

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король



13 июля 2024 г.

Регистрационный № УД- 13552/уч.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

1–31 03 01 Математика

Направление специальности:

1–31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2024 г.

Учебная программа разработана на основе ОСВО 1–31 03 01–2021 и учебного плана № G31–1–018/уч. от 25.05.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

О. А. Архипенко, старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

А. И. Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

М. В. Игнатенко, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Т. С. Якименко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

М. В. Чайковский, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования (протокол № 19 от 05.06.2024);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой



М. В. Игнатенко

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность учебной дисциплины «Численные методы» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в его содержание.

Учебная программа учебной дисциплины «Численные методы» разработана для студентов IV курса очной формы обучения специальности 1–31 03 08–04 Математика (научно-конструкторская деятельность) механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Цели и задачи учебной дисциплины

Основные цели дисциплины «Численные методы»:

- дать теоретическую и практическую подготовку по методам численного решения задач линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений математической физики, теоретической и прикладной механики;

- ознакомить учащихся с современными технологиями математического моделирования, основанными на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения;

- научить основам работы в системе компьютерной алгебры «Mathematica».

Задачи дисциплины состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Численные методы» относится к модулю «Дополнительные виды обучения» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина опирается на знания, полученные при изучении дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения» и связана с дисциплиной «Уравнения математической физики».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Численные методы» должно обеспечить формирование у студентов следующей **специализированной компетенции:**

СК. Осуществлять обоснованный выбор рациональной численной методики для решения типовых задач механики, проводить ее реализацию с использованием современных программных средств компьютерных вычислений, оценивать корректность полученных результатов и анализировать возможности альтернативных подходов.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- источники погрешности численных результатов,
- понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов,
- требования корректности постановки задачи,
- основные приемы оценки погрешности численных методов,
- назначение и вычислительные качества наиболее популярных численных методов интерполирования (формулы Лагранжа и Ньютона, метод наилучшего приближения в среднеквадратичной норме), приближенного интегрирования (формулы трапеций и Симпсона, методы типа Гаусса наивысшей алгебраической степени точности), для задач алгебры, дифференциальных уравнений (метод Гаусса, LU факторизация, итерационные методы Рунге-Кутты, Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации, минимальных невязок, сопряженных градиентов, методы Рунге – Кутты и Адамса, метод стрельбы, быстрое дискретное преобразование Фурье),
- достоинства и недостатки явных и неявных численных методов решения дифференциальных уравнений,
- современные тенденции в развитии методов численного решения математических и прикладных задач,

уметь:

- оценить корректность постановки задачи,
- выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи,
- использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений,
- анализировать достоверность и трактовать численные результаты,

владеть:

- навыками работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач,
- навыками программирования численных алгоритмов,
- основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Численные методы» изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины отведено:

– для очной формы получения высшего образования — 108 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции — 36 часов, лабораторные занятия — 36 часов, **из которых** управляемая самостоятельная работа — 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 0 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации — зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение.

Об основных задачах и содержании вычислительной математики. Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А. А. Самарского.

Тема 2. Элементы теории погрешностей.

Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций. Прямая и обратная задачи теории погрешностей. Примеры неустойчивых алгоритмов. Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций.

Системы функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами. Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Конечные разности. Разделенные и разности, их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона. Представление погрешности интерполирования. Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций. Многочлены Чебышева. Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке. Интерполирование по равноотстоящим узлам. Интерполирование сплайнами. Интерполяционная задача Эрмита. Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье. Численное дифференцирование и оценка его погрешности. Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов.

Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании. Простейшие квадратурные правила Ньютона – Котеса. Погрешность интегрирования. Составные квадратурные формулы Ньютона – Котеса. Погрешность интегрирования. Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул. Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы. Частные случаи квадратур гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида.

Тема 5. Численные методы решения систем ЛАУ.

Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности. Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента. LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации. Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра. Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации. Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Тема 6. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского. Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений. Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем.

Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов. Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости. Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона. Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы.

Тема 8. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости. Методы Рунге – Кутты. Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса. Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира.

Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка. Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина. Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем. Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ. Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

Тема 10. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма.

Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки.

Тема 11. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.

Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Устойчивость, аппроксимация и сходимость. Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости. Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума. Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Введение	2						Опрос
2	Элементы теории погрешностей	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий
3	Интерполирование и приближение функций	2			2		2	Опрос, отчет по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по решению задач и упражнений УСР
4	Приближенное вычисление интегралов	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, контрольная работа
5	Численные методы решения систем ЛАУ	4			4			Опрос, отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий
6	Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц	4			4			Опрос, отчет по лабораторной работе
7	Решение нелинейных уравнений и систем	4			4		2	Опрос, отчет по лабораторной работе, письменный отчет с

										устной защитой по решению задач и упражнений УСР, контрольная работа
8	Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	4				2				Опрос, отчет по лабораторной работе
9	Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	6				4	*	2		Опрос, отчет по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по решению задач и упражнений УСР, контрольная работа
10	Численное решение интегральных уравнений Фредгольма	2				2				Опрос, отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий
11	Построение и исследование разностных схем для задач математической физики	4				4				Опрос, отчет по лабораторной работе, контрольная работа по темам 1–11
	Всего часов	36				30		6		Зачет

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 734 с. – По ссылке доступна электронная версия 2022 года издания. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210368>.
2. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – Изд. 8-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 664 с. – По ссылке доступна электронная версия 2022 года издания. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210674>.
3. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова ; под ред. Б. П. Демидовича. – Изд. 5-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 400 с. – По ссылке доступна электронная версия 2022 года издания. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210437>.
4. Гулин, А. В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие / А. В. Гулин, О. С. Мажорова, В. А. Морозова. – Москва : ИНФРА-М, 2022. – 368 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1852192>.
5. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 512 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/2002583>.

Дополнительная литература

6. Волков, В. М. Численные методы : учеб.-метод. пособие для студ. учреждений высш. образования, обуч. по спец. 1–31 03 08 «Математика и инф. технологии (по напр.)» : в 2 ч. / В. М. Волков – Минск : БГУ, 2016. Ч. 1 : – Минск : БГУ, 2016. – 87 с. : ил. ; 20х14 см. – На обл. также: БДУ 95. – Библиогр.: с. 80. – Ссылка на ресурс: URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/161943>.
7. Кремень, Е. В. Численные методы. Практикум в MathCad : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 255 с.
8. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Г. И. Марчук. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 608 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210302>.
9. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник / В. Д. Слабнов. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2020. – 389 с. – По ссылке доступна

электронная версия 2022 года издания. – URL:
<https://e.lanbook.com/book/215762>.

10. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
11. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 304 с.
12. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.
13. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 286 с.
14. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 311 с.
15. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998. – 470 с.
16. Березин, И. С. Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. 2. – 640 с.
17. Самарский, А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Альянс, 2016. – 432 с.
18. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
19. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
20. Волков, В. М. Численный анализ и оптимизация / В. М. Волков, О. Л. Зубко, И. Н. Катковская, И. Л. Ковалева, В. Г. Кротов, П. Лима. – Минск: Белгослес, 2017. – 207 с.
21. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Academia, 2018. – 96 с.
22. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
23. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
24. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие для студ. физико-матем. спец. вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 8-е изд. – М.; СПб.: Лаборатория Базовых Знаний: Физматлит: Невский Диалект, 2000. – 622 с. Экземпляры: всего: 3, из них: АБУ-1, КХН-1, СЧЗ-1.
25. Игнатенко, М. В. Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск: БГУ, 2006. – 116 с.
26. Сборник задач по методам вычислений: учеб. пособие для студ. учрежд., обеспеч. получение высш. образования по физ.-мат. спец. / [А. И. Азаров и др.]; под ред. П. И. Монастырного. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 376 с.
27. Самарский, А. А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. – Изд. 5-е, стер. – Санкт-Петербург; Москва;

Краснодар : Лань, 2009. – 288 с. : ил. ; 20х13 см. – (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература). – На обл. также: Знание. Уверенность. Успех. Библиогр.: с. 281. Экземпляры: Всего: 5, из них: АБУ-5.

28. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. Решения задач и упражнения : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков ; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Лаборатория знаний, 2016. – 352 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Рекомендуются следующие формы диагностики результатов учебной деятельности: опрос, отчет по лабораторным работам, письменный отчет с устной защитой по решению задач и упражнений УСР, проверка индивидуальных заданий, контрольные работы.

Отметка за ответы на лекциях (опрос) и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, примеров из практики и т. д.

Оценка отчета по лабораторным может включать корректность используемых методов исследования, привлечение знаний из сопредельных областей, организация работы группы.

Контроль УСР проводится преподавателем с использованием ИКТ в форме опроса и проверки результатов выполнения работы.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Численные методы» учебным планом предусмотрен зачет.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3. Интерполирование и приближение функций.

Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке (2 ч.).

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]: гл. 6, задачи и упражнения 43–62.

Форма контроля — письменный отчет с устной защитой по решению задач и упражнений.

Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем.

Метод Ньютона. Квадратичная сходимость (1 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]: гл. 5.2, задачи и упражнения 55–62.

Форма контроля — письменный отчет с устной защитой по решению

задач и упражнений.

Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]: гл. 10.5, задачи и упражнения 63–72.

Форма контроля — письменный отчет с устной защитой по решению задач и упражнений.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются

1) эвристический подход:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира,
- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем,
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов,
- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности,

2) практико-ориентированный подход:

- освоение содержания образования через решения практических задач,
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности,
- ориентация на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры,
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций,

3) методы и приемы развития критического мышления, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления,

4) метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины,
- работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных занятий,
- выполнение домашнего задания,
- подготовка к лабораторным занятиям,
- курсовые, дипломные и научно-исследовательские работы, связанные с тематикой дисциплины,
- подготовка к участию в конференциях с докладами по проблемам дисциплины.

Для организации дистанционной и самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале механико-математического факультета БГУ <https://edummf.bsu.by> и содержащие учебные материалы (лекций, примерные задания к контрольным работам, задания к лабораторным работам, вопросы к зачету и т. п.).

Примерный перечень заданий исследовательского характера для контрольных работ

Индивидуальные задания исследовательского характера для самостоятельной работы включают аналитические решения теоретических задач различного уровня сложности, которые сдаются на проверку в письменном виде.

Тема 1. Введение.

Тема 2. Элементы теории погрешностей.

1. Определить относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований R и r , образующая l , измеренные с точностью до 0,01 см, следующие $R = 23,64$ см, $r = 17,31$ см, $l = 10,21$ см.

2. Высота h и радиус основания R цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

3. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которым пользовался Архимед при вычислении π , выражается при $r = 1$ формулой

$p = 96\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$. Если вычислять непосредственно по этой

формуле, желая получить π с точностью до 0,001, то с какой точностью нужно производить вычисления подкоренных величин?

4. Какая из формул $S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$ или $S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)$,

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ является численно более устойчивой для вычисления отклонения S^2 множества событий $x_1, \dots, x_n$.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 1, задачи 1–30.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций

1. Функция $f(x) = \frac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4; -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4, -3, -2, -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5} ?

2. Функция $f(x) = e^{2x}$ приближается на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом второй степени по трём узлам: $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

3. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на отрезке $[4; b]$. При каком $b > 4$ многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по оптимальным узлам, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \leq 10^{-3}$?

4. Оценить число равноудаленных на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ точек, обеспечивающее интерполирование функции $f(x) = \sin x$ с точностью $\varepsilon \leq 10^{-2}$.

5. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1000 до 10000. Какова наибольшая погрешность линейной (квадратичной) интерполяции, если шаг равен 1?

6. Оценить погрешность приближения функции e^{2x} на $[2; 5]$ интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по оптимальным узлам.

7. С какой точностью можно вычислить по формуле Ньютона $\cos 10,5$ по известным значениям $\cos 10, \cos 11, \cos 12, \cos 13, \cos 14, \cos 15$?

8. Оценить число точек на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, обеспечивающее интерполирование функции $f(x) = \sin x$ с точностью $\varepsilon \leq 10^{-2}$.

9. Функция $\ln(x)$ приближается на отрезке $[1, 2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырём узлам $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$. Доказать, что погрешность интерполирования в равномерной норме не превосходит $\frac{1}{300}$.

10. Дана таблица синусов с шагом 1. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 6, задачи 1–62.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов

1. Пусть весовая функция $p(x)$ четна, узлы x_i расположены симметрично относительно нуля, т.е. $x_{n+1-i} = -x_i$, $i = 1, \dots, n$. Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле $I(f) \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$ для вычисления интеграла

$I(f) = \int_{-a}^a p(x)f(x)dx$ коэффициенты, соответствующие симметричным узлам равны, то есть $c_{n+1-i} = c_i$, $i = 1, \dots, n$.

2. Для вычисления $\int_0^1 f(x)dx$ применяется составная формула трапеций.

Оценить минимальное число разбиений N , обеспечивающее точность $0,5 \cdot 10^{-3}$ на двух классах функций:

$$1) \|f''(x)\| \leq 1; \quad 2) \int_0^1 |f''(x)| dx \leq 1.$$

3. Найти оценку погрешности вычисления интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ при

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ по составной квадратурной формуле}$$

$$S(f) = (f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + 4f(0,3) + \dots + 4f(0,9) + f(1,0)) / 30.$$

4. Оценить минимальное количество узлов составной квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла $\int_0^2 f(x)dx$, обеспечивающее точность $\varepsilon \leq 0,5 \cdot 10^{-4}$ на классе функций, удовлетворяющих условию $\sup_{x \in [0;2]} |f'''(x)| \leq 1$.

5. Пусть $f \in C^{(1)}[-1;1]$ и $P_5(x)$ — алгебраический полином пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 1, 2, 3$, где $x_1 = -1$,

$x_2 = 0, x_3 = 1$. Рассмотрим квадратурную формулу следующего вида:

$$S_5(f) = (7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - 15f'(1)) / 15.$$

Проверить, что $\int_{-1}^1 P_5(x) dx = S_5(P_5)$, и доказать, что $S_5(f)$ точна на

полиномах пятой степени, но найдется полином степени 6, на котором она не точна.

6. Доказать, что ортогональный многочлен степени n имеет ровно n различных корней на отрезке $[a, b]$.

7. Доказать, что среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = x^n + \dots$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int_a^b p(x) P_n^2(x) dx$ имеет ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ со старшим коэффициентом 1.

8. Для ортогональных многочленов вида $\psi_n(x) = x^n + \dots$ показать справедливость рекуррентного соотношения $\psi_n(x) = (x + b_n)\psi_{n-1}(x) - c_n\psi_{n-2}(x)$ с коэффициентом $c_n > 0$.

9. Доказать, что ортогональные многочлены на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $p(x)$ обладают свойством $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$.

10. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 7, задачи 1–4; гл. 8, задачи 1–217.

Тема 5. Численные методы решения систем ЛАУ.

1. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_1$, справедливо представление

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

2. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_\infty$, справедливо представление

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

3. Пусть $A = A^T$. Доказать, что $\max_{\|x\|_2=1} |(Ax, x)| = \rho(A)$.

4. Пусть числа $d_k > 0, k = \overline{1, n}$. Доказать, что $\sum_{k=1}^n d_k |x_k|$ является нормой вектора x . Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

5. Пусть числа $d_k > 0, k = \overline{1, n}$. Доказать, что $\max_k (d_k |x_k|)$ является нормой вектора x . Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

6. Пусть $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$. Доказать, что метод простой итерации $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + \phi$ для системы $Ax = b$ сходится.

7. Пусть $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$. Доказать, что $\det A \neq 0$.

8. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что итерационный процесс $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau \left(A \frac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} - b \right)$ сходится при $\tau > 0$. Оценить его скорость сходимости, если известны $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$.

9. Найти все матрицы, для которых метод итераций будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

10. При каких значениях параметра τ метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$ для системы уравнений $Ax = f$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} 5 & 0,8 & 4 \\ 2,5 & 3 & 0 \\ 2 & 0,8 & 4 \end{bmatrix}$ сходится для произвольного приближения?

11. Доказать неравенство $\|x\|_C^2 \leq \rho(C) \|x\|_2^2$, где $C = C^T > 0$.

12. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 1 \end{bmatrix}$. Записать сходящийся метод простой итерации. Найти оптимальное значение итерационного параметра τ .

13. Показать, что для системы ЛАУ $Ax = b$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{bmatrix}$, метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b$ сходится для любого начального приближения при $0 < \tau < 0.4$.

14. Найти все матрицы, для которых метод Зейделя будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

Тема 6. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

1. Пусть $A = A^T$ имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$. Доказать, что при любом $\tau > 0$ итерационный процесс $\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A \left(\frac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} \right) = b$ сходится. Определить оптимальное значение τ_{opt} .

2. Найти α, β , при которых метод Зейделя будет сходящимся для систем уравнений $x = Hx + \phi$ с матрицей вида $H = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

3. Число обусловленности матрицы A равно q . Найти число обусловленности матрицы A^{-1} .

4. При решении системы ЛАУ с матрицей размерности 128×128 методом сопряженных градиентов за 50 итераций достигается относительная погрешность приближенного решения $1e-3$. Какое максимальное число итераций потребуется для достижения точности не хуже, чем $1e-9$?

5. Число обусловленности симметричной матрицы $K = 1e9$. Максимальное собственное значение при этом равно 1000. Вычислить минимальное и максимальное собственные значения обратной матрицы.

6. Какой будет значение переменной x , если все переменные класса $\text{double } p = \frac{(S+1)^2}{(S-1)^2}; \text{ if } (p == 1) \ x = 1; \text{ else } x = 0;$

а) $p = 1e-20$; б) $p = 1e-12$; в) $p = 1e12$; г) $p = 1e151$; д) $p = 1e155$.

7. Какая геометрическая фигура в R^3 будет определена множеством точек $\|x\| = \text{const}$ в случае максимальной и квадратичной норм?

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 2, задачи 81–88, 107–114.

Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем.

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления корня n -ой степени $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$, n – вещественное число.

2. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ методом простой итерации.

3. Определить область начальных приближений x_0 , для которых итерационный процесс $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{20}$ сходится.

4. Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p>1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

5. Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p>1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

6. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\frac{1}{a}$ так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a>0$.

7. Пусть дана функция $\phi(x)=\alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x - \gamma$. При каких ограничениях на параметры α, β, γ метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

8. Пусть дана функция $\phi(x)=ae^{-bx^2}+c$, $a \neq 0$, $b \geq 0$. При каких ограничениях на a, b и c метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

9. Построить метод простой итерации для решения уравнения $2+x=e^x$, $x>0$.

10. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0 .

11. Дано уравнение $x=\phi(x)=\frac{\pi}{2}\sin x$, которое решается методом простой итерации $x_{n+1}=\phi(x_n)$. Найти область сходимости к корням уравнения.

12. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения $x^3-4x^2+5x-2=0$.

13. Для вычисления $x=\sqrt{2}$ используется итерационный процесс $x_{n+1}=\phi(x_n)=x_n+v(x_n^2-2)$. При каком выборе v этот процесс имеет квадратичную скорость сходимости?

14. Построить метод простой итерации для решения уравнения $\cos x - \frac{1}{x} \sin x = 0$, сходящийся при любом начальном приближении $x_0 \neq 0$.

15. Найти область сходимости метода простой итерации для следующего уравнения $x=e^{2x}-1$.

16. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x)=3x+\cos x+1=0$ методом простой итерации.

17. Уравнение $x=2^{x-1}$ решается методом простой итерации. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0 .

18. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0 .

19. При каких значениях p метод простой итерации $x_{k+1} = x_k + p(1 - x_k^{1/2})$ сходится к корню $x = 1$, если $x_0 > 1$ ($x_0 < 1$).

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 4, задачи 52, 54, 105.

Тема 8. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Используя разностное уравнение, выписать формулу для вычисления интеграла $I_k(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(kx) - \cos(k\alpha)}{\cos x - \cos \alpha} dx$, где α – параметр.

2. Доказать, что для чисел Фибоначчи $f_k: f_{k+1} = f_k + f_{k-1}, f_0 = 0, f_1 = 1$, справедливо равенство $f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$

3. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = 0$ удовлетворяет уравнению $y_{k+1} - 9y_k + 27y_{k-1} - 23y_{k-2} - 24y_{k-3} + 36y_{k-4} = 0$

4. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1} - 12y_{k-1} + 2y_{k-2} + 27y_{k-3} - 18y_{k-4} = 0$ однозначно представимо в виде суммы решений уравнений $y_{k+1} - 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = 0$ и $y_{k+1} - 9y_{k-1} = 0$.

5. Вычислить определитель $\Delta_k = \det A_k$ трехдиагональной матрицы порядка k $A_k = \begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a & b \end{pmatrix}$, учитывая, что $\Delta_0 = 1$.

6. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + y_k = 0, y_0 = 2, y_1 = 1$.

7. Пусть ϕ_k и z_k — два частных решения уравнения $a_1 y_{k+1} + a_0 y_k + a_{-1} y_{k-1} = 0, a_1 a_{-1} \neq 0$. Доказать, что определитель матрицы $A_k = \begin{pmatrix} \phi_k & \phi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$ либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех k одновременно.

8. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

9. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = x$ являются полиномы Чебышева первого рода

$$T_i(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^i + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^i \right], |x| \geq 1.$$

10. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2x$, являются полиномы Чебышева второго рода

$$U_i(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{i+1} - \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^{i+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}, |x| \geq 1.$$

11. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - 5y_i + 6y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

12. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - \frac{5}{2}y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

13. Определить 1000-й член последовательности, первые два члена которой равны единице, а последующие определяются рекуррентными соотношениями $y_{i+1} = y_{i-1} + y_i$, $i = 2, 3, \dots$

14. Найти общее решение уравнения $by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

15. Найти общее действительное решение уравнения $2y_{i-1} - y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

16. Найти решение разностной задачи $2y_i + 3y_{i+1} + y_{i+2} = 0$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$.

17. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 10, задачи 51–56.

Тема 10. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма.

Тема 11. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.

1. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + \phi(x, t)$ на сетке (x_m, t_n) , где $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, используя шаблоны:

1) $Ш(x_m, t_n) = \{(x_{m-1}, t_n), (x_{m+1}, t_n), (x_{m-1}, t_{n+1}), (x_{m+1}, t_{n+1})\}$;

2) $Ш(x_m, t_n) = \{(x_m, t_{n-1}), (x_{m-1}, t_n), (x_m, t_n), (x_{m+1}, t_n), (x_m, t_{n+1})\}$;

Оценить погрешность аппроксимации дифференциального уравнения

разностным в точке (x_m, t_n) .

2. Построить аппроксимацию условия $u(0, t) = \psi(t)$ с привлечением значений сеточных функций в точках: 1) $\left(\frac{1}{2}h, t_n\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2}h, t_n\right), \left(\frac{3}{2}h, t_n\right), \left(\frac{5}{2}h, t_n\right)$.

Оценить погрешность аппроксимации.

3. Показать, что разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на сетке (x_m, t_n) , $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, со вторым порядком по τ и четвертым по h , если $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}$.

4. Пусть даны дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \sigma \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и вторым по h .

5. Исследовать сходимость к решению задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$, $u(x, 0) = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $a > 0 - \text{Const}$ решений следующей разностной схемы

$$\frac{y_m^n - y_m^{n-1}}{\tau} = a\sigma \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} + a(1 - \sigma) \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h},$$

$$y_m^0 = \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad N\tau = T.$$

6. Исследовать сходимость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = (1 - \sigma) \frac{y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{2h^2} + \sigma \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{2h^2},$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad N\tau = T, \quad Mh = 1,$$

$$y_m^0 = \psi(x_m), \quad u_0^n = 0, \quad u_M^n = 0,$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \psi(x),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

Здесь $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, $0 \leq \sigma \leq 1$.

7. При каких значениях параметра $\theta \in [0; 1]$ разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = (1 - \theta) \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \theta \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \text{ устойчива?}$$

8. Определить, при каких значениях параметра $\theta \in [0;1]$ схема $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \theta \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + (1-\theta) \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$ устойчива?

9. Пусть даны дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \sigma \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma) \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и четвертым по h .

10. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$.

11. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$.

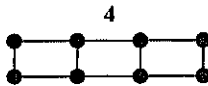
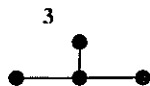
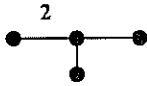
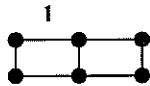
12. Определить порядок аппроксимации разностных схем на решении уравнения теплопроводности и переноса

а) $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} + f_m$, б) $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0$.

13. Методом гармоник исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0.$$

14. Какой(-ие) из шаблонов соответствует типовым неявным двухслойным схемам для нестационарного уравнения теплопроводности?



Примерный перечень вопросов к зачету

1. Представление чисел с плавающей запятой и особенности арифметических операций с ними. Машинные эпсилон, ноль и бесконечность.
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Оценка погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Невязка. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ.
4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU факторизация.
6. Разложение Холецкого.
7. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, последовательной верхней релаксации).
12. Проблема собственных значений.
13. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
14. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
15. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
канд. физ.-мат. наук, доцент



М. В. Игнатенко

05. июня 2024 г.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)