ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ПОЛИЭДРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ю. Ю. Тышко

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Беларусь, praleska14@gmail.com
Научный руководитель — Н. М. Дмитрук, кандидат физико-математических наук, доцент

Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с постоянно действующими возмущениями, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество и таким образом, чтобы достигался минимум терминального критерия качества. Управления и возмущения системы принимают значения из полиэдральных множеств. Определяется оптимальная стратегия управления, которая учитывает информацию о состоянии системы в будущие моменты времени.

Ключевые слова: линейная система; возмущение; оптимальное управление; стратегия; момент замыкания.

1. Введение. Задачи оптимального управления актуальны в теории систем управления с неопределенностями, которые описывают прикладные задачи в экономике, технике и т.д. [1]. Поэтому важно проектировать системы управления, способные функционировать при наличии этих неопределенностей.

В данной статье рассматривается подход к задачам терминального оптимального управления при ограниченной исходной информации и постоянных полиэдральных возмущениях. Систему требуется перевести на терминальное множество за конечное время, выполняя все полиэдральные ограничения на управления, терминальные состояния и возмущения, и минимизируя терминальный критерий качества [2]. Определяется оптимальная стратегия управления, учитывающая состояние системы в будущем. Рассматриваются многократно замыкаемые стратегии с использованием аппроксимации множеств замыкания внешними многогранниками.

2. Постановка задачи. Пусть рассматривается дискретная система вида

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; t = 0,1,\dots,T-1, \qquad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние (фазовый вектор); $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданное начальное состояние; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – управление; $w(t) \in \mathbb{R}^p$ – возмущение в момент времени t; A, B, M – заданные постоянные матрицы размеров $n \times n, n \times r, n \times p$ соответственно.

Функции $u(t)$ и $w(t)$ в каждый момент времени t, $t = 0,1,\dots,T-1$, принимают значения из заданных множеств

$$U = \{u: Qu \leq q, \ \ u \in \mathbb{R}^r\}, \qquad W = \{w: Dw \leq d, \ \ w \in \mathbb{R}^n\}, \tag{2}$$

где $q \in \mathbb{R}^l$, $d \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{l \times r}, D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – постоянные матрицы.

Управление $u(\cdot) = (u(t) \in U, t = 0,1,\dots,T-1)$ будем называть *допустимым управлением*.

При некотором допустимом управлении $u(\cdot)$ и возмущении $w(\cdot) = \{w(t) \in W, t = 0,1,\dots,T-1\}$ и начальном условии $x(0) = x_0$ решение системы (1) будем обозначать $x(t) = x\big(t \big| x_0, u(\cdot), w(\cdot)\big)$, $t = 0,1,\dots,T-1$.

Зададим терминальное множество $X_T = \{x \in \mathbb{R}^n: g_{min} \leq Hx \leq g_{max}\}, H \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $g_{\min}, g_{\max} \in \mathbb{R}^m$, на которое нужно перевести траекторию (решение) системы (1) с гарантией попадания траектории на это множество в момент $t = T$. Управление (программа управления), для которого последнее требование выполняется, назовем *гарантирующим управлением* (гарантирующей программой управления).

Гарантирующей программой управления [2] называется допустимое управление $u(\cdot)$, которое при любом возмущении $w(t)$ переводит траекторию системы (1) в момент времени T на терминальное множество, т.е. выполняется $x\big(T \big| x_0, u(\cdot), w(\cdot)\big) \subset X_T \ \ \forall w(t) \in W, t = 0,1,\dots,T-1$.

Качество гарантирующей программы [2] оценивается терминальным (типа Майера) функционалом

$$J(u) = \max_{w(\cdot) \in W} c' x(T), c \in \mathbb{R}^n.$$

Это значение терминального критерия качества при наихудшей реализации возмущения называется *гарантированным значением* критерия качества.

Гарантирующая программа $u^0(\cdot)$ гарантированное значение критерия качества[2], т.е. называется оптимальной программой, если она минимизирует

$$J(u^0) = \min_{u \in U} J(u).$$

3. Многократно замыкаемая стратегия управления. Пусть зафиксированы моменты времени $T_j \in \{1, 2, \dots, T-1\}$, $j = 1, 2, \dots, N$; $T_1 < T_2 < \dots < T_N$, их будем называть моментами замыкания , которые разбивают отрезок управления на интервалы $\Delta_j = \{T_j, \ T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1\}$, $j = 0, 1, \dots, N$; $T_0 = 0$, $T_{N+1} = T$.

В зависимости от реализовавшегося возмущения система в момент T_{j+1} окажется в состоянии, которое будем обозначать $x^*(T_{j+1})$. Очевидно, что $x^*(T_{j+1}) \in X(T_{j+1} | x_j, u_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, где $X(T_{j+1} | x_j, u_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_{j+1} | x_j, u_j, w_j), w_j(\cdot) \in W^{T_{j+1} - T_j}\}$ – множество возможных состояний системы (1) в момент времени T_{j+1}.

Относительно моментов замыкания предполагаем, что в каждый момент T_j можно будет:

1) точно измерить текущее состояние $x^*(T_j)$ системы;
2) в зависимости от измеренного $x^*(T_j)$ выбрать новое управление $u_j\left(t \middle| x^*(T_j)\right), t \in \Delta_j$.

Учитывая сделанное предположение, будем искать решение поставленной задачи оптимального управления в классе стратегий управления $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания, которую определим рекуррентно [3] на основе стратегий $\pi_{N-j}(T_j, x_j)$ с $N - j$ моментами замыкания, $j = N-1, N-2, \dots, 1$:

$$\pi_1(T_{N-1}, x_{N-1}) = \{u_{N-1}(\cdot \,| x_{N-1}); u_N(\cdot \,| x_N); \ x_N \in X(T_N | x_{N-1}, u_{N-1})\},$$

$$\pi_{N-j}(T_j, x_j) = \{u_j(\cdot \,| x_j); \pi_{N-j-1}(T_{j+1} | x_{j+1}); \ x_{j+1} \in X(T_{j+1} | x_j, u_j)\}, \quad (3)$$

$$\pi_N(0, x_0) = \{u_0(\cdot \,| x_0); \pi_{N-1}(T_1 | x_1); \ x_1 \in X(T_1 | x_0, u_0)\}.$$

Допустимость стратегии (3) определяется рекуррентно, следуя динамическому программированию, для каждого промежутка Δ_j, начиная с $j = N$. В результате получим включения, определяющие допустимую стратегию: $X(T_{j+1} | x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}$.

Здесь множества $X_j, j = 1, 2, \dots, N$, называются множествами замыкания в момент T_j. Каждое из этих множеств состоит из всех точек $x_j \in \mathbb{R}^n$, для которых существует стратегия управления $\pi_{N-j}(T_j, x_j)$ с $N - j$ моментами замыкания, $X_{N+1} \in \mathbb{R}^n$.

Оптимальная стратегия управления π_N^0 определяется оптимальными начальными программами $u_j^0(\cdot\,|x_j),\ j = 0, 1, \dots, N$, которые находятся как решения уравнений Беллмана

$$V_N(x_N) = \min_{u_N} \max_{w_N} c'x(T|x_N, u_N, w_N), \qquad X(T|u_N, w_N) \subseteq X_{T,}$$

$$V_j(x_j) = \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}\big(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)\big),\ \ j = N-1, \dots, 0,$$

при условии выполнения ограничений (2).

Метод построения оптимальной стратегии с замыканиями для исследуемой задачи с ограничениями вида (2) обобщает работу [3].

Библиографические ссылки

1. *Красовский, Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата / Н. Н. Красовский. М.: Наука, 1985. 520 с.

2. *Дмитрук, Н.М.* Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, No5. С. 664–681.

3. *Дмитрук, Н.М.* Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Труды института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, No3. С. 66–82.