы в обобщенной эрмитовой геометрии [12–19].

Отметим далее, что многие важные (в известном смысле модельные) примеры возникают при построении и изучении левоинвариантных структур на группах Ли. В силу этого класс нильпотентных групп Ли, включающий группы Гейзенберга и их обобщения, а также более широкий класс разрешимых групп Ли являются перспективными и входят в число основных объектов исследования однородных многообразий, риманова метрика которых не является естественно-редуктивной. Краткий обзор результатов в этом направлении приведен ниже в тексте статьи.

В настоящей работе основным объектом исследования является одна из активно исследуемых разрешимых групп Ли – четырехмерная группа осциллятора. Эта группа играет особую роль в дифференциальной геометрии, гармоническом анализе, субримановой геометрии, теории управления [20–22]. В данной статье установлена связь построенных на группе осциллятора левоинвариантных метрических f -структур ранга 2 с основными классами в обобщенной эрмитовой геометрии.

Метрические f -структуры на гладких многообразиях

Классическими примерами аффинорных структур являются почти комплексные структуры J ($J^2 = -id$), структуры почти произведения P ($P^2 = id$) и др. В 1960-х гг. К. Яно [1] ввел f -структуры, определяемые условием $f^3 + f = 0$. Оказалось [23], что число $r = \dim \operatorname{Im} f$ постоянно для всех точек из M . Это число

является четным и называется рангом структуры, а число $\dim \operatorname{Ker} f = \dim M - r$ называют дефектом структуры и обозначают через $\operatorname{def} f$. Отметим, что частный случай $\operatorname{def} f = 0$ дает почти комплексные структуры $f = J$, а случай $\operatorname{def} f = 1$ приводит к классу почти контактных структур.

Задание f -структуры на M порождает пару взаимно дополнительных распределений $\mathcal{L} = \operatorname{Im} f$ и $\mathcal{M} = \operatorname{Ker} f$, которые называют первым и вторым фундаментальными распределениями f -структуры соответственно. При этом эндоморфизмы $l = -f^2$ и $m = id + f^2$ являются взаимно дополнительными проекторами на распределения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно [24]. Отметим также, что ограничение $\mathcal{F}$ заданной f -структуры на распределение $\mathcal{L}$ задает на нем почти комплексную структуру, т. е. $\mathcal{F}^2 = -id$.

Пусть далее на многообразии M задана риманова метрика $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. В этом случае f -структура на (M, g) называется метрической, если $\langle fX, Y \rangle + \langle X, fY \rangle = 0$ для всех гладких векторных полей X, Y на M [2; 3]. Для метрического f -многообразия первое ($\mathcal{L} = \operatorname{Im} f$) и второе ($\mathcal{M} = \operatorname{Ker} f$) фундаментальные распределения взаимно ортогональны.

При этом ограничение $(\mathcal{F}, g)$ метрической f -структуры на $\mathcal{L}$ есть почти эрмитова структура, т. е. $\mathcal{F}^2 = -id$, $\langle \mathcal{F}X, \mathcal{F}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ для всех $X, Y \in \mathcal{L}$. В частных случаях $\operatorname{def} f = 0$ и $\operatorname{def} f = 1$ получаем почти эрмитовы структуры и почти контактные метрические структуры соответственно.

Упомянутые выше почти эрмитовы структуры, метрические почти контактные структуры, метрические f -структуры легли в основу широкого научного направления, заложенного в работах В. Ф. Кириченко в 1980-х гг. Основным объектом изучения здесь стали обобщенные почти эрмитовы структуры (*generalised almost Hermitian structures*, ГАН) произвольного ранга r . Такое направление называют обобщенной эрмитовой геометрией. Не вдаваясь в детали общего определения ГАН-структуры ранга r , ограничимся рассмотрением важнейшего частного случая ГАН-структур ранга 1, т. е. метрических f -структур.

Фундаментальную роль в геометрии ГАН-структур (в частности, метрических f -структур) играет специальный тензор T типа $(2, 1)$, называемый композиционным тензором. Такой тензор позволяет задать алгебраическую структуру присоединенной Q -алгебры в модуле гладких векторных полей на многообразии M посредством формулы $X * Y = T(X, Y)$ [3; 4]. На основании естественных свойств присоединенной Q -алгебры стало возможным определить некоторые классы ГАН-структур. Заметим, что для метрических f -структур такой тензор был в точности вычислен в работе [3]:

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f \left(\nabla_{fX}(f) fY - \nabla_{f^2X}(f) f^2Y \right), \quad (1)$$

где ∇ – связность Леви-Чивиты риманова многообразия (M, g) ; X, Y – гладкие векторные поля на M .

Приведем здесь некоторые классы метрических структур, указав для них определяющие свойства.

1. Kf – келерова f -структура: $\nabla f = 0$.

2. Hf – эрмитова f -структура: $T(X, Y) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ есть абелева Q -алгебра.

3. G_1f – f -структура класса G_1 : $T(X, X) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ есть антикоммутативная Q -алгебра.

4. $\operatorname{Kill} f$ – киллингова f -структура: $\nabla_X(f)X = 0$.

5. NKf – приближенно келерова f -структура или NKf -структура (*nearly Kähler f -structure*): $\nabla_{fX}(f) fX = 0$.

6. $GNKf$ – обобщенная приближенно келерова f -структура, или $GNKf$ -структура: $f(\nabla_{fX}(f) fX) = 0$.

Классы Kf , Hf , G_1f были введены (в более общей ситуации) в работе [2] (см. также [25]). Киллинговы f -многообразия $\operatorname{Kill} f$ впервые описаны в [26; 27]. Класс NKf был введен в работах [15; 16].

Приведем включения между классами метрических f -структур:

$$Kf \subset Hf \subset G_1f, \quad Kf \subset \operatorname{Kill} f \subset NKf \subset GNKf.$$

Следует заметить, что в частном случае $f = J$ получаем соответствующие классы почти эрмитовых структур, описанных в работе Грея – Хервеллы [28]. Особо необходимо обозначить, что для $f = J$ классы $\operatorname{Kill} f$, NKf и $GNKf$ дают в точности важнейший и широко известный класс NK приближенно келеровых структур. Значительная содержательная информация о классах метрических f -структур представлена в книге [4].

Инвариантные f -структуры на однородных пространствах и группах Ли

Инвариантные структуры на однородных многообразиях групп Ли играют особую роль в дифференциальной геометрии, поскольку эти структуры позволяют использовать развитую алгебро-геометрическую технику групп Ли и алгебр Ли. В частности, в теории почти эрмитовых структур широкий класс инвариантных примеров был построен на основе канонической почти комплексной структуры, которой обладают однородные пространства, порожденные автоморфизмами групп Ли порядка 3 (однородные 3-симметрические пространства) [6; 7; 10; 11].

Что касается обобщенной эрмитовой геометрии, то здесь длительный период отсутствовали содержательные инвариантные примеры. Ситуация качественно изменилась после обнаружения широкого запаса канонических структур классического типа на регулярных Φ -пространствах (в частности, на однородных k -симметрических пространствах) [12]. Это позволило предъявить обширный ресурс примеров метрических f -структур отмеченных выше классов Hf , NKf и др. [13–16].

Более того, в работе [17] были построены инвариантные ГАН-структуры произвольного ранга r .

Пусть G/H есть однородное редуктивное пространство связной группы Ли G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G , где через $\mathfrak{h}$ обозначена подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, отвечающая подгруппе Ли H . Здесь линейное подпространство $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$ отождествляется, как обычно, с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Рассмотрим на G/H инвариантную относительно группы G риманову метрику $g = \langle, \rangle$ и инвариантную метрическую f -структуру. Такие структуры полностью определяются своими значениями в точке o , инвариантными относительно $Ad_G(H)$. Условимся в связи с этим в дальнейшем не различать в обозначениях инвариантные структуры на G/H и их значения в точке o .

Связность Леви-Чивиты инвариантной римановой метрики $g = \langle, \rangle$ на G/H задается следующей формулой [29, с. 187]:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y), \quad (2)$$

где U – симметрическое билинейное отображение из $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ в $\mathfrak{m}$, определяемое из равенства

$$2 \langle U(X, Y), Z \rangle = \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle \quad (3)$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

Инвариантная метрическая f -структура на G/H порождает разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \text{Im } f$ и $\mathfrak{m}_2 = \text{Ker } f$ полностью определяют первые и вторые фундаментальные распределения соответственно, причем эти подпространства ортогональны относительно метрики g . В случае с естественно-редуктивной метрикой значительная информация о классах метрических f -структур получена в работах [13–16; 18; 19; 30].

Большой интерес представляет ситуация, когда метрика g не является естественно-редуктивной. Таковыми случаями являются, например, многие группы Ли с левоинвариантными римановыми метриками. Группу Ли G с действием левыми сдвигами можно рассматривать как однородное пространство G/H с тривиальной группой $H = \{e\}$. Таким образом, возникает тривиальное редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \{0\} \oplus \mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, и инвариантная метрическая f -структура становится левоинвариантной. При этом $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ есть соответствующее такой f -структуре разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Важными классами групп Ли являются нильпотентные и разрешимые группы Ли. Связь левоинвариантных f -структур с обобщенной эрмитовой геометрией отражена в серии работ. Например, на трехмерной разрешимой группе Ли гиперболических движений плоскости построена каноническая f -структура, которая принадлежит классу Hf , но не входит в класс NKf [16]. Рассмотрена также серия нильпотентных групп Ли индекса 2. В частности, на шестимерной обобщенной группе Гейзенберга представлены канонические f -структуры классов NKf и Hf [31], а в работе [32] в этом смысле исследованы канонические f -структуры на пятимерной матричной группе Гейзенберга. Широкий класс левоинвариантных эрмитовых f -структур указан на шестимерных филиформных группах Ли [33].

Геометрия группы осциллятора

Связность Леви-Чивиты. Приведем необходимые сведения о группе осциллятора, следуя в основном работе [20].

Алгебра Ли четырехмерной группы осциллятора может быть реализована как матричная алгебра Ли вида

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -y & z & -2x \\ 0 & 0 & \theta & z \\ 0 & -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(x, y, z, \theta), \text{ где } x, y, z, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Естественный базис этой алгебры Ли задается матрицами $e_1 = M(1, 0, 0, 0)$, $e_2 = M(0, 1, 0, 0)$, $e_3 = M(0, 0, 1, 0)$, $e_4 = M(0, 0, 0, 1)$. Таким образом, структура алгебры Ли $\mathfrak{osc}$ полностью определяется коммутаторными соотношениями

$$[e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = -e_3, [e_3, e_4] = e_2.$$

Легко заметить, что $\mathfrak{osc}$ является разрешимой алгеброй Ли. При этом ее центр есть линейная оболочка вектора e_1 .

Соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{osc}$ связная односвязная группа Ли Osc может быть представлена матрицами вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -y \cos \theta - z \sin \theta & z \cos \theta - y \sin \theta & -2x \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & z \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = m(x, y, z, \theta), \text{ где } x, y, z, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Определим на группе Osc левоинвариантную риманову метрику $g = \langle, \rangle$ тем требованием, что $e_1, \dots, e_4$ есть ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathfrak{osc}$. Связность Леви-Чивиты этой метрики можно вычислить, адаптируя формулы (2) и (3) для групп Ли (т. е. $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} = \mathfrak{osc}$).

Используя (3), для базисных векторов алгебры Ли $\mathfrak{osc}$ можем вычислить

$$\begin{aligned} U(e_1, e_2) &= -\frac{1}{2}e_3, U(e_1, e_3) = \frac{1}{2}e_2, U(e_1, e_4) = 0, U(e_2, e_3) = 0, \\ U(e_2, e_4) &= \frac{1}{2}e_3, U(e_3, e_4) = -\frac{1}{2}e_2, U(e_i, e_i) = 0, i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Представляя теперь векторы $X, Y \in \mathfrak{osc}$ в виде $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$, $Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4$ и используя (2) и (5), получим

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}(e_1(x_2y_3 - x_3y_2) + e_2(x_1y_3 + x_3y_1 - 2x_4y_3) + e_3(-x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_4y_2)).$$

Базовые f -структуры ранга 2. Перейдем теперь к рассмотрению левоинвариантных метрических f -структур на группе Osc . Поскольку ранг 2 любой f -структуры есть четное число, имеем две возможности: $r = 2$ или $r = 4$ (случай почти эрмитовой структуры $f = J$ на Osc). Любая левоинвариантная метрическая f -структура ранга 2 может быть представлена соответствующим оператором f на алгебре Ли $\mathfrak{osc}$ таким, что его образом является двумерное подпространство с действием комплексной структуры на нем, а ядро есть ортогональное дополнение к этому подпространству.

Будем рассматривать так называемые базовые f -структуры, которые порождаются двумерными координатными подпространствами базиса e_1, e_2, e_3, e_4 . Легко видеть, что имеется шесть (с точностью до знака) таких левоинвариантных метрических f -структур.

Последовательно рассмотрим все эти f -структуры и установим их связь с указанными ранее классами обобщенной эрмитовой геометрии.

1. Рассмотрим структуру f_1 , задаваемую следующим образом:

$$f_1(e_1) = f_1(e_4) = 0, f_1(e_2) = -e_3, f_1(e_3) = e_2.$$

В приведенных выше обозначениях это означает, что

$$f_1(X) = -x_2e_3 + x_3e_2, \text{ откуда } f_1^2(X) = -x_2e_2 - x_3e_3. \quad (5)$$

Выясним, принадлежит ли структура f_1 классу NKf приближенно келеровых f -структур. С этой целью вычислим выражение $\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X = \nabla_{f_1X}f_1^2X - f_1\nabla_{f_1X}f_1X$. Последовательно получим, используя (4) и (5),

$$\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X = \frac{1}{2}[f_1X, f_1^2X] + U(f_1X, f_1^2X) = -\frac{1}{2}e_1(x_2^2 + x_3^2) + 0 = -\frac{1}{2}e_1(x_2^2 + x_3^2).$$

Далее

$$\nabla_{f_1X}f_1X = \frac{1}{2}[f_1X, f_1X] + U(f_1X, f_1X) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, $\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X = -\frac{1}{2}e_1(x_2^2 + x_3^2) \neq 0$. В то же время очевидно, что $f_1(\nabla_{f_1X}(f_1)f_1X) = 0$. Следовательно, структура f_1 не является приближенно келеровой f -структурой, однако входит в класс обобщенных приближенно келеровых f -структур.

Исследуем теперь структуру f_1 на принадлежность классу эрмитовых f -структур. С этой целью вычислим композиционный тензор T , задаваемый условием (1).

Далее удобно рассмотреть отдельно выражение из формулы (1) для композиционного тензора T . Обозначим

$$S(f) = \nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y.$$

Вычислим это выражение для структуры f_1 с учетом $f_1^3 = -f_1$ и используем введенные ранее обозначения:

$$\begin{aligned} S(f_1) &= \nabla_{f_1X}(f_1)f_1Y - \nabla_{f_1^2X}(f_1)f_1^2Y = \nabla_{f_1X}f_1^2Y - f_1\nabla_{f_1X}f_1^2Y + \nabla_{f_1^2X}f_1Y + f_1\nabla_{f_1^2X}f_1^2Y = \\ &= \frac{1}{2}e_1(-x_2y_2 - x_3y_3) - f_1\left(\frac{1}{2}e_1(-x_2y_3 - x_3y_2)\right) + \frac{1}{2}e_1(x_2y_2 + x_3y_3) + f_1\left(\frac{1}{2}e_1(x_2y_3 - x_3y_2)\right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для структуры f_1 $T(X, Y) = \frac{1}{4}f_1(0) = 0$, т. е. f_1 является эрмитовой f -структурой.

2. Рассмотрим далее структуру f_2 , определяемую следующими условиями:

$$f_2(e_1) = f_2(e_2) = 0, f_2(e_3) = -e_4, f_2(e_4) = e_3.$$

Используя прежние обозначения и методы вычислений, получим

$$\nabla_{f_2X}(f_2)f_2X = e_2x_3^2 \neq 0.$$

Отсюда следует, что f_2 не является приближенно келеровой f -структурой, однако входит в класс $\text{GNK}f$, поскольку $e_2 \in \text{Ker } f_1$.

Дальнейшие вычисления для структуры f_2 приводят к такому результату:

$$S(f_2) = -e_2(x_3y_3 - x_4y_4).$$

Следовательно, f_2 является эрмитовой f -структурой.

Приведем далее результаты для всех остальных базовых f -структур.

3. Рассмотрим структуру f_3 , задаваемую условиями

$$f_3(e_2) = f_3(e_4) = 0, f_3(e_1) = -e_3, f_3(e_3) = e_1.$$

Для этого случая имеем

$$\nabla_{f_3X}(f_3)f_3X = \frac{1}{2}e_2(x_1^2 - x_3^2), S(f_3) = e_2(x_1y_1 - x_3y_3).$$

Следовательно, структура f_3 входит в классы $\text{GNK}f$ и Hf .

4. Перейдем к рассмотрению структуры f_4 :

$$f_4(e_2) = f_4(e_3) = 0, f_4(e_1) = -e_4, f_4(e_4) = e_1.$$

Здесь результаты вычислений таковы:

$$\nabla_{f_4X}(f_4)f_4X = 0, S(f_4) = 0, \nabla_X(f_4)X = \frac{1}{2}e_2x_3x_4 - \frac{1}{2}e_3x_2x_4.$$

Это означает, что f_4 является приближенно келеровой и эрмитовой f -структурой.

5. Рассмотрим далее структуру f_5 :

$$f_5(e_1) = f_5(e_3) = 0, f_5(e_2) = -e_4, f_5(e_4) = e_2.$$

После проведенных вычислений получим

$$\nabla_{f_5X}(f_5)f_5X = e_3(x_2^2), S(f_5) = e_3(x_2y_2 - x_4y_4).$$

Таким образом, f_5 принадлежит классам Hf и $\text{GNK}f$.

6. В конечном итоге рассмотрим структуру f_6 , задаваемую условиями

$$f_6(e_3) = f_6(e_4) = 0, f_6(e_1) = -e_2, f_6(e_2) = e_1.$$

Приведем результаты вычислений:

$$\nabla_{f_6X}(f_6)f_6X = e_3(x_2^2), S(f_6) = e_3(x_2y_2 + x_4y_4).$$

Здесь снова структура f_5 входит в классы Hf и $\text{GNK}f$.

Итогом всех проведенных рассуждений и вычислений является следующая теорема.

Теорема. На четырехмерной группе осциллятора Osc левоинвариантные базовые f -структуры ранга 2 f_i , $i = 1, 6$, обладают следующими свойствами:

- 1) структура f_4 является приближенно келеровой f -структурой, остальные пять f -структур являются обобщенными приближенно келеровыми f -структурами;
- 2) все шесть рассмотренных f -структур являются эрмитовыми f -структурами.

Библиографические ссылки

1. Yano K. On a structure defined by a tensor field f of type $(1, 1)$ satisfying $f^3 + f = 0$. *Tensor*. 1963;14:99–109.
2. Кириченко ВФ. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*. 1983;47(6):1208–1223.
3. Кириченко ВФ. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий. В: Михайлов АИ, Остиану НМ, редакторы. *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Том 18*. Москва: ВИНТИ; 1986. с. 25–71.
4. Кириченко ВФ. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*. Москва: Московский педагогический государственный университет; 2003. 495 с.
5. Степанов НА. Основные факты теории ϕ -пространств. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1967;3:88–95.
6. Wolf JA, Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. I. *Journal of Differential Geometry*. 1968;2(1):77–114. DOI: 10.4310/jdg/1214501139.
7. Wolf JA, Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. II. *Journal of Differential Geometry*. 1968;2(2):115–159. DOI: 10.4310/jdg/1214428252.
8. Феденко АС. *Пространства с симметриями*. Минск: Издательство Белорусского государственного университета; 1977. 168 с.
9. Ковальский О. *Обобщенные симметрические пространства*. Сабинин ЛВ, переводчик. Москва: Мир; 1984. 240 с.
10. Степанов НА. Однородные 3-циклические пространства. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1967;12:65–74.
11. Gray A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3. *Journal of Differential Geometry*. 1972;7(3–4):343–369. DOI: 10.4310/jdg/1214431159.
12. Балащенко ВВ, Степанов НА. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах. *Математический сборник*. 1995;186(11):3–34. EDN: XNEJKX.
13. Балащенко ВВ. Естественно-редуктивные киллинговы f -многообразия. *Успехи математических наук*. 1999;54(3):151–152. EDN: XNDZCP.
14. Балащенко ВВ. Однородные эрмитовы f -многообразия. *Успехи математических наук*. 2001;56(3):159–160. EDN: XNDRJB.
15. Балащенко ВВ. Однородные приближенно келеровы f -многообразия. *Доклады Академии наук*. 2001;376(4):439–441. EDN: CSLRXP.
16. Balashchenko VV. Invariant nearly Kähler f -structures on homogeneous spaces. In: Fernández M, Wolf JA, editors. *Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray. International congress on differential geometry; 2000 September 18–23; Bilbao, Spain*. Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 263–267 (Contemporary mathematics; volume 288).
17. Балащенко ВВ, Вылегжанин ДВ. Обобщенная эрмитова геометрия на однородных Φ -пространствах конечного порядка. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2004;10:33–44. EDN: HQUNGD.
18. Балащенко ВВ, Самсонов АС. Приближенно келеровы и эрмитовы f -структуры на однородных k -симметрических пространствах. *Доклады Академии наук*. 2010;432(3):295–298. EDN: MSRBAL.
19. Самсонов АС. Приближенно келеровы и эрмитовы f -структуры на однородных Φ -пространствах порядка k в случае специальных метрик. *Сибирский математический журнал*. 2011;52(6):1373–1388. EDN: OKFOYR.
20. Biggs R, Remsing CC. Some remarks on the oscillator group. *Differential Geometry and its Applications*. 2014;35(supplement):199–209. DOI: 10.1016/j.difgeo.2014.03.003.
21. Fischer M, Kath I. Spectra of compact quotients of the oscillator group. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*. 2021;17:051. DOI: 10.3842/sigma.2021.051.
22. Biggs R, Nagy PT. On extensions of sub-Riemannian structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 2016;46:25–38. DOI: 10.1016/j.difgeo.2016.02.001.
23. Stong RE. The rank of an f -structure. *Kodai Mathematical Seminar Reports*. 1977;29(1–2):207–209. DOI: 10.2996/kmj/1138833583.
24. Яно К, Кон М. *CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях*. Остиану НМ, переводчик. Москва: Наука; 1990. 189 с.
25. Singh KD, Singh R. Some $f(3, \epsilon)$ -structure manifolds. *Demonstratio Mathematica*. 1977;10(3–4):637–645. DOI: 10.1515/dema-1977-3-411.
26. Грицанс АС. О геометрии киллинговых f -многообразий. *Успехи математических наук*. 1990;45(4):149–150.
27. Грицанс АС. О строении киллинговых f -многообразий. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1992;6:49–57.
28. Gray A, Hervella LM. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1980;123:35–58. DOI: 10.1007/BF01796539.
29. Кобаяси Ш, Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии. Том 2*. Сабинин ЛВ, переводчик. Москва: Наука; 1981. 416 с.
30. Балащенко ВВ. Инвариантные f -структуры на естественно-редуктивных однородных пространствах. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2008;4:3–15. EDN: JHIOHT.
31. Balashchenko VV. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group. *Kragujevac Journal of Mathematics*. 2011;35(2):209–222.
32. Балащенко ВВ, Дубовик ПА. Левоинвариантные f -структуры на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2, 1)$. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2013;3:112–117. EDN: TDNKBV.
33. Дубовик ПА. Эрмитовы f -структуры на 6-мерных филиформных группах Ли. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2016;7:34–43. EDN: VTFUMH.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, Ю. В. ШАФИЕВА¹⁾, Г. В. МОСКВИТИН²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет транспорта, ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

²⁾Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
пер. Малый Харитоньевский, 4, 101000, г. Москва, Россия

Аннотация. Исследован упругий осесимметричный изгиб круговой трехслойной пластины в нестационарном температурном поле. Использовано приближенное решение задачи теплопроводности, полученное с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пластины. Принято, что деформирование пластины подчиняется гипотезе ломаной линии. Для тонких несущих слоев, воспринимающих основную нагрузку, справедливы гипотезы Кирхгофа. Относительно толстый легкий наполнитель сжимаем по толщине, в нем

Образец цитирования:

Старовойтов ЭИ, Шафиева ЮВ, Москвитин ГВ. Деформирование трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1: 58–67.

EDN: XXLFSW

For citation:

Starovoitov EI, Shafiyeva YuV, Moskvitin GV. Deformation of a three-layer plate with a compressible filler in the temperature field. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:58–67. Russian.

EDN: XXLFSW

Авторы:

Эдуард Иванович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства.

Юлия Викторовна Шафиева – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры строительных технологий факультета промышленного и гражданского строительства.

Геннадий Викторович Москвитин – доктор технических наук, профессор; заведующий лабораторией надежности и долговечности при термомеханических циклических воздействиях.

Authors:

Eduard I. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of structural mechanics, geotechnics and building structures, faculty of industrial and civil engineering.

edstar0@yandex.by

Yuliya V. Shafiyeva, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of construction technologies, faculty of industrial and civil engineering.

zakharchuk.julia2@mail.ru

Gennady V. Moskvitin, doctor of science (engineering), full professor; head of the laboratory of reliability and durability under thermomechanical cyclic effect.

gvmoskvitin@yandex.ru

выполняется гипотеза Тимошенко. Для вывода системы уравнений равновесия применен принцип возможных перемещений Лагранжа. Получено общее аналитическое решение соответствующей краевой задачи. Численно исследовано изменение перемещений в пластине при различных температурах.

Ключевые слова: упругая трехслойная пластина; сжимаемый наполнитель; осесимметричное нагружение; температурное поле.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

DEFORMATION OF A THREE-LAYER PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER IN THE TEMPERATURE FIELD

E. I. STAROVOITOV^a, Yu. V. SHAFIYEVA^a, G. V. MOSKVITIN^b

^a*Belarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Gomel 246653, Belarus*

^b*A. A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering,
Russian Academy of Sciences, 4 Malyj Haritonjevskij Lane, Moscow 101000, Russia*

Corresponding author: E. I. Starovoitov (edstar0@yandex.by)

Abstract. The elastic axisymmetric bending of a circular three-layer plate in a nonstationary temperature field is herein investigated. An approximate solution to the problem of thermal conductivity is used, obtained by averaging the thermo-physical characteristics of the materials of the layers over the thickness of the plate. It is accepted that the deformation of the plate obeys the polyline hypothesis. Kirchhoff's hypotheses are valid for thin load-bearing layers that take on the main load. A relatively thick lightweight filler is compressible in thickness, and the Timoshenko hypothesis is fulfilled in it. To derive a system of equilibrium equations, the principle of possible Lagrange displacements is applied. A general analytical solution of the corresponding boundary value problem is obtained. The change of displacements in the plate at different temperatures is numerically investigated.

Keywords: elastic three-layer plate; compressible filler; axisymmetric loading; temperature field.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

Актуальность разработки новых математических моделей для исследования упругого деформирования композитных стержней, пластин и оболочек при термосиловых нагрузках определяется их широким применением в машиностроении, строительстве и при транспортировке энергоносителей. Монографии [1–3] посвящены разработке расчетных математических моделей деформирования неоднородных, в том числе трехслойных, элементов конструкций.

Исследование свободных и вынужденных колебаний, резонансных и нестационарных нагружений неоднородных цилиндрических оболочек проведено в работах [4–9]. Статьи [10; 11] посвящены описанию резонансных, а также линейно изменяющихся во времени воздействий на круговые трехслойные пластины. Колебания трехслойных пластин, связанных с упругим основанием Винклера, рассмотрены в публикациях [12; 13]. В работах [14; 15] проанализировано акустическое и динамическое деформирование неоднородных пластин с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования. В статьях [16; 17] рассмотрены рассеяние упругих волн в сильно неоднородной трехслойной пластине и внутренний сдвиг асимметричной многослойной пластины.

Квазистатический изгиб трехслойных балок исследован в публикациях [18–22], при этом были учтены реакция упругого основания, жесткость межслойных соединений и упругопластические свойства материалов слоев. Ряд задач о деформировании неоднородных круговых пластин решен в статьях [23–28], в частности исследованы несущая способность, изгиб при распределенной нагрузке, влияние граничных условий на формы равновесия, неосесимметричное растяжение-сжатие в своей плоскости. Сжимаемость наполнителя при изгибе трехслойных пластин без учета теплового воздействия ранее была описана в работах [29–31].

В предлагаемой работе исследуется влияние нестационарного температурного поля на деформирование упругой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

Постановка краевой задачи термоупругости

Пусть на внешнюю поверхность несимметричной по толщине круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем падает тепловой поток с интенсивностью q_t (рис. 1). Нижняя поверхность ($z = -c - h_2$) и контур ($r = 1$) теплоизолированы.

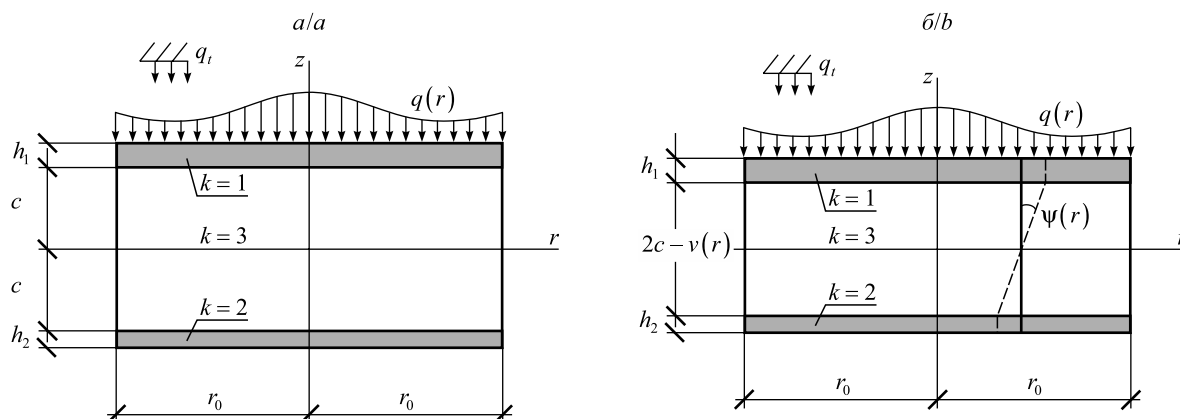


Рис. 1. Расчетная схема круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем

Fig. 1. Calculation scheme of a circular three-layer plate with a compressible filler

Приращение температуры $T(z)$ по толщине пластины во времени t описывается приближенной формулой, приведенной в статье [27]:

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где $\tau = \frac{at}{H^2}$; $s = \frac{z}{H}$; $\lambda = \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_k h_k}{H}$; $a = \frac{\lambda}{C}$; $C = \sum_{k=1}^3 \frac{C_k h_k \rho_k}{H}$; $H = h_1 + h_2 + h_3$; $h_1 \neq h_2$ – толщины несущих слоев; $h_3 = 2c$ – толщина заполнителя; λ_k – коэффициент теплопроводности; C_k – коэффициент теплоемкости; ρ_k – плотность материала. Здесь и далее $k = 1, 2, 3$ – номер слоя.

Формула (1) была получена в результате решения задачи теплопроводности с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов трехслойной пластины по толщине слоев (вывод представлен, например, в работе [32]). В частном случае при $h_2 = h_3 = 0$ из нее следует точная формула для однослойной пластины, приведенная в монографии [33].

Постановка и решение задачи проводятся в цилиндрической системе координат, привязанной к срединной плоскости заполнителя. Кинематические гипотезы предполагают, что в тонких внешних несущих слоях нормаль не изменяет своей длины, остается прямолинейной и перпендикулярной срединной плоскости слоя (гипотезы Кирхгофа). Обжатие относительно толстого легкого заполнителя принимается линейным по толщине. Нормаль заполнителя остается прямолинейной, но при этом изменяет длину и поворачивается на дополнительный угол $\psi(r, t)$. На контуре пластины обжатие заполнителя и относительный сдвиг отсутствуют, что соответствует наличию на нем жесткой диафрагмы. Кроме относительного сдвига $\psi(r, t)$, искомыми функциями будут $u(r, t)$ и $w(r, t)$ – радиальные перемещения и прогибы точек координатной плоскости, $v(r, t)$ – линейная функция обжатия заполнителя. Зависимость указанных перемещений от времени определяется нестационарным температурным полем (1).

В силу осесимметричности распределенной нагрузки $q = q(r)$ окружные перемещения отсутствуют ($u_\phi^{(k)} = 0$), а искомые величины – $\psi(r, t)$, $u(r, t)$, $w(r, t)$, $v(r, t)$ – не зависят от координаты ϕ . Радиальные перемещения $u^{(k)}(r, z)$ и прогибы $w^{(k)}(r, z)$ точек k -го слоя выражаются через указанные четыре функции.

В верхнем ($k = 1$) и нижнем ($k = 2$) несущих слоях

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(r, z) &= u + c\psi - z(w_r + v_r), \quad w^{(1)}(r, z) = w + v \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(2)}(r, z) &= u - c\psi - zw_r, \quad w^{(2)}(r, z) = w \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c). \end{aligned} \quad (2)$$

В заполнителе ($k = 3$)

$$\begin{aligned} u_r^{(3)}(r, z) &= u + z\psi - z \left[w_{r,r} + \frac{v_{r,r}}{2c}(z + c) \right], \\ w^{(3)}(r, z) &= w + \frac{v}{2c}(z + c) \quad (-c \leq z \leq c). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь z – вертикальная координата точек слоя; штрих в нижнем индексе обозначает производную по радиальной координате.

Подставив в соотношения Коши [1] перемещения (2) и (3), получим следующие деформации в слоях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{r,r} + c\psi_{r,r} - z(w_{r,r,r} + v_{r,r,r}), \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{r,r} + v_{r,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0 \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{r,r} - c\psi_{r,r} - zw_{r,r,r}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{r,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{r,r} + z\psi_{r,r} - z \left[w_{r,r,r} + \frac{v_{r,r,r}}{2c}(z + c) \right], \quad \varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r} \left\{ u + z\psi - z \left[w_{r,r} + \frac{v_{r,r}}{2c}(z + c) \right] \right\}, \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{z}{2c} v_r \right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c} \quad (-c \leq z \leq c). \end{aligned} \quad (4)$$

Напряжения в слоях пластины можно вычислить через деформации (4), воспользовавшись законом Гука, учитывающим температуру:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (\alpha = r, \phi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad s_z^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_z^{(3)}, \quad \sigma^{(3)} = 3K_3 (\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03} T_3), \end{aligned} \quad (5)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев, зависящие от температуры T_k в k -м слое; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения.

Используя тензоры напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$, введем обобщенные внутренние усилия

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha = \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2} M_\alpha^{(3)} + \frac{1}{2c} S_\alpha^{(3)} \quad (\alpha = r, \phi), \end{aligned} \quad (6)$$

где $T_\alpha^{(k)}$, $M_\alpha^{(k)}$ – внутренние усилия в слоях пластины.

Система уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях (6) получена с помощью вариационного метода Лагранжа, при этом работа касательных ($\sigma_{rz}^{(3)}$) и нормальных ($\sigma_z^{(3)}$) напряжений в заполнителе в силу принятых гипотез не учитывалась [29]:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\phi) &= 0, \quad M_{r,r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\phi,r}) = -q, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\phi) &= 0, \quad D_{r,r,r} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\phi,r}) = -q. \end{aligned} \quad (7)$$

На контуре пластины ($r = r_0$) должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = 0, \\ D_r &= D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\phi) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где T_r^0 , H_r^0 , M_r^0 , D_r^0 – заданные усилия на границе.

Чтобы из системы (7) получить уравнения равновесия в перемещениях, нужно с помощью соотношений (2)–(6) выразить внутренние усилия через искомые функции. Например, для обобщенного момента M_r получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} M_r = & \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\ & + \left[K_1^+ c h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ c h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] \psi_{,r} + \\ & + \left[K_1^- c h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- c h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{\psi}{r} - \\ & - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] w_{,rr} - \\ & - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{w_{,r}}{r} - \\ & - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_3^+ \frac{c^3}{3} \right] v_{,rr} - \\ & - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_3^- \frac{c^3}{3} \right] \frac{v_{,r}}{r} - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} K_k \int_{h_k} T_k z dz, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k), \quad K_k^- = K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k).$$

Эта формула отличается от приведенных ранее в работах [29; 30] формул наличием в конце температурного слагаемого и зависимостью модулей упругости от температуры. Выражение для момента M_φ следует из выражения (9), если поменять местами величины K_k^+ и K_k^- . В результате после подстановки в уравнения (7) обобщенных внутренних усилий, выраженных через искомые функции, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &= -q, \\ L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{6} K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= -q, \end{aligned} \quad (10)$$

где a_i – коэффициенты, выражаемые через упругие и геометрические параметры слоев,

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{11} + \frac{1}{2c} K_{32},$$

$$a_5 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \quad a_6 = K_{32} + c(K_{11} + K_{21}), \quad a_7 = c a_4, \quad a_8 = \sum_{k=1}^3 K_{k2},$$

$$a_9 = K_{12} + \frac{1}{2} K_{32}, \quad a_{10} = K_{12} + \frac{2}{5} c^3 K_{32}, \quad K_{km} = \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2);$$

L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы вида

$$L_2(g) \equiv g_{rr} + \frac{g_r}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{rrr} + \frac{2g_{rr}}{r} - \frac{g_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача о деформировании трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем замыкается добавлением к системе дифференциальных уравнений (10) силовых условий (8) или кинематических граничных условий на контуре ($r = r_0$). Кроме того, должны быть ограничены перемещения в центре пластины ($r = 0$).

При жесткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = v = w_r = v_r = 0 \text{ при } r = r_0. \quad (11)$$

В случае шарнирного опирания контура предъявляются следующие требования:

$$u = \psi = w = v = v_{rr} = 0, \quad M_r = 0 \text{ при } r = r_0. \quad (12)$$

Общее аналитическое решение краевой задачи

В результате аналитического исследования системы дифференциальных уравнений (10) получено следующее решение:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q) - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_r - a_9 v_r) + \frac{C_1 r}{4a_6} (2 \ln r - 1) + C_3 \frac{r}{2} + C_4 \frac{1}{r}, \\ w &= \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q) dr + \\ &\quad + \frac{C_1 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12}, \\ u &= b_1 v_r + (b_2 + b_3) L_3^{-1}(q) - \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) (b_2 C_1 + b_3 C_2) + C_5 \frac{r}{2} + C_6 \frac{1}{r}, \\ v &= -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \right. \\ &\quad \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9, \end{aligned} \quad (13)$$

где $J_0(\beta r)$, $J_1(\beta r)$ – функции Бесселя; $Y_0(\beta r)$, $Y_1(\beta r)$ – функции Неймана; C_i – константы интегрирования; $q_1 = \frac{A}{r} \int q r dr$ – функция нагрузки; β , A – параметры, выражаемые через коэффициенты a_i , введенные в системе уравнений (10).

Искомое решение должно быть ограничено в начале координат, поэтому, учитывая особенности логарифма и функций Неймана в нуле, необходимо положить равными нулю следующие константы интегрирования: $C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{11} = 0$.

В результате решение (13) при равномерно распределенной поверхностной нагрузке $q = q_0 = \text{const}$ принимает вид

$$\begin{aligned} v &= -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) + \frac{q_0 r}{2\beta^2} (p_1 + p_2) + C_9, \\ \psi &= -\frac{q_0 r^3}{16a_6} - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_r - a_9 v_r) + C_3 \frac{r}{2}, \quad u = b_1 v_r + (b_2 + b_3) \frac{q_0 r^3}{16} + C_5 \frac{r}{2}, \\ w &= \left(b_1 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) v + \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} C_5 \frac{r^2}{4} + \\ &\quad + \frac{q_0 r^4}{64(a_6^2 - a_5 a_8)} ((a_2 a_6 - a_3 a_5)(b_2 + b_3) - a_5) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{12}, \end{aligned} \quad (14)$$

где b_i , p_i – коэффициенты, выражаемые через величины a_i , введенные в системе уравнений (10).

При жесткой заделке контура пластины из граничных условий (11) следует, что

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{q_0 r_0^2}{8a_6}, C_5 = -(b_2 + b_3) \frac{q_0 r_0^2}{8}, C_7 = -\frac{q_0}{2\beta^2 J_1(\beta r_0)} (p_1 + p_2), \\ C_9 &= \frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{q_0 r_0}{2\beta^2} (p_1 + p_2), C_{10} = \frac{a_5}{8(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^2, \\ C_{12} &= -\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \left(\frac{(b_2 + b_3) q_0 r_0^4}{64} + C_5 \frac{r_0^2}{4} \right) + \frac{a_5}{64(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^4 - C_{10} \frac{r_0^2}{4}. \end{aligned} \quad (15)$$

В случае шарнирного опирания контура константы интегрирования определяются из граничных условий (12) и включают температуру в явном виде из-за зависимости момента M_r (9) от температуры. Следует отметить, что в решении (14), (15) зависимость модулей упругости от температуры рассчитывается по формуле Белла [34].

Численные результаты

На рис. 2–6 показано изменение перемещений в пластине с несущими слоями, выполненными из дюралюминия марки Д16-Т, и заполнителем, изготовленным из фторопласта-4. Механические характеристики материалов приведены в монографии [1]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу пластины, составляли $c = 0,23$, $h_1 = 0,03$, $h_2 = 0,03$. Контур жестко заделан. Результаты получены для пластины единичного радиуса.

Необходимость учета сжимаемости заполнителя иллюстрирует рис. 2, на котором показаны прогибы слоев пластины при изотермической нагрузке $q_0 = -0,5$ МПа. Решение краевой задачи при изгибе подобной пластины с несжимаемым заполнителем приведено в работе [32]. В этом случае прогиб рассчитывается по формуле

$$w = -b_1 \frac{q_0}{64} (r^4 - 2r_0^2 r^2 + r_0^4) \quad (b_1 = \text{const})$$

и практически совпадает с кривой 3, что указывает на преимущество представленной математической модели деформирования трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем с известной моделью, в которой заполнитель не сжимаем.

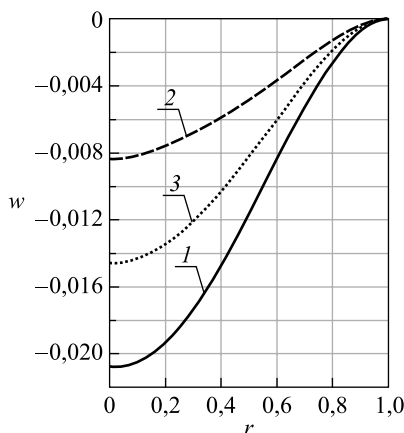


Рис. 2. Прогибы несущих слоев и заполнителя пластины:
1 – прогиб верхнего слоя; 2 – прогиб нижнего слоя;
3 – прогиб срединной плоскости заполнителя

Fig. 2. Deflections of bearing layers and filler of the plate:
1 – deflection of the upper layer; 2 – deflection of the lower layer;
3 – deflection of the median plane of the filler

Максимальное различие прогибов при учете сжимаемости заполнителя достигает 42 %. Это вносит существенную поправку в напряженно-деформированное состояние пластины.

На рис. 3–6 представлены графики изменения искомых перемещений – прогиба $w(r)$ нижнего слоя пластины, функции обжатия заполнителя $v(r)$, относительного сдвига $\psi(r)$ и радиального перемеще-

ния $u(r)$ срединной плоскости заполнителя под воздействием температурного поля при интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q = 1$ МПа. Температура в пластине проинтегрирована по вертикальной координате в соответствии с обобщенными внутренними усилиями (6) и не зависит от z . Ее увеличение на каждом шаге принималось равным 60 К. Рост температуры на 60 К приводит к увеличению функций $w(r)$ и $\psi(r)$ на 5,0 %, а функций $v(r)$ и $u(r)$ на 7,5 %.

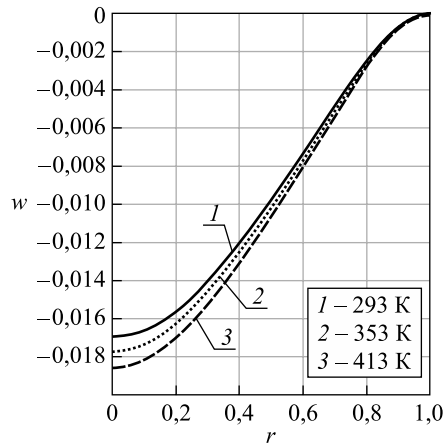


Рис. 3. Прогиб нижнего слоя пластины при различных температурах

Fig. 3. Deflection of the lower layer of the plate at various temperatures

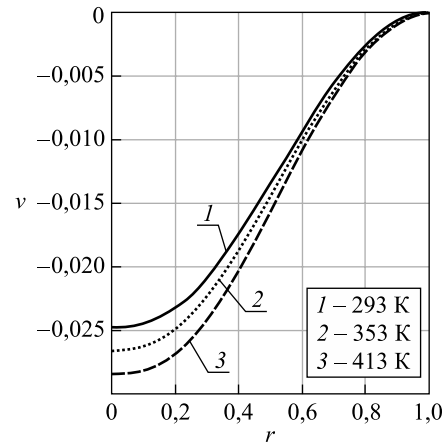


Рис. 4. Функция обжатия заполнителя при различных температурах

Fig. 4. Filler compression function at various temperatures

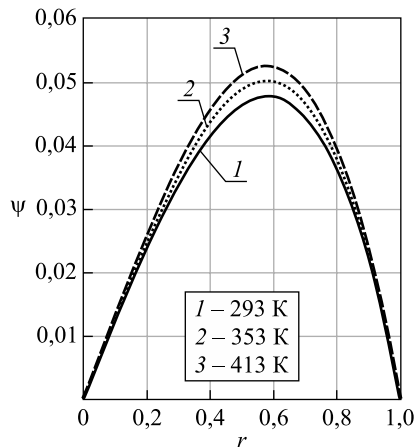


Рис. 5. Относительный сдвиг в заполнителе при различных температурах

Fig. 5. Relative shift in the filler at various temperatures

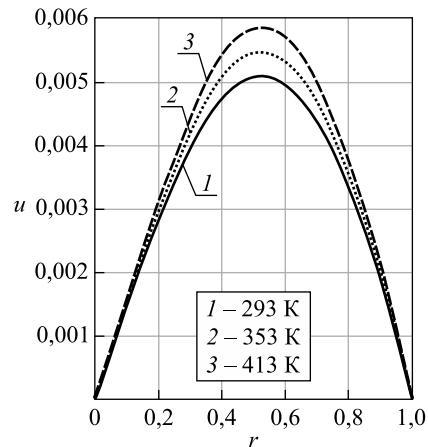


Рис. 6. Радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя при различных температурах

Fig. 6. Radial displacement of the median plane of the filler at various temperatures

Для верификации расчетной модели деформирования трехслойных элементов конструкций, учитывающей относительный сдвиг в заполнителе, в лаборатории кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства Белорусского государственного университета транспорта были проведены экспериментальные исследования изгиба трехслойной балки прямоугольного поперечного сечения с жесткими диафрагмами на торцах. Несущие слои были выполнены из семислойной березовой фанеры с модулями упругости $E_1 = 6000$ МПа, $G_1 = 750$ МПа, а заполнитель изготовлен из пенополистирола с модулями упругости $E_2 = 15$ МПа, $G_2 = 5,14$ МПа.

Наибольший расчетный прогиб $w_{\max}$ составил 2,0 мм с учетом относительного сдвига в заполнителе и 1,4 мм без учета относительного сдвига. Эксперимент, проведенный в лаборатории, дал значение

2,1 мм [35]. Следовательно, учет относительного сдвига в заполнителе делает расчетную модель менее жесткой и приближает численные результаты к экспериментальным значениям.

Заключение

Приведенные постановка и аналитическое решение краевой задачи подтверждают необходимость учета сжимаемости материала заполнителя в круговой трехслойной пластине при деформировании в температурном поле. Численные результаты показали увеличение расчетного прогиба верхнего несущего слоя на 42 % при учете сжимаемости заполнителя. С ростом температуры все перемещения увеличиваются однотипно в соответствии с уменьшением характеристик упругости материалов слоев, рассчитываемых по формуле Белла.

Библиографические ссылки

1. Zhuravkov M, Lyu Yongtao, Starovoitov E. *Mechanics of solid deformable body*. Singapore: Springer; 2023. XV, 308 p. DOI: 10.1007/978-981-19-8410-5.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific; 2015. XV, 360 p. DOI: 10.1142/9048.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
6. Mikhasev GI, Altenbach H. *Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression*. Cham: Springer; 2019. Chapter 4, Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells; p. 157–198 (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
7. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AY. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
8. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
9. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
10. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.
11. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
12. Старовойтов ЭИ, Леоненко ДВ. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2015;21(2):162–169. EDN: UEBAFJ.
13. Леоненко ДВ, Маркова МВ. Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;1:49–63. EDN: WFKRZG.
14. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
15. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonant vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.
16. Kaplunov J, Prikazchikov DA, Prikazchikova LA. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;113–114:169–179. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.042.
17. Kaplunov J, Prikazchikova L, Alkinidri M. Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1247–1262. DOI: 10.1007/s00161-021-00969-6.
18. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
19. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
20. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018;54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
21. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014;225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
22. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
23. Wang Z, Lu G, Zhu F, Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
24. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.

25. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
26. Бауэр СМ, Воронкова ЕБ. Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;1:38–46. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-38-46.
27. Старовойтов ЭИ, Журавков МА, Нестерович АВ. Термосиловое нагружение упругопластической трехслойной пластины. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:42–52. EDN: EJWCME.
28. Roshchin MN, Moskvitin GV, Balashova AV. On the issue of investigating the strength of the IVV.10M reactor vessel and internals. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2010;39(4):343–350. DOI: 10.3103/S1052618810040072.
29. Захарчук ЮВ. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем. *Механика. Исследования и инновации*. 2018;11:80–87. EDN: ZGWWQP.
30. Захарчук ЮВ. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. *Механика. Исследования и инновации*. 2019;12:66–75. EDN: FPJQZA.
31. Starovoitov EI, Zakharchuk YV, Kuznetsova EL. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load. *Journal of the Balkan Tribological Association*. 2021;27(2):175–188. EDN: PWNFMU.
32. Горшков АГ, Старовойтов ЭИ, Яровая АВ. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. Москва: Физматлит; 2005. 576 с.
33. Коваленко АД. *Термоупругость*. Киев: Вища школа; 1975. 216 с.
34. Белл ДжФ. *Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I, Малые деформации*. Филин АП, редактор; Иофин ЛЕ, Кан ВЛ, Канаун СК, Левин ВМ, Мордвинцев АГ, Филина ЛИ, переводчики. Москва: Наука; 1984. 596 с.
35. Яровая АВ, Поддубный АА. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой шарнирно опертой трехслойной балки. *Вестник Белорусского государственного университета транспорта: наука и транспорт*. 2012;2:93–98. EDN: KCVHHG.

Получена 27.08.2024 / исправлена 25.02.2025 / принята 25.02.2025.
Received 27.08.2024 / revised 25.02.2025 / accepted 25.02.2025.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.872

УПРАВЛЕНИЕ ПРИЕМОМ ЗАКАЗОВ В СИСТЕМЕ ДОСТАВКИ ТОВАРОВ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ ВМЕСТИМОСТИ СКЛАДА В ПУНКТЕ ВЫДАЧИ ПОСЫЛОК

А. Н. ДУДИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Доставка посылок в пункты выдачи товаров стала очень популярной в связи с быстрым развитием интернет-торговли. Для эффективной работы интернет-торговли требуется создание новых моделей систем массового обслуживания. В настоящей статье процесс доставки товаров описывается как обработка посылки в двух зонах обслуживания. Обслуживание в первой зоне включает доставку посылки до пункта выдачи товаров, обслуживание во второй зоне – хранение посылки на складе до возможного ее получения клиентом. Вместимость склада является конечной. Если посылка прибывает на заполненный склад, то она теряется. В целях повышения эффективности работы системы доставки предлагается применять пороговое управление приемом посылок в первой зоне. Система доставки анализируется при достаточно общих предположениях о процессе прибытия посылок. Анализ выполняется путем рассмотрения соответствующим образом построенной многомерной цепи Маркова с непрерывным временем. Устанавливается и численно иллюстрируется зависимость основных показателей производительности системы доставки от вместимости склада и порога управления доступом. Формулируется и решается задача оптимизации.

Ключевые слова: система доставки посылок; пункт выдачи; тандемная очередь; управление доступом; многомерная цепь Маркова; марковский входной поток; оптимизация.

Образец цитирования:

Дудин АН. Управление приемом заказов в системе доставки товаров с учетом конечной вместимости склада в пункте выдачи посылок. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1:68–78 (на англ.).
EDN: ZIAXUB

For citation:

Dudin AN. Admission control in a parcel delivery system with account of the finite capacity of the warehouse at the pick-up point. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:68–78.
EDN: ZIAXUB

Автор:

Александр Николаевич Дудин – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Alexander N. Dudin, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
dudin@bsu.by

ADMISSION CONTROL IN A PARCEL DELIVERY SYSTEM WITH ACCOUNT OF THE FINITE CAPACITY OF THE WAREHOUSE AT THE PICK-UP POINT

A. N. DUDIN^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. Parcels delivering via pick-up points have become very popular due to the fast development of online marketplaces, customer-to-customer markets, and the use of parcel lockers as the last mile delivery solution. An adequate modelling of such delivery systems requires the creation of novel queueing models. In this paper, the process of delivering is described as the processing of a parcel in two service areas. The first area corresponds to processing until the parcel's arrival to the second area. The service in the second area corresponds to the storage of the parcel in a warehouse until it is picked up by a customer. The capacity of the warehouse is finite. A parcel arriving when the warehouse is full is lost. To enhance the efficiency of the system operation, threshold-type control by parcel admission at the first area is applied. Such a system is analysed under quite general assumptions about the parcel arrival flow. The analysis is implemented via consideration of the suitably constructed multidimensional continuous-time Markov chain. The dependence of the main performance measures of the delivery system on the warehouse capacity and the admission threshold are established and numerically illustrated. An optimisation problem is formulated and solved.

Keywords: parcel delivery system; pick-up point; tandem queue; admission control; multidimensional Markov chain; Markov arrival process; optimisation.

Introduction

As it is mentioned in [1], the business of parcel deliveries has been booming in recent years. From 64 bln parcels sent worldwide in 2016, the number of parcels has climbed up to over 161 bln in 2022 and it is forecast to reach 225 bln by 2028. Parcel delivery via the use of pick-up points, in particular the use of parcel lockers, is very popular as the solution for goods delivering by different online marketplaces (*Amazon, eBay, Rakuten, Shopee, AliExpress, Etsy, Walmart, Mercado Libre, Wildberries, Ozon*, etc.) and as the last mile delivery solution in a variety of out-of-home delivery. Therefore, the problem of enhancement of the organisation of this kind of delivery is intensively discussed in the existing literature (see, for example, [1–4]). The respective case studies can be found in [5–9].

Due to the uncertainty and randomness of the moments of parcel delivery to the pick-up point and the time until parcel withdrawal by the customer after its delivery to the pick-up point, it is evident that adequate mathematical models of parcel delivery processes can be constructed in terms of the theory of queues. Examples of application of this theory to this end can be found in [10–12].

In this paper, we propose and investigate the mathematical model of the order (parcels, goods, foods, etc.) delivering to the pick-up point and its storage there until receiving by the customer. Thus, we suppose that the lifetime of an arbitrary customer's order (parcel) in the delivery system consists of two parts, namely: (i) the time since the order generation in the system until its delivery to the target pick-up point and (ii) the sojourn time of the order in the warehouse of the target pick-up point until it is received by the customer or sent back to the sender. Correspondingly, an arbitrary order is sequentially processed in two service areas. The capacity of the second area, which models the pick-up point, is finite, and the orders arriving when it is exhausted are lost or returned to the sender. To mitigate the losses at the order entrance to this area, we propose the order admission control. New orders arriving in the first area are rejected if the total number of orders processed at two areas has the maximal admissible value (threshold). We explore the possibility of optimisation of operation of this delivery system via the proper choice of the capacity of the warehouse and the value of the threshold.

The rest of the text is organised as follows. The model of the order delivery is formulated in the queueing theory language in section «Mathematical model». The tridimensional Markov chain describing the operation of the delivery system is introduced, and its generator is derived in section «The Markov chain describing the system operation and its generator». Formulas for the main performance measures computation are presented in section «Performance measures computation». Numerical illustrations are given in section «Numerical examples», including examples of potential applications of the obtained results for managerial goals. Finally, section «Conclusions» concludes the paper.

Mathematical model

The structure of the system under study is presented in fig. 1.

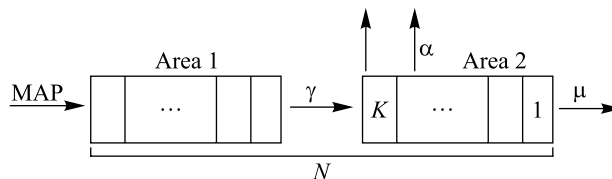


Fig. 1. The queueing system under study

Area 1 accommodates the orders that are in the process of delivery to the pick-up point. Area 2 models the stay of the order which is ready for picking up in the warehouse of the target pick-up point.

The process of parcel (order) arrival to the system is modelled by the MAP flow defined by the matrices D_0 and D_1 such that the matrix $D(1) = D_0 + D_1$ is the generator of the irreducible Markov chain with a continuous time $v_t, t \geq 0$, having a finite state space $\{1, 2, \dots, W\}$. The matrix D_1 consists of the intensities of transitions of the chain $v_t, t \geq 0$, accompanied by the receiving of an order. The non-diagonal elements of the matrix D_0 determine the intensity of the corresponding transition of the chain $v_t, t \geq 0$, without the receiving of an order, and the modules of the negative diagonal elements of the matrix D_0 determine the intensity of the exit of the process v_t from the corresponding state of the Markov chain v_t .

The average order rate λ is determined by the formula $\lambda = \theta D_1 e$ where θ is a row vector of the invariant probabilities of the Markov chain $v_t, t \geq 0$. This vector is the only solution to the system $\theta D(1) = 0, \theta e = 1$. Here and below, θ is a row vector of appropriate size consisting of zeros, and e is a column vector of appropriate size consisting of ones. Formulas for computation of other characteristics of the MAP, for example, the correlation coefficient of the successive interarrival times, variance, and higher moments of these times distribution, can be found in [13–18]. Let us also mention recent papers [19–29] devoted to the analysis of queues with the MAP.

Because the capacity of the real-world warehouses is limited, we assume that area 2 cannot accommodate more than K orders at the same time. Here, K is an arbitrarily fixed integer number. An order arriving when the area 2 capacity is exhausted, i. e. K orders are stored there, is not admitted to this area and is lost (sent back to the sender).

Due to this, aiming to reduce the probability of an arbitrary order loss after its service in area 1, it is desirable to apply some kind of order admission control in this area. We suggest that the reasonable control policy is as follows. A certain threshold N such as $N > K$ is fixed. An order arriving to area 1 is admitted for service if the total number of orders residing at the arrival moment in area 1 and area 2 is less than N . Otherwise, if this number is equal to N , the arriving order is rejected (lost at the entrance to area 1).

When the number of orders in the system at the arrival moment does not exceed $N - 1$, then a new order is admitted into the system, and the number of orders in area 1 increases by one; otherwise, the arriving order is lost.

The sojourn time of an order in area 1 (delivery time) is the exponentially distributed time with the parameter $\gamma > 0$. After this time expires, the order tries to enter area 2. If there are less than K orders residing in area 2 (the number of orders in the warehouse), the order arriving from area 1 is admitted for service in area 2. Otherwise, it is lost.

After the order is admitted to the warehouse, it is stored there the customer picks it up. The storage time of orders in the warehouse is limited. All customers of the system are divided into two groups. The first group is irresponsible customers that receive their orders only when the order storage time is almost complete. The second group is responsible customers who pick up their parcels earlier than the storage time runs out.

To take this into account, we assume that responsible customers pick up their orders after an exponentially distributed amount of time with the parameter $\mu > 0$. The order residence time in area 2 (the storage time of the order at the warehouse) is limited and it has an exponential distribution with the parameter $\alpha \geq 0$. When this time finishes, with a probability p , an irresponsible customer picks up her order (the order is considered to be successfully serviced), and with the complementary probability, the order is lost (returned from the warehouse to the sender).

It is obvious that the value of the threshold N has a profound effect on the performance of the considered system. If N is too small, then many arriving orders are not admitted to the system, and, due to the randomness of the arrival and picking-up processes, the starvation of area 2 can occur. As a consequence, the warehouse is underutilised, and the throughput of the system is low. If N is too large, there exists a high risk of an order rejection at the entrance to area 2 due to the lack of the place in the warehouse. Such a rejection again reduces the throughput of the system and leads to the waste of the system resources spent for the rejected order service

in area 1. Therefore, the value of the threshold N has to be chosen optimally with respect to some fixed criterion. The main purpose of this paper is to provide an opportunity for computation of the optimal capacity K of the warehouse storage and the threshold N defining when the admission of new orders has to be temporarily suspended.

The Markov chain describing the system operation and its generator

Let the parameters K and N be fixed and let i_t be the number of orders in area 1, $i_t = \overline{0, N}$, k_t be the number of orders in area 2, $k_t = \overline{0, \min\{N - i_t, K\}}$, v_t be the state of the underlying process of the MAP, $v_t = \overline{1, W}$, at time $t \geq 0$.

The behaviour of the system under study is described by a regular irreducible Markov chain with a continuous time

$$\xi_t = \{i_t, k_t, v_t\}, t \geq 0.$$

For easier analysis of this Markov chain, let us enumerate the states of the Markov chain in lexicographic order and call sub-level (i, k) the set of the states $(i, k, 1), (i, k, 2), \dots, (i, k, W)$. Level i is the set of sub-levels $(i, 0), (i, 1), \dots, (i, \min\{N - i, K\}), \overline{0, N}$.

Theorem 1. The generator Q of the Markov chain ξ_t , $t \geq 0$, has the following block tridiagonal structure:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & O & \dots & O \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & O & O & \dots & O \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & O & \dots & O \\ O & O & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & O & \dots & Q_{N-1,N} \\ O & O & O & O & O & \dots & Q_{N,N} \end{pmatrix},$$

where the non-zero blocks $Q_{i,j}$, $|i - j| \leq 1$, containing the intensities of transitions from the states of level i to the states of level j are defined as follows:

$$Q_{i,i} = I_{K+1} \otimes D_0 - i\gamma I_{(K+1)W} - (\mu + \alpha)C_K \otimes I_W + (\mu + \alpha)C_K E_K^- \otimes I_W, i = \overline{0, N - K - 1}, \quad (1)$$

$$Q_{i,i} = I_{N-i+1} \otimes D_0 - i\gamma I_{(N-i+1)W} - (\mu + \alpha)C_{N-i} E_{N-i}^- \otimes I_W + \hat{I}_{N-i} \otimes D_1 + (\mu + \alpha)C_{N-i} E_{N-i}^- \otimes I_W, i = \overline{N - K, N}, \quad (2)$$

$$Q_{i,i+1} = I_{K+1} \otimes D_1, i = \overline{0, N - K - 1}, \quad (3)$$

$$Q_{i,i+1} = \tilde{E}_{N-i}^- \otimes D_1, i = \overline{N - K, N - 1}, \quad (4)$$

$$Q_{i,i-1} = i\gamma E^+ \otimes I_W, i = \overline{1, N - K}, \quad (5)$$

$$Q_{i,i-1} = i\gamma \tilde{E}_{N-i}^+ \otimes I_W, i = \overline{N - K + 1, N}. \quad (6)$$

Here, $\otimes$ is the Kronecker product of matrices (see, for example, [30]); I is the identity matrix, and O is the zero matrix, with the dimensionality in a subscript if it is necessary; $\delta_{\text{condition}}$ is the Kronecker delta, that is $\delta_{\text{condition}} = 1$ if condition is true and $\delta_{\text{condition}} = 0$ otherwise; $C_l = \text{diag}\{0, 1, 2, \dots, l\}$, i. e. C_l is the diagonal matrix with the diagonal entries $\{0, 1, 2, \dots, l\}$, $l = \overline{0, K}$; $\hat{I}_l$, $l = \overline{0, K}$, is a square matrix of size $l + 1$ with all zero elements except the element $(\hat{I}_l)_{l,l} = 1$; E_l^- , $l = \overline{0, K}$, is a square matrix of size $l + 1$ with all zero elements except the elements $(E_l^-)_{k,k-1} = 1$, $k = \overline{1, l - 1}$; $\tilde{E}_l^-$, $l = \overline{1, K}$, is a matrix of size $(l + 1) \times l$ with all zero elements except the

elements $(\tilde{E}_l^-)_{k,k} = 1, k = \overline{0, l-1}$; E^+ is a square matrix of size $K+1$ with all zero elements except the elements $(E^+)_{k,k+1} = 1, k = \overline{0, K-1}$, and $(E^+)_{K,K} = 1$; $\tilde{E}_l^+, l = \overline{0, K-1}$, is a matrix of size $(l+1) \times (l+2)$ with all zero elements except the elements $(\tilde{E}_l^+)_{k,k+1} = 1, k = \overline{0, l}$.

Proof. Proof of theorem 1 is performed via the analysis of all possible transitions of the Markov chain ξ_t during the time interval of an infinitesimal length. The block tridiagonal form of the generator is explained by the fact that the arrival and departure of the orders to area 1 occur one by one.

Let us first prove formulas (1) and (2) for the matrices $Q_{i,i}$. The size of these matrices is defined by the cardinality of the state space of the two-dimensional process $\{k_t, v_t\}$. The component v_t has W possible states. The state space of the component k_t depends on the value of the component i_t . If the number i_t of orders at area 1 is small, namely, $i_t = \overline{0, N-K-1}$, then the component k_t admits the values in the range from 0 to K . If $i_t > N-K-1$, then the component k_t admits the values in the range from 0 to $N-i_t$. Correspondingly, the size of the matrices $Q_{i,i}$ is equal to $(K+1) \times W$ if $i = \overline{0, N-K-1}$ and to $(N-i+1) \times W$ if $i = \overline{N-K, N}$.

The diagonal entries of these matrices are negative. The modules of these entries define the rates of the exit of the Markov chain ξ_t from its states. The exit from the state $\{i, k, v\}$ is possible due to (i) service completion of one of i orders in area 1 (the corresponding rate is $i\gamma$), (ii) departure of one of k orders from area 2 (the corresponding rate is $k(\mu + \alpha)$), (iii) exit of the underlying process v_t from its state (the corresponding rates are the modules of the diagonal entries of the matrix D_0).

The non-diagonal entries of the matrices $Q_{i,i}$ define the rates of transition of the Markov chain ξ_t to another state without the change of the value i of the component i_t . There are only two variants of such transitions: (i) transitions of the underlying process v_t (rates of which are defined by the non-diagonal entries of the matrix D_0), (ii) departure of one of k orders from area 2. The rates of the departure are equal to $k(\mu + \alpha)$, and, as the consequence of this departure, the number k_t of orders at area 2 decreases by one. Transition probabilities of the component k_t from the state k to the state $k-1, k = \overline{1, K}$, are given by the entries of the matrix E_K^- .

As the result of these considerations, we obtain formula (1). Formula (2) which is valid for $i = \overline{N-K, N}$ is obtained via the same considerations. An additional summand $\hat{I}_{N-i} \otimes D_1$ appears here because a new order arrival (the corresponding rates are given by the entries of the matrix D_1) when the number of orders in area 2 is equal to $N-i$ (thus, the total number of orders in the system is equal to N) does not change the state of the system because this order is not admitted to the system.

The operation of the Kronecker product of matrices is used in (1), (2), and other formulas to describe transition rates of two independent Markov components $\{k_t, v_t\}$ of the Markov chain ξ_t .

Formulas (3), (4) are clear because the increase of the component i_t can occur only when a new order is admitted to area 1 which happens with the rates defined by the entries of the matrix D_1 . A new order admission to area 1 does not imply any change in the number of orders in area 2. This explains the presence of the Kronecker multiplier I_{K+1} in formula (3), valid for $i = \overline{0, N-K-1}$. When $i = \overline{N-K, N-1}$, the increase in the value i implies the reduction of the state space of the component k_t of the chain. This reduction is implemented via the Kronecker multiplication of the matrix D_1 from the left by the non-square matrix $\tilde{E}_{N-i}^-$. This explains formula (4).

Transitions from the level i to the level $i-1$ occur with the rate $i\gamma$ when the service of one order at area 1 finishes. If $i = \overline{0, N-K}$, this order starts service at area 2, and the number of orders at this area increases by 1. The matrix E^+ describes transition probabilities of the component k_t of the Markov chain ξ_t at this moment. When $i = \overline{N-K+1, N}$, the decrease in the value i implies the extension of the state space of the component k_t of the chain. This extension is reflected by the non-square transition probability matrix $\tilde{E}_{N-i}^+$.

As the result of these considerations, we obtain formulas (5) and (6).

Theorem 1 is proven.

Because the Markov chain ξ_t is irreducible and has a finite state space, the stationary probabilities of its states

$$\pi(i, k, v) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{i_t = i, k_t = k, v_t = v\}, i = \overline{0, N}, k = \overline{0, \min\{N-i, K\}}, v = \overline{1, W},$$

exist for any set of the system parameters.

Corresponding to the introduced enumeration of the states of the Markov chain ξ_i , let us introduce the row vectors $\pi(i, k)$ of the stationary probabilities of the states that belong to the sub-level (i, k) and vectors π_i of the stationary probabilities of the states that belong to the level i . The vectors π_i , $i = 0, N$, satisfy the system of linear algebraic equations (Chapman – Kolmogorov equations)

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)Q = 0, (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)e = 1.$$

This system is finite. However, in potential real-life applications of the model, the capacity K of the warehouse can be large, and the number of equations in this system can be large as well. Therefore, to solve this system it is necessary to use algorithms that effectively account for the block tridiagonal structure of the generator Q and the fact that the solution of the system represents a probability distribution. The numerically stable algorithms obtained in [31; 32] are recommended for further use.

Performance measures computation

Having an opportunity to compute the vectors π_i , $i = \overline{0, N}$, it is possible to calculate the values of the basic performance characteristics of the considered queueing model, in particular:

- the mean number of orders residing at an arbitrary moment in area 1

$$L_1 = \sum_{i=1}^N i \pi_i e;$$

- the mean number of orders residing at an arbitrary moment in area 2

$$L_2 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{\min\{N-i, K\}} k \pi(i, k) e;$$

- the mean number of orders processed at an arbitrary moment in the system

$$L = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{\min\{N-i, K\}} (i+k) \pi(i, k) e = L_1 + L_2;$$

- the rate of the output flow of serviced orders is

$$\lambda_{\text{out}} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\min\{N-i, K\}} k (\mu + (1-p)\alpha) \pi(i, k) e;$$

- the loss probability of an order at the entrance to the system

$$P_{\text{ent}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=N-K}^N \pi(i, N-i) D_1 e; \quad (7)$$

- the loss probability of an order when moving from area 1 to area 2

$$P_{\text{loss, 1-2}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N-K} \gamma i \pi(i, K) e; \quad (8)$$

- the loss probability of an order due to lack of demand by the customer (expiration of the storage time)

$$P_{\text{imp}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\min\{N-i, K\}} p k \alpha \pi(i, k) e; \quad (9)$$

- the loss probability of an arbitrary order

$$P_{\text{loss}} = P_{\text{ent}} + P_{\text{loss, 1-2}} + P_{\text{imp}} = 1 - \frac{\lambda_{\text{out}}}{\lambda}.$$

The latter relation giving two alternative ways for computation of P_{loss} is useful for verification of the analytical results and computer implementation of procedures for computing the invariant distribution of the system states.

Formula (7) is valid because the loss of an order at the entrance occurs when the order sees N orders presenting in the system. The components of the row vector $\sum_{i=N-K}^N \pi(i, N-i)$ define the distribution of states of the underlying process of arrivals at such an arrival moment. The column of vector $\frac{1}{\lambda} D_1 e$ defines the probabilities of an order arrival at an arbitrary moment under the fixed state of the underlying process [17]. Now, formula (7) evidently follows from the formula of total probability.

The probability $P_{\text{loss}, 1-2}$ is computed as the ratio of the rate of the lost orders during their transfer from area 1 to area 2 to the arrival rate which is equal to λ . The rate of customers transfer from area 1 is proportional to the number of orders at this area. The loss of the customers, which transfer to area 2, can occur only if the number of orders at area 1 is less or equal to $N - K$ while the number of orders at area 2 is equal to K . Therefore, the rate of the lost orders is $\sum_{i=1}^{N-K} \gamma i \pi(i, K) e$. Formula (8) is proven.

The probability P_{imp} is also computed as the ratio of the rate of the customers which are lost due to expiration of the storage time to the arrival rate λ . Under the fixed numbers (i, k) of orders at areas 1 and 2, the rate of the loss is equal to $p k \alpha$. By implementing summation of the products of these rates by the probabilities $\pi(i, k) e$ over the values of (i, k) under which the corresponding loss can happen we obtain formula (9).

Numerical examples

The aims of this section are to demonstrate the feasibility of the proposed algorithms for computation of the basic performance characteristics of the system, graphical illustration of their dependencies on the parameters K and N , and to show the possibility to use the obtained result for managerial purposes.

Let the MAP flow of orders be determined by the matrices

$$D_0 = \text{diag}\{-8, -2\}, D_1 = \begin{pmatrix} 7.5 & 0.5 \\ 0.1 & 1.9 \end{pmatrix}.$$

This MAP has the mean arrival rate λ equal to 3, the coefficients of correlation and variation of the successive interarrival times are $c_{\text{cor}} = 0.17$ and $c_{\text{var}} = 1.625$ respectively.

The parameters of the exponential distributions of the service time of an order in area 1 (γ), the time till an order pick-up by the responsible customer (μ), and the storage time of an order at area 2 (α) are chosen as follows: $\gamma = 0.03$, $\mu = 0.02$, $\alpha = 0.004$. The probability p that an irresponsible customer picks up her order when the storage time expires is assumed to be equal to 0.03.

We vary the parameter N in the interval $[50, 500]$ with step 50 and the parameter K in the interval $[25, N]$ with step 25.

The dependence of the average numbers L_1 and L_2 of orders at areas 1 and 2 on the parameters N and K is presented in fig. 2 and 3.

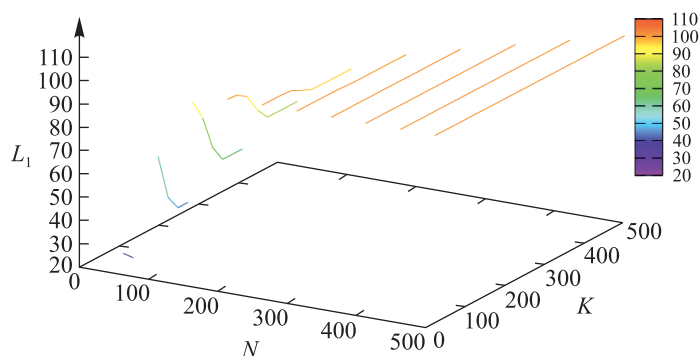


Fig. 2. The dependence of L_1 on the parameters N and K

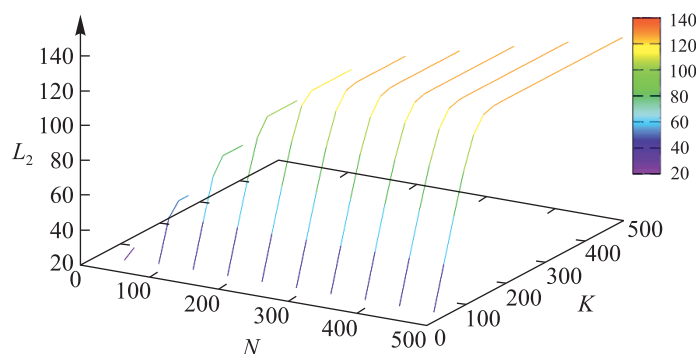


Fig. 3. The dependence of L_2 on the parameters N and K

One can see from these figures that the numbers of orders at both areas grow with the increase in the system capacity N . The number of orders in area 1 decreases, and the number of orders in area 2 increases with the increase in the parameter K . This can be explained as follows. The increase in K means that the capacity of area 2 increases, and more orders can be stored in this area which leads to the increase in L_2 . At the same time, under the fixed value of N , the increase in the number of orders in area 2 leads to a shortness of capacity of area 1, and more arriving orders are rejected upon arrival. Thus, L_1 decreases with the growth in K .

The dependence of the loss probability P_{ent} of an order upon arrival on the parameters N and K is presented in fig. 4.

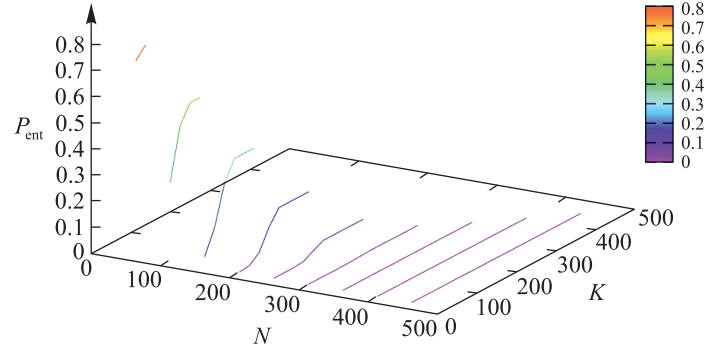


Fig. 4. The dependence of P_{ent} on the parameters N and K

This probability increases with an increase in K and decreases with an growth in N . The reason for this is explained in the same way as for L_1 . Note that in the considered example for $N = 500$ the value of P_{ent} is less than $2.6 \cdot 10^{-12}$ for all values of K .

The dependence of the probability $P_{\text{loss}, 1-2}$ of an order loss during the transfer from area 1 to area 2 on the parameters N and K is presented in fig. 5.

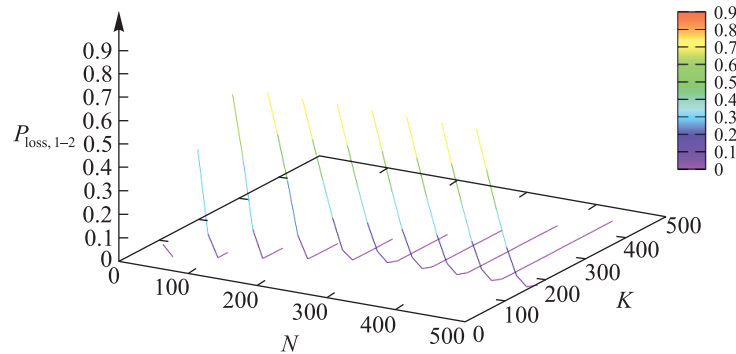


Fig. 5. The dependence of $P_{\text{loss}, 1-2}$ on the parameters N and K

The loss probability $P_{\text{loss}, 1-2}$ increases with the growth in the parameter N because an increase in N leads to an increase in the number of orders in area 1, and more orders arrive at area 2. Thus, when the capacity of the buffer K is not large, more orders are rejected due to the impossibility of placing them in area 2. When the capacity K increases, the loss probability $P_{\text{loss}, 1-2}$ evidently decreases. In the considered example, for $K \geq 275$, the loss probability $P_{\text{loss}, 1-2}$ becomes negligible (less than 10^{-10}).

The dependence of the probability P_{imp} of an order loss due to the storage time expiration in area 2 on the parameters N and K is presented in fig. 6. This probability increases with the increase in N and K because this probability is strongly related to the number of orders L_2 in area 2. Note that in the considered example, for large values of N and K , the loss probability P_{imp} takes the fixed value. This value shows us that in this example, regardless of how large capacities N and K are chosen, 0.5 % of orders are not picked up. When N and K are not large, this probability is less than 0.005 because the orders that won't be picked up can be lost for other reasons (upon arrival or during the transfer between the areas).

The dependence of the total probability P_{loss} of an order loss on the parameters N and K is presented in fig. 7. The loss probability P_{loss} decreases with the growth in N and K since the increase in buffer capacities creates better conditions for orders, and fewer of them are lost.

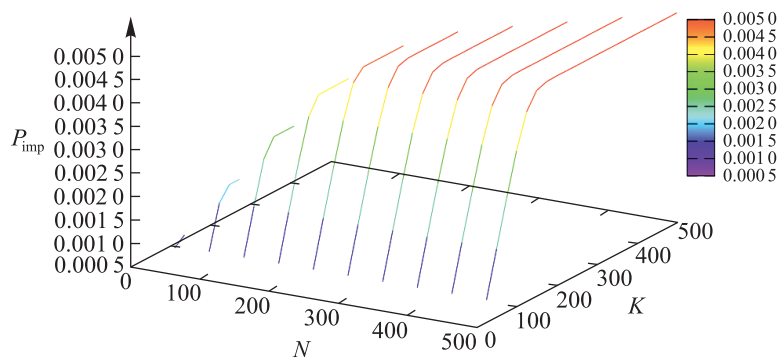


Fig. 6. The dependence of P_{imp} on the parameters N and K

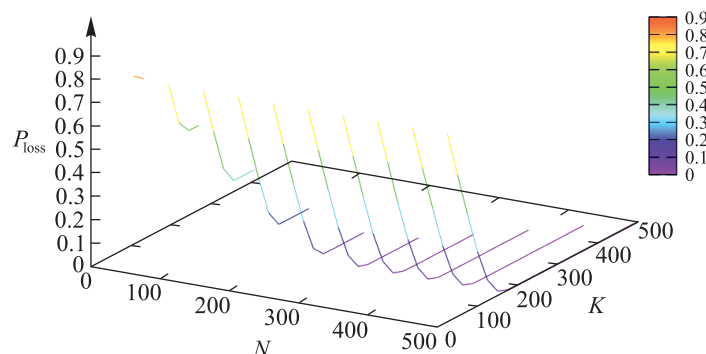


Fig. 7. The dependence of P_{loss} on the parameters N and K

Having highlighted the dependencies of performance measures of the system on the parameters N and K , it is possible to formulate an optimisation problem. Let us assume that the cost criterion, which evaluates the quality of the system operation, has the following form:

$$E = E(N, K) = a\lambda_{\text{out}} - c_1\lambda P_{\text{ent}} - c_2\lambda P_{\text{loss}, 1-2} - c_3\lambda P_{\text{imp}} - dK.$$

Here, a is the system's revenue for each order service; c_1 is the penalty for an order loss upon arrival; c_2 is the penalty for an order loss due to the overflow of area 2; c_3 is the penalty for an order loss due to sending it back; d is the charge that is paid for maintenance of one place in area 2 per unit of time. Thus, the criterion E defines the average revenue of the system per unit time.

In this example, let us fix the following values of the cost coefficients:

$$a = 2, c_1 = 1, c_2 = 10, c_3 = 0.5, d = 0.01.$$

The dependence of the criterion E on the parameters N and K is presented in fig. 8.

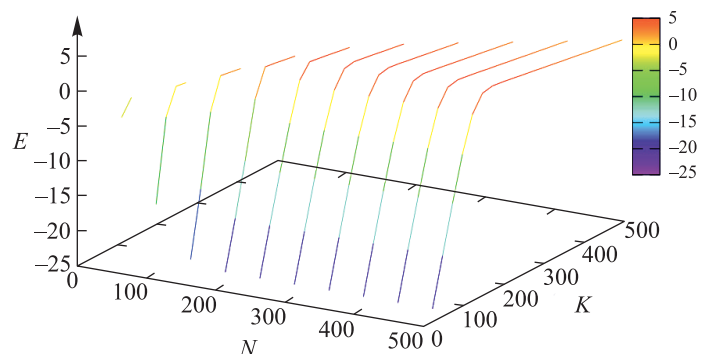


Fig. 8. The dependence of the cost criterion E on the parameters N and K

Some additional information about the results of computation of the values of the cost criterion is presented in table.

The results of computation of values of the cost criterion
(values of criterion $E(N, K)$ for different values of K ,
optimal value $N^*(K)$ of N for the given value of K ,
and values of the cost criterion $E(N, K)$ for $N = K$ and $N = 500$)

K	$N^*(K)$	$E(N^*(K), K)$	$E(K, K)$	$E(500, K)$
25	50	-1.524 7	–	-23.130 4
50	50	-3.419 1	-3.419 1	-16.310 7
75	75	0.173 2	0.173 2	-9.616 4
100	150	1.600 9	-0.070 7	-3.334 1
150	250	4.015 3	1.310 8	3.859 4
200	400	3.960 9	2.460 1	3.960 9
250	500	3.462 5	3.052 4	3.960 9

Note. For $K > 250$, the optimal values of $N^*(K)$ are greater than 500.

Based on fig. 8 and table, we can conclude that the values of the criterion E strongly depend on the parameters N and K . For small values of K , due to the high probability of order rejection, the system's revenue is negative, i. e. the system suffers losses. The value of the losses depends on the parameter N . A greater value of N implies greater losses for example: $E = -3.626\,798$ for $N = 50$, $E = -15.159\,633$ for $N = 100$, and $E = -23.130\,35$ for $N \geq 250$.

When the parameter K of area 2 increases, the probabilities of order rejection decrease, and the throughput of the system increases, which implies the increase of the system revenue. If $K = 50$, then $E = -1.524\,699$ for $N = 50$, $E = -3.419\,056$ for $N = 100$, $E = -12.891\,237$ for $N = 150$, $E = -16.175\,27$ for $N = 200$ and $E = -16.13$ for $N \geq 250$. However, starting from a certain value of K , the cost criterion stops the increase with the growth of K (due to the high payment for maintenance of the warehouse of a large capacity) and further decreases with the growth of K . The optimal value of the cost criterion $E(N, K)$ in this example is equal to 4.165 264 and is achieved when $K = 175$ and $N = 350$.

Conclusions

In this paper, the process of a customer's order delivery to the pick-up point and its stay there is described in terms of queueing theory. Each order has to be sequentially processed in two areas. Area 2 models the order maintenance in a warehouse of finite capacity before being picked up by the customer. To avoid overflow of the warehouse and sending the order back to the sender, order admission control in area 1 is proposed. This is the threshold type control. The arrival of orders to the system is described by a quite general Markov arrival process, which allows us to fit not only the mean arrival rate, as the stationary Poisson process does, but also the variance of interarrival times and their correlation in real-world systems. The existence of two types of customers, responsible and irresponsible, characterised by different distribution of time until an order withdrawal in pick-up point is taken into account.

Under the fixed values K of the capacity of the warehouse and admission control threshold N , the performance of the order delivering system is evaluated via the analysis of a suitably constructed multidimensional Markov chain. The possibility of computation of the values of various performance measures and the solution of optimisation problems is numerically illustrated.

The obtained results can be extended to the delivery system with the batch arrival of orders and their group picking up. Retrials of the customers that failed to make the order due to the system overflow can be considered as well. The results can be used for solving more global problem of routing the flows of parcel in a network between the alternative neighbouring pick-up points aiming to optimally match the rates of flows to the capacities of the warehouses at different pick-up points and their throughput.

References

1. Janinhoff L, Klein R, Sailer D, Schoppa JM. Out-of-home delivery in last-mile logistics: a review. *Computers and Operations Research*. 2024;168:106686. DOI: 10.1016/j.cor.2024.106686.
2. Nguyen TTT, Cabani A, Cabani I, De Turck K, Kieffer M. Analysis and forecasting of the load of parcel pick-up points: contribution of C2c e-commerce. *SSRN*. 2024:4887323. DOI: 10.2139/ssrn.4887323.

3. Wang L, Xu M, Qin H. Joint optimization of parcel allocation and crowd routing for crowdsourced last-mile delivery. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2023;171:111–135. DOI: 10.1016/j.trb.2023.03.007.
4. Cardenas ID, Dewulf W, Vanelander T, Smet C, Beckers J. The e-commerce parcel delivery market and the implications of home B2C deliveries vs pick-up points. *International Journal of Transport Economics*. 2017;44(2):235–256. DOI: 10.19272/201706702004.
5. Lamas-Fernandez C, Martinez-Sykora A, McLeod F, Bektas T, Cherrett T, Allen J. Improving last-mile parcel delivery through shared consolidation and portering: a case study in London. *Journal of the Operational Research Society*. 2024;75(6):1043–1054. DOI: 10.1080/01605682.2023.2231095.
6. van Duin JHR, Wiegman BW, van Arem B, van Amstel Y. From home delivery to parcel lockers: a case study in Amsterdam. *Transportation Research Procedia*. 2020;46:37–44. DOI: 10.1016/j.trpro.2020.03.161.
7. Molin E, Kosicki M, van Duin R. Consumer preferences for parcel delivery methods: the potential of parcel locker use in the Netherlands. *European Journal of Transport and Infrastructure Research*. 2022;22(2):183–200. DOI: 10.18757/ejtr.2022.22.2.6427.
8. Cheng X, Liao S, Hua Z. A policy of picking up parcels for express courier service in dynamic environments. *International Journal of Production Research*. 2017;55(9):2470–2488. DOI: 10.1080/00207543.2016.1231431.
9. de Assis TF, de Abreu VHS, da Costa MG, D’Agosto MDA. Methodology for prioritizing best practices applied to the sustainable last mile – the case of a Brazilian parcel delivery service company. *Sustainability*. 2022;14(7):3812. DOI: 10.3390/su14073812.
10. Zabielska A, Jacyna M, Lasota M, Nehring K. Evaluation of the efficiency of the delivery process in the technical object of transport infrastructure with the application of a simulation model. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2023;25(1):1–12. DOI: 10.17531/ein.2023.1.1.
11. Hideyama S, Phung-Duc T, Okada Y. Queueing analysis of home delivery services with parcel lockers. *Lecture Notes in Computer Science*. 2019;11688:351–368. DOI: 10.1007/978-3-030-27181-7_21.
12. Liu Y, Escribano Macias JJ, Zhang K, Ye Q, Angeloudis P. Customer behaviour analysis for coordinated delivery service using mobile parcel lockers and autonomous robots: a congestion-game model. *SSRN*. 2023;4549554. DOI: 10.2139/ssrn.4549554.
13. Chakravorthy SR. The batch Markovian arrival process: a review and future work. *Advances in Probability Theory and Stochastic Processes*. 2001;1(1):21–49.
14. Chakravorthy SR. *Introduction to matrix-analytic methods in queues 1: analytical and simulation approach – basics*. London: John Wiley and Sons; 2022. 341 p. DOI: 10.1002/9781394165421.
15. Chakravorthy SR. *Introduction to matrix-analytic methods in queues 2: analytical and simulation approach – queues and simulation*. London: John Wiley and Sons; 2022. 448 p. DOI: 10.1002/9781394174201.
16. Lucantoni DM. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communication in Statistics. Stochastic Models*. 1991;7(1):1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174.
17. Dudin AN, Klimenok VI, Vishnevsky VM. *The theory of queueing systems with correlated flows*. Cham: Springer; 2020. 410 p. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0.
18. Vishnevskii VM, Dudin AN. Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks. *Automation and Remote Control*. 2017;78:1361–1403. DOI: 10.1134/S000511791708001X.
19. Klimenok VI. A queueing system with a batch Markovian arrival process and varying priorities. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:47–56. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-47-56.
20. Dudina OS. Analytical modelling of systems with a ticket queue. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;2:40–53. Russian.
21. Dudin A, Dudin S, Melikov A, Dudina O. Framework for analysis of queueing systems with correlated arrival processes and simultaneous service of a restricted number of customers in scenarios with infinite buffer and retries. *Algorithms*. 2024;17(11):493. DOI: 10.3390/a17110493.
22. Dudin A, Dudin S, Klimenok V, Dudina O. Stability of queueing systems with impatience, balking and non-persistence of customers. *Mathematics*. 2024;12(14):2214. DOI: 10.3390/math12142214.
23. Chakravorthy S, Melikov A. A new admission control scheme in queueing-inventory system with two priority classes of demands. *Opsearch*. 2024;11:1–34. DOI: 10.1007/s12597-024-00877-8.
24. Melikov A, Lawrence S, Sivakumar B. Analysis and optimization of hybrid replenishment policy in a double-sources queueing-inventory system with MAP arrivals. *Annals of Operations Research*. 2023;331(2):1249–1267. DOI: 10.1007/s10479-023-05646-2.
25. Mathew N, Joshua VC, Krishnamoorthy A, Melikov A, Mathew AP. A production inventory model with server breakdown and customer impatience. *Annals of Operations Research*. 2023;331(2):1269–1304. DOI: 10.1007/s10479-023-05659-x.
26. Melikov A, Chakravorthy SR, Aliyeva S. A retrial queueing model with feedback. *Queueing Models and Service Management*. 2023;6(1):63–95.
27. Dudin A, Dudin S, Manzo R, Rarità L. Queueing system with batch arrival of heterogeneous orders, flexible limited processor sharing and dynamical change of priorities. *AIMS Mathematics*. 2024;9(5):12144–12169. DOI: 10.3934/math.2024593.
28. Dudin SA, Dudina OS, Kostyukova OI. Analysis of a queueing system with possibility of waiting customers jockeying between two groups of servers. *Mathematics*. 2023;11(6):1475. DOI: 10.3390/math11061475.
29. Nair DV, Krishnamoorthy A, Melikov A, Aliyeva S. MMAP/(PH, PH)/1 queue with priority loss through feedback. *Mathematics*. 2021;9(15):1797. DOI: 10.3390/math9151797.
30. Graham A. *Kronecker products and matrix calculus with applications*. New York: Dover Publications; 2018. 144 p.
31. Baumann H, Sandmann W. Multi-server tandem queue with Markovian arrival process, phase-type service times, and finite buffers. *European Journal of Operational Research*. 2017;256(1):187–195. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.07.035.
32. Dudin SA, Dudina OS. Call center operation model as a MAP/PH/N/N – R system with impatient customers. *Problems of Information Transmission*. 2011;47:364–377. DOI: 10.1134/S0032946011040053.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 514.12(075.8)

Кононов С. Г. **Аналитическая геометрия** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / С. Г. Кононов, В. В. Суворов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 78 с. : ил. Библиогр.: с. 77–78. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/322973>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.12.2024, № 018612122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Аналитическая геометрия» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Аналитическая геометрия» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций; перечень лабораторных занятий с материалами для работы в аудитории и дома; материалы для управляемой самостоятельной работы: варианты контрольных работ, примерные варианты тестов по дисциплине, материалы для индивидуальных заданий; примерный список экзаменационных вопросов; список рекомендованной литературы.

УДК 514.12(075.8)

Кононов С. Г. **Аналитическая геометрия** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» / С. Г. Кононов, В. В. Суворов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 74 с. : ил. Библиогр.: с. 73–74. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323044>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.12.2024, № 018713122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Аналитическая геометрия» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Аналитическая геометрия» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций; перечень лабораторных занятий с материалами для работы в аудитории и дома; материалы для управляемой самостоятельной работы: варианты контрольных работ, примерные варианты тестов по дисциплине, материалы для индивидуальных заданий; примерный список экзаменационных вопросов; список рекомендованной литературы.

УДК 517.958(075.8)

Егоров А. А. **Уравнения математической физики** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 7-07-0533-01 «Фундаментальная физика», 7-07-0533-02 «Ядерная физика и технологии» / А. А. Егоров ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 279 с. Библиогр.: с. 277–279. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323055>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.12.2024, № 018512122024. Текст : электронный.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» приводятся основные понятия и краткие теоретические сведения. Дается подробное

решение большого числа типовых примеров и предлагается значительное количество задач различной степени сложности для самостоятельного решения. ЭУМК предназначен для студентов физического факультета БГУ, а также преподавателей высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по дисциплине «Уравнения математической физики».

УДК 512.64(075.8)

Беняш-Кривец В. В. Линейная алгебра : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика» / В. В. Беняш-Кривец, С. В. Тихонов, А. Н. Адмиралова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 124 с. : ил. Библиогр.: с. 123–124. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323060>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.12.2024, № 018412122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Линейная алгебра» предназначен для студентов специальности 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика». В ЭУМК содержатся лекционный и практический материал, раздел контроля знаний и вспомогательный материал. Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: матриц, определителей, векторных пространств, систем линейных уравнений, линейных операторов векторных пространств.

УДК 539.3:519.67(06) + 622.83:519.6(06)

Вычислительная механика для гранулированных и геоматериалов = Computational mechanics for granular and geo-materials : материалы Междунар. белорус.-кит. семинара по компьютерной механике для сыпучих и геоматериалов, 9–10 июля, Минск, БГУ / под общ. ред. М. А. Журавкова, Шуньин Ди. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 134 с. Библиогр. в конце отд. ст. Текст на рус. и англ. яз. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323206>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 16.12.2024, № 018916122024. Текст : электронный.

В сборнике представлены материалы Международного белорусско-китайского семинара по компьютерной механике для сыпучих и геоматериалов (9–10 июля, Минск, БГУ).

Рассмотрены актуальные вопросы современной механики сплошных и дискретных сред, механики горных пород и массивов, информатики применительно к разработке моделей, алгоритмов и расчетных схем для решения различных классов задач. Приведены примеры решения прикладных задач из различных приложений механики сплошных и дискретных сред. В докладах затронуты разные аспекты методов дискретных элементов, моделирование контактного взаимодействия частиц, построение параллельных алгоритмов, разработка специализированного программного обеспечения, механико-математические модели механики грунтов, геотехники и геофизика, экспериментальные исследования, связанные с методами дискретных элементов и др.

Материалы сборника представляют интерес для специалистов в области теоретической и прикладной механики, математического моделирования, численных методов применительно к решению задач механики гранулированных сред и геоматериалов.

УДК 004.6(075.8) + 004.81.032.26(075.8)

Яцков Н. Н. Интеллектуальный анализ данных : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 01 04 «Биоинженерия и биоинформатика», 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика» / Н. Н. Яцков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 99 с. : ил. Библиогр.: с. 99. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323212>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 16.12.2024, № 019016122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Интеллектуальный анализ данных» предназначен для студентов специальностей 1-31 01 04 «Биоинженерия и биоинформатика», 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика». В ЭУМК содержатся основные определения и задачи интеллектуального анализа данных, методы статистического и кластерного анализа, нейронных сетей, стохастического поиска, классификации, поиска ассоциативных правил.

УДК 517(075.8)

Математический анализ : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 01 04 «Биоинженерия и биоинформатика», 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика» / Н. В. Бровка, Е. В. Громак, Т. С. Мардвилко, Н. И. Карпович ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 124 с. : ил. Библиогр.: с. 123–124. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323308>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 19.12.2024, № 019419122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по математическому анализу предназначен для студентов специальностей 1-31 01 04 «Биоинженерия и биоинформатика», 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика». В ЭУМК содержатся лекционный и практический материал, раздел контроля знаний, раздел индивидуальных заданий и вспомогательный материал.

УДК 519.67(075.8)

Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / Л. Л. Голубева, О. А. Лаврова, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 260 с. : ил. Библиогр.: с. 260. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323368>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 20.12.2024, № 019520122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерная математика» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Математика»). ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 514(075.8)

Вылегжанин Д. В. Геометрия : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Искусственный интеллект и математическая экономика» / Д. В. Вылегжанин, С. Г. Кононов, В. В. Суворов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 78 с. : ил. Библиогр.: с. 77–78. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323425>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 20.12.2024, № 019620122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Геометрия» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Искусственный интеллект и математическая экономика»). ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Геометрия» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, перечень лабораторных занятий, материалы для управляемой самостоятельной работы, примерный список экзаменационных вопросов, список рекомендованной литературы.

УДК 004.422:004.738.5(075.8)

Блинов И. Н. Разработка веб-приложений : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 08-01 «Математика и информационные технологии (веб-программирование и интернет-технологии)» / И. Н. Блинов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 139 с. : ил. Библиогр.: с. 134. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323692>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 27.12.2024, № 020027122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Разработка веб-приложений» предназначен для студентов специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» (направление специальности 1-31 03 08-01 «Математика и информационные технологии (веб-программирование и интернет-технологии)»). ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.415.2(075.8)

Блинов И. Н. Анализ и проектирование информационных систем : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)», направления спец.: 1-31 03 08-01 «Математика и информационные технологии (веб-программирование и интернет-технологии)», 1-31 03 08-02 «Математика и информационные технологии (математическое и программное обеспечение мобильных устройств)» / И. Н. Блинов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 96 с. Библиогр.: с. 93–94. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323753>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 27.12.2024, № 020127122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Анализ и проектирование информационных систем» предназначен для студентов специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» (направления специальности 1-31 03 08-01 «Математика и информационные технологии (веб-программирование и интернет-технологии)», 1-31 03 08-02

«Математика и информационные технологии (математическое и программное обеспечение мобильных устройств)»). ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 005.92:004(075.8)

Попова Е. Э. Автоматизация управления документами : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0322-04 «Управление документами» / Е. Э. Попова, Н. Н. Садова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 142 с. : ил. Библиогр.: с. 136–137. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323755>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 30.12.2024, № 020230122024. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов, обучающихся по специальности 6-05-0322-04 «Управление документами». Содержание ЭУМК предполагает изучение вопросов согласно учебной программе по учебной дисциплине «Автоматизация управления документами».

ЭУМК нацелен на формирование знаний и практических навыков в области автоматизации управления документами, способствует формированию универсальных и базовых профессиональных компетенций.

Структура ЭУМК включает теоретический и практический разделы, раздел контроля знаний и вспомогательный раздел.

УДК 519.2(075.8)

Теория вероятностей и математическая статистика : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 01 04 «Биоинженерия и биоинформатика», 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика» / А. Г. Гутор, Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок, С. Л. Штин ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 193 с. Библиогр.: с. 185–187. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/324169>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.01.2025, № 000108012025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальностей 1-31 01 04 «Биоинженерия и биоинформатика», 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, лабораторный практикум, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, задания открытого типа, вопросы для подготовки к зачету, темы проектов, список литературы.

УДК 519.712(075.8) + 004.422.63(075.8)

Соболевская Е. П. Алгоритмы и структуры данных : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-09 «Прикладная математика», 6-05-0533-10 «Информатика», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность» : в 3 ч. Ч. 2 / Е. П. Соболевская, В. М. Котов, А. А. Буславский ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 153 с. : ил. Библиогр.: с. 147–148. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/324674>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.01.2025, № 000817012025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Алгоритмы и структуры данных. Часть 2» предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-09 «Прикладная математика», 6-05-0533-10 «Информатика», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность».

В ЭУМК содержится материал по разделу «Структуры данных для организации поиска элемента. Поисковые деревья». Изложение соответствует программе учебной дисциплины.

УДК 519.67(075.8)

Компьютерная математика. Компьютерное моделирование на Python : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / Л. Л. Голубева, О. А. Лаврова, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 229 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 227–229. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/325782>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.02.2025, № 001607022025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерная математика» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, примеры заданий для управляемой самостоятельной работы, перечень вопросов к экзамену, списки рекомендованной литературы.

УДК 519.7(075.8)

Компьютерная математика. Моделирование в среде Matlab-Simulink : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / Л. Л. Голубева, О. А. Лаврова, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 124 с. : ил. Библиогр.: с. 121–122. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/325929>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.02.2025, № 002012022025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерная математика» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Математика»). ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 539.3/.6(075.8) + 624.04(075.8)

Босяков С. М. Сопротивление материалов и основы строительной механики : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» / С. М. Босяков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 88 с. : ил. Библиогр.: с. 87. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/326516>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 20.02.2025, № 002620022025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Сопротивление материалов и основы строительной механики» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование». В ЭУМК содержатся теоретические материалы по расчету напряженного состояния в точке, по определению напряжений при растяжении-сжатии, изгибе, чистом сдвиге и кручении, сложном сопротивлении, по применению энергетических методов для определения упругих перемещений, а также по другим основным разделам сопротивления материалов и строительной механики. Приведены практические и индивидуальные задания по основным разделам учебного курса.

УДК 51(075.8) + 004(075.8)

Мартон М. В. Высшая математика с основами информатики : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0312-02 «Международные отношения» / М. В. Мартон, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 376 с. Библиогр.: с. 374–376. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/326711>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 03.03.2025, № 003403032025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Высшая математика с основами информатики» предназначен для студентов специальности 6-05-0312-02 «Международные отношения» (профилизация «Международные отношения в информационной сфере»).

В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, контрольные работы, примерный тематический план, содержание учебного материала, вопросы для подготовки к зачету, темы для рефератов, список литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

<i>Гутор А. Г.</i> Существование многочленов с заданными корнями над некоммутативными кольцами	6
<i>Мурашко В. И.</i> Формации конечных групп за полиномиальное время: $\mathfrak{F}$ -радикал и $\mathfrak{F}$ -длина ...	14

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Максимов М. С., Лемешевский С. В.</i> Применение рациональной аппроксимации в разрывном методе Галёркина на полубесконечном интервале	23
--	----

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Громак В. И.</i> О решениях нелинейных стационарных уравнений, связанных с обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве	40
--	----

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

<i>Балащенко В. В., Куница В. Н.</i> Инвариантные f -структуры на четырехмерной группе осциллятора	51
--	----

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Старовойтов Э. И., Шафиева Ю. В., Москвитин Г. В.</i> Деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле.....	58
--	----

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Дудин А. Н.</i> Управление приемом заказов в системе доставки товаров с учетом конечной вместимости склада в пункте выдачи посылок	68
Аннотации депонированных в БГУ работ	79

CONTENTS

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

- Goutor A. G.* The existence of polynomials with given roots over non-commutative rings 6
Murashka V. I. Formations of finite groups in polynomial time: the $\mathfrak{F}$ -radical and the $\mathfrak{F}$ -length 14

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Maksimau M. S., Lemeshevsky S. V.* Application of a rational approximation in the discontinuous Galerkin method on a semi-infinite interval 23

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

- Gromak V. I.* On the solutions of the non-linear stationary equations related to the generalised hierarchy of the second Painlevé equation..... 40

GEOMETRY AND TOPOLOGY

- Balashchenko V. V., Kunitsa V. N.* Invariant f -structures on the four-dimensional oscillator group..... 51

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

- Starovoitov E. I., Shafiyeva Yu. V., Moskvitin G. V.* Deformation of a three-layer plate with a compressible filler in the temperature field..... 58

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

- Dudin A. N.* Admission control in a parcel delivery system with account of the finite capacity of the warehouse at the pick-up point 68

- Indicative abstracts of the papers deposited in BSU..... 79

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, РИНЦ, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 1. 2025**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

© БГУ, 2025

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 1. 2025**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

© BSU, 2025