

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета
А.Д.Король

15 июля 2024 г.

Регистрационный № 2175/б.



ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование

А.Д. Король

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-13-2023, учебных планов: №6-5.4-61/01, №6-5.4-62/01 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Таразевич Ю.Г., старший преподаватель кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Лепин В.В., ведущий научный сотрудник научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики БГУ
(протокол № 11 от 31.05.2024);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой
математической кибернетики



А.Л. Гладков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Теория графов является одним из наиболее динамично развивающихся разделов дискретной математики. Значение теории графов в настоящее время определяется многими факторами. Так, она является составной частью дискретной математики, которую в свою очередь можно рассматривать в качестве теоретической основы компьютерной математики и кибернетики. Кроме того теория графов является важным звеном математического образования.

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Теория графов» является обучение студентов базовым разделам теории графов. Вместе с тем большое внимание уделяется вопросам применения теории графов к решению прикладных задач дискретной математики.

Развивающей целью учебной дисциплины является дальнейшее формирование у студентов навыков дискретного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах.

Воспитательной целью учебной дисциплины является формирование у студентов стремления к получению знаний в области дискретной математики и их использованию при решении актуальных прикладных проблем современного общества.

Основными задачами, решаемыми в рамках изучения дисциплины «Теория графов», являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение методов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из рассматриваемых разделов теории графов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к **дополнительным видам обучения** компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами. Для понимания учебной дисциплины студенту требуется минимум предварительных математических знаний и навыков. В частности, нужно иметь самые начальные сведения из общей теории отображений, теории множеств и линейной алгебры, которые даются в учебных дисциплинах «Математический анализ» государственного компонента и «Алгебра и теория чисел» компонента учреждения высшего образования.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория графов» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

универсальные компетенции:

- Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на

основе применения информационно-коммуникационных технологий;

- Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;

- Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;

- Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;

базовые профессиональные компетенции:

- Применять основные законы и методы естественнонаучных дисциплин для решения теоретических и практических задач в профессиональной деятельности;

- Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности;

специализированные компетенции:

- Осуществлять анализ контекста и поставленной проблемы, аргументированно выбирать оптимальный способ ее решения, согласовывать частичные проекты решения в общую согласованную архитектуру, выполнять реализацию проекта с учетом оценки накопленных и поступающих данных;

- Применять математический аппарат при исследовании задач механики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать основные понятия и утверждения из рассматриваемых разделов теории графов;

уметь доказывать основные утверждения и применять их для решения типовых задач;

иметь навык основных методов решения типовых задач из рассматриваемых разделов теории графов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3-м семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Теория графов» отведено для очной формы получения высшего образования: 90 часов, в том числе 36 аудиторных часов, из них: лекции – 18 часов, практические занятия – 18 часов. **Из них:**

лекции – 18 часов, практические занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Базовая терминология

Тема 1.1. Понятие графа

Определение графа. Способы задания графов. Изоморфизм графов. Помеченный граф. Лемма о рукопожатиях. Операции над графами. Подграфы, их типы.

Тема 1.2. Связность

Маршруты, их типы и основные свойства. Связная компонента. Число связных компонент в графе, полученном после удаления ребра из связного графа. Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент.

Тема 1.3. Двудольные графы

Расстояние между вершинами в графе. Волновой алгоритм и его применение. Двудольные графы. Теорема Кёнига. Распознавание двудольности.

Раздел 2. Деревья

Тема 2.1. Понятие дерева

Определение дерева. Эквивалентные определения.

Тема 2.2. Остовные деревья

Остов графа и его свойства. Теорема Кирхгофа о числе остовных деревьев.

Раздел 3. Независимость и покрытия

Тема 3.1. Независимость

Независимое множество вершин. Оценки числа независимости. Клика.

Тема 3.2. Покрытия

Вершинные и реберные покрытия. Соотношения между параметрами независимости и покрытия в произвольном графе. Теорема Галлаи.

Тема 3.3. Паросочетания

Паросочетания в двудольных графах, теорема Холла.

Раздел 4. Обходы

Тема 4.1. Эйлеровы графы

Определение эйлерова графа. Критерий эйлеровости.

Тема 4.2. Гамильтоновы графы

Определение гамильтонова графа. Достаточные условия гамильтоновости.

Раздел 5. Раскраски

Тема 5.1. Вершинная раскраска,

Вершинная раскраска и хроматическое число графа. Применение вершинной раскраски. Алгоритм последовательной раскраски.

Тема 5.2. Хроматическое число графа

Оценки хроматического числа. Теорема Зыкова. Теорема Брукса.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Базовая терминология	6	5					
1.1	<i>Понятие графа</i>	2	2					Устный опрос
1.2	<i>Связность</i>	2	2					Устный опрос
1.3	<i>Двудольные графы</i>	2	1					Экспресс-опрос
2	Деревья	2	1				2	
2.1	<i>Понятие дерева</i>	1	1					Экспресс-опрос
2.2	<i>Остовные деревья</i>	1					2	Контрольная работа № 1 по темам 1–2
3	Независимость и покрытия	5	5					
3.1	<i>Независимость</i>	1	1					Экспресс-опрос
3.2	<i>Покрытия</i>	2	2					Устный опрос
3.3	<i>Паросочетания</i>	2	2					Устный опрос
4	Обходы	3	2					
4.1	<i>Эйлеровы графы</i>	1	1					Устный опрос
4.2	<i>Гамильтоновы графы</i>	2	1					Экспресс-опрос
5	Раскраски	2	1				2	
5.1	<i>Вершинная раскраска</i>	1	1					Коллоквиум
5.2	<i>Хроматическое число графа</i>	1					2	Контрольная работа № 2 по темам 3–5
	ИТОГО	18	14				4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум : учебник / Я. М. Ерусалимский. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 476 с. - URL: <https://reader.lanbook.com/book/212897>.

2. Кожухов, С. Ф. Сборник задач по дискретной математике : учебное пособие / С. Ф. Кожухов, П. И. Совертков. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 324 с. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212675>.

3. Лекции по теории графов : учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Емеличев [и др.]. - Изд. стер. - Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. - 383 с.

Дополнительная литература

4. Харари Ф. Теория графов: Пер с англ. – Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

5. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 368 с

6. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974. – 368 с.

7. Теория графов в задачах и упражнениях. Более 200 задач с подробными решениями / В. А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва: URSS: Либроком, 2016. – 415 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: устный опрос, экспресс-опрос, коллоквиум и контрольная работа.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Теория графов» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Примерный перечень практических занятий

1. Разбор первоначальных понятий теории графов. Распознавание изоморфных графов. Нахождение различных типов подграфов графа.

2. Связность, связная компонента. Нахождение графов с максимальным (минимальным) числом ребер при фиксированных числах вершин и связных компонент.

3. Решение задач на использование волнового алгоритма: нахождение расстояния от вершины до всех остальных вершин графа, выделение связных компонент, распознавание двудольности графа.
4. Решение задач на использование эквивалентных определений дерева.
5. Нахождение числа остовных деревьев связного графа с помощью теоремы Кирхгофа.
6. Независимость и покрытия в произвольных графах, оценки соответствующих инвариантов, соотношения между этими инвариантами.
7. Использование теоремы Холла для распознавания существования паросочетания в двудольном графе, покрывающем фиксированную долю.
8. Решение задач, использующих критерий эйлеровости графа.
9. Задачи на гамильтоновы графы, достаточные условия гамильтоновости.
10. Задачи на оценки хроматического числа графа, алгоритм последовательной раскраски графа.

Примерная тематика контрольных работ

- **Контрольная работа № 1.** «Базовая терминология теории графов: изоморфизм графов; подграфы; связный граф; связь между числами вершин, ребер и связных компонент графа; двудольные графы. Деревья: соотношения между различными параметрами дерева; свойства остовов; теорема Кирхгофа о числе остовов связного помеченного графа.
- **Контрольная работа № 2.** Независимость и покрытия: оценки и нахождение соответствующих параметров в графе, связь между ними. Обходы в графах: эйлеровы графы, критерий эйлеровости, гамильтоновы графы, достаточные условия гамильтоновости. Раскраски: алгоритм последовательной раскраски; оценки хроматического числа».

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 2.2. Остовные деревья (2 часа)

Примерный перечень заданий

1. Графом n -перестановок называется граф, вершины которого биективно соответствуют перестановкам чисел $1, 2, \dots, n$, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие перестановки преобразуются друг в друга с помощью одной транспозиции. Выяснить, является ли граф n -перестановок: а) регулярным, б) двудольным. Используя лемму о рукопожатиях, найти число ребер этого графа.
2. Ввести понятие кода Прюфера для помеченного дерева порядка n . Привести альтернативное доказательство теоремы Кэли: число помеченных деревьев порядка n равно n^{n-2} . В качестве вспомогательной подзадачи предполагается доказать, что между кодами Прюфера помеченных деревьев

порядка n и всеми последовательностями длины $n - 2$, образованными из чисел множества $\{1, 2, \dots, n\}$, имеется биективное соответствие.

Форма контроля - контрольная работа № 1 по разделам 1 – 2.

Тема 5.2. Хроматическое число графов (2 часа)

Примерный перечень заданий

1. Доказать следующую теорему Бержа: паросочетание M графа является наибольшим тогда и только тогда, когда в этом графе нет увеличивающих относительно M цепей. (Цепь называется увеличивающей относительно M , если ее ребра поочередно входят и не входят в M , причем концы этой цепи не инцидентны ребрам из M .) В качестве вспомогательной подзадачи доказать, что связные компоненты графа, порожденного симметрической разностью двух различных паросочетаний M_1 и M_2 , являются простыми циклами четной длины или простыми незамкнутыми цепями, в которых ребра паросочетаний M_1 и M_2 чередуются.

2. Доказать, что гамильтоново замыкание $cl(G)$ графа G не зависит от порядка добавляемых в процессе его построения ребер, т.е. гамильтоново замыкание графа определено однозначно.

3. Доказать, что для произвольного графа G порядка n выполняется неравенство $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G . При доказательстве методом математической индукции по n в качестве вспомогательного утверждения предполагается доказать, что если для вершины v графа G выполняется неравенство $\chi(G - v) < \chi(G)$, то $\deg(v) \geq \chi(G) - 1$.

Форма контроля - контрольная работа № 2 по разделам 3 – 5.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

Наиболее эффективной предполагается следующая форма реализации эвристического подхода: доказательства громоздких теорем, а также решения сложных задач разбиваются на этапы, после чего обучаемые подводятся к самостоятельному определению действий на этапах.

При организации образовательного процесса используется также *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решение практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления, углубления и расширения полученных теоретических знаний обучающихся;
- формирования умений использовать специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности обучающихся творческой инициативы, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине на учебных занятиях выполняется под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия. При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы обучающийся имеет право обращаться к преподавателю за консультацией.

Основным видом аудиторной самостоятельной работы при изучении учебной дисциплины являются подготовка ответов на тесты, решение качественных задач, предложенных в ходе занятия, участие в дискуссиях во время лекций и лабораторных занятий

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале смешанного и дистанционного обучения БГУ, содержащие учебные материалы (курс лекций, задания к домашним работам и т. д.), вопросы к зачету размещены на портале edummf.bsu.by.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Графы и способы их задания (аналитический, графический, матричный). Степень вершины графа. Лемма о рукопожатиях.
2. Изоморфизм графов. Связь между матрицами смежности изоморфных графов. Помеченный граф.
3. Операции над графами. Подграфы, их типы.
4. Маршруты, их типы и основные свойства. Связная компонента графа.
5. Число связных компонент в графе, получающемся из заданного связного графа удалением ребра.
6. Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент.
7. Волновой алгоритм и его применение.
8. Двудольные графы. Критерий двудольности Кёнига.
9. Деревья: эквивалентные определения.
10. Остов графа и его свойства.
11. Теорема Кирхгофа о числе остовных деревьев связного помеченного графа.
12. Независимое множество вершин. Оценки числа независимости. Приближенный алгоритм построения наибольшего независимого множества вершин.
13. Вершинные и реберные покрытия. Паросочетания. Соотношения между параметрами независимости и покрытия в произвольном графе. Теорема Галлаи.
14. Паросочетания в двудольных графах. Теорема Холла о существовании паросочетания, покрывающего долю двудольного графа.
15. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости.
16. Гамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости.
17. Вершинная раскраска и хроматическое число графа, их применение. Алгоритм последовательной раскраски.
18. Оценка хроматического числа графа через плотность. Теорема Зыкова.
19. Оценка хроматического числа графа через число независимости.
20. Оценки хроматического числа графа, связанные со степенями вершин. Теорема Брукса.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
докт. ф.-м. наук, Профессор
 (ученая степень, ученое звание)

А.Л. Гладков
 (подпись)

А.Л. Гладков
 (И.О.Фамилия)

24. мая 20 24 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)