ОБ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОМ ПОСОБИИ «ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

Деревяго А.Н., Егоров А.А., Чехменок Т.А.

Белорусский государственный университет, г. Минск

В структуре образовательного процесса на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ учебная дисциплина «Математический анализ» занимает одно из центральных мест. Ее цель – глубокое овладение фундаментальными понятиями разделов: теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций одной и нескольких переменных, элементы дифференциальной геометрии, скалярные и векторные поля, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, а также навыками их использования в различных физических дисциплинах при решении ряда прикладных задач.

Следует отметить, что у студентов-первокурсников зачастую отсутствует умение рассуждать и, как следствие, доказывать простейшие теоремы. Недостаточно полными являются также знания по разделам тригонометрии, планиметрии и стереометрии, изучаемых в рамках школьной программы. В результате студенты испытывают затруднения при изучении таких тем, как «Кратные интегралы» и «Поверхностные интегралы».

Учебно-методическое пособие «Поверхностные интегралы» составлено на основе действующих учебных программ [1, 2] с учетом многолетнего опыта проведения лекций и практических занятий по данным дисциплинам преподавателями кафедры высшей математики и математической физики БГУ. Целью указанного пособия является стремление помочь студентам лучше усвоить материал по теме и привить навыки его использования при решении конкретных физических задач.

Материал разбит на пять глав, первая из которых посвящена поверхностям в трехмерном пространстве, их способам задания. Вторая глава содержит определение, формулы и приложения первой квадратичной формы поверхности.

В третьей и четвертых главах представлены определения, способы вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода, рассмотрены решения ряда примеров. К некоторых из решений приведены рисунки, выполненные в приложении GeoGebra 3d (см. рис. 1 и рис. 2)

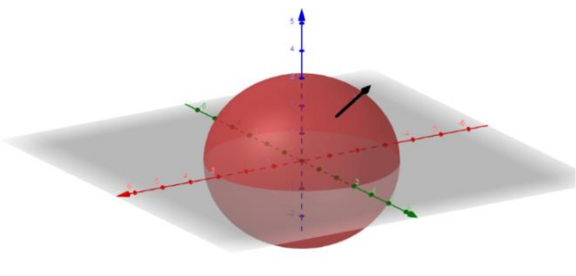

Рис. 1

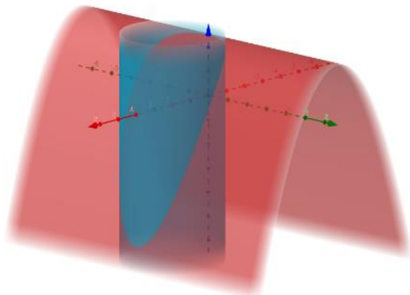

Рис.2

Пятая глава посвящена формулам Остроградского-Гаусса и Стокса. Здесь же сформулированы основные понятия векторного анализа и их связь с криволинейными и поверхностными интегралами. Имеются геометрические и физические приложения поверхностных интегралов.

Пример. Вычислить координаты центра тяжести части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащей в первом октанте $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, если плотность $\rho(x,y,z)=z^2$.

Решение. Так как $z\ge 0$, то из уравнения сферы имеем

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D,$$

где $D: x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$. Тогда

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Следовательно,

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Масса поверхности равна:

$$m=\iint_\Omega z^2dS=\iint_D(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot rdr=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}d(1-r^2)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-r^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

Найдем абсциссу центра тяжести по формуле:

$$x_c=\frac{1}{m}\iint_\Omega x\cdot\rho(x,y,z)dS.$$

Тогда

$$x_c=\frac{6}{\pi}\iint_\Omega x\cdot z^2dS=\frac{6}{\pi}\iint_D x(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{6}{\pi}\iint_D x\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=$$

$$=\frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr=\frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{6}{\pi}\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr=$$

$$=\left[r=\cos t,\ dr=-\sin t\,dt,\ r=0\to t=\frac{\pi}{2},\ r=1\to t=0\right]=$$

$$=-\frac{6}{\pi}\int_{\pi/2}^0\cos^2t\cdot\sin^2t\,dt=\frac{3}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\bigg|_0^{\pi/2}=\frac{3}{8}.$$

По формуле

$$y_c=\frac{1}{m}\iint_\Omega y\cdot\rho(x,y,z)dS$$

найдем ординату центра тяжести:

$$y_c = \frac{6}{\pi}\iint_{\Omega} y\cdot z^2 dS = \frac{6}{\pi}\iint_{D} y(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \frac{6}{\pi}\iint_{D} y\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy =$$

$$= \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^1 r\sin\varphi\sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{6}{\pi}\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{3}{8}.$$

Аналогичным образом согласно формуле

$$z_c = \frac{1}{m}\iint_{\Omega} z\cdot\rho(x,y,z)dS$$

находится аппликата центра тяжести:

$$z_c = \frac{6}{\pi}\iint_{\Omega} z\cdot z^2 dS = \frac{6}{\pi}\iint_{D}(1-x^2-y^2)^{3/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \frac{6}{\pi}\iint_{D}(1-x^2-y^2)dxdy =$$

$$= \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^1 (1-r^2)\cdot r\,dr = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 (r-r^3)\,dr = \frac{3}{4}.$$

В пособии приведены задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Данное учебно-методическое пособие может быть использовано студентами физических специальностей, а также преподавателями при проведении практических занятий и организации управляемой самостоятельной работы студентов.

Литература

1. Егоров А.А., Комаров С.О., Магонь Н.С. Основы векторного и тензорного анализа: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности: 6-05-0533-04 Компьютерная физика (профилизации специальности: Компьютерные микро- и наноэлектроника, Компьютерное моделирование физических процессов, Физическая информатика) №УД-261/б.: https://elib.bsu.by/handle/123456789/305050
2. Кабанова О.С., Чехменок Т. А. Математический анализ: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 6-05-0533-05 Радиофизика и информационные технологии (профилизации специальности: Аэрокосмические технологии, Информатика, программируемые электроника и измерительные системы, Компьютерное проектирование и технологии микроэлектронных систем, Радиофизика и цифровые технологии, Фотоника и прикладные компьютерные технологии) 6-05-0533-11 Прикладная информатика (Профилизации специальности: Интеллектуальные и киберфизические системы, Анализ больших данных и биоинформатика) 6-05-0533-12 Кибербезопасность (Профилизация специальности: Безопасность компьютерных технологий и систем) №УД-237/б. https://elib.bsu.by/handle/123456789/304976