За основу здесь можно взять модель Пуанкаре на верхней полуплоскости, которую можно рассмотреть как гладкое многообразие с римановой метрикой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Эта модель удобна тем, что, во-первых, величины углов между кривыми, вычисляемые с помощью этой метрики совпадают с евклидовыми, во-вторых, здесь довольно просто доказывается, что симметрии относительно прямых, ортогональных оси абсцисс и инверсии относительно окружностей с центром на оси абсцисс являются изометриями по отношению к данной метрике и, в третьих, здесь довольно элементарными методами можно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, задающую геодезические и тем самым описать их траектории (см.[1, с.344]). Сами геодезические в данной ситуации, ввиду недостатка времени, можно определить просто с помощью соответствующей системы дифференциальных уравнений, проведя аналогию с системой уравнений, задающей геодезические на поверхности, а именно, в системе уравнений для нахождения символов Кристоффеля, фигурирующих в уравнениях геодезических на поверхности, (см., например, [2, с.153]) коэффициенты первой квадратичной формы заменить на коэффициенты данной римановой метрики.

Такой подход позволяет за небольшое количество лекций описать траектории геодезических (которые рассматриваются в качестве прямых), доказать теорему о возможности совместить любые два флага изометрией, получить формулу для вычисления площади треугольника и, как следствие, теорему о сумме углов треугольника. Используя эту теорему, можно вполне элементарными рассуждениями показать, что на плоскости Лобачевского не существует не конгруэнтных подобных треугольников, доказать свойства четырёхугольника Саккери и установить, что эквидистанта не является прямой линией. Разумеется, некоторые доказательства имеет смысл разобрать в виде задач на практических занятиях. Целесообразно также на практических занятиях построить изотермическую параметризацию псевдосферы. Сравнив вид первой квадратичной формы для данной параметризации с римановой метрикой модели Пуанкаре, можно познакомить студентов с классическим результатом Бельтрами, согласно которому геометрия Лобачевского «в малом» реализуется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Таким образом, в рамках небольшого по объёму курса можно познакомить студентов с первоначальными сведениями из теории гладких многообразий и показать, что в рамках этой теории можно, в частности, описать неевклидову геометрию Лобачевского.

Литература

1. Курс дифференциальной геометрии и топологии. / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – Москва: Издательство Московского университета, 1980. – 439с.
2. Дифференциальная геометрия. / А.В. Погорелов. – Москва: Наука, 1969. – 176с.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГОМЕОСТАЗИСА И ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПАРАДГМА

[1]Марков А. В., [2]Яшкин В. И.

[1]Белорусский государственный экономический университет, г. Минск
[2]Белорусский государственный университет, г. Минск

В условиях компетентностного подхода суть образовательного процесса – создание ситуаций и поддержка действий студента, которые направлены на формирование той или иной компетенции. Развитие инновационных образовательных технологий дает возможность сочетать различные методические подходы и создавать наиболее благоприятные условия для повышения эффективности учебной деятельности студентов.

Есть проблемы, которые выражаются в разрыве между математической и экспериментальной экологией. Затруднено исследование биосферы и ее экосистем из-за невозможности охвата огромной сложности живых систем в рамках качественных представлений без использования количественных моделей. Проблема взаимодействия человека и окружающей среды – это прежде всего проблема естественнонаучная, нужно учиться (и учить студентов) объединять в единой системе модели взаимосвязанных процессов разной физической и биологической природы.

Центральная проблема – это проблема определения границ гомеостазиса, т. е. определения тех критических параметров, за которые перешагнуть человеческой жизни, человеческой цивилизации не дано, во всяком случае при нынешнем уровне развития науки и техники. Отметим, что проблема определения критических параметров гомеостазиса, имеет социальный характер.

Прежде всего, это параметры токсичности, уровня загрязнения воды, атмосферы, степень эрозии Земли, обеспеченности ресурсами и т. д. Важную роль играет понимание границ антропогенного влияния на климат. Всеми подобными проблемами активно занимаются во всем мире, ими занимаются физики, химики, метеорологи, гигиенисты, медики и т. д. Более трудны проблемы устойчивости человеческой цивилизации и окружающей природы. Человек – часть биоты. И если биота теряет устойчивость, то жизнь человека становится практически невозможной. И эти истины понимали, наверное, еще в древности. И тем не менее во все времена человек воевал с биотой. Он уничтожал леса и пастбища, убивал зверей в количествах, заведомо превосходящих его потребности. Он побеждал биоту, но в результате этих побед оставались пустыни, и человек уходил в другие края. Многие территории житниц древнего мира в Северной Африке и на Ближнем Востоке превратились в пустынные края не из-за изменения климата, а из-за того, что человек не смог преодолеть своего неумения беречь то достояние, которое дала ему природа. Ныне только 4% территории Греции занято лесами и примерно столько же земли пригодно для сельского хозяйства. А ведь Македонию, Беотию, Пелопонес покрывали буковые и дубовые леса, а треть территорий занимали поля и виноградники.

При экологическом моделировании сложных природных систем, таких как биосфера и ее экосистемы, исследователь сталкивается со следующими проблемами: «Каждое отдельное действие или вмешательство в систему обретает коллективный аспект, который может повлечь за собой совершенно неожиданные глобальные изменения». Не только каждое состояние системы, но и само определение системы в том виде, в каком ее описывает модель, обычно нестабильно [1].

Анализ проблемы показал, что построение теории, способной предложить методы моделирования столь сложных объектов, как биосфера и ее экосистемы, возможно на основе творческого синтеза наиболее плодотворных идей, предложенных рассмотренными науками. К настоящему времени этот синтез выполнен в концепции адаптивной самоорганизации сложных природных систем (КАС). В КАС установлено, что вид аттрактивного ландшафта системы определяется связями (и другими коэффициентами) иерархической сети ее элементов. Они играют роль управляющих параметров в процессах самоорганизации системы. Синергетика декларирует наличие аттракторов и аттрактивных ландшафтов, определяющих законы нелинейной динамики природных систем. Однако не обсуждаются причины появления аттракторов и способы их формирования. Для решения этой фундаментальной проблемы в КАС введено понятие самоорганизации управляющих параметров. Динамическую самоорганизацию аттрактивного ландшафта предложено осуществлять алгоритмами адаптивной самоорганизации (самостоятельной адаптации), разрабатываемыми в рамках КАС.

Рассмотрим использование методов КАС на простом примере построения модели лесных экосистем на основе логистических уравнений.

Для описания динамики плотности (фитомассы) двух взаимодействующих видов (сосны и березы), их взаимовлияния в процессе формирования древостоя в [2] предложена система логистических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_1 x_1 - B_1 x_1^2 + C_1 x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= A_2 x_2 - B_2 x_2^2 + C_2 x_1 x_2, \end{aligned} \qquad (1)$$

где x_1 – плотность (надземная масса, г/м^2 в абсолютно сухом состоянии) сосны; x_2 – плотность березы; A, B, C – параметры, которые определяются в процессе решения начальной задачи. Так как адаптивная сеть в моделях КАС является математическим отображением взаимодействия видов, растений и/или животных в экосистемах с учетом их взаимосвязей, то (1) можно обобщить на следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i x_i - B_i x_i{}^2 + C_i \sum_j w_{ij} x_i x_j. \qquad (2)$$

В системе (2) через w_{ij} обозначена величина связи между i-м и j-м видами, определяющая влияние j-го вида на i-й. Предложенное изменение позволяет представить модель из значительного числа уравнений. Эти уравнения описывают виды в экосистеме и взаимосвязи между ними. При необходимости, связи могут быть представлены в нелинейной форме. Добавление числа взаимосвязей с другими видами или факторами в модели ведет к усложнению вида уравнений. По мере увеличения числа видов и факторов такой традиционный способ конструирования уравнений достаточно быстро делает модель существенно более сложной. При использовании неоднородных уравнений, задача усложняется многократно. Решение удобно вести на базе методологии нейронных сетей. Важными преимуществами предложенного подхода являются: возможность использования богатого опыта нейроинформатики в создании математических методов и возможность прямого применения полученных алгоритмов в задачах обработки информации.

Создание более полных моделей должно опирается на фундаментальные свойства экологических и биологических систем, такие как: сетевая организация элементов и связей системы, адаптивность, аттрактивность (наличие множества стационарных состояний, обеспечивающих динамическую устойчивость экосистем), фрактальность (самоподобие структур и процессов), нелинейность, цикличность, сложность организации (большое число видов и взаимосвязей между ними повышает устойчивость экосистемы) и др.

Пока что речь идет об исследовании отдельных и относительно простых биоценозов, например, лесных биоценозов. Но надо мотивировать студентов на изучение моделей глобального характера, позволяющих оценивать следствия крупномасштабных экономических акций. При этом уровень преподавания специалистами будет повышаться в соответствующих областях естествознания.

Литература

1. Ланкин, Ю. П. Основы теории моделирования разнообразия экосистем биосферы на основе фундаментальных свойств живых систем / Ю. П. Ланкин, Н. С. Иванова, Т. Ф. Басканова // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – №1; URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=5144 (дата обращения: 04.02.2024).
2. Иванова, Н. С. Модель восстановительно-возрастной динамики лесов Зауральской холмисто-предгорной провинции / Н. С. Иванова, Г. П. Быстрай, С. А. Охотников, Е. С. Золотова // Современные проблемы науки и образования. – 2011.– №4; URL: http://www.science-education.ru/98-4754 (дата обращения: 05.10.2011).

ДУЭТ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА» В УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ ХИМИКОВ

Мартон М.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Для многих очевидно, что сегодня деятельность будущего химика немыслима без использования компьютера, применения основ информационных технологий и математической базы. В сегодняшних условиях глобальной информатизации общества конкурентоспособность выпускников современного вуза в значительной степени определяется их уровнем владения информационными технологиями и компьютерными средствами при решении профессиональных задач. Анализ физико-химических явлений и процессов в настоящее время невозможно представить без использования математических и компьютерных моделей, применения вычислительной техники для осуществления расчетов и визуализации изучаемых объектов. Математика и основы информационных технологий сегодня неразделимы, и правильная организация учебного процесса существенно повышает эффективность изучения и понимания каждой из этих дисциплин [1, 253]. Информационные технологии для студентов химиков актуальны и интересны тем, что многие профессиональные задачи моделируются и решаются с помощью математических моделей, реализуемых с помощью прикладных программ. На курсе основы информационных технологий появляется возможность повторить и закрепить изученный материал курса высшей математики, решать математические задачи уже другими методами и способами без бумаги и ручки.

В чем состоит общая схема преподавания математики и решения математических задач?

постановка задачи (что мы хотим изучить) и математическая формулировка составляющих проблему задач;

непосредственно вычислительный этап и получение ответа в математической форме;

интерпретация ответа в реальном мире и проверка его на достоверность.

Как мы решаем эту математическую задачу? Чаще всего мы это делаем вручную. Например, решаем систему линейных алгебраических уравнений, вычисляем неопределенный интеграл или находим предел функции, строим график функции, а зачем? Ведь большинство математических задач мы можем решить с использованием компьютера. Настоящая математика — это не только вычисления! Математика гораздо шире, чем просто вычисления. Ранее была только одна возможность — вычисление вручную, но с появлением компьютерных информационных технологий все давно изменилось. Сейчас можно смело сказать, что математика освободилась от вычислений, особенно это актуально для студентов химиков. Рутинную вычислительную работу с