

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

А. Д. Петько

*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Беларусь, frp.petko@bsu.by*

Научный руководитель — Е. С. Чеб, кандидат физико-математических наук, доцент

Данная работа исследует применимость вейвлет-преобразований как инструмента для работы с временными рядами. Исследуется возможность применения вейвлетов для очистки временного ряда от шума и предсказания будущих значений временного ряда.

Дадзеная праца даследуе дастасавальнасць вейвлет-пераўтварэнняў як прылады для працы з часавымі шэрагамі. Даследуецца магчымасць ужывання вейвлетаў для ачысткі часовага шэрагу ад шуму і прадказання будучых значэнняў часовага шэрагу.

Ключевые слова: дискретное вейвлет-преобразование, кратномасштабный анализ, нейронные сети, LSTM, WNN.

В мире обработки сигналов и анализа данных возникает необходимость в методах, способных обеспечить эффективную и точную локализацию как во временной, так и в частотной областях. Преобразование Фурье, несомненно, является мощным инструментом для анализа сигналов, но его недостатком является невозможность точной локализации сигналов во времени из-за неразрешимости во временной области. Эта проблема, известная как “размытость” в преобразовании Фурье, приводит к потребности в разработке методов, которые могут обеспечить более точную частотно-временную локализацию.

Принцип Гейзенберга формализует эту проблему, утверждая, что нельзя одновременно достичь точной локализации во времени и частоте для сигнала. В преобразовании Фурье точность локализации во времени обратно пропорциональна точности в частотной области, и наоборот. Это ограничение стимулировало развитие альтернативных методов анализа, включая вейвлет-анализ.

Вейвлет-анализ представляет собой метод, который позволяет анализировать сигналы на различных временных и частотных масштабах с высокой точностью локализации. Он использует вейвлеты -- наборы функций, которые могут быть масштабированы и сдвинуты, чтобы анализировать сигналы с различными временными и частотными характеристиками. Применение вейвлет-анализа вместо преобразования Фурье позволяет более точно определять временные характеристики сигнала, сохраняя при этом хорошее разрешение в частотной области.

Вейвлет функция должна иметь среднее нуль, а также единичную норму.

Функцию $\psi(x)$ называют материнским вейвлетом, а функции вида $\psi_{a,b}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$, $m, n \in \mathbb{Z}, a_0 > 1, b_0 \neq 0$ — дочерними вейвлетами.

Вейвлеты можно успешно использовать для очистки сигнала от шума, так как разложение по вейвлетному базису позволяет убрать самые высокочастотные компоненты временного ряда, например, имеющие периодичность в 2 отсчета. Для этого используется алгоритм пороговой обработки, состоящий из трех шагов

1. Вычисление дискретного вейвлет преобразования для зашумленных данных.
2. Пороговая обработка полученных коэффициентов.
3. Вычисление обратного дискретного преобразования вейвлета для получения очищенного от шума сигнала.

При проведении эксперимента по очистке временного ряда от шума использовался искусственно зашумленный временной ряд индекса S&P500, в качестве метрики для оценки очистки использовалось отношение пиковое отношение сигнала к шуму (PSNR). Результаты очистки при различных порогах приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значение метрики при различных порогах очистки

Порог	PSNR
5	47.8
10	47.1
15	46.5
20	46
25	45.5
30	45.1
35	44.7
40	44.4
28	48.7

В таблице жирным выделен универсальный порог, который лучше всего подходит для очистки временных рядов при условии наличия в них белого шума.

Немаловажной задачей в области анализа временных рядов является предсказание нескольких будущих значений временного ряда, применяемая, например, в метеорологии, транспорте, финансах.

В данной работе сравнивается качество предсказания временного ряда классических нейронных сетей и некоторых гибридов, основанных как на классических методах, так и на инструментах вейвлет-анализа.

Одной из чисто вейвлетных моделей является вейвлетная нейронная сеть (WNN), которая представляет собой трехслойную нейронную сеть с одним скрытым слоем, математическая модель которой задается по формуле

$$\bar{f}(x) = b + \sum_{j=1}^{\lambda} w_j^{[2]} \prod_{i=1}^m \psi \left(\frac{x_i - w_{(\xi)ij}^{[1]}}{w_{(\varsigma)ij}^{[1]}} \right) + \sum_{i=1}^m w_i^{[0]} x_i ,$$

Для сравнения выбрана классическая рекуррентная нейронная сеть длинной краткосрочной памяти (LSTM), выходы которой подаются на вход линейному слою для трансляции в нужное по размерности пространство, а также две гибридные модели, одна из которых делит входной временной ряд на несколько детализирующих и аппроксимирующий коэффициенты и предсказывает каждую из этих компонент (LSTM + MRA), а другая — LSTM модель, однако выход её блока подается на вход вейвлетной нейронной сети WNN.

В качестве метрик для сравнения моделей были выбраны корень среднеквадратичного отклонения (RMSE), среднее абсолютное отклонение в процентах (MAPE). Данные были поделены на обучающую и тестовую выборку в пропорциях 4 : 1. Для обучения произведена минимаксная нормализация входных данных в отрезок [0; 1]. Длина последовательности, используемая в качестве входа в нейронную сеть, — 10, что соответствует данным за предыдущие 10 дней.

Результаты работы моделей на тестовой выборке продемонстрированы в табл. 2.

Таблица 2

Результаты моделей для предсказания

Модель	Количество параметров	MAPE	RMSE
WNN	2500	1.14	59.89
LSTM	37000	1.25	64.66
LSTM + MRA	1110000	0.98	54.02
LSTM + WNN	35000	1.01	53.79

Предсказания двух лучших моделей показаны на рисунке.



Предсказания LSTM+MRA и LSTM+WNN моделей

Библиографические ссылки

1. Кулаичев А. П. Критика вейвлет анализа ЭЭГ / А. П. Кулаичев // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. Изд. 12, № 1. с. 47-57.
2. Vogl, M. Forecasting performance of wavelet neural networks and other neural network topologies: A comparative study based on financial market data sets / M. Vogl, P. G. Rotzel, S. Homes // Machine Learning with Applications. 2022. Vol.8. P. 100302.
3. Егорова, Е. В. Методы повышения эффективности вейвлет-преобразований при обработке, сжатии и восстановления радиотехнических сигналов. / Е. В. Егорова, М. Х. Аксяитов, А. Н. Рыбаков. — Тамбов: Консалтинговая компания Юком. 2019. 84 с.
4. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

5. Кандидов, В. П. Дискретное преобразование Фурье. / В. П. Кандидов и др. — Москва: физический факультет МГУ. 2019. 88 с.
6. Mallat S. G. Multiresolution Approximations and Wavelet of orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$ / S. G. Mallat // Transactions of the American Mathematical Society. 1989. Vol. 315, № 1. P. 69-87.
7. Mallat, S. G. A wavelet tour of signal processing / S. G. Mallat. — Academic Press, 1999. Vol 2. 629p.
8. Percival, D. B. Wavelet Methods for Time Series Analysis / D.B. Percival, A.T. Walden. — Cambridge University Press, 2000. 629 p.
9. Vettirli, M. Wavelets and Filter Banks: Theory and Design / M. Vettirli // IEEE Transactions on Signal Processing. 1992. Vol. 40, №9. P. 2207-2232
10. Torrence, C. A Practical Guide to Wavelet Analysis / C. Torrence, G.P. Compo // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79, № 1. P. 61-78.
11. Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев — Москва: Издательство «ДМК Пресс», 2014. 628 с.