

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТИПА ЛАГРАНЖА

Э. В. Метельская

*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Беларусь, emi-metels@yandex.ru
Научный руководитель — В. В. Альсевич, кандидат физико-математических наук,
профессор*

В статье приведены условия оптимальности для минимаксной задачи типа Лагранжа в классах кусочно-непрерывных и дискретных управлений.

Ключевые слова: минимаксная задача; условия оптимальности.

Задача управления с минимаксным функционалом представляет собой одну из негладких задач в теории управления. В предлагаемой статье указанная задача рассмотрена в контексте класса не только кусочно-непрерывных, но и дискретных управлений. Дискретные управления широко используются в различных областях, таких как робототехника, автоматизация производства, управление технологическими процессами и другие.

Как известно, основным результатом классической теории оптимального управления является принцип максимума Л. С. Понтрягина [1]. Однако, как правило, задачи рассматриваются в классах кусочно-непрерывных или измеримых управляющих воздействий.

В последние годы внимание многих исследователей обращено на оптимизацию непрерывных систем управления в классе дискретных управляющих воздействий. Отличие состоит в том, что их переключение может происходить не в любой момент времени, как у кусочно-непрерывных, а только в заданные моменты. С практической точки зрения такие управляющие воздействия более реальны. Тем более, что при численной реализации на вычислительных устройствах непрерывная задача сводится к дискретной. При этом может искажаться истинный результат.

Для задачи терминального управления обыкновенными системами в классе дискретных управлений в [2] доказано условие оптимальности в виде принципа квазимаксима. Для задачи со специальной правой частью системы управления в [2] доказано условие оптимальности в виде дискретного принципа максимума.

Следует отметить, что исследование задач оптимального управления в классе дискретных управлений было инициировано Р.Ф. Габасовым и Ф.М. Кирилловой. И оба указанные выше результаты были получены при

их непосредственном участии. Впоследствии дискретный принцип максимума был доказан для других задач.

В предлагаемой статье для рассматриваемой минимаксной задачи предварительно получены условия оптимальности в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий, а затем получены результаты в классе дискретных управлений.

Пусть на траекториях n -мерной системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad t \in T = [0, t^*], \quad (1)$$

минимизируется функционал

$$J(u) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} g(x(t), u(t), y) dt. \quad (2)$$

Здесь x – n -вектор состояния системы, u – r -вектор управления, t – время, y – некоторый m -мерный параметр с областью задания Y , где Y – конечное множество векторов. Предполагается, что функции f , g , $\partial f / \partial x$, $\partial g / \partial x$ непрерывны по своим аргументам, момент t^* фиксирован. В качестве допустимых управлений рассматриваются кусочно-непрерывные r -мерные функции со значениями из заданного множества U :

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \quad (3)$$

В дальнейшем предполагается, что все вектора понимаются как вектор-столбцы, ' (штрих) – знак транспонирования.

Сведя сначала задачу (1)–(3) к эквивалентной минимаксной задаче терминального управления и доказав условия оптимальности для этой задачи, которые здесь не приводятся, запишем эти условия для исходной задачи (1)–(3).

Считаем, что в задаче (1)–(3) существует управление $u^0(t)$ и соответствующее семейство решений $x^0(t, y)$, $y \in Y \in \mathbb{R}^m$, системы (1), доставляющие минимум функционалу (2). Введем множество

$$Y^0 = \{y \in Y : \int_0^{t^*} g(x^0(t), u^0(t), y) dt = \max_{\bar{y} \in Y} \int_0^{t^*} g(x^0(t), u^0(t), \bar{y}) dt\}.$$

Очевидно, Y^0 – конечное множество, состоящее из k векторов. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Оптимальное управление $u^0(t)$ в задаче (1)–(3) удовлетворяет при всех $t \in T$ условию*

$$\max_{u \in U} \min_{y \in Y^0} \Delta_u H(x^0(t), \psi^0(t, y), u^0(t), y) = 0,$$

где $H(x, \psi, u, y) = \psi' f(x, u) - g(x, u, y)$, $\Delta_u H(x^0, \psi^0, u^0, y) = H(x^0, \psi^0, u, y) - H(x^0, \psi^0, u^0, y)$, $\psi^0(t, y)$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t))}{\partial x} \psi + \frac{\partial g(x^0(t), u^0(t), y)}{\partial x}, t \in T, \psi(t^*, y) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь задачу вида (1)–(3) в классе дискретных управлений.

Управляющее воздействие $u(t) \in U$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(t) \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h[, \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, t^* - h\},$$

где $h = t^* / N$, N – натуральное число.

В отличие от задачи (1)–(3) рассмотрим ее измененную форму. В классе дискретных управляющих воздействий минимизируется функционал

$$J(u) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} (g_0(x(t)) + d'(x(t), y)u(t))dt \quad (5)$$

на траекториях системы

$$\dot{x} = f_0(x) + B(x)u, x(0) = x_0, t \in T = [0, t^*], \quad (6)$$

при условии (3) на управление, в котором U – выпуклый компакт. В уравнении (6) $f_0(x)$ – n -мерная вектор-функция, $B(x)$ – $(n \times r)$ -матричная функция, в (5) $g_0(x)$ – скалярная функция, $d(x, y)$ – r -мерная вектор-функция.

Для задачи (3), (5), (6) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (дискретный принцип минимакса). *Оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, вместе с соответствующими решениями $x^0(t)$, $\psi^0(t, y)$, $t \in T$, систем (6) и (4), удовлетворяет условию минимакса*

$$\begin{aligned}
& \left(\min_{y \in Y^0} \int_t^{t+h} \left(\psi^{0'}(s, y) B(x^0(s)) - d'(x^0(s), y) \right) ds \right) u^0(t) = \\
& = \max_{u \in U} \left(\min_{y \in Y^0} \int_t^{t+h} \left(\psi^{0'}(s, y) B(x^0(s)) - d'(x^0(s), y) \right) ds \right) u, \quad t \in T_h.
\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что в уравнении (4) $f(x, u) = f_0(x) + B(x)u$, $g(x, u, y) = g_0(x) + d'(x, y)u$.

Поскольку Y^0 состоит из конечного числа векторов $y^{(i)}$, $i=1, \dots, k$, то существует набор чисел $\alpha_i \geq 0, i = \overline{1, k}$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, таких, что условие (7) равносильно соотношению

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \int_t^{t+h} \left(\psi^{0'}(s, y^{(i)}) B(x^0(s)) - d'(x^0(s), y^{(i)}) \right) ds \right) u^0(t) = \\
& = \max_{u \in U} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \int_t^{t+h} \left(\psi^{0'}(s, y^{(i)}) B(x^0(s)) - d'(x^0(s), y^{(i)}) \right) ds \right) u, \quad t \in T_h.
\end{aligned}$$

Библиографические ссылки

1. Понтрягин Л. С. [и др.] Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1983.
2. Габасов Р. [и др.] Методы оптимизации: учеб. пособие. Минск: Четыре четверти, 2011.