

6. Kurbonov, E., Rakhimov, N., Juraev, S., & Islamova, F. (2023). Derive the finite difference scheme for the numerical solution of the first-order diffusion equation IBVP using the Crank-Nicolson method. In E3S Web of Conferences (Vol. 402, p. 03029). EDP Sciences.

## О МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ НЕКОТОРЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ Останов К., Тилавов Р.А.

*Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова,  
г. Самарканд*

Диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными  $x, y$  называется уравнение вида  $mx + ny = k$ , где  $m, n, k, x, y \in \mathbb{Z}$ . Мы предполагаем, что  $m$  и  $n$  — взаимно простые числа. Если это не так, всегда можно разделить обе части уравнения на наибольший общий делитель  $m$  и  $n$  (если в результате в правой части окажется нецелое число, то такое уравнение не будет иметь решение). Кроме того, способ решения зависит от того, насколько велики абсолютные значения чисел  $m$  и  $n$ . Если хотя бы один из коэффициентов (например,  $m$ ) имеет малое абсолютное значение, мы перепишем уравнение в виде  $mx = k - ny$ . Левая часть полученного уравнения (1) делится на  $m$ . Следовательно, правую часть этого уравнения тоже можно разделить на  $m$ . В результате деления на  $m$  находим, что правая часть также делится на  $m$  для одного значения из заданного интервала с учетом всех возможных остатков  $l = 0, 1, \dots, m-1$ . Поскольку число  $m$  мало по абсолютной величине, вариантов тоже немного [1].

Студенты знакомы с методом перебора различных вариантов, при котором им предлагается перебрать все возможные варианты, такие как размещение гостей, поход в кино, способы проведения времени, раздача сладостей среди детей и т. д.

Пример 1. Кролики и фазаны сидят в клетке с 18 ногами. Найдите, сколько особей каждого из них находится в клетке?

Решение: Составим уравнение с двумя неизвестными, где  $x$  — количество кроликов, а  $y$  — количество фазанов:  $4x + 2y = 18$  или  $2x + y = 9$ . Выразим  $y$  через  $x$ :  $y = 9 - 2x$ .

Далее используем метод выбора вариантов: не берем неположительные значения  $x$  (количество ног не может быть 0 или отрицательным), а также  $x > 4$  (в противном случае значение  $y$  отрицательно).

Таким образом, задача имеет четыре решения

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 7 | 5 | 3 | 1 |

Ответ: (1; 7), (2; 5), (3; 3), (4; 1).

Пример 2. Решите уравнение  $5x + 8y = 39$  в натуральных числах.

Решение: Перепишем уравнение в виде  $5x = 39 - 8y$ . Чтобы уравнение имело смысл в условиях задачи,  $y$  должно быть меньше или равно 4, но больше 0:

$0 < y \leq 4$ . Делаем выбор по неизвестному  $y$ :

Если  $y = 1$ , то  $x = (39 - 8y)/5 = (39 - 8 \cdot 1)/5 = 6,2$  не является натуральным числом.

Если  $y = 2$ , то  $x = 4,2$  не является натуральным числом.

Если  $y = 3$ , то  $x = 3$  — натуральное число.

Если  $y = 4$ , то  $x = 1,42$  не является натуральным числом. Ответ: (3; 3).

Теперь покажем использование метода остатков на примере следующей задачи:

Пример 3. При делении числа на 2 в остатке получается 1, а при делении на 3 в остатке 2. Чему равен остаток от деления этого числа на 6?

Решение. При делении целого числа на 6 можно получить один из остатков: 0, 1, 2, 3, 4 и 5, тогда набор неотрицательных целых чисел равен  $6k$ ,  $6k + 1$ ,  $6k + 2$ ,  $6k + 3$ ,  $6k + 4$  и  $6k + 5$ , где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . можно разделить на непересекающиеся множества чисел в форме.

Поскольку данное число при делении на 2 остается 1, то оно нечетное, поэтому необходимо посмотреть числа вида  $6k + 1$ ,  $6k + 3$  и  $6k + 5$ .

Числа вида  $6k + 1$  оставляют остаток 1 при делении на 3, числа вида  $6k + 3$  кратны 3, и только числа вида  $6k + 5$  оставляют остаток 2 при делении на 3. Следовательно, искомое число имеет вид  $6k + 5$ , т.е. При делении на 6 остается остаток 5.

Ответ: Если число делится на 2 – 1 остаток, при делении на 3 – 2 остатка, при делении на 6 – 5 остатков.

Пример 4. Пусть число  $p > 3$  — простое число. Доказать: а) для некоторого  $k \in \mathbb{N}$  справедливо выражение  $p = 6k \pm 1$ ; б)  $(p^2 - 1) : 24$ .

Решение: а) Мы рассмотрим рассуждения по модулю 6. Все натуральные числа делятся на 6 классов  $\{6k\}$ ,  $\{6k + 1\}$ ,  $\{6k + 2\}$ ,  $\{6k + 3\}$ ,  $\{6k + 4\}$ ,  $\{6k + 5\}$ . Простое число  $p$  может принадлежать только классу  $\{6k + 1\}$  или  $\{6k + 5\} = \{6k - 1\}$ . Числа первого класса делятся на 2 и 3, поэтому они являются составными числами. Числа третьего класса делятся на 2, числа четвертого разряда делятся на 3, числа пятого разряда делятся на 2.

б) Поскольку  $p = 6k \pm 1$ , то  $(6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 36k^2 \pm 12k = 12k(3k \pm 1) : 24$ , поскольку первый множитель делится на 12, а третий на 2. Надо было это доказать.

Пример 5. Решите уравнение  $3x - 4y = 1$  в целых числах.

Решение: Перепишем уравнение в виде  $3x = 4y + 1$ . Поскольку левая часть уравнения делится на 3, правая часть также должна делиться на 3. Рассмотрим три случая:

- 1) Если  $y = 3m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , то  $4y + 1 = 12m + 1$  не кратно 3.
- 2) если  $y = 3m + 1$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , то  $4y + 1 = 4(3m + 1) + 1 = 12m + 5$  не кратно 3;
- 3) Если  $y = 3m + 2$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , то  $4y + 1 = 4(3m + 2) + 1 = 12m + 9$  кратно 3, поэтому  $3x = 12m + 9$ ,  $x = 4m + 3$ .

Ответ :  $x = 4m + 3$ ,  $y = 3m + 2$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ .

Применение алгоритма Евклида при решении диофантовых уравнений. Наибольший общий делитель натуральных чисел  $a$  и  $b$  можно найти не разлагая на простые множители эти числа, а воспользовавшись процессом деления остатка. Для этого нужно большее из этих чисел разделить на меньшее, затем меньшее число на остаток первого деления, затем остаток первого деления на остаток второго деления и продолжать этот процесс до тех пор, пока деление не произойдет без остатка (это произойдет на каком-то этапе по мере уменьшения остатков). Последний ненулевой остаток состоит из требуемого НОД ( $a, b$ ).

Для доказательства этого утверждения представим описываемый процесс в виде следующей цепочки уравнений: если  $a > b$ , то

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \end{aligned}$$

.....

$$r_{n-1} = r_nq_n$$

где  $r_1, \dots, r_n$  — положительные остатки, уменьшающиеся с увеличением количества чисел. Из первого равенства следует, что наибольший общий делитель натуральных

чисел  $a$  и  $b$  равен  $r_1$ , общий делитель  $b$  и  $r_1$  — это число  $a$ , поэтому  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r_1)$ . Если перейти к следующим равенствам системы, то получим следующее:  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r_1) = \text{НОД}(r_1, r_2) = \dots = \text{НОД}(r_{n-1}, r_n) = \text{НОД}(r_n, 0) = r_n$ . [2].

Таким образом, для решения диофантовых уравнений первой степени  $ax + by = c$  можно использовать следующие теоремы:

Теорема 1. Если  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то уравнение  $ax + by = 1$  имеет хотя бы одну пару целочисленных решений  $(x, y)$ .

Теорема 2. Если  $\text{НОД}(a, b) = d > 1$  и  $c$  не делится на  $d$ , то уравнение  $ax + by = c$  не будет иметь целого решения.

Доказательство. Предположим, что уравнение  $ax + by = c$  имеет целое решение  $(x_0, y_0)$ .

Поскольку  $a:d, b:d$ , получаем  $c = (ax + by) : d$ . Это противоречит условиям теоремы, и, теорема доказана.

Теорема 3. Если  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то все целые решения уравнения  $ax + by = c$  определяется по формуле:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0c - at \end{cases}$$

где  $(x_0, y_0)$  — целое решение уравнения  $ax \pm by = 1$ ,  $a, t$  — произвольное целое число.

Пример 5. Требуется найти целое решение уравнения  $15x + 37y = 1$  [3].

Способ 1. Используем разложение единицы  $1 = 15 \cdot 5 + 37 \cdot (-2)$   $x = 5, y = -2$

Способ 2. Используя алгоритм Евклида, получаем:

$37 = 15 \cdot 2 + 7, 15 = 2 \cdot 7 + 1$ . Отсюда  $1 = 15 - 2 \cdot 7 = 15 - 2(37 - 15 \cdot 2) = 15 \cdot 5 + (-2) \cdot 37$ .

Тогда  $x_0 = 5, y_0 = -2$

Общим решением уравнения является система  $\begin{cases} x = 5 + 37t, \\ y = -2 - 15t \end{cases}$  где  $t$  — целое число.

Пример 6. В уравнении  $16x \pm 34y = 7$   $\text{НОД}(16, 34) = 2$  и число 7 не делится на 2, то есть целых решений нет.

Пример 7. Найдём наибольший общий делитель чисел 27 и 96 и, выразить в виде  $d = 27x + 96y$ , где  $x$  и  $y$  — целые числа

Решение: Используя алгоритм Евклида, находим наибольший общий делитель  $d$  чисел 27 и 96:  $96 = 3 \cdot 27 + 15, 27 = 1 \cdot 15 + 12, 15 = 1 \cdot 12 + 3, 12 = 4 \cdot 3$ .

Отсюда получаем  $d = (27, 96) = 3$ . Из первого равенства алгоритма Евклида к последнему получаем следующее:

$$15 = 96 - 3 \cdot 27,$$

$$12 = 27 - 1 \cdot 15 = 27 - 1 \cdot (96 - 3 \cdot 27) = 4 \cdot 27 - 1 \cdot 96,$$

$$3 = 15 - 1 \cdot 12 = (96 - 3 \cdot 27) - 1 \cdot (4 \cdot 27 - 1 \cdot 96) = -7 \cdot 27 + 2 \cdot 96.$$

Отсюда находим искомое выражение  $3 = -7 \cdot 27 + 2 \cdot 96$ , то есть  $x = -7, y = 2$ .

Ответ:  $d = (27, 96) = 3; 3 = 27x + 96y$ , где  $x = -7, y = 2$ .

Примечание: можно отметить, что найденное выражение не единственно.

Общее решение уравнения  $3 = 27x + 96y$

$$\begin{cases} x = -7 - 96t, \\ y = 2 + 27t \end{cases} \text{ где } t \in \mathbb{Z}.$$

## Литература

1. Садовничий, Ю. В. ЕГЭ 2017 по математике. Профильный уровень: задание 19. Решение задач и уравнений в целых числах / Ю. В. Садовничий. — Москва : ЭКЗАМЕН, 2017. — 129 с.
2. Бухштаб, А. А. Теория чисел: учебник для пед. вузов / А. А. Бухштаб. —

Москва : Лань, 2008. – 384 с.

3. Корянов, А. Г. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных) : пособие по решению заданий типа. – Брянск, Москва : Просвещение, 2012. – 66 с.

## **КОНТЕНТНО-КОНТЕКСТНОЕ ОБУЧЕНИЕ ИНОСТРАННЫХ СЛУШАТЕЛЕЙ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОГО ФАКУЛЬТЕТА В ФИНАНСОВОМ УНИВЕРСИТЕТЕ** **Степанян И.К.**

*Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва*

От того, насколько знаком иностранный студент с образовательной средой российского университета, в котором он собирается получать или продолжать свое образование, зависят его академические успехи, желание осваивать профессиональные навыки и рекомендовать своим соотечественникам получать образование в России. В статье представлен опыт преподавателей Финансового университета по адаптации слушателей Подготовительного факультета к цифровой образовательной среде при прохождении дисциплин математического цикла.

Подготовительный факультет для иностранных граждан в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации образован в декабре 2015 года. На сайте университета [1] указано, что сегодня факультет готовит иностранных граждан для получения высшего образования в российских вузах по широкому спектру направлений: экономическому, инженерно-техническому, гуманитарному, медико-биологическому. По данным на 2023 год факультет подготовил более тысячи иностранных абитуриентов. Например, в 2022-23 учебном году успешно продолжили обучение, в том числе, в Финансовом университете, 126 слушателей из разных стран и разных континентов (таблица 1)

**Таблица 1.** Состав обучающихся на Подготовительном факультете в 2022-23 у.г.

|                   |     |
|-------------------|-----|
| Азия              | 41  |
| Африка            | 22  |
| Ближний Восток    | 44  |
| Европа            | 6   |
| Латинская Америка | 7   |
| Индия и Индонезия | 6   |
| Итого:            | 126 |

Задачи преподавания математики иностранным слушателям являются традиционными для подготовительных факультетов, и могут быть обобщены следующим образом:

- научить читать и понимать символическую запись математических выражений на русском языке;

- решать математические задачи как принято в российских школах и вузах.

Помимо решения традиционных задач, для успешной интеграции абитуриентов в обучение на русском языке, мы считаем важной задачу познакомить слушателей с цифровой образовательной средой университета (образовательным порталом, электронной библиотекой, Онлайн академия, ЭУК на [edu.fa.ru](http://edu.fa.ru)) [2].

Предмет «Математика» для слушателей, поступающих в бакалавриат, построен по принципу контентного изучения языка. Теоретический материал за 1-11 классы российской школы излагается с точки зрения функционального подхода. Это