ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГА МОДЕЛИ КУРНО С НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕНЫ

Я. А. Слаук

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, yana_slauk@mail.ru
Научный руководитель — В. В. Альсевич, кандидат физико-математических наук, профессор

В статье исследуется аналог модели дуополии Курно, в которой в качестве функции цены на продукцию взята любая убывающая кусочно-гладкая функция.

Ключевые слова: аналог модели дуополии Курно; негладкая функция цены.

Одной из важнейших рыночных структур является олигополия. Ей принадлежат отрасли, функционирующие на гребне научно-технического прогресса: отрасль, производящая оборудование для компьютерных систем, аэрокосмическая отрасль, автопром. Относят к рынку олигополии отрасли топливно-энергетического комплекса, черной и цветной металлургии.

Олигополия – это тип строения рынка, при котором сторона предложения состоит из небольшого числа сравнительно крупных предприятий-продавцов однородной продукции.

Так как результаты соперничества зависят от характера допущений о реакции соперников на действия друг друга, а они могут быть существенно разными, то не существует единой модели олигополии. Вместо этого известно несколько моделей олигополии, различающихся характером предположений олигополистов и особенностями их взаимоотношений.

Одной из разновидностей олигополии является дуополия. Дуополия – это рынок однородного продукта, на котором выделяются две крупные фирмы, конкурирующие между собой. Для описания олигополии и дуополии существует множество разнообразных моделей. Одной из самых знаменитых является модель Курно [1], позволяющая обосновать меры антимонопольного регулирования.

При несовершенной конкуренции цена p_0 однородной продукции является функцией выпуска Q: $p_0 = p_0(Q)$, причем невозрастающей – с возрастанием выпуска цена может только снижаться: $dp_0 / dQ \leq 0$.

Согласно Курно, цена на выпускаемую продукцию линейна:

$$p_0(Q) = a - bQ,\ a > 0,\ b > 0,$$

где $Q=Q_1+Q_2$ – объем выпускаемой продукции двумя фирмами-конкурентами. Кроме того, каждый дуополист стремится к максимизации своей прибыли, исходя из предположения, что другой дуополист не будет изменять выпуска, каким бы ни был его собственный выпуск. Иными словами, предположительные вариации каждого имеют нулевую оценку: $\partial Q_1/\partial Q_2=0$, $\partial Q_2/\partial Q_1=0$. Кроме того, предполагается, что издержки C_i обеих фирм линейны, причем предельные издержки фирм одинаковы и равны c. Следовательно, задача максимизации прибыли каждого дуополиста имеет вид:

$$\Pi_i(Q_1,Q_2)=R_i(Q_1,Q_2)-C_i(Q_i)=aQ_i-bQ_i^2-bQ_1Q_2-cQ_i-\alpha_i\to\max,$$
$$Q_i\ge 0,\ i=1,2.$$

Условием максимизации прибыли будет выступать равенство нулю первых частных производных от функции прибыли для каждого из участников. С учетом нулевых предположительных вариаций получим:

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial Q_i}=a-2bQ_i-bQ_j-c=0,\ i,j=1,2,\ i\ne j. \qquad (1)$$

Не приводя подробных вычислений при решении системы (1), запишем лишь окончательный результат:

$$Q_1^0=Q_2^0=\frac{a-c}{3b},\ Q^0=Q_1^0+Q_2^0=\frac{2(a-c)}{3b},\ p_0=\frac{a+2c}{3}.$$

А теперь рассмотрим негладкую функцию цены p_0, которая предложена в [2]. Используем одну из следующих (результат будет одинаковым):

$$p_0(Q)=p_0^{(s)}+\frac{\alpha_s}{Q},\ Q\in[Q_{s-1},Q_s],\ s=\overline{1,k},$$
$$(2)$$
$$p_0(Q)=\min_{s=\overline{1,k}}\left(p_0^{(s)}+\frac{\alpha_s}{Q}\right),\ Q>0.$$

Здесь $\alpha_s>0$, $p_0(Q_s+0)=p_0(Q_s-0)$. Во втором случае будем считать, что в некоторых точках Q_s минимум достигается не более чем для двух функций. Заметим, что из вида указанных функций следует их недифференцируемость в точках Q_s.

Так как в изначальной модели предполагается наличие дуополии, то итоговый выпуск будет равен $Q=Q_1+Q_2$. Тогда для модели Курно первая функция цен (2) будет иметь вид

$$p_0(Q) = p_0^{(s)} + \frac{\alpha_s}{Q_1+Q_2},\ Q_i \in [Q_{s-1}, Q_s],\ s = \overline{1,k},\ i = 1,2.$$

При этом функции прибыли примут вид

$$\Pi_i(Q_i) = p_0 Q_i - cQ_i = p_0^{(s)} Q_i + \frac{\alpha_s Q_i}{Q_1+Q_2} - cQ_i,\ Q_i \in [Q_{s-1}, Q_s],\ s = \overline{1,k},\ i = 1,2. \quad (3)$$

В силу того, что функции имеют кусочную структуру, будем рассматривать оптимальные значения выпуска, попадающее либо внутрь отрезка, либо попадающее на концы отрезка. Сначала рассмотрим более простой случай, когда существует $s_0 \in \{1,\ldots,k\}$, что $Q_i^0 \in (Q_{s_0-1}, Q_{s_0}),\ i = 1,2.$ В этом случае оптимальный выпуск каждой фирмы найдем из уравнений:

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i)}{\partial Q_i} = p_0^{(s_0)} + \frac{\alpha_{s_0} Q_j}{(Q_1+Q_2)^2} - c_i = 0,\ Q_i \in (Q_{s_0-1}, Q_{s_0}),\ \ i,j = 1,2.$$

Решая данную систему получим:

$$Q_1^0 = Q_2^0 = \frac{\alpha_{s_0}}{4(c - p_0^{(s_0)})},\ Q^0 = Q_1^0 + Q_2^0 = \frac{\alpha_{s_0}}{2(c - p_0^{(s_0)})},\ p_0^0 = p_0^{(s_0)} + \frac{\alpha_{s_0}}{Q^0} = 2c - p_0^{(s_0)}.$$

Обратимся к более сложной ситуации, когда оптимальный выпуск попадает на границу какого-либо отрезка, т.е. существует $s_0 \in \{1,\ldots,k\}$, что $Q_i^0 = Q_{s_0},\ i = 1,2.$

В таком случае классическая производная для функций прибыли (3) не существует в точке Q_{s_0}. Однако согласно теории выпуклого анализа [3] существует обобщенная производная (суперградиент) $M^*\Pi_i(Q_{s_0})$ (некоторое выпуклое компактное множество), причем, если Q_{s_0} – оптимальный выпуск, то согласно условиям оптимальности существует $M^0\Pi_i(Q_{s_0}) \in M^*\Pi_i(Q_{s_0})$, причем $M^0\Pi_i(Q_{s_0}) = 0,\quad i = 1,2.$ Другими словами, $\exists\ \beta_1, \beta_2 \ge 0,\ \beta_1 + \beta_2 = 1,$ что выполняются условия

$$M^0\Pi_i(Q_i) = (\beta_1 p_0^{(s_0)} + \beta_2 p_0^{(s_0+1)}) + \frac{(\beta_1\alpha_{s_0} + \beta_2\alpha_{s_0+1})Q_j}{(Q_1+Q_2)^2} - c_i = 0, \quad i, j = 1,2, i \neq j.$$

Решая данную систему, получим, что

$$Q_1^0 = Q_2^0 = \frac{\beta_1\alpha_{s_0} + \beta_2\alpha_{s_0+1}}{4(c - (\beta_1 p_0^{(s_0)} + \beta_2 p_0^{(s_0+1)}))}, \; Q^0 = Q_1^0 + Q_2^0 = \frac{\beta_1\alpha_{s_0} + \beta_2\alpha_{s_0+1}}{2(c - (\beta_1 p_0^{(s_0)} + \beta_2 p_0^{(s_0+1)}))}.$$

Следует отметить, что можно рассматривать и более сложные ситуации, в частности, когда предельные издержки тоже не являются линейными функциями (см. [2]). Этот случай также исследован. Однако из-за ограниченности объема статьи результаты здесь не приводятся.

Библиографические ссылки

1. *Cournot A.* Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris, 1938.

2. *Альсевич В. В.* Введение в математическую экономику. Конструктивная теория: Учебное пособие. М.: ЛЕНАНД, 2021.

3. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.