ИССЛЕДОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ УЛУЧШЕНИЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА В ГРАФАХ, ГДЕ РАССТОЯНИЕ ОБРАЗУЕТ МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

А. А. Костяной

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, kostianoy.andrey@gmail.com
Научный руководитель — В. М. Котов, доктор физико-математических наук, профессор

В данной работе мы сначала поставим задачу коммивояжера в метрическом пространстве и опишем способ ее решения с помощью алгоритма Кристофидеса. После чего рассмотрим несколько способов качественного улучшения маршрута, полученного в результате выполнения алгоритма. Произведём сравнение предложенных эвристик на тестовой выборке, состоящей из карт городов различных стран мира.

Ключевые слова: задача коммивояжера; алгоритм Кристофидеса; минимальное остовное дерево; максимальное паросочетание; Эйлеров цикл; Гамильтонов цикл; динамическое программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Задача коммивояжера — это классическая задача комбинаторной оптимизации, которая заключается в поиске самого выгодного маршрута для путешественника, проходящего через каждый город из заданного списка ровно один раз и возвращающегося в начальный город. Эта задача имеет множество приложений в реальной жизни и играет важную роль в различных областях: логистика и доставка; производство и распределение; телекоммуникации и т.д.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим набор из n городов, обозначенных символами $V = \{v_1, v_2, .., v_n\}$. Для каждой уникальной пары городов $(v_i v_j)$ задано расстояние d_{ij}, которое образует метрическое пространство.

Задача коммивояжера заключается в нахождении циклического маршрута C, проходящего через каждый город ровно один раз, с минимальной суммой расстояний между городами.

АЛГОРИТМ КРИСТОФИДЕСА

Алгоритм Кристофидеса — это алгоритм поиска приближенных решений задачи коммивояжера для случаев, когда расстояние образует метрическое пространство.

Неформально алгоритм можно описать следующим образом:

1. Создание минимального остовного дерева (MST)
2. Нахождение вершин нечетной степени
3. Построение минимального паросочетания
4. Объединение MST и паросочетания
5. Нахождение эйлерова цикла в мультиграфе
6. Преобразование эйлерова цикла в гамильтонов цикл

Этот приближенный алгоритм гарантирует, что найденное решение находится в пределах 3/2 от длины оптимального решения.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВЕТВЛЕНИЙ

Для применения этой оптимизации рассмотрим путь, который был найден алгоритмом Кристофидеса. Разобьем его на цепочки из 10-15 городов. На каждой такой цепочке можно найти оптимальный по длине маршрут, в котором стартовый и конечный города не изменились. Сделать это можно с помощью экспоненциального решения задачи коммивояжера, например, используя метод динамического программирования. Время работы данного алгоритма составит $O(\frac{n}{k} \cdot 2^k \cdot k^2)$, где n – количество городов в графе, k – длины цепочек.

Также применим метод динамического программирования и для выбора длин цепочек. А именно: пусть f_i – это оптимальная стоимость маршрута коммивояжера, если мы оптимизировали локальные ветвления только для первых i городов. Тогда используя вычисленный f_i можно попытаться релаксировать ответ для f_{i+j}, по формуле:

$$f_{i+j} = min(f_{i+j}, f_i + exp_{i,j}),$$

где j – это длина цепочки, $exp_{i,j}$ – это оптимальная стоимость цепочки длины j, которая начинается из города i.

СВЕДЕНИЕ К ИТЕРАЦИОННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Серьезным преимуществом предыдущего подхода было получение оптимальных подотрезков маршрута. Однако оптимизация была применима только для отрезков небольшой длины.

Теперь же подойдем к оптимизации с другой стороны: будем оптимизировать не короткие подотрезки маршрута, а расположение длинных подотрезков относительно друг друга.

Для этого разобьем маршрут на 10-20 длинных цепей городов случайным образом. Пусть S – множество ребер, которые соединяют соседние соседние города в полученных цепочках. Теперь запустим алгоритм Кристофидеса на нашем графе, но передадим ему на вход множество S. Ребра из этого множества потребуем включить в минимальное остовное дерево.

Полученный в результате выполнения измененного алгоритма Кристофидеса маршрут также подвергнем оптимизации локальных ветвлений. Из-за особенностей строения дерева, имеем небольшое количество вершин нечетной степени, следовательно, время вычисления совершенного паросочетания значительно сократится. Повторим данный процесс некоторое (заранее фиксированное) число итераций.

Отметим, что в результате выполнения нескольких итераций, мы могли найти локально оптимальное решение, которое невозможно улучшить лишь с использованием предложенных выше оптимизаций. В таком случае, можем изменить найденное решение, намеренно ухудшив его стоимость. Например, на каждой пятой итерации, можем случайным образом перестроить найденное MST. В результате итерации мы получим решение заведомо худшее, чем оптимальное из ранее найденных, но также оно теперь не является локальным оптимумом, и следующие итерации смогут привести нас к новым (возможно более оптимальным) решениям.

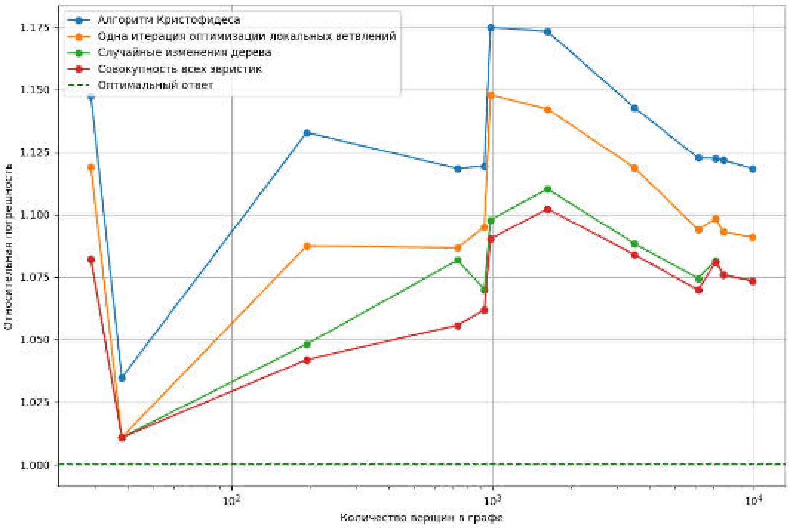
ТЕСТИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Для тестирования практических улучшений алгоритма Кристофидеса необходимо было собрать тестовую выборку. В качестве таковой были выбраны карты городов различных стран мира [1]. В выборке были представлены карты из десятков (Западная Сахара, Джибути), сотен (Катар, Уругвай) и тысяч городов (Япония, Греция). Итоговые результаты применения предложенных улучшений отображены на рисунке 1.

Отметим, что до применения каких-либо оптимизаций, маршруты, полученные в результате выполнения алгоритма Кристофидеса, имели в среднем стоимость на 11-18% дороже оптимальных маршрутов коммивояжера.

После же применения 100 итераций оптимизаций длинных цепочек, в совокупности с оптимизацией локальных ветвлений, полученные маршруты стоили в среднем на 5-12% дороже оптимальных маршрутов коммивояжера. Оптимизация со случайными изменениями MST улучшений не привнесла.

Наиболее оптимальные маршруты коммивояжера, которые были получены объединением всех подходов с различным числом итераций, стоили в среднем на 5-10% дороже оптимальных маршрутов коммивояжера.



Отношение длин найденных решений к оптимальным,
после применения предложенных улучшений

Библиографические ссылки

1. William Cook. National traveling salesman problems [Electronic resource]. URL: https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/world/countries.html. Date of access: 19.06.2024.