ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ТИМОШЕНКО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ УЛЬТРАТОНКОЙ ПОЛОСЫ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Нгуен Ле Динь

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, dinhnguyen081017@gmail.com
Научный руководитель – Г. И. Михасёв, доктор физико-математических наук, профессор

Рассмотрим ультратонкую упругую изотропную пластину. На основе теории поверхностной упругости Гуртина-Мурдоха. Выведите уравнения типа Тимошенка, учитывающее поперечные сдвиги с большими остаточными напряжениями или сильными инерционными воздействиями на поверхности.

Ключевые слова: Ультратонкая изотропная эластичная пластина; упругости Гуртина-Мурдоха; поперечные сдвиги; уравнение типа Тимошенка.

ВВЕДЕНИЕ

Для наномасштабных моделей полос, пластин и оболочек учитываются поверхностные эффекты. На основе гипотезы Кирхгофа — длинноволновой модели пластин и полос с высокими контрастными коэффициентами упругости [1,2] — одно из уравнений предполагает линейное распределение нормальных напряжений по толщине пластины с учетом их наличия на натуральные поверхности. Авторы также вывели уравнения, соответствующие теории первого порядка типа Миндлина, учитывающие как объемный сдвиг, так и поверхностное напряжение. Кубические уравнения модифицированы кубическим распределением касательного напряжения по толщине пластины с учетом поверхностных эффектов. Целью данной работы является вывод дифференциальных уравнений типа Тимошенко с учетом поверхностных эффектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возьмем ультратонкую упругую изотропную пластину с параметрами λ, μ и ρ, рассмотрим область $A = \left\{0 \le x_1 \le l, 0 \le x_2 \le h, \left|x_3\right| \le \infty\right\}$. Лицевые поверхности пластинки покрыты нанопленками. Согласно теории поверхностной упругости Гуртина-Мурдоха, имеем остаточное напряжение $s_0^{\pm}$, упругими константами $\lambda_0^{\pm}, \mu_0^{\pm}$ и $\rho_0^{\pm}$. Знаки «+» и «-» соответствуют верхней и нижней поверхности пластины. Поверхностная сила, действующая на пластину $Q^{\pm} = \left(q_1^{\pm}, q_2^{\pm}, 0\right)$, компоненты которых суть функции координаты x_1 и времени t. Предположим, что плоское деформированное состояние с вектором смещения $U = \{U_1, U_2, 0\}$, где $U_1 = U_1\{x_1, x_2, t\}$ и $U_2 = U_2\{x_1, x_2, t\}$. Заменим пластину полоской толщины h и конечной длины (временно называемой полосой-балкой). Компоненты тензоров напряжений и линейных деформаций, соответственно $\hat{\sigma}_{\text{ij}}$ и $\hat{e}_{\text{ij}}$, $i, j = 1,2$ и $s_{11}^{\pm}, s_{12}^{\pm}$ компоненты поверхностных напряжений на поверхностях.

Уравнения движения упругой изотропной полосы-балки

$$\hat{\sigma}_{\text{ij,j}} - \rho \ddot{U}_i = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ij}} = \lambda \hat{e}_{kk}\delta_{\text{ij}} + 2\mu \hat{e}_{\text{ij}}, \quad \hat{e}_{\text{ij}} = \frac{1}{2}\left(U_{\text{ij}} + U_{ji}\right), \quad i, j = 1,2. \tag{2}$$

В соответствии с теорией поверхностной упругости Гуртина Мурдоха [3], поверхностные напряжения определяются по формулам:

$$s_{11}^{\pm} = s_0^{\pm} + U_{1,1}^{\pm}\left(\lambda_0^{\pm} + 2\mu_0^{\pm}\right), \quad s_{12}^{\pm} = s_0^{\pm} U_{2,1}^{\pm}, \tag{3}$$

где производные компонент перемещений вычисляются на верхней и нижней границах полосы. Граничные условия на лицевых поверхностях. В рамках теории Гуртина-Мурдоха, данные условия при $x_2 = h$ и $x_2 = 0$ (соответственно знаки + и −) имеют:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{\pm} &= \pm s_{11,1}^{\pm} \pm \rho_0^{\pm} \ddot{U}_1^{\pm} + q_1^{\pm}, \\ \sigma_{22}^{\pm} &= \pm s_{12,1}^{\pm} \pm \rho_0^{\pm} \ddot{U}_2^{\pm} + q_2^{\pm}. \end{aligned} \tag{4}$$

Изучите длинноволновые колебания/деформации с характерной длиной волны L, так что $\varepsilon = \dfrac{h}{L}$ — малый безразмерный параметр со следующими асимптотическими оценками:

$$\frac{\lambda_0^{\pm} + 2\mu_0^{\pm}}{EL} = \varepsilon^{\alpha_1}\kappa_1^{\pm}, \quad \frac{s_0^{\pm}}{El} = \varepsilon^{\alpha_2}\kappa_2^{\pm}, \quad \frac{\rho_0^{\pm}}{\rho L} = \varepsilon^{\alpha_3}\kappa_3^{\pm}, \quad \alpha_k > 0, \kappa_k : 1, \tag{5}$$

где E - модуль Юнга материала полосы-балки. Параметры α_k могут принимать различные положительные значения в зависимости от механических свойств материала в объеме (в случае отсутствия нанопокрытия) и нанопленки, толщины покрытия, а также величины остаточного напряжения. Для свободной поверхности железа в зависимости от выбора параметра $\varepsilon = \dfrac{h}{L}$ и в отсутствие остаточного напряжения, можно принять $\alpha_1 = 3, \alpha_3 = 1$. Для железной нанопленки на стеклянной подложке $\alpha_1 = \alpha_3 = 3$. Рассмотрим два условия $\alpha_k = 3, \quad k = 1,2,3$ наличие больших остаточных напряжений и $\alpha_1 = 3, \quad b_0^{\pm} = 0, \quad \alpha_3 = 1$ сильные инерционные эффекты на свободной поверхности.

$$
\begin{gathered}
\left\{x_1, x_2, \hat{t}\right\} = \left\{lx, hy, \omega_*^{-1}, t\right\}, \quad \omega_*^2 = \frac{\varepsilon^4 E}{h^4 \rho}, \quad q_1^{\pm} = \varepsilon E S^{\pm}, \quad q_2^{\pm} = E q^{\pm}, \\
\left\{U_1, U_2\right\} = h\left\{\varepsilon^{-3} u, \varepsilon^{-4} w\right\}, \quad \left\{\sigma_{12}, \sigma_{22}\right\} = E\left\{\varepsilon^{-1} \tau, \sigma\right\}.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Выполненное в (6) масштабирование компонент безразмерных вектора перемещений и тензора напряжений соответствует длинноволновой деформации полосы-балки. Из (6), (1) и (2) получим:

$$
\begin{gathered}
w_y = -\varepsilon^2 c_{\upsilon} u_x + \varepsilon^4 c_3 \sigma, \quad u_y = -w_x + \varepsilon^2 c_g \tau, \\
\tau_y = -c_0 u_{xx} - \varepsilon^2 c_{\upsilon} \sigma_x + \varepsilon^2 u_{tt}, \quad \sigma_y = -\tau_x + w_{tt},
\end{gathered} \tag{7}
$$

где

$$
c_0 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{E(\lambda + 2\mu)}, \quad c_{\upsilon} = \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)}, \quad c_g = \frac{E}{\mu}, \quad c_3 = \frac{E}{(\lambda + 2\mu)}. \tag{8}
$$

Из (4) рассмотрим первое и второе граничные условия, соответственно полученные:

$$
\begin{gathered}
\tau^{\pm} = \pm\varepsilon^2\left(\kappa_1^{\pm} u_{xx} \pm S^{\pm} - \varepsilon^2 \kappa_3^{\pm} u_{tt}\right), \\
\sigma^{\pm} = \pm\left(\kappa_2^{\pm} w_{xx} \pm q^{\pm}\right) \mp \varepsilon^2 \kappa_3^{\pm} w_{tt},
\end{gathered} \tag{9}
$$

$$\begin{aligned}&\tau^{\pm} = \pm\varepsilon^2\left(\kappa_1^{\pm}u_{xx} \pm S^{\pm} - \kappa_3^{\pm}u_{tt}\right),\\ &\sigma^{\pm} = q^{\pm}\ \mathrm{m}\kappa_3^{\pm}w_{tt},\end{aligned} \tag{10}$$

Опуская интегрирования краевой задачи, выпишем уравнения, позволяющие найти поправки к компонентам вектора перемещения и тензора напряжений. В первое случае получаем поправки к перемещениям:

$$\begin{aligned}&w_2 = \frac{1}{2}c_{\upsilon}\left(y^2 - y\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + w_{20}\left(x,t\right) - c_{\upsilon}a_1\left(t\right)y,\\ &u_2 = \frac{1}{12}c_4\left(2y^3 - 3y^2\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - y\frac{\partial w_{20}}{\partial x} + u_{20}\left(x,t\right),\end{aligned} \tag{11}$$

Нормальное перемещение срединной линии y=1/2 полосы, с учетом (11), получаем:

$$W = w_0 + \varepsilon^2\left(w_{20} - \frac{1}{2}c_{\upsilon}a_1 - \frac{c_{\upsilon}}{8}w_{0,xx}\right). \tag{12}$$

Рассмотрим формулу (12), где k = 1; 2 для обоих граничных условий, полученных:

$$I_n\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \delta_{1n}\kappa_2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + J_n\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + O\left(\varepsilon^4\right) = F\left(x,t\right), \quad n = 1,2, \tag{13}$$

где δ_{1n} - символ Кронекера

$$\begin{aligned}&I_1 = \frac{c_0}{12} + \varepsilon^2\left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2}{5}\right), \quad I_2 = \frac{1}{12}\left(c_0 + 3\varepsilon^2\kappa_1\right),\\ &J_1 = 1 + \varepsilon^2\left[\kappa_3 - \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right], \quad J_2 = 1 + \kappa_3 - \varepsilon^2\left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12} + \frac{9\kappa_3}{20}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2},\\ &F\left(x,t\right) = F_0 - \varepsilon^2\left\{\left(\frac{1}{5} + \frac{c_{\upsilon}}{8}\right)\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(S^+ + S^-\right) - \frac{c_0 - c_{\upsilon}}{2}\frac{d^2 a_1}{dt^2}\right\}.\end{aligned}$$

I_n - приведенная или эффективная безразмерная жесткость на изгиб, J_n - так называемый модифицированный оператор инерции, а F(x; t) - приведенная к срединной линии полосы-балки безразмерная поперечная сила. Если принять $\kappa_k = 0$ для всех k = 1; 2; 3, то оба уравнения (13) вырождаются в одно уравнение типа Тимошенко, учитывающее поперечные сдвиги. При n = 1 получаем уравнение, которое учитывает большие остаточные напряжения на лицевых поверхностях, а при n = 2 имеем уравнение, учитывающее сильные инерционный эффекты на данных поверхностях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена ультратонкая упругая изотропная пластина, Лицевые поверхности пластинки покрыты нанопленками. Согласно теории поверхностной упругости Гуртина-Мурдоха, выведено дифференциальное уравнение типа Тимошенко для анализа вынужденных изгибных колебаний под действием не только нормальной нагрузки, но и при действии переменных поверхностных касательных сил, а также слабых нестационарных сил, приложенных к торцам полосы-балки.

Библиографические ссылки

1. *Mikhasev G.*, *N. Le*. Asymptotically Correct Analytical Model for Flexural Response of a Two-Layer Strip with Contrast Elastic Constants // In: Altenbach, H., Berezovski, A., dell'Isola, F., Porubov, A. (eds) Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Materials, vol 170. - 2023.- Cham: Springer. – P. 517-540.

2. *Mikhasev G.* Asymptotic long-wave model for a high-contrast two-layered elastic plate // Mathematics and Mechanics of Solids. 2024. URL: https://doi.org/10.1177/10812865231215294 (date of access: 18.02.2024).

3. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* Surface stress in solids // International Journal of Solids and Structures. 1978. Vol. 14 (6). p. 431–440.