

ОБ ИЗУЧЕНИИ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глецевич М.А., Шилин А.П.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами в случае специальных правых частей подробно изучается студентами физико-математических специальностей. Тем студентам, кто проявляет интерес к дифференциальным уравнениям, можно предложить применить этот метод к более сложному уравнению

$$\sum_{k=0}^n ((A_k - \alpha A_{k+1})x - A_{k+1})y^{(k)} = x^2 Q(x) e^{\beta x}, \quad (1)$$

где $n \geq 2$, A_k , α , β – заданные постоянные, причем $\alpha \neq \beta$, $A_0 = A_{n+1} = 0$, $A_n = 1$,

$Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ – заданный многочлен, $m \geq 1$, $b_m \neq 0$.

Обозначим $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} \lambda^k$, пусть $P(\beta) \neq 0$.

Частное решение y_* уравнения (1) можно искать в виде $y_* = H(x) e^{\beta x}$, где $H(x) = \sum_{j=0}^{m+1} a_j x^j$ – многочлен с неопределенными вначале коэффициентами a_j , $j = \overline{0, m+1}$. После подстановки y_* в уравнение и надлежащих упрощений для нахождения коэффициентов a_j возникает система линейных алгебраических уравнений. Уравнения системы получаются после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях возникающего равенства. Степени x берутся по убыванию начиная с x^{m+2} и заканчивая x^0 . Ограничимся здесь первыми тремя уравнениями этой системы:

$$\begin{aligned} a_{m+1}(\beta - \alpha)P(\beta) &= b_m, \\ a_{m+1}(mP(\beta) - (m+1)(\beta - \alpha)P'(\beta)) + a_m(\beta - \alpha)P(\beta) &= b_{m-1}, \\ a_{m+1}\left((m^2 - 1)P'(\beta) - \frac{m(m+1)}{2}(\beta - \alpha)P''(\beta)\right) + \\ &+ a_m((m-1)P(\beta) + m(\beta - \alpha)P'(\beta)) + a_{m-1}(\beta - \alpha)P(\beta) = b_{m-2}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что при этом последние два уравнения системы будут одинаковыми, имеющими вид

$$a_{m+1}P^{(m+1)}(\beta) + a_m P^{(m)}(\beta) + \dots + a_1 P'(\beta) + a_0 P(\beta) = 0.$$

В результате получится система $m+2$ уравнений с матрицей, имеющей треугольный вид, для нахождения $m+2$ постоянных $a_{m+1}, a_m, \dots, a_0$. Хотя общий вид системы громоздкий, единственность ее решения очевидна, а нахождение этого решения в конкретных случаях является несложным.

Если корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ уравнения $P(\lambda) = 0$ действительные, однократные и $P(\alpha) \neq 0$, то в [1, с. 248-249, пример 17] указана фундаментальная система решений однородного уравнения (1):

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_{n-1} x}, e^{\alpha x} \left(x - \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} \right). \quad (2)$$

Следовательно, в этом случае можно находить общее решение неоднородного уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение

$$xy'' - (3x+1)y' + (2x+2)y = x^2(x+1)e^{-x}.$$

Решение. Так выглядит уравнение (1) при $n=2$, $A_1=-2$, $\alpha=1$, $\beta=-1$, $Q(x)=x+1$. Ищем частное решение в виде $y_* = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)e^{-x}$, тогда получится $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_1 = \frac{13}{36}$, $a_0 = \frac{13}{108}$. Здесь $P(\lambda) = \lambda - 2$, поэтому функции (2) примут вид e^{2x} , $e^x(x+1)$, а общее решение окажется равным

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x(x+1) + \frac{e^{-x}}{108}(18x^2 + 39x + 13).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$xy'' - (x+1)y' - (6x+2)y = x^2.$$

Решение. Это уравнение (1) в случае $n=2$, $A_1=2$, $\alpha=3$, $\beta=0$, $Q(x)=1$. Пусть $y_* = a_1 x + a_0$, тогда $a_1 = -\frac{1}{6}$, $a_0 = \frac{1}{12}$. Т.к. $P(\lambda) = \lambda + 2$, то функции (2) будут равны e^{-2x} , $e^{3x}\left(x - \frac{1}{5}\right)$, и тогда общее решение уравнения запишется по формуле

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{12}(1-2x).$$

Уравнение (1) содержит большой потенциал для приобщения к научно-исследовательской работе студентов младших курсов. Для его изучения не требуются иные знания, чем те, которые приобретаются в основном курсе дифференциальных уравнений. Можно ставить следующие вопросы:

- 1) записать общий вид системы для нахождения коэффициентов $a_{m+1}, a_m, \dots, a_0$ хотя бы для какого-либо небольшого значения m (например, $m=5$);
- 2) составить и решить некоторое количество конкретных уравнений (1);
- 3) указать новые случаи правых частей уравнения, допускающие нахождение частного решения методом неопределенных коэффициентов;
- 4) решить уравнение (1) методом вариации произвольных постоянных для таких правых частей, которые не приводят к слишком сложным интегралам в процессе решения. Указать некоторое количество подобных случаев правых частей, не подходящих при этом для использования метода неопределенных коэффициентов;
- 5) обосновать формулы (2);
- 6) указать фундаментальную систему решений однородного уравнения (1) при более общих предположениях на $P(\lambda)$, чем в случае формул (2).

Литература

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Факториал, 1997. – 304 с.