

Литература

1. Зенкин, А. А. Когнитивная компьютерная графика / А. А. Зенкин. Под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1991. – 192 с.

ПРИМЕНЕНИЕ КРИВЫХ БЕЗЬЕ В САД-СИСТЕМАХ

¹Яшкин В. И, ²Марков А. В.

¹Белорусский государственный университет, г. Минск

²Белорусский государственный экономический университет, г. Минск

В Республике Беларусь интенсивное развитие информационных технологий, разведка полезных ископаемых, космических исследований и других наукоемких отраслей требует молодых квалифицированных кадров. Поэтому современная парадигма образования включает приоритеты на изучение и понимание студентами актуального программного обеспечения, в частности, САД-систем.

Кривые Безье, применяемые в САД системах, являются разновидностью группы кривых NURBS (Non-uniform rational B-spline): NURBS – это математическая форма, применяемая в компьютерной графике для генерации и представления кривых и поверхностей, является частным случаем В-сплайна.

Кривая Безье задается параметрической функцией:

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k b_{k,n}(t), 0 \leq t \leq 1$$

где P_k – функция компонент векторов опорных вершин, а $b_{k,n}(t)$ – базисные функции кривой Безье, называемые также полиномами Бернштейна:

$$b_{k,n}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}$$

Полиномы Бернштейна на области определения $0 \leq t \leq 1$ неотрицательны. Образуют ортонормированный базис C_2 функций.

Кривая целиком лежит в выпуклой оболочке своих опорных точек. Наибольшее значение имеют кривые Безье второй и третьей степеней (квадратичные и кубические). Для построения сложных по форме линий отдельные кривые Безье могут быть последовательно соединены друг с другом в сплайн Безье. Для того, чтобы обеспечить гладкость склейки линии до первой производной включительно в месте соединения двух кубических кривых Безье, три смежные опорные точки обеих кривых должны лежать на одной прямой. Для обеспечения непрерывности второй производной (кривизны) в месте склейки, необходимо что бы пять смежных опорных точек обеих кривых лежали на одной прямой. В программах векторной графики, например, Adobe Illustrator или Inkscape, подобные фрагменты известны под названием «путей» (path), а в 3DS Max и подобных программах 3D-моделирования кривые Безье имеют название «сплайны». Кривые высших степеней при обработке требуют большего объема вычислений и для практических целей используются реже.

Квадратичная кривая Безье ($n=2$) задается тремя точками: P_0 , P_1 и P_2 .

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + t(1-t)P_1 + t^2 P_2, 0 \leq t \leq 1$$

Квадратичные кривые Безье в составе сплайнов используются для описания формы символов в шрифтах TrueType и в SWF файлах.

В параметрической форме кубическая кривая Безье ($n=3$) описывается следующим уравнением:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + t(1-t)^2 P_1 + t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3, 0 \leq t \leq 1$$

Линия берёт начало из точки P_0 , направляясь к P_1 и заканчивается в точке P_3 , подходя к ней со стороны P_2 . То есть, кривая не проходит через точки P_1 и P_2 , они используются для указания её направления. Длина отрезка между P_0 и P_1 определяет, как скоро кривая повернет к P_3 .

В матричной форме кубическая кривая Безье записывается следующим образом:

$$B(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

В форматах Adobe Illustrator и Portable Document Format (PDF), Scalable Vector Graphics (SVG), Metafont, CorelDraw и GIMP для представления криволинейных форм используются сплайны Безье, составленные из кубических кривых. По заданному массиву вершин $P_0 \dots P_m$ кривая Безье степени n определяется следующим уравнением:

$$B(t) = \frac{\sum_{k=0}^n w_k P_k b_{k,n}(t)}{\sum_{k=0}^n w_k b_{k,n}(t)}, 0 \leq t \leq 1$$

Пусть у нас есть две кривые Безье, заданных наборами вершин P_0, \dots, P_3 и P_3, \dots, P_6 , тогда условие гладкой склейки, не считая требования того что бы три смежных вершин лежали на одной прямой, до первой производной включительно запишется следующим образом:

$$w_2 |P_3 - P_2| = w_4 |P_4 - P_3|$$

Для обеспечения гладкой склейки до второй производной включительно, кроме того, что бы пять смежных вершин были компланарны, необходимо потребовать следующие условия на веса:

$$\frac{w_1}{|P_3 - P_2|^3} = \frac{w_2}{|P_4 - P_3|^3}, \quad w_1 = \frac{w_1 w_3}{(w_2)^2} |(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_2)|$$

$$w_2 = \frac{w_0 w_2}{(w_1)^2} |(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_1)|$$

Поверхность Безье порядка (n, m) задается $(n+1)(m+1)$ контрольными точками $P_{i,j}$ и описывается следующим параметрическим уравнением:

$$B(u, v) = \sum_{i,j=0}^{n,m} P_{i,j} b_{i,n}(u) b_{j,m}(v), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

Поверхности Безье так же как и кривые Безье разделяются на классические, рациональные и В-сплайны, обладают теми же свойствами и условиями склеек различной гладкости. NURBS-поверхности строятся на основе кривых Безье или

сплайнов, то при определении NURBS-поверхности или NURBS-кривой важно задать такие параметры, как порядок, определяющие точки, управляющие вершины, значения веса и узловая параметризация. На рисунке ниже показаны управляющие вершины, отображаемые при выборе NURBS-поверхности или сплайна.

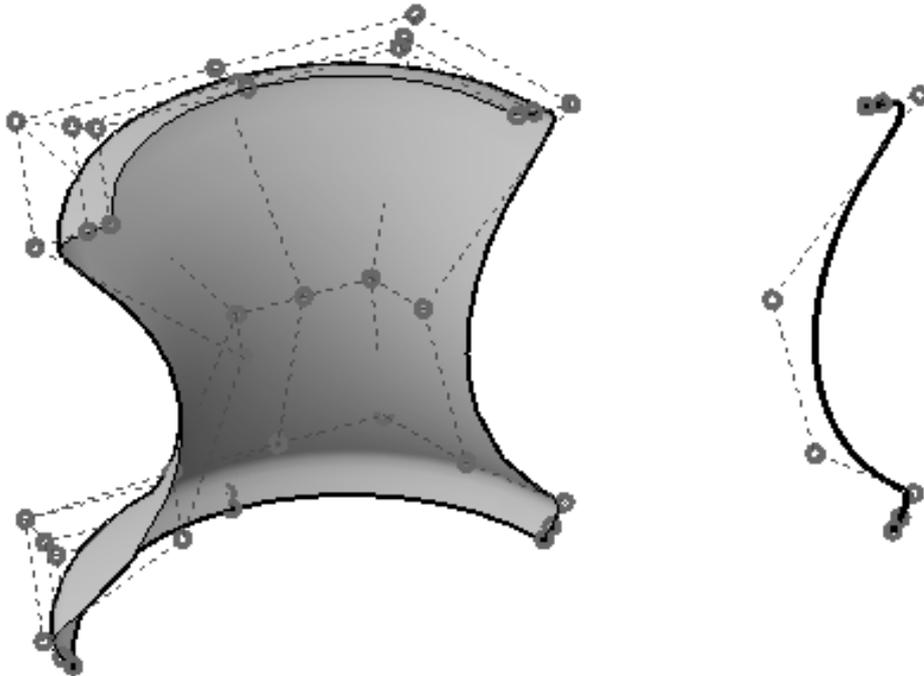


Рисунок. Примеры NURBS в AutoCAD

AutoCAD предусматривает два способа создания NURBS. Моделирование на основе NURBS-поверхностей требует предварительного планирования, так как обратное преобразование NURBS-поверхностей в процедурные поверхности невозможно.

NURBS-кривые содержат и определяющие точки, и управляющие вершины. Определяющие точки лежат на линии, а управляющие вершины – вне ее. Определяющие точки служат для внесения небольших локальных изменений для кривой. Управляющие вершины позволяют вносить изменения, влияющие на форму кривой в целом.

NURBS-поверхности и кривые могут иметь фиксированную, замкнутую или разомкнутую форму. Форма определяет, как объект можно изменять.

- Фиксированная кривая – это замкнутый контур со швом, создающим дополнительные невидимые управляющие вершины (УВ). Эти невидимые УВ могут приводить к образованию складок и сгибов при изменении формы.
- Замкнутые кривые и поверхности – это замкнутый контур с совпадающими начальными и конечными УВ. Их пересечение называется швом. При переносе одной УВ вторая перемещается вместе с ней.
- Начальные и конечные УВ разомкнутых кривых и поверхностей находятся в различных положениях (без контура). Если связать начальную управляющую вершину с конечной управляющей вершиной, кривая остается разомкнутой.

Так же AutoCAD предоставляет дополнительные параметры управления геометрией NURBS, такие как: допуск (могут ли не крайние опорные точки касаться кривой и на сколько близко), условие касания (способ касания конечных вершин) и правила расположения промежуточных управляющих точек (по правилу «хорд», «квадратного корня» и «равномерно» которые определяются по расстоянию между соседними управляющими вершинами).