- позволяет осуществлять учебный процесс каждому студенту в индивидуальном темпе,
- гарантировать получение базовых знаний в объеме, необходимом для формирования у обучаемого основ по самостоятельному приобретению знаний,
- обеспечить преемственность этапов обучения,
- привить навыки использования вычислительной техники.

Литература

1. Кепчик, Н. В. Модульный учебно-методический комплекс как средство усовершенствования самостоятельной работы / Н.В. Кепчик, А.В. Капусто // Университетское образование: от эффективного преподавания к эффективному учению: сборник материалов пятой Междунар. науч.–практ. конф., Минск, 29 – 30 марта 2005 г. – С. 57–62.
2. Кепчик, Н. В. Опыт реализации технологии эвристического обучения при изучении дисциплины «Высшая математика» / Н. В. Кепчик, Т. И. Рабцевич, Н. Б. Яблонская // Матэматыка. – 2020. № 1. – С. 3 – 10.
3. Велько, О. А. Эвристическое занятие «Графы как инструмент моделирования процессов природы и общества» / О.А. Велько, Н. В. Кепчик // Матэматыка. – 2020. № 6. – С. 12 – 20.
4. Velko, O.A. Open type tasks as a means to activate students' creative activity / O.A. Velko, N.A. Moiseeva // Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15 – 16 травня, 2019 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. – Краматорськ : ДДМА, 2019 – С. 151–153.
5. Велько, О.А. Ментальные карты как средство организации и активизации образовательного процесса на занятиях по высшей математике и информатике для студентов нематематических специальностей / О.А. Велько, Н.В. Кепчик // Инновации в образовании. – М., 2021. – № 6. – С. 107 – 118.

ЗАДАЧИ С ХИМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Коваленко Н.С.

Белорусский государственный университет, г. Минск

С целью достижения прогресса в области биохимических технологий в первую очередь следует обращать внимание на качество подготовки специалистов при изучении математических дисциплин. Важнейшую роль при формировании навыков и компетенций у студентов в процессе обучения играет правильный подбор примеров и задач, предлагаемых для семинарских и лабораторных работ в компьютерных классах и тем докладов для обсуждения на семинарских занятиях. На наш взгляд особое внимание при изучении разделов из математического анализа следует обратить на теорию пределов и закрепления навыков их применения. Следует отметить, что теория пределов – это не только начало математического анализа, но и теоретическая база, по существу, для многих других разделов высшей математики. Благодаря теории пределов строго определяются такие понятия как непрерывность функций, классификация точек разрыва, раскрытие неопределенностей, нахождение асимптот, производная и дифференциал, различные виды интегралов и многие другие. Теория пределов позволяет также во многих случаях упрощать формулы и приводить их к более наглядному и легко воспринимаемому виду.

При изучении второго замечательного предела, т.е. предела числовой последовательность $\{x_n\}$, общий член которой $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ доказываем, что эта последовательность – ограниченная и строго возрастающая. Следовательно, по теореме Вейерштрасса она имеет конечный предел. Этот конечный предел называют *экспонентой* и, следуя Л. Эйлеру, обозначают символом e (известно, что e – иррациональное число, $e \approx 2{,}71828\ldots$):

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

С числом e связана система логарифмов, которая в ряде случаев оказывается более удобной, чем десятичная или любая другая система логарифмов. Логарифм числа x по основанию e (обозначают $\ln x$) называют *натуральным* логарифмом этого числа. Существует формула, связывающая десятичный логарифм числа x с его натуральным логарифмом: $\ln x \approx 2{,}303 \lg x$. Функцию $y = e^x$, обратную функции натурального логарифма, называют экспоненциальной функцией. Она играет важную роль в приложениях математического анализа в химико-биологических исследованиях. В частности, закон растворения лекарственных веществ из таблеток выражают экспоненциальной функцией $c = c_0 e^{-kt}$, где c – количество лекарственного вещества, оставшегося в таблетке ко времени растворения t, c_0 – исходное количество лекарственного вещества в таблетке, k – постоянная скорости растворения. Экспонента присутствует, например, и в записи закона изменения длины l клетки с течением времени t: $l = l_0 e^{(\alpha-\beta)\cdot t}$, где l_0 – длина клетки в начале роста, α, β – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада. Число e находит применение при выводе закона, которому подчиняются многие естественные процессы: распад радиоактивного вещества, размножение бактерий, рост кристаллов и др. Этот закон называется *законом непрерывного* (*органического*) *роста*.

Пример. Пусть закон, описывающий рост количества изучаемых объектов, имеет вид $A_n = a\cdot\left(1+\dfrac{p}{100n}\right)^{t\cdot n}$, где a – исходное количество изучаемых объектов, p – процент увеличения единичного количества объектов в течение некоторого условного единичного периода времени, A_n – количество объектов к моменту времени t (усл. ед.), где t отсчитывают от начала изучения процесса. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, если $a = 10000$, $p = 50\%$, $t = 1$.

Решение. Рассмотрим ситуацию, когда проценты присоединяются по отдельным частям единичного периода времени, равным его доле $\dfrac{1}{n}$, причем данный в условии процент p относится к целому единичному периоду времени и начисляется равномерно. Это означает, что по истечении доли $\dfrac{1}{n}$ первого такого периода, количество объектов увеличивается на $\dfrac{p}{100n}\cdot a$ и становится равным $a_1 = a + \dfrac{p}{100n}\cdot a = a\cdot\left(1+\dfrac{p}{100n}\right)$, по истечении двух таких долей периода количество объектов становится равным $a_2 = a_1 + \frac{p}{100n} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^2$, по истечении n таких долей, а значит одного целого единичного периода времени – $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n$, по истечении $2n$ таких долей, а значит двух единичных периодов, – $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{2n}$ и т. д., откуда и получаем формулу

$$A_n = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{t \cdot n}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$, если $a = 10000$, $p = 50\%$, $t = 1$:

$$A = \lim_{n \to +\infty} 10000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100n}\right)^n = 10000 \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\frac{1}{2n} = \frac{1}{m}, n = \frac{m}{2}\right] =$$

$$= 10000 \cdot \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{2}} = 10000 \cdot \lim_{m \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} = 10000 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 16487.$$

При вычислении предела были использованы свойства пределов последовательностей, замена переменных и определение экспоненты. Результат говорит о том, что при любом сколь угодно большом числе n количество объектов в конце одного периода времени при указанных условиях не может превысить 16487. Для сравнения вычисление простого процента дает ответ $a + \frac{p}{100} \cdot a = 15000$.

Пример. Популяция микроорганизмов растет от начального размера в 1000 особей до размера $p(t)$ в момент времени t (время выражается в днях) согласно уравнению $p(t) = \frac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)}$. Найти равновесную популяцию, т.е. $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$.

Решение. Равновесная популяция микроорганизмов равна:

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{t \to +\infty} \frac{1000e^t}{e^t\left(\frac{1}{e^t} + 0{,}1 - \frac{0{,}1}{e^t}\right)} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1000}{\frac{1}{e^t} + 0{,}1 - \frac{0{,}1}{e^t}} = 10000.$$

При решении замечаем, что функция $f(t) = e^t$ является плюс бесконечно большой при $t \to +\infty$, выносим ее как множитель за скобки в знаменателе дроби, сокращаем дробь на $e^t \neq 0$ и используем свойства из списка основных свойств пределов функций.

Приведем пример, связанный с моделью биохимического процесса. Зависимость величины возбуждения (например, нервных клеток, мышц и т. п.) от времени при внешних воздействиях изображают функцией, имеющей разрывы. Если величину возбуждения E измерить в тех или иных единицах, то график возбуждения $E(t)$ имеет вид, показанный на рис. 1. В момент $t = t_0$ клетка получает сигнал. Возбуждение клетки происходит в момент $t_1 > t_0$. Отрезок $[t_0; t_1]$ называется латентным периодом. В момент

$t = t_1$ клетка мгновенно возбуждается до максимальной величины, а затем возбуждение постепенно уменьшается до тех пор, пока не будет дан новый сигнал. Если сигнала нет достаточно долго, то возбуждение становится равным нулю. На концах латентных периодов функция $E(t)$ имеет разрывы первого рода.

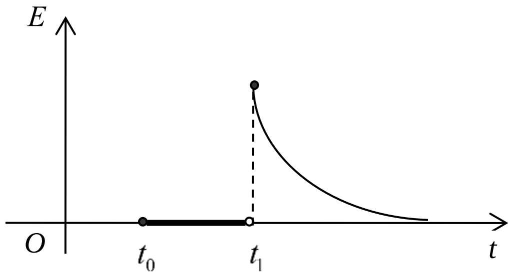

Рис. 1

Предлагаются также задачи для самостоятельной работы. Например, следующие. Математические модели описывают изменение численности биологических многочисленных популяций при определенных условиях с помощью формул, где N_0, k, r – заданные действительные числа, $N(t)$ – текущая численность популяции в момент времени *t*. Найти $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$ и дать пояснения к полученным ответам с точки зрения динамики численности популяций:

а) $N(t) = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$; б) $N(t) = \left(N_0 + k\left(e^{r \cdot t} - 1\right)\right) \cdot e^{-r \cdot t}$;

в) $N(t) = \dfrac{N_0 k e^{r \cdot t}}{k - N_0\left(1 - e^{r \cdot t}\right)}$.

Литература

1. Высшая математика. Практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1. / О.М. Матейко [и др.]; под ред. С.А. Самаля. – Минск: РИВШ, 2020. – 332 с.
2. Высшая математика. Практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2. / О.М. Матейко [и др.]; под ред. С.А. Самаля. – Минск: РИВШ, 2021. – 360 с.

О ПРЕПОДАВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В РАМКАХ ДИСЦИПЛИНЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ»

Кукрак Г.О.

Белорусский государственный университет, г. Минск

В современный курс «Дифференциальная геометрия и топология» желательно включать сведения по теории гладких многообразий. Однако, ввиду недостатка времени, на эту тему удаётся рассказать только самые первоначальные сведения. Возникает проблема, как сделать так, чтобы знакомство теорией гладких многообразий не свелось к набору определений и утверждений технического характера. Выход может состоять в том, чтобы включить в курс материал, относящийся к геометрии Лобачевского, который можно изложить с использованием понятий и фактов, относящихся к гладким многообразиям.