Минск, 26-27 апреля 2023 г. В 2-х частях. Том 1. с. 172-175. https://elibrary.ru/item.asp?id=54184478

2. Баринова, Н.В. Цифровая экономика, искусственный интеллект, Индустрия 5.0: вызовы современности. / Н.В. Баринова, В.Р. Баринов. // Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2022;(5):23-34. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://doi.org/10.21686/2413-2829-2022-5-23-34. – Дата доступа: 25.02.2024.

3. Шананин, В.А. Методика преподавания основ искусственного интеллекта у студентов математических факультетов в педагогических вузах / В.А. Шананин, А.А. Андрианова // Современное педагогическое образование. – 2022. № 5. – С. 114–118.

4. Папуловская, Н.В. Модель преподавания учебной дисциплины: дидактический аспект / Н.В. Папуловская // Образование и наука. – 2009. № 11 (68). – С. 96 – 103.

О ДОПОЛНЕНИИ К МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ БГУ

Деревяго А.Н., Егоров А.А., Чехменок Т.А.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Данное сообщение относится к циклу работ [1-3], начатых в 2021 году и связанных с методикой преподавания дисциплин «Методы математической физики» и «Уравнения математической физики» на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета. Наряду с классическими методами разделения переменных и интегральных преобразований одним из эффективных способов получения аналитического решения смешанных и краевых задач является метод функций Грина. Предполагается введение этой темы в учебную программу по указанным дисциплинам в рамках практических занятий.

Пусть Ω — ограниченная область в трехмерном пространстве с достаточно гладкой границей S. Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(P), \quad P = (x, y, z) \in \Omega,$$

$$u\big|_S = \varphi(P), \tag{1}$$

называется функция $G(P, P_0)$, удовлетворяющая условиям:

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{PP_0}} + v(P, P_0), \quad G(P, P_0)\big|_S = 0,$$

где $r_{PP_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, $\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве, $v(P, P_0)$ — гармоническая в области Ω функция. Очевидно, что $G(P, P_0)$ определяется при помощи функции $v(P, P_0)$, являющейся решением задачи Дирихле со специальным граничным условием

$$\Delta v = 0, \quad P \in \Omega, \quad v\big|_S = -\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}.$$

В предположении, что для области Ω найдена функция Грина $G(P, P_0)$, решение краевой задачи (1) определяется формулой

$$u(P_0) = -\iint\limits_S \varphi(P)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} ds_P + \iiint\limits_\Omega f(P)G(P, P_0)d\omega_P. \tag{2}$$

Здесь интегрирование производится по координатам точки P.

Аналогично вводится функция Грина в случае двумерной краевой задачи. Она определяется соотношениями

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0}} + v(P, P_0), \quad G(P, P_0)\big|_\Gamma = 0,$$

где $v(P,\ P_0)$ — гармоническая в области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ функция двух переменных. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона при этом дается формулой

$$u(P_0) = -\int\limits_\Gamma \varphi(P)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} d\gamma_P + \iint\limits_\Omega f(P)G(P, P_0)d\omega_P.$$

В ряде задач при построении функции Грина используется так называемый метод электростатических изображений. Его идея состоит в том, что в формуле

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{PP_0}} + v(P, P_0)$$

функция v определяется как потенциал зарядов, расположенных вне проводящей поверхности S и таких, чтобы выполнялось условие

$$v\big|_S = -\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}.$$

Эти заряды называются электростатическими изображениями единичного заряда, помещенного в точку P_0 и создающего в отсутствии поверхности S потенциал $\dfrac{1}{4\pi r_{PP_0}}$.

Используя данный подход, найдем решение задачи Дирихле в полупространстве

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$u\big|_{x=0} = \varphi(y, z), \quad \lim_{r\to\infty} u(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

где r — радиус-вектор точки с координатами (x, y, z).

Поместим в точку $P_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ единичный положительный заряд, который создает в неограниченном пространстве поле с потенциалом $\dfrac{1}{4\pi r_{PP_0}}$. При внесении проводящей плоскости S возникает поле отрицательного единичного заряда с потенциалом $v = -\dfrac{1}{4\pi r_{PP_1}}$, помещенного в точку $P_1(-x_0,\ y_0,\ z_0)$. Суммарный потенциал двух точечных зарядов равен

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{PP_0}} - \frac{1}{4\pi r_{PP_1}},$$

где $r_{PP_1} = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Построенная функция и является искомой функцией Грина. Действительно, функция $G(P,\ P_0)$ является гармонической в полупространстве $x > 0$ по координатам точки P, за исключением точки P_0. С другой стороны, $G(P,\ P_0) = 0$ в точках плоскости $P \in S$, поскольку для таких точек $r_{PP_0} = r_{PP_1}$.

Согласно представлению (2), решение краевой задачи (3) находится по формуле

$$u(P_0) = -\iint_S \varphi(P)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} ds_P. \qquad (4)$$

Вычислим производную по нормали в точке $x = 0$. Поскольку

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} = -\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{x - x_0}{r_{PP_0}^3} - \frac{x + x_0}{r_{PP_1}^3}\right),$$

то в результате будем иметь

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{x=0} = -\frac{x_0}{2\pi\left[x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}}.$$

Возвращаясь к равенству (4), окончательно приходим к решению задачи Дирихле для полупространства

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_S \varphi(P)\frac{x_0}{\left[x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} ds_P,$$

или в развернутом виде

$$u(P_0) = \frac{x_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y, z)}{\left[x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} dydz.$$

Литература

1. Деревяго А. Н., Егоров А. А. О дополнении к методике проведения практических занятий по дисциплине «Методы математической физики» на факультете радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета / Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. / Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2021. – С. 239–242.

2. Березкина Л. Л., Егоров А. А. Об учебной программе по дисциплине «Методы математической физики» для специальностей факультета радиофизики и компьютерных технологий Белгосуниверситета / XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2022) : материалы Междунар. науч. конф., Новополоцк, 31 мая – 3 июня 2022 г. / Новополоцк : Полоцкий государственный университет, 2022. – Ч. 2. – С. 113–115.

3. Деревяго А. Н., Егоров А. А., Рушнова И. И. О некоторых изменениях в методике проведения практических занятий по дисциплине «Методы математической физики» на физическом факультете Белорусского государственного университета / XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2023) : материалы конф., Могилев, 23–27 мая 2023 г. / Могилев : Белорусско-Российский университет, 2023. – Ч. 2. – С. 128–130.