

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» НА ФАКУЛЬТЕТЕ РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ БГУ

Березкина Л.Л., Глецевич М.А., Филиппова Н.К.

Белорусский государственный университет, г. Минск

На факультетах университетов, готовящих студентов по физическим и радиофизическим специальностям, программа по высшей математике в обязательном порядке включает раздел «Элементы тензорной алгебры». На факультете радиофизики и компьютерных технологий этот раздел входит в курс «Аналитическая геометрия и линейная алгебра». Изучение тензорного исчисления, как правило, начинается с повторения отдельных тем линейной алгебры в новых, так называемых «тензорных» обозначениях. Переход к другим обозначениям отнимает не меньше лекции, во время которой новая информация не излагается, но у слабых и даже средних студентов возникает в голове путаница, в результате чего к изучению тензоров они и не приступают. В связи с этим авторам показалось целесообразным перестроить курс «Линейной алгебры», начиная с раздела «Линейные пространства», основываясь на индексной форме записи. Ниже изложим ключевые моменты подхода к работе с такой формой.

При введении понятия базиса линейного пространства сразу условимся обозначать номера базисных векторов нижними индексами, а номера координат – верхними. Почему именно так, становится понятным после самого главного примера матрицы перехода – матрицы Якоби.

Предположим, что в области G трехмерного пространства задана криволинейная система координат (x^1, x^2, x^3) . В каждой точке M_0 области G векторы $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}(M_0)$ образуют базис. Если задана еще одна криволинейная система координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, то возникает еще один базис $\vec{e}_{i'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}}(M_0)$, причем

$$\vec{e}_{i'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \vec{e}_i.$$

Таким образом, матрицей перехода от базиса $(\vec{e}_i)$ к базису $(\vec{e}_{i'})$ является матрица Якоби $T = (t_{i'}^i)$, где $t_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$. Заметим, что индекс i' , номер базисного вектора, независимо от нашего желания оказался внизу, под чертой. А индекс i , номер координаты, оказался над чертой, т.е. вверху.

Условимся массив чисел, пронумерованных двумя индексами, располагать в матрицу так: первый индекс считаем номером строки, а второй – номером столбца, если они оба верхние или оба нижние. Если же один из индексов верхний, а второй нижний, то номером строки считаем верхний индекс. Кроме того, принимаем соглашение Эйнштейна: если в произведении один и тот же индекс встречается дважды, снизу и сверху, то по нему проводится суммирование, и ни один из индексов в произведении не должен встречаться более двух раз. При этой форме записи знак суммирования опускается, многочлен выглядит как одночлен, что позволяет существенно упростить выкладки, проводя их просто формально.

При таком изложении основные формулы выводятся одним способом, логически вытекающим из определений и не требующим каких-либо искусственных приемов. Эти формулы легко записываются без формального заучивания, а переход от записи основных законов в индексной форме к традиционной матричной осуществляется на основании «правила цепочки», которое заключается в следующем: второй индекс каждого сомножителя должен совпадать с первым индексом следующего. Естественным образом возникают примеры тензоров, что объясняет необходимость введения этого понятия. Для примера получим закон изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса.

Обозначим через $A = (a_i^j)$ и $A' = (a_i'^j)$ матрицы линейного оператора $f: V_n \rightarrow V_n$ в базисах $(\vec{e}_i)$ и $(\vec{e}_i')$ соответственно, $T = (t_i^j)$ – матрицу перехода от первого из этих базисов ко второму, $T^{-1} = (t_i'^j)$ – обратную к ней. Тогда $f(\vec{e}_i') = f(t_i^j \vec{e}_j) = t_i^j f(\vec{e}_j) = t_i^j a_j^k \vec{e}_k = t_i^j a_j^k t_k'^l \vec{e}_l'$. С другой стороны, $f(\vec{e}_i') = a_i'^l \vec{e}_l'$. В силу единственности координат вектора в заданном базисе, получаем: $a_i'^l = t_j^k a_j^l t_i'^k$ (в правой части сомножители располагаем по правилу цепочки). Отсюда и вытекает известное равенство $A' = T^{-1}AT$.

Переход к индексной форме является главной особенностью при чтении этого курса. Есть и другие особенности. Так, при изложении темы «Линии и поверхности второго порядка» приводится определение канонического уравнения второй степени, классификация линий и поверхностей второго порядка проводится на основе этого определения. При изложении темы «Собственные векторы» полностью обосновывается метод алгебраических дополнений, который позволяет в случае простых корней находить собственные векторы очень легко, а для матриц третьего порядка – устно.

Для большей доступности изложения приводятся примеры, многие из которых нестандартные. Приведем один из них.

Пример. Если система $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$ евклидова пространства E ортонормирована, $W = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$, то каждый вектор $\vec{x} \in E$ можно представить в виде $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 = \overrightarrow{\text{pr}}_W \vec{x} \in W$, а $\vec{x}_2 \in W^\perp$. Тогда,

$$|\vec{x}|^2 = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1^2 + \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2^2 = |\vec{x}_1|^2 + |\vec{x}_2|^2.$$

Следовательно, $|\vec{x}_1|^2 = |\vec{x}|^2 - |\vec{x}_2|^2 \leq |\vec{x}|^2$, или $|\overrightarrow{\text{pr}}_W \vec{x}|^2 \leq |\vec{x}|^2$. Полученное неравенство является обобщением известного утверждения аналитической геометрии: длина ортогональной проекции вектора на плоскость или прямую не превосходит длины самого вектора.

В силу того, что заданная система ортонормирована, $|\overrightarrow{\text{pr}}_W \vec{x}|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$, где $x_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i, i = \overline{1, m}$ – коэффициенты Фурье вектора $\vec{x}$ по отношению к ортонормированной системе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$. Таким образом, для любого вектора $\vec{x}$ евклидова пространства справедливо неравенство $\sum_{i=1}^m x_i^2 \leq |\vec{x}|^2$, называемое **неравенством Бесселя**.

Рассмотрим пространство $C[-\pi, \pi]$ со скалярным произведением, заданным с помощью формулы $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. В этом пространстве тригонометрическая система $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$ является ортогональной. Для любой функции $f \in C[-\pi, \pi]$ коэффициенты Фурье по отношению к рассматриваемой ортогональной системе вычисляются следующим образом: $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}(f, 1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, при $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}(f, \cos kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}(f, \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

В этом частном случае неравенство Бесселя формулируется так: для любого фиксированного натурального n :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

В своем докладе авторы планируют рассказать и о других особенностях преподавания вышеназванного курса: о методике проведения практических занятий и применении тестирования, об использовании презентаций при чтении лекций, а также о «маленьких хитростях» при решении отдельных практических задач.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ Бровка Н.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Динамичность развития компьютерной сферы, развитие и внедрение технологий на базе искусственного интеллекта, лавинообразное нарастание объема информации (за последних пять лет человечеством произведено больше информации, чем за всю предшествующую историю) свидетельствуют о необходимости перестройки образовательной системы в целом и математической подготовки в высшей школе, в частности. Программа подготовки студентов математических специальностей в классических университетах включает представительный перечень фундаментальных математических дисциплин, которые, как правило, изучаются на первом-втором курсах. Содержание таких дисциплин, как математический анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия и др. в значительной степени остается инвариантным на протяжении десятилетий, поскольку оно составляет классическое ядро математической науки и является базисом университетской образовательной подготовки. Анкетирование студентов двух первых и четвертого курсов научно-педагогической специальности и специальности «Компьютерная математика и системный анализ» БГУ показало, что возможность получения серьезной фундаментальной математической подготовки и освоение методов, путей использования и создания современных компьютерных разработок в будущей профессиональной деятельности признали ведущими мотивами обучения на механико-математическом факультете 81,7% первокурсников (155 чел), 90,6% второкурсников (163 чел) и 94% (166 чел) выпускников бакалавриата [1]. Таким образом, значимость фундаментального математического знания возрастает по мере того, как оно выступает основанием