

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ КАЗИМИРА В ОПТОМЕХАНИКЕ

А. П. Сайко, С. А. Маркевич

*Государственное научно-производственное объединение
«Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению»,
ул. Петруся Бровки, 19, 220072 Минск, Беларусь,
e-mail: saiko@physics.by; e-mail: markev@physics.by*

Показана плодотворность применения асимптотического метода усреднения для анализа поведения оптомеханической системы, в которой возможна реализация динамического эффекта Казимира. Процедура усреднения приводит к замене исходного гамильтониана, описывающего квантовомеханически динамические переменные оптического резонатора и механические колебания одного из его зеркал, на некоторый эффективный, в котором естественным образом появляется керровское самодействие оптического поля и кросс-керровское взаимодействие этого поля с колебательными состояниями зеркала. Обсуждается возможность обратимого обмена энергией между вибрирующим зеркалом и оптическим полем в резонаторе, когда один колебательный квант превращается в два фотона и наоборот.

Ключевые слова: оптомеханическая система; динамический эффект Казимира; асимптотический метод усреднения; керровское взаимодействие.

ASYMPTOTIC AVERAGING METHOD AND DYNAMIC CASIMIR EFFECT IN OPTOMECHANICS

A. P. Saiko, S. A. Markevich

*State Scientific and Production Association
«Scientific and Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus for Materials Science»,
Petrusya Brovka str. 19, 220072 Minsk, Belarus
Corresponding author: A. P. Saiko (saiko@physics.by)*

The fruitfulness of using the asymptotic averaging method for analyzing the behavior of an optomechanical system in which the dynamic Casimir effect can be realized is shown. The averaging procedure leads to the replacement of the original Hamiltonian describing the quantum-mechanically dynamic variables of the optical resonator and mechanical oscillations of one of its mirrors by some effective one in which the Kerr self-action of the optical field and the cross-Kerr interaction of this field with the oscillatory states of the mirror naturally appear. The possibility of reversible energy exchange between the vibrating mirror and the optical field in the resonator is discussed, when one oscillatory quantum is converted into two photons and vice versa.

Key words: optomechanical system; dynamical Casimir effect; asymptotic averaging method; Kerr interaction.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория предсказывает, что вакуумные флуктуации имеют измеримые последствия – например, вызывают лэмбовский сдвиг атомных спектров, изменяют магнитный момент электрона. Эффекты, вызываемые флуктуациями вакуума, зани-

мают центральное место в нашем понимании природы. Например, две электропроводящие пластины или зеркала, разделенные всего несколькими нанометрами, сближаются виртуальными фотонами. Это явление, известное как эффект Казимира, было предсказано в 1948 году и экспериментально измерено в 1996 году. Аналогом данного явления является динамический эффект Казимира [1], при котором быстро движущееся зеркало может превращать виртуальные фотоны в реальные. Однако экспериментально наблюдать это явление очень сложно из-за низкого уровня освещенности и высоких скоростей, с которыми приходится перемещать массивные зеркала. Эффект был реализован [2] с помощью микроволновых фотонов, но в этом эксперименте движущееся зеркало моделировалось с помощью сверхпроводниковой схемы, состоящей из копланарной линии передачи с перестраиваемой электрической длиной. Скорость изменения электрической длины была сделана очень быстрой (составляющей значительную долю скорости света) путем модуляции индуктивности сверхпроводящего квантового интерференционного устройства на высоких частотах (> 10 гигагерц).

Создаваемые в настоящее время оптомеханические системы содержат оптический резонатор, образованный двумя зеркалами, одно из которых свободно вибрирует. Теоретические исследования показали, что частота механических колебаний должна быть приблизительно в два раза выше частоты самой низкочастотной моды резонатора, прежде чем будет наблюдаться динамический эффект Казимира. Однако было показано [3], что резонансное производство фотонов из вакуума можно наблюдать на механических частотах, равных или даже меньших, чем частоты мод резонатора, и наблюдение эффекта может быть реализовано в гигагерцовом спектральном диапазоне с использованием сверхвысокочастотных механических микро- или нанорезонаторов.

В данной работе мы исследуем оптомеханическую систему, в которой возможна реализация механического динамического эффекта Казимира, при этом предполагается, что и поле оптического резонатора, и колебания движущегося зеркала представляют собой квантовомеханические системы и для их динамических переменных принимается стандартная каноническая процедура квантования.

Существуют различные подходы для теоретического анализа поведения таких систем: метод последовательно применяемых унитарных преобразований; метод адиабатического отделения промежуточных виртуальных переходов; приближение, основанное на применении диаграммной техники Фейнмана и стандартной теории возмущений. Здесь нами применяются асимптотический метод, развитый Боголюбовым, Крыловым и Митропольским (КБМ) для изучения нелинейных колебательных систем [4], который позволяют исключать быстрые переменные в гамильтонианах этих систем, сводя их к некоторым эффективным гамильтоновым формам.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Гамильтониан оптомеханической системы, состоящей из оптического резонатора длины L , одно из зеркал которого массой закреплено на пружине с жесткостью k и вибрирует с частотой $\omega_m = (k / m)^{1/2}$, представим в виде:

$$H = H_0 + V, \quad (1)$$

где

$$H_0 = \omega_c a^\dagger a + \omega_m b^\dagger b$$

– невозмущенный гамильтониан, представляющий поле оптического резонатора с частотой $\omega_c = \pi / L$ и колебательную моду зеркала с частотой ω_m (везде постоянную Планка $\hbar$ и скорость света c принимаем равными 1). Гамильтониан взаимодействия V зеркала с оптическим полем в резонаторе представим в виде суммы двух слагаемых: $V = V_{om} + V_{DCE}$,

где

$$V_{om} = g a^\dagger a (b^\dagger + b) \quad (2)$$

– оптомеханическое взаимодействие, сохраняющее число фотонов, а второе слагаемое

$$V_{DCE} = \frac{g}{2} (a^2 + a^{\dagger 2}) (b + b^\dagger) \quad (3)$$

описывает рождение и уничтожение фотонных пар, где $g = G x_{ZPF}$ – скорость взаимодействия, G – параметр взаимодействия, $x_{ZPF} = (2m\omega_m)^{-1/2}$ – амплитуда нулевых флуктуаций колеблющегося зеркала. Член взаимодействия V_{DCE} связан с взаимными превращениями между фотонами и колебательными квантами зеркала и ответствен за динамический эффект Казимира.

Будем рассматривать поведение системы в представлении взаимодействия; тогда гамильтониан V приобретает вид:

$$V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} = g a^\dagger a (b e^{-i\omega_m t} + b^\dagger e^{i\omega_m t}) + \frac{g}{2} (a^2 e^{-i2\omega_c t} + a^{\dagger 2} e^{i2\omega_c t}) (b e^{-i\omega_m t} + b^\dagger e^{i\omega_m t}). \quad (4)$$

Рассмотрим сначала случай, когда частоты поля и механического осциллятора отстроены друг от друга так, что выполняется условие $g \ll |\omega_c - \omega_m|$, поэтому все экспоненты в (4): $e^{\pm i\omega_m t}$, $e^{\pm i(2\omega_c - \omega_m)t}$, $e^{\pm i(2\omega_c + \omega_m)t}$ будут быстро осциллирующими и к гамильтониану $V(t)$ можно применить метод усреднения КБМ в формулировке, адаптированной к исследованию систем в гамильтоновой форме [4] (см. также [5], [6]). В результате реализации процедуры усреднения вместо исходного гамильтониана H (1) получаем некоторый эффективный диагональный гамильтониан H^{eff} , являющийся асимптотическим вариантом исходного в желаемом приближении по параметру малости $g / |\omega_c - \omega_m| \ll 1$. В итоге выражение для оператора эффективного гамильтониана во втором порядке по этому параметру приобретает вид:

$$H^{eff} = H_0^{eff} + H_{int}^{eff} + C, \quad (5)$$

$$H_0^{eff} = \left[\omega_c - g^2 \left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{2\omega_c + \omega_m} \right) \right] a^\dagger a + \left[\omega_m - \frac{g^2}{4} \left(\frac{1}{2\omega_c + \omega_m} + \frac{1}{2\omega_c - \omega_m} \right) \right] b^\dagger b, \quad (6)$$

$$H_{int}^{eff} = -\frac{g^2}{4} \left(\frac{4}{\omega_m} + \frac{1}{2\omega_c + \omega_m} - \frac{1}{2\omega_c - \omega_m} \right) a^\dagger a^\dagger a a - g^2 \left(\frac{1}{2\omega_c + \omega_m} + \frac{1}{2\omega_c - \omega_m} \right) a^\dagger a b^\dagger b, \quad (7)$$

$$C = -\frac{g^2}{2(2\omega_c + \omega_m)}. \quad (8)$$

Гамильтониан H_0^{eff} представляет энергию поля и механических колебаний зеркала, перенормированные за счет оптомеханических взаимодействий: стандартного V_{om} , и ответственного за динамический эффект Казимира V_{DCE} . Из второго члена формулы (6) видно, что наблюдаемая частота механических колебаний зеркала смещена, т.е. больше не определяется только жесткостью пружины и массой зеркала, но также геометрическими параметрами резонатора и силой связи g . Частота поля резонатора (первый член в (6)) также сдвигается в сторону уменьшения и зависит, кроме прочего, от частоты колебаний зеркала. Первый член в нелинейной диагональной части гамильтониана H_{int}^{eff} (7), представляет собой возникшее при усреднении керровское самодействие фотонов, обусловленное совместным вкладом V_{om} и V_{DCE} ; второй член – кросс-керровское взаимодействие, обязанное своим появлением только V_{DCE} . С помощью подобных керровских взаимодействий могут быть сгенерированы неклассические состояния типа шредингеровского кота, являющиеся суперпозицией когерентных состояний, и представляющие большой интерес для квантовой метрологии и квантовых вычислений. Постоянный (неоператорный) член C (8) – энергия основного состояния системы с гамильтонианом H^{eff} , которая отражает собой наличие виртуальных частиц, т.е. вакуумный эффект. Действительно, в этом состоянии $|0,0\rangle$ (первое число в кет-векторе диагонального гамильтониана – количество реальных фотонов, второе число – реальных фононов) $\langle 0,0|H^{eff}|0,0\rangle = C = -g^2 / 2(2\omega_c + \omega_m)$. Причем, в данной ситуации вакуумный эффект, или нулевые колебания оптического поля и зеркала, индуцированы членом V_{DCE} .

Стандартная схема динамического эффекта Казимира по превращению механической энергии в оптическое излучение (в рамках рассматриваемой оптомеханической модели (1)–(3)) реализуется в случае, когда энергия кванта колеблющегося зеркала такова, что он может превратиться в фотонную пару и наоборот, т.е. должно выполняться условие $2\omega_c \approx \omega_m$. При наложении такого условия быстро осциллирующими экспонентами гамильтониана взаимодействия (4) будут $e^{\pm i\omega_m t}$ и $e^{\pm i(2\omega_c + \omega_m)t}$; в результате метод усреднения КБМ приводит (при выполнении неравенства $g \ll \omega_m$) к эффективному гамильтониану вида:

$$\tilde{H}^{eff} = \tilde{H}_0^{eff} + \tilde{H}_{int,1}^{eff} + \tilde{H}_{int,2}^{eff} + C, \quad (9)$$

$$\tilde{H}_0^{eff} = \left[\omega_c - g^2 \left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{2\omega_c + \omega_m} \right) \right] a^\dagger a + \left(\omega_m - \frac{g^2}{2} \frac{1}{2\omega_c + \omega_m} \right) b^\dagger b, \quad (10)$$

$$\tilde{H}_{int,1}^{eff} = -\frac{g^2}{4} \left(\frac{4}{\omega_m} + \frac{1}{2\omega_c + \omega_m} \right) a^\dagger a^\dagger a a - g^2 \frac{1}{2\omega_c + \omega_m} a^\dagger a b^\dagger b, \quad (11)$$

$$\tilde{H}_{int,2}^{eff} = \frac{g}{2} (b a^{\dagger 2} + b^\dagger a^2), \quad (12)$$

неоператорный член C сдвига энергии основного состояния такой же, как (8). В данном случае кросс-керровское взаимодействие возникает благодаря только наличию антивращающихся членов в V_{DCE} , т.е. $g(a^2b + a^{\dagger 2}b^{\dagger})/2$; более того, только эти члены и V_{om} дают вклад в керровское самодействие.

В ограниченном гильбертовом пространстве, определяемом кет-векторами свободного гамильтониана $|0,1\rangle$ и $|2,0\rangle$ с соответствующими им близкими энергиями оптомеханической системы, эффективный гамильтониан (9) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{eff} = & \left(\omega_m - \frac{g^2}{2(2\omega_c + \omega_m)} \right) |0,1\rangle\langle 0,1| + \left(2\omega_c - \frac{4g^2}{\omega_m} - \frac{5g^2}{2(2\omega_c + \omega_m)} \right) |2,0\rangle\langle 2,0| + \\ & + \frac{g\sqrt{2}}{2} (|0,1\rangle\langle 2,0| + |2,0\rangle\langle 0,1|) + C. \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 1 представлены собственные энергии ω^+ (верхняя кривая) и ω^- (нижняя кривая) гамильтониана (13) в зависимости от $2\omega_c = \omega_m$. Из-за оптомеханической гибридизации нулевых и двухфотонных состояний происходит отталкивание уровней энергии вблизи резонансного условия $2\omega_c = \omega_m$, т.е. вакуумное Раби-расщепление уровней. В результате при временной эволюции со скоростью $g\sqrt{2}$, если приближенно выполняется равенство $2\omega_c = \omega_m$ (так как вклад энергетических поправок $\sim g^2/\omega_m, g^2/(2\omega_c + \omega_m)$ мал), один колебательный квант может превратиться в два фотона.

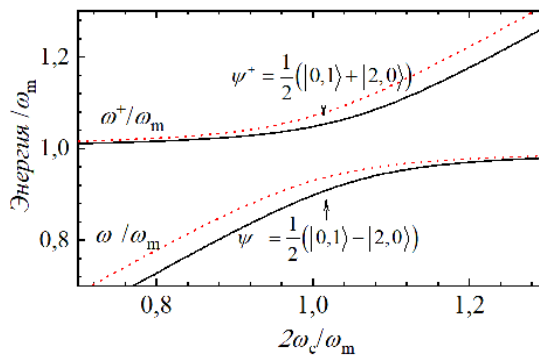


Рис. 1. Отталкивание уровней энергии собственных состояний $|0,1\rangle$ и $|2,0\rangle$, где ψ^+ и ψ^- – соответствующие суперпозиционные состояния при минимальном расщеплении уровней вблизи $2\omega_c / \omega_m = 1$; $g / \omega_m = 0,1$.

Точечная линия соответствует случаю, когда в гамильтониане взаимодействия $V = V_{om} + V_{DCE}$ отсутствует V_{om} , а для V_{DCE} использовано приближение вращающейся волны: $g(a^2b + a^{\dagger 2}b^{\dagger})/2 = 0$

Эволюция вероятности состояния с одним колебательным квантом и оптическим полем в вакуумном состоянии $P_{|0,1\rangle}(t)$ и превращение его в состояние с рожденными двумя фотонами и уничтоженным колебательным квантом, описываемое вероятностью $P_{|2,0\rangle}(t)$, представлена на рис. 2. Обратимый обмен энергией между вибрирующим зеркалом и оптическим полем в резонаторе (который называют вакуумными колебаниями Казимира–Раби) будет наблюдаем, если скорости потерь в оптомеханической системе ниже, чем соответствующие частотные расщепления. Таким образом, существует формальная аналогия между спонтанным излучением возбужденных атомов и вакуумным оптическим излучением в результате свободной эволюции начального чистого механического возбужденного состояния оптомеханической системы.

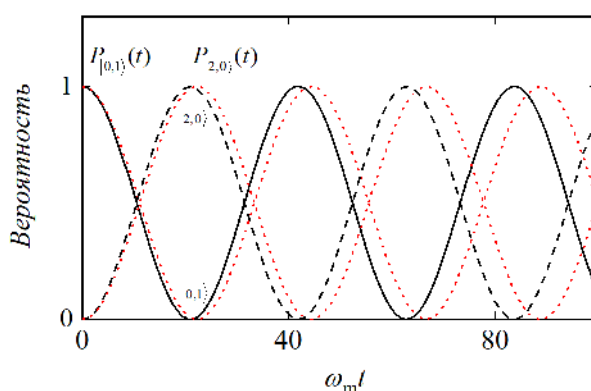


Рис. 2. Осцилляции Казимира–Раби между квантовыми состояниями $|0,1\rangle$ и $|2,0\rangle$.

Сплошные линии – вероятность нахождения системы в состоянии $|0,1\rangle$, штриховые – в состоянии $|2,0\rangle$, точечными линиями представлено поведение системы, когда отсутствует V_{om} , а для V_{DCE} использовано приближение вращающейся волны:

$$g(a^2b + a^{\dagger 2}b^{\dagger}) / 2 = 0$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Dodonov, V.V. Current status of the dynamical Casimir effect / V. V. Dodonov // *Physica Scripta*. – 2010. – Vol.82, №3. – P. 038105 (1–10).
2. Dynamical Casimir effect in a superconducting coplanar waveguide / J. R. Johansson [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2009. – Vol.103, №14. – P. 147003 (1–4).
3. Nonperturbative dynamical Casimir effect in optomechanical systems: vacuum Casimir-Rabi splittings / V. Macri [et al.] // *Physical Review X*. – 2018. – Vol.8, № 1. – P. 011031 (1–17).
4. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – Москва: Наука, 1974. – 410 с.
5. Saiko, A. P. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky averaging used to construct effective Hamiltonians in the theory of strongly correlated electron systems / A. P. Saiko // *Theoretical and Mathematical Physics*. – 2009. – Vol.161, №2. – P. 1567–1572.
6. Saiko, A. P. Kerr-Like Nonlinearities in an optomechanical system with an asymmetric anharmonic mechanical resonator / A. P. Saiko, R. Fedaruk, S. A. Markevich // *JETP Letters*. – 2021. – Vol.113, №7. – P. 487–492.