

# НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБР РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

И. Л. Люксембург

*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск, Беларусь, josef2016kolbasidze@mail.ru  
Научный руководитель — А.Б. Антонец, доктор физико-математических  
наук, профессор*

Объектом исследования является алгебра  $R[0; 1]$  всех комплекснозначных функций, которые определены на сегменте  $[0; 1]$ , непрерывны слева в каждой точке, непрерывны в 0 и имеют разве лишь конечные разрывы, операции сложения, произведения, а также умножения на скаляр остаются стандартными, а норму определим следующим образом:  $\|x\| = \sup_{t \in [0; 1]} |x(t)|$ . Согласно общей теории коммутативных банаховых алгебр, эта алгебра изоморфна алгебре всех непрерывных функций на вспомогательном топологическом пространстве, которое является пространством максимальных идеалов этой алгебры. Целью работы является построение этого пространства в явном виде.

В результате исследования обнаружено, что возникшее здесь пространство  $T$  имеет интересную топологическую структуру и изучалось ранее с разных точек зрения, впервые оно было описано Александровым и Урысоном в их классической работе[4] и в последствии вошло в историю под названием "две стрелки".

**Ключевые слова:** банахова алгебра; пространство максимальных идеалов; пространство "две стрелки"; теорема Гельфанда-Мазура; канонический гомоморфизм; алгебра разрывных функций.

**Определение 1.** Банаховой алгеброй (нормированным кольцом) называется полное нормированное векторное пространство над полем комплексных чисел, с ассоциативным умножением, дистрибутивным относительно сложения, перестановочным с умножением на комплексные числа и непрерывным по каждому множителю.

Поскольку банахова алгебра является кольцом относительно определенных на ней операций, мы можем пользоваться всеми ее алгебраическими свойствами, в данной статье нас будут особенно интересовать максимальные идеалы банаховых алгебр. Также в дальнейшем мы будем рассматривать только коммутативные алгебры с единицей.

Пусть в банаховой алгебре  $A$  имеется максимальный идеал  $M$ , факторкольцо  $A$  по  $M$  будем обозначать  $A/M$ , поскольку идеал максимален,  $A/M$  — поле, по теореме Гельфанда–Мазура это поле изоморфно  $\mathbb{C}$ . Введем теперь

для каждого элемента  $x \in A$  функцию, определенную на множестве максимальных идеалов  $M(A)$ . Положим  $x(M) = [r] \in A \setminus M : x \in [r]$ . Алгебру таких функций  $x : M(A) \rightarrow C$  обозначают  $\hat{A}$ . Отображение  $A$  в  $\hat{A}$ , которое каждому элементу  $x \in A$  ставит в соответствие  $x(M) \in \hat{A}$  называется **каноническим гомоморфизмом**[1].

На множестве максимальных идеалов вводится топология таким образом, чтобы определенные выше функции были непрерывны:

**Определение 2.** Окрестностью максимального идеала  $M_0$  будем называть множество  $W(M_0)[x_1, \dots, x_n; \varepsilon] = \{M \in M(A) \mid |x_1(M_0) - x_1(M)| < \varepsilon \wedge \dots \wedge |x_n(M_0) - x_n(M)| < \varepsilon, 0 < \varepsilon \in R\}$

Определенная выше топология превращает  $M(A)$  в компактное хаусдорфово топологическое пространство[1].

Посмотрим как введенные выше понятия реализуются в конкретных банаховых алгебрах. Пусть  $C[0; 1]$  – множество всех непрерывных комплекснозначных функций с естественными операциями и равномерной нормой, оно очевидно является коммутативной банаховой алгеброй с единицей  $e = x(t) \equiv 1$ . Примерами идеалов этой алгебры могут служить множества функций, обращающихся в нуль на некотором подмножестве  $U \subset [0; 1]$ , обозначим такой идеал  $I_U$ . В частности, если  $U \neq \emptyset$ ,  $I_U$  будет собственным, а если  $V \subset U \subset [0; 1]$ , то  $I_U \subset I_V$ . Интерес представляет случай, когда  $U$  состоит из единственной точки  $\tau \in [0; 1]$ , такой идеал обозначают  $M_\tau$ .

**Утверждение 1.** Каждый максимальный идеал кольца  $C[0; 1]$  есть  $M_\tau$  – множество функций обращающихся в нуль в некоторой фиксированной точке  $\tau \in [0; 1]$ .

Доказательство этого факта хорошо известно, оно приведено в [1].

Рассмотрим теперь канонический гомоморфизм  $C[0; 1]$  в  $\widehat{C[0; 1]}$ . Пусть

$x(M_\tau) = \lambda$ , тогда  $(x - e\lambda) \in M_\tau \Rightarrow (x - e\lambda)(\tau) = 0 \Rightarrow x(\tau) = \lambda$ . Значит  $x(M_\tau) = x(\tau)$ , не трудно убедиться и в обратном, если  $x(\tau) = \lambda$ , то и  $x(M_\tau) = \lambda$ . Теперь опишем топологию на  $M(C[0; 1])$ , имея ввиду только что полученные факты, будем отождествлять  $M_\tau$  и  $\tau$ ,  $x(M_\tau)$  и  $x(\tau)$ . Учитывая это, запишем введенное ранее определение окрестности:

$W(\tau_0)[x_1, \dots, x_n; \varepsilon] = \{\tau \in [0; 1] \mid |x_1(\tau_0) - x_1(\tau)| < \varepsilon \wedge \dots \wedge |x_n(\tau_0) - x_n(\tau)| < \varepsilon, 0 < \varepsilon \in R\}$

Такая система окрестностей задает на  $[0; 1]$  стандартную топологию. Таким образом, мы имеем следующие факты: пространство максимальных идеалов  $C[0; 1]$  гомеоморфно области определения функций из  $C[0; 1]$ , а канонический гомоморфизм есть изоморфизм алгебр  $C[0; 1]$  и  $\widehat{C[0; 1]}$ .

Заметим, что пространство максимальных идеалов алгебры, состоящей из функций, часто называют их "естественной областью определения" и совершенно ожидаемо, что для непрерывных функций на сегменте их естественной областью определения является этот сегмент.

Приступим к решению поставленной задачи, то есть построению естественной области определения  $R[0; 1]$ . По аналогии с предыдущим примером идеалы состоящие из функций, обращающихся в нуль в некоторой точке области определения, также останутся максимальными. Однако в этой алгебре возникают новые максимальные идеалы, состоящие из функций, предел которых справа в некоторой фиксированной точке сегмента равен нулю. Но доказательство того, что других максимальных идеалов нет, существенно сложнее чем в доказательстве утверждения 1. Поэтому привлечем для нашего исследования такое мощное орудие как порядок.

Пусть  $T = \{0, 1, (0; 1) \times \{0, 1\}\}$ . Введем на этом множестве порядок по правилам:

1)  $0 < t < 1 \forall t \in T$ .

2) Если  $t_1, t_2 \neq 0, 1$ ,  $t_1 = (x_1; y_1)$ ,  $t_2 = (x_2; y_2)$ , тогда  $t_1 > t_2$ , если  $x_1 > x_2$

или если  $x_1 = x_2$  и  $y_1 > y_2$ .

На  $T$  введем топологию индуцированную порядком и рассмотрим  $C(T)$  – алгебру непрерывных функций на  $T$  со стандартными операциями и равномерной нормой. Поскольку  $T$  имеет счетную базу в каждой своей точке, о непрерывности функции можно говорить на языке последовательностей. Каждая точка  $t \in L = (0; 1) \times \{0\} \sqcup \{1\}$  ( $t \in R = (0; 1) \times \{1\} \sqcup \{0\}$ ) имеет окрестность, такую, что все ее точки лежат слева (справа) от  $t$ , то есть меньше (больше)  $t$ . Таким образом справедливо:

**Утверждение 2.** Для того, чтобы функция была непрерывна на  $T$  необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева на  $L$  и непрерывна справа на  $R$ .

Более того, каждая точка  $t_1 = (x_1; 0) \in L \setminus \{1\}$  и каждая точка  $t_2 = (x_2; 1) \in R \setminus \{0\}$  имеют определяющую систему окрестностей вида:

$$U(t_1, \delta) = \{a \in T: (x_1 - \delta; 1) < a < (x_1; 1)\}$$

$$U(t_2, \delta) = \{a \in T: (x_2; 0) < a < (x_2 + \delta; 0)\}$$

Аналогично для 0 и 1:

$$U(0, \delta) = \{a \in T: a < (\delta; 0)\}$$

$$U(1, \delta) = \{a \in T: a > (1 - \delta; 1)\}$$

Кроме того, чем меньше  $\delta$  тем "меньше" и окрестность. Это позволяет нам сформулировать следующий критерий непрерывности функции на  $T$ :

**Теорема 1.**  $f \in C(T) \Leftrightarrow \forall t \in T \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall t' \in U(t, \delta) \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \varepsilon$

Пусть  $f^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ .

**Утверждение 3.** Для каждой  $f \in R[0; 1]$  и каждой  $\{x_n\}$  сходящейся слева к  $x_0$  верно:  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^+(x_k) = f(x_0)$ , и для каждой  $\{x_n\}$  сходящейся справа к  $x_0$  —  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^-(x_k) = f(x_0)$ .

**Доказательство.** Докажем утверждение для  $\{x_n\}$  сходящейся слева к  $x_0$ . Для каждого  $x_k \in \{x_n\}$  выберем  $x'_k$  так, чтобы  $|f^+(x_k) - f(x'_k)| < \frac{1}{k}$  и так, чтобы  $x_k < x'_k < x_0$ . Это возможно сделать ввиду того что  $f$  справа имеет конечный предел. По теореме о двух милиционерах  $\{x'_n\}$  сходится к  $x_0$ , более того сходится слева. Ввиду непрерывности слева  $f$ ,  $f(x'_k)$  сходится к  $f(x_0)$ . С другой стороны  $f^+(x_k) - f(x'_k)$  сходится к 0, значит и  $f^+(x_k)$  сходится к  $f(x_0)$ . Доказательство утверждения для  $\{x_n\}$ , сходящейся справа к  $x_0$ , проводится аналогично.

Итак, сформулируем основной результат:

**Теорема 2.** Отображение  $\varphi$ , которое каждой  $f \in R[0; 1]$  ставит в соответствие функцию  $\hat{f}$ , определенную на  $T$ , по правилам:

- 1)  $\hat{f}(0) = f(0)$
- 2)  $\hat{f}(1) = f(1)$
- 3)  $\hat{f}(x; 0) = f(x)$
- 4)  $\hat{f}(x; 1) = f^+(x)$

является изоморфизмом алгебр  $R[0; 1]$  и  $C(T)$ . Множество максимальных идеалов состоит из  $M_\tau$ , состоящих из функций, обращающихся в нуль в точке  $\tau$ , и идеалов  $M_\tau^+$ , состоящих из функций, предел которых справа в точке  $\tau$  равен нулю. Более того,  $M(R[0; 1])$  гомеоморфно пространству  $T$ .

**Доказательство** проведем в несколько этапов. Покажем сначала, что  $\varphi(f) \in C(T)$ .

**I.** Ввиду непрерывности слева  $f$  и по утверждению 3 имеем:

$$\forall x_0 \in [0; 1] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0: \forall x \in (x_0 - \delta_1; x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall x_0 \in [0; 1] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) \Rightarrow |f^+(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\varepsilon$

Из этого следует:

$$\forall t_0 \in L \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2): \forall t \in U(t_0, \delta) \Rightarrow |\hat{f}(t) - \hat{f}(t')| < \varepsilon$$

(1)

(1) означает непрерывность  $\hat{f} = \varphi(f)$  на  $L$ . Аналогично доказывается непрерывность  $\hat{f}$  на  $R$ , она следует из того, что  $f$  имеет конечный предел справа и утверждения 3.

**II.** Покажем, что  $\varphi$  — биекция. Инъективность этого отображения очевидна. Докажем что  $\varphi^{-1}(\hat{f}) \neq \emptyset$ . Требуемую  $f$ , такую что  $\varphi(f) = \hat{f}$  определим по правилам:

- 1)  $f(0) = \hat{f}(0)$
- 2)  $f(1) = \hat{f}(1)$
- 3)  $f(x) = \hat{f}(x; 0)$ , при  $x \neq 0, 1$ .

Покажем, что  $f \in R[0; 1]$ . Ввиду 3), непрерывность слева  $f$  означает:

$$\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |\hat{f}(x; 0) - \hat{f}(x_0; 0)| < \varepsilon \quad (2)$$

(2) выполнено по теореме 1. Непрерывность в 0 и 1, а также конечность предела справа доказывается аналогично. Таким образом, мы установили надъективность, а следовательно и биективность  $\varphi$ . Сохранение операций сложения, произведения, умножение на скаляр, а также сохранение нормы доказывается просто, поэтому не требует нашего внимания.

**III.** В работе [4] показано, что  $T$  компактно, поэтому каждый максимальный идеал кольца  $C(T)$  есть  $M_\tau$  — множество функций, обращающихся в нуль в некоторой фиксированной точке  $\tau \in T$ . Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство утверждения 1. Из этого факта, а также только что доказанного изоморфизма алгебр  $C(T)$  и  $R[0; 1]$ , следует: множество максимальных идеалов состоит из  $M_\tau$ , состоящих из функций, обращающихся в нуль в точке  $\tau$ , и идеалов  $M_\tau^+$ , состоящих из функций, предел которых справа в точке  $\tau$  равен нулю. Более того,  $M(R[0; 1])$  гомеоморфно пространству  $T$ . На этом доказательство теоремы 2 завершено.

Особые топологические свойства  $T$  описаны во многих классических книгах по топологии, в частности, работах [3] и [4] показано, что  $T$  — сепарабельно, не имеет счетной базы, является не диадическим компактом, вполне несвязно, совершенно нормально, но не метризуемо.

### Библиографические ссылки

1. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилев Г. Е. Коммутативные нормированные кольца: УМН, 1:2(12) 1946, 48–146.
2. Ленг С. Алгебра: Мир, М.: 1968, 564 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология: Мир, М.: 1986, 752 с.
4. Александров П. С., Урысон П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах: Наука, М.: 1971.