

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. С. Коваленко Н. А. Дегтяренко М. Н. Василевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по естественно-научному образованию
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования,
обучающихся по специальностям
«химия», «химия лекарственных соединений»,
«химия высоких энергий», «фундаментальная химия»*

МИНСК
БГУ
2023

УДК 517(075.8)(076.5)

ББК 22.161я73-5

К56

Рецензенты:

кафедра высшей математики факультета цифровой экономики
Белорусского государственного экономического университета
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук,
доцент *В. В. Косьянчук*);

член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор химических наук, профессор *Д. В. Свиридов*

Коваленко, Н. С.

К56 Математический анализ. Практикум : учеб.-метод. пособие /
Н. С. Коваленко, Н. А. Дегтяренко, М. Н. Василевич. — Минск : БГУ,
2023. — 351 с.

ISBN 978-985-881-543-1.

Кратко представлен теоретический материал, примеры и задачи по многим темам курса высшей математики. Издание составлено таким образом, чтобы можно было легко усвоить основные математические понятия и их взаимосвязи с химическими и физико-химическими процессами. Особое внимание уделено задачам и примерам с химическим и физико-химическим содержанием.

Для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям «химия», «химия лекарственных соединений», «химия высокоэнергетических систем», «фундаментальная химия».

УДК 517(075.8)(076.5)

ББК 22.161я73-5

ISBN 978-985-881-543-1

© Коваленко Н. С., Дегтяренко Н. А.,
Василевич М. Н., 2023

© БГУ, 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие соответствует типовой учебной программе по дисциплине «Высшая математика» для студентов специальностей химического профиля и является продолжением издания «Практикум по высшей математике для студентов химических специальностей» Н. С. Коваленко, М. Н. Василевича, В. И. Яшкина (Минск, 2021). Книга входит в учебно-методический комплекс математического цикла для студентов химических специальностей.

В начале каждого раздела издания представлены краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, далее даются типовые примеры с подробными решениями, в конце — задачи разной степени сложности. Особое внимание уделяется задачам и примерам с химическим и физико-химическим содержанием. Приведенный теоретический материал не является исчерпывающим, а отражает только вопросы конкретных тем, при подготовке которых следует затратить достаточное количество времени. Полный справочный материал содержится в изданиях, указанных в списке литературы.

Для овладения курсом высшей математики важным этапом является самостоятельная работа. В связи с этим при составлении книги авторы стремились изложить материал так, чтобы можно было легко усвоить методы решения задач по курсу высшей математики, привести достаточное количество упражнений для выработки навыков решения типовых задач, подобрать примеры, способствующие разъяснению основных математических понятий и их взаимосвязи с химическими и физико-химическими процессами. Все указанное и определило структуру учебно-методического пособия.

Над изданием работал авторский коллектив: доцент, кандидат физико-математических наук М. Н. Василевич (предисловие; п. 6, 7; приложения (совместно с Н. С. Коваленко)), доцент, кандидат физико-математических наук Н. А. Дегтяренко (п. 1; задания для самостоятельной работы к п. 2, 3; п. 2 (совместно с Н. С. Коваленко)), профессор, доктор физико-математических наук Н. С. Коваленко (предисловие; п. 2 (совместно с Н. А. Дегтяренко)); п. 3—8; приложения (совместно с М. Н. Василевичем).

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам.

1

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1.1. Числовые функции одной действительной переменной

1.1.1. Понятие числовой функции. Способы задания числовых функций

Пусть даны два непустых подмножества X и Y множества действительных чисел $\mathbf{R}$.

Определение. Говорят, что на множестве X задана однозначная *числовая функция* f , действующая из X в Y , если указано правило, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$. Кратко это можно записать так: $y = f(x)$, $x \in X$ или $f: X \rightarrow Y$ ($X \xrightarrow{f} Y$). (В дальнейшем будем для краткости называть однозначные числовые функции просто функциями.) Кроме того, говорят, что функция f *отображает множество X на множество Y* . Множество X называют *областью определения функции* (обозначают $D(f)$), а множество всех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, — *областью значений функции* (обозначают $E(f)$). Переменную $x \in X$ называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную $y \in Y$ — *зависимой переменной* или *значением функции*. Относительно x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости. Например, функция

$$y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x < 2, \\ x - 3 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$$

определена при всех $x \in \mathbf{R}$ и имеет область значений $[-1; +\infty)$. Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то предполагается, что она совпадает со множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ является отрезок $[-3; 3]$.

Приведем основные способы задания функций.

Аналитический способ — функцию задают при помощи одной или нескольких формул, указывают уравнение, связывающее значение функции и аргумент. Если в этом уравнении зависимая переменная выражена через независимую, то говорят, что функция задана *явным аналитическим способом* или *явно*. Если же уравнение не разрешено относительно зависимой переменной, то говорят, что функция задана *неявно*.

Табличный способ — приводят таблицу, в которой указаны значения аргумента и соответствующие им значения функции (например, таблица квадратных корней, таблица синусов, таблица логарифмов). Недостатком способа является отсутствие информации о значениях функции для значений аргумента из области определения функции, которых нет в таблице.

Графический способ — приводят график функции. *Графиком функции* $y = f(x)$ ($x \in D(f)$, $y \in E(f)$) называют геометрическое место точек (x, y) плоскости, где $x \in D(f)$, $y \in E(f)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Уравнение $y = f(x)$ называется *уравнением графика*. Преимуществом такого способа является наглядность задания функции, недостатком — неточность. Отметим, что не всякая линия является графиком некоторой функции. Например, множество точек любой окружности не может быть графиком функции, поскольку на окружности можно указать точки, одному значению абсциссы x которых соответствуют два различных значения ординаты y_1 и y_2 .

Параметрический способ — аргумент и значение функции задают как функции так называемого параметра. Параметр принадлежит множеству такому, что для любого значения параметра из этого множества выполняется система условий: $x \in D(f)$, $y \in E(f)$. Функции, заданные параметрическим способом, широко используются в естествознании, где x и y выступают в роли числовых характеристик процесса, зависящих от одного и того же параметра. Например, траектория движения точки на плоскости может быть описана как изменение координат x и y этой точки в выбранной системе координат в зависимости от времени t .

Алгоритмический (рекурсивный) способ — определяют значение или значения функции для одного или, возможно, нескольких начальных значений аргумента, для остальных — через предыдущие. Этот способ используется, например, в случае, когда $D(f) \subset \mathbb{N}$. Зададим с помощью такого способа функцию факториала натурального аргумента:

$$\begin{aligned}0! &= 1, \quad 1! = 1, \\(n+1)! &= n!(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

1.1.2. Некоторые характеристики функций

Определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве $D \subset \mathbf{R}$, называют *четной* (*нечетной*) на этом множестве, если для любого значения аргумента $x \in D$ выполняется условие $-x \in D$ и при этом $f(-x) = f(x)$ ($f(x) = -f(x)$ соответственно).

Определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве $D \subset \mathbf{R}$, называют *не убывающей* (*не возрастающей*) на этом множестве, если для любых значений аргумента $x_1, x_2 \in D$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется условие $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$ соответственно). Кроме того, если в этом определении заменить знаки неравенств на строгие, то получим определение *строго возрастающей* (*строго убывающей*) функции. Их также называют *строго монотонными* функциями. *Монотонными* называют строго монотонные, неубывающие и невозрастающие функции.

Определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве $D \subset \mathbf{R}$, называют *ограниченной* на этом множестве, если существует такая постоянная $M > 0$, что для любого значения аргумента $x \in D$ выполняется условие $|f(x)| \leq M$.

Определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве $D \subset \mathbf{R}$, называют *периодической* на этом множестве, если существует такая постоянная $T > 0$, что для любого значения аргумента $x \in D$ выполняются условия:

$$x + T \in D, \quad x - T \in D, \quad f(x + T) = f(x), \quad f(x - T) = f(x).$$

Предполагается, что среди всех таких постоянных существует наименьшая из них, которую называют *основным периодом* функции $f(x)$.

1.1.3. Обратная, сложная и элементарные функции

Определение. Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $y \in E(f)$. Если каждому значению $y \in E(f)$ соответствует единственное значение $x \in D(f)$, то определена однозначная функция $x = \phi(y)$, $y \in E(f)$, $x \in D(f)$. Такую функцию называют *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначают $x = \phi(y) = f^{-1}(y)$.

Например, если $y = 3x$, то $x = f^{-1}(y) = y/3$, где $x, y \in \mathbf{R}$; если $y = \sin x$, то $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1; 1]$.

Теорема 1.1. Функция $y = f(x)$, действующая из $D(f)$ в $E(f)$, имеет обратную тогда и только тогда, когда эта функция задает взаимно однозначное соответствие между множествами $D(f)$ и $E(f)$.

Следствие. Любая строго монотонная функция имеет обратную, причем они обе либо строго возрастают, либо строго убывают.

Заметим, что если точка $M_1(x_0; y_0)$ является точкой графика функции $y = f(x)$ и существует обратная функция $x = \phi(y)$, то точка $M_2(y_0; x_0)$ является точкой графика функции $x = \phi(y) = f^{-1}(y)$. Все точки вида $M_1(x_0; y_0)$ и $M_2(y_0; x_0)$ симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов. Таким образом, *графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.*

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D , а функция $u = \phi(x)$ — на множестве D_1 , причем для любого значения $x \in D_1$ значение $u = \phi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\phi(x))$, которую называют *сложной функцией* от аргумента x или *композицией (суперпозицией)* функций f и ϕ (обозначают $f \circ \phi$). При этом f называют *внешней*, а ϕ — *внутренней* функцией. Можно рассматривать композиции и более чем двух функций. Заметим, что $f \circ \phi \neq \phi \circ f$. Например, если $\phi: \mathbf{R} \xrightarrow{2x} \mathbf{R}$, $f: \mathbf{R} \xrightarrow{\sin x} [-1; 1]$, то $f \circ \phi = \sin(2x)$; $\phi \circ f = 2\sin x$.

К основным элементарным функциям относят следующие: постоянную $y = c$, $c \in \mathbf{R}$; степенную $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$; показательную $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; логарифмическую $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$.

Если функция задается одной формулой, составленной из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и композиций, то ее относят к так называемым *элементарным* функциям. Примером функции, которая не является элементарной, может служить функция знака переменной x :

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

1.2. Числовые последовательности.

Предел числовой последовательности

Часто в формулировках обозначение множества $\mathbf{R}$ всех действительных чисел дополняют символами $-\infty$ и $+\infty$, называемыми соответственно *минус бесконечностью* и *плюс бесконечностью*, считая по определению, что любое действительное число x удовлетворяет неравенству $-\infty < x < +\infty$. При этом предполагают, что справедлива следующая арифметика: 1) $x \pm \infty = \pm\infty$;

2) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$; 3) $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, $x > 0$; 4) $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, $x < 0$.

Иногда используют один символ ∞ (бесконечность без знака), в формулировках также — символ $\bar{\mathbf{R}}$ — *расширенная вещественная прямая*, подразумеваемая символическое объединение вида $\bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty)$.

Определение. Под *числовой последовательностью* $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимают функцию $x_n = f(n)$, заданную на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

Для числовой последовательности приняты обозначения $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$; $\{x_n\}$; $x_n, n \in \mathbf{N}$. Ее обычно задают в явном аналитическом виде: при помощи формулы *n*-го члена или *общего члена* последовательности, например $x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$. В приведенном примере $x_1 = 1, x_2 = -2, \dots, x_n = (-1)^{n+1} \cdot n, \dots$. Согласно формуле *n*-го члена последовательности с каждым натуральным числом *n* сопоставляется единственное действительное число x_n . Иногда используют рекурсивный способ. Числовая последовательность допускает геометрическую интерпретацию. Ее изображают в виде точек координатной оси (числовой прямой, на которой зафиксировано положительное направление, начало отсчета и выбран масштаб для измерения длин).

Приведем примеры числовых последовательностей. Формулы

$$v_n = n^2 + 1, \quad y_n = (-1)^n n, \quad z_n = \frac{1}{n}, \quad w_n = \frac{n-1}{n}$$

задают соответственно следующей последовательности:

$$\begin{aligned} \{v_n\} &= \{2, 5, 10, \dots, n^2 + 1, \dots\}; \\ \{y_n\} &= \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\}; \\ \{z_n\} &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}; \\ \{w_n\} &= \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}. \end{aligned}$$

Определения ограниченной, монотонной, строго монотонной последовательностей вводят аналогично соответствующим определениям для функций, но при этом x заменяют на x_n , а x — на $n \in \mathbf{N}$. Такие определения можно привести и для монотонных числовых последовательностей.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей* (*убывающей*), если для любого номера $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$), т. е. каждый последующий член больше (меньше) предыдущего.

Если для любого номера $n \in \mathbf{N}$ $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$), т. е. каждый последующий член последовательности не меньше (не больше) предыдущего, то последовательность называют *неубывающей* (*невозрастающей*).

Возрастающие и убывающие последовательности называют *строго монотонными*, а строго монотонные, неубывающие и невозрастающие — *монотонными*.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (снизу), если существует такое число M (соответственно число m), что $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) для любого числа $n \in \mathbf{N}$. Если последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной и сверху, и снизу, то ее называют *ограниченной*.

Так, в приведенных ранее примерах последовательности $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ ограничены ($0 < z_n \leq 1$, $0 \leq w_n < 1$); последовательность $\{v_n\}$ ограничена снизу ($v_n \geq 2$), но не сверху; последовательность $\{y_n\}$ неограниченная (не является ограниченной ни сверху, ни снизу). Последовательности $\{v_n\}$, $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ монотонные ($\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ — строго возрастающие, $\{z_n\}$ — строго убывающая), а последовательность $\{y_n\}$ не является монотонной.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c , то ее называют *постоянной*.

Определение. *Окрестностью* точки $x_0 \in \mathbf{R}$ называют любой открытый интервал на действительной оси, содержащий эту точку. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где ε — любое положительное число, называют ε -*окрестностью* точки x_0 (обозначают такую окрестность $U_\varepsilon(x_0)$, читают как «эпсилон-окрестность точки x_0 »). При этом x_0 называют *центром*, а ε — *радиусом* окрестности.

Из геометрического смысла модуля разности следует, что ε -окрестность точки x_0 можно записать так: это все такие значения $x \in \mathbf{R}$, которые удовлетворяют неравенству $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ или $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$, т. е. $|x - x_0| < \varepsilon$. Геометрическим образом последнего неравенства будет интервал на действительной оси с центром в точке x_0 и радиусом ε .

Определение. Точка A называется *предельной точкой* множества M , если в окрестности любого (в том числе сколь угодно малого) радиуса точки A имеется по крайней мере еще одна точка множества M , кроме точки A .

В любой окрестности предельной точки содержится, таким образом, бесконечное множество точек множества M . Сама предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству M .

Определение. Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$ при $n \rightarrow +\infty$, если для любого значения $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε (зависящий от ε), начиная с которого все члены последовательности отличаются от A по модулю меньше, чем на ε , т. е. при всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Краткая форма записи этого определения выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \forall n > n_\varepsilon,$$

$$n \in \mathbf{N}, \quad |x_n - A| < \varepsilon.$$

Используются обозначения $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$ (читается как «предел, или лимит, x_n равен числу A при n , стремящемся к плюс бесконечности»), а также $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ ($x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow +\infty$) (читается как « x_n стремится к числу A при n , стремящемся к плюс бесконечности»). Стремление к бесконечности означает, что натуральное число n (номер элемента последовательности) неограниченно увеличивается. Геометрический смысл этого определения таков: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$, если для любой ε -окрестности точки A на действительной оси найдется такой номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (зависящий от ε), что все члены последовательности, номера которых больше, чем n_ε , попадут в указанную ε -окрестность точки A . Чем меньше радиус окрестности $U_\varepsilon(A)$, тем бóльшим или, во всяком случае, не меньшим будет номер n_ε , при этом внутри любой ε -окрестности точки A находится бесконечно много членов последовательности, а вне ее их может быть лишь конечное число (или не быть вовсе). Последовательность, имеющую конечный предел при $n \rightarrow +\infty$, называют *сходящейся* к этому пределу, в противном случае — *расходящейся*.

Пример 1.1. Докажите по определению, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Решение. Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует такой номер n_ε , который соответствует данному ранее определению предела числовой последовательности, т. е. при всех $n > n_\varepsilon$ должно выполняться неравенство $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$. Эквивалентным ему будет неравенство $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ или $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, возьмем в качестве номера n_ε наименьшее натуральное число, которое больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда для всех натуральных значений $n > n_\varepsilon$ неравенство $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ будет верным. Мы обосновали, что такой номер n_ε , о котором говорится в определении предела последовательности, существует, и указали, как его найти при любом заданном $\varepsilon > 0$. Итак, по определению предела последовательности $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

В данном примере если в качестве числа $\varepsilon > 0$ взять, например, число $\varepsilon = \frac{1}{10}$, то начиная с одиннадцатого номера все члены последовательности попадут в интервал $U_{\frac{1}{10}}(1) = \left(1 - \frac{1}{10}; 1 + \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}; 1\frac{1}{10}\right)$. Вне такого интервала окажутся члены числовой последовательности только с первого номера

по десятый. Если в качестве числа $\varepsilon > 0$ взять, например, число $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то начиная с номера 101 все члены последовательности попадут в интервал $U_{\frac{1}{100}}(1) = \left(1 - \frac{1}{100}; 1 + \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{99}{100}; 1\frac{1}{100}\right)$. Вне такого интервала окажутся

члены последовательности только с первого номера по сотый. Как видно, при уменьшении радиуса окрестности точки $A = 1$ номер n_ε увеличился.

Пример 1.2. Докажите по определению, что предел последовательности, все члены которой равны некоторому числу c , равен числу c .

Решение. Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует такой номер n_ε , который соответствует данному ранее определению предела последовательности, т. е. при всех $n > n_\varepsilon$ должно выполняться неравенство $|c - c| < \varepsilon$. Это неравенство очевидно выполняется для всех членов последовательности, начиная с первого, поэтому в качестве n_ε можно взять, например, $n_\varepsilon = 1$. Для всех натуральных значений $n > n_\varepsilon$ неравенство $|c - c| < \varepsilon$ будет верным. Мы обосновали, что такой номер n_ε , который требуется в определении предела последовательности, существует, и указали, что он равен единице при любом заданном $\varepsilon > 0$. Итак, по определению предела последовательности $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$.

Заметим, что верным будет и такое утверждение: предел последовательности, все члены которой равны числу c начиная с некоторого номера k , равен числу c . В этом случае в качестве n_ε можно взять, например, $n_\varepsilon = k$.

Теорема 1.2. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Определение. Сходящуюся последовательность, предел которой при $n \rightarrow +\infty$ равен нулю, называют *бесконечно малой последовательностью*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *плюс бесконечно большой* (минус бесконечно большой, бесконечно большой), если ее предел при $n \rightarrow +\infty$ равен $+\infty$ ($-\infty$, ∞ соответственно).

Поясним последнее определение, например, для случая плюс бесконечно большой последовательности. Оно означает, что для любого, в том числе сколь угодно большого, числа $E > 0$ существует номер n_E (зависящий от числа E), начиная с которого все члены последовательности являются большими, чем E , т. е. при всех $n > n_E$ выполняется неравенство $x_n > E$. Геометрический смысл этого определения таков: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, если для любого, в том числе сколь угодно большого, числа $E > 0$ существует номер n_E (зависящий от E), начиная с которого все члены последовательности лежат на координатной оси правее числа E . Иначе это выражают словами, что все члены последовательности, начиная с указанного, принадлежат E -окрестности плюс бесконечности (обозначают $x_n \in U_E(+\infty)$). Термин « E -окрестность плюс

бесконечности» введен для краткости записи формулировок по аналогии с термином «окрестность точки $x_0 \in \mathbf{R}$ ». В случае окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}$ мы имели в виду конечный интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, содержащий точку x_0 , а здесь подразумеваем бесконечный интервал $(E; +\infty)$.

Приведем краткие формульные записи данных ранее эквивалентных определений плюс бесконечно большой последовательности, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$:

$$\forall U_E(+\infty) \exists n_E \in \mathbf{N} : \forall n > n_E, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x_n \in U_E(+\infty);$$

$$\forall E > 0 \exists n_E \in \mathbf{N} : \forall n > n_E, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x_n > E.$$

Определение минус бесконечно большой (бесконечно большой) последовательности дается аналогичным образом, только неравенство $x_n > E$ заменяют на $x_n < -E$ ($|x_n| > E$ соответственно), а окрестность $U_E(+\infty)$ заменяют на $U_E(-\infty)$ ($U_E(\infty)$ соответственно). На рис. 1.1 представлена иллюстрация упомянутых бесконечных интервалов.

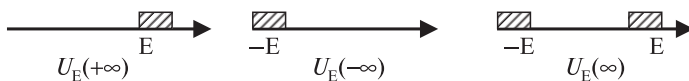


Рис. 1.1

Бесконечно большие последовательности считаются расходящимися на множестве $\mathbf{R}$, но сходящимися на множестве $\bar{\mathbf{R}}$.

Примерами бесконечно малой, плюс бесконечно большой, минус бесконечно большой, бесконечно большой последовательностей могут служить соответственно числовые последовательности

$$x_n = 1/n, \quad x_n = n, \quad x_n = -n, \quad x_n = (-1)^n \cdot n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

1.3. Основные свойства пределов числовых последовательностей

Сформулируем основные свойства пределов числовых последовательностей, разбив их на три группы. В формулировках свойств под суммой конечного числа числовых последовательностей будем понимать такую последовательность, n -й член которой представляет собой сумму n -х членов всех складываемых последовательностей. Под произведением конечного числа числовых последовательностей будем понимать такую последовательность, n -й член которой представляет собой произведение n -х членов всех перемножаемых последовательностей.

Общие свойства пределов числовых последовательностей

1. Если числовая последовательность имеет конечный предел при $n \rightarrow +\infty$, то она является ограниченной последовательностью. Обратное утверждение неверно. Из ограниченности числовой последовательности не следует, что она сходится на множестве $\mathbf{R}$.

2. Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

3. Произведение конечного числа числовых последовательностей, из которых хотя бы одна бесконечно малая, а остальные ограниченные (к ним в том числе относятся, согласно свойству 1, все сходящиеся на множестве $\mathbf{R}$ последовательности), есть бесконечно малая последовательность.

4. Если числовая последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от нуля, является бесконечно малой при $n \rightarrow +\infty$, то последовательность $\{1/x_n\}$ — бесконечно большая при $n \rightarrow +\infty$. Если числовая последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от нуля, является бесконечно большой при $n \rightarrow +\infty$, то последовательность $\{1/x_n\}$ — бесконечно малая при $n \rightarrow +\infty$.

5. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел (теорема Вейерштрасса).

Замечание 1.1. Всякая возрастающая неограниченная последовательность является плюс бесконечно большой, а всякая убывающая неограниченная последовательность — минус бесконечно большой.

Свойства пределов числовых последовательностей, связанные с арифметическими операциями

1. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся на множестве $\mathbf{R}$, то:

а) сходится их сумма (разность), причем справедлива формула

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n;$$

б) сходится произведение $\{Cx_n\}$ последовательностей $\{x_n\}$ и $\{C\}$, где C — постоянная величина, причем справедлива формула

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Cx_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n;$$

в) сходится произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, причем справедлива формула

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n;$$

г) при условии, что $y_n \neq 0$ при любом значении $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \neq 0$, сходится их отношение, причем верна формула

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n}.$$

2. Если хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, сходящихся на $\mathbf{R}$, бесконечно большая определенного знака, то при нахождении пределов следует пользоваться правилами, которые схематично и кратко можно записать так (в приведенных далее формулах α означает некоторое действительное число):

- | | |
|--|---|
| 1) $\alpha + (+\infty) = +\infty$; | 6) $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$; |
| 2) $\alpha + (-\infty) = -\infty$; | 7) $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$; |
| 3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; | 8) $\alpha \cdot (+\infty) = +\infty$, $\alpha \cdot (-\infty) = -\infty$, $\alpha > 0$; |
| 4) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; | 9) $\alpha \cdot (+\infty) = -\infty$, $\alpha \cdot (-\infty) = +\infty$, $\alpha < 0$. |
| 5) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$; | |

Замечание 1.2. Формулы из свойства 1 (см. с. 13) могут применяться лишь к последовательностям $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, которые сходятся на множестве $\mathbf{R}$, т. е. в конечном смысле.

Допустим, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$, то последовательность $\{x_n - y_n\}$ может в конкретных примерах сходиться к одному конечному пределу, в других — к другому, а в некоторых — не иметь конечного предела вовсе, например:

$$\begin{aligned} 1) x_n &= n^2 + 1, y_n = n^2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 1; \\ 2) x_n &= n^2 + 2, y_n = n^2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 2; \\ 3) x_n &= n^2 + 1, y_n = n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1 - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right) = +\infty, \text{ так как справедливо равенство} \\ &\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right) = 1 \text{ на основании свойства 1, а и свойства 4 пределов сходящихся последовательностей.} \end{aligned}$$

Краткую символьную запись $[(+\infty) - (+\infty)]$, соответствующую рассмотренной ситуации, называют *неопределенностью*. «Раскрыть неопределенность» означает найти предел конкретного выражения в данном случае или доказать, что его не существует вовсе. Подобная ситуация возникает, например, когда обе последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремятся к нулю

и не представляется возможным сформулировать некое общее утверждение о пределе отношения $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$. Тогда получают неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Приведем примеры:

$$1) x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$2) x_n = \frac{3}{n}, y_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 3;$$

$$3) x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Существуют и другие случаи, приводящие к неопределенностям. Перечислим *основные неопределенности*:

$$[(+\infty) - (+\infty)], [(-\infty) - (-\infty)], \left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right], [0 \cdot \infty], [1^\infty], [0^0], [\infty^0].$$

Свойства пределов числовых последовательностей, выраженные неравенствами

1. Пусть последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ имеют конечные пределы, и пусть начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n < y_n$ или $x_n \leq y_n$ ($x_n > y_n$ или $x_n \geq y_n$). Тогда справедливо следующее свойство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \right).$$

Замечание 1.3. Свойство говорит о том, что при выполнении его условий в неравенстве можно переходить к пределу, причем неравенство, полученное в результате предельного перехода, является нестрогим. Строгое неравенство между соответствующими членами последовательностей не влечет строгого неравенства для пределов.

$$\text{Так, } x_n = 1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} = y_n \text{ для всех } n \in \mathbf{N}, \text{ но } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1.$$

Следствие. Если все члены сходящейся последовательности неотрицательные (неположительные) начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbf{N}$, то предел последовательности — неотрицательное (неположительное) число.

2. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$, где $a \in \mathbf{R}$ либо a представляет собой бесконечность определенного знака, и для всех членов последовательности $\{z_n\}$ начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$x_n \leq z_n \leq y_n$, то справедлива формула $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$ (теорема о сжатой последовательности).

3. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $a > b$ ($a < b$), где $a, b \in \mathbf{R}$, то существует такой номер $n_0 \in \mathbf{N}$, начиная с которого для всех членов последовательности выполняется неравенство $x_n > b$ ($x_n < b$).

Следствие. Если числовая последовательность сходится к отрицательному пределу, то начиная с некоторого номера все ее члены отрицательны, а если последовательность сходится к положительному пределу, то начиная с некоторого номера все ее члены положительны.

Выберем из последовательности $\{x_n\}$ бесконечно много элементов с номерами $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ такими, что $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, и запишем члены последовательности в таком же порядке, как их номера. Получим *подпоследовательность* данной последовательности. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $a \in \mathbf{R}$,

то любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ также сходится к числу a . Отсюда следует, что для доказательства расходимости последовательности достаточно выделить хотя бы две ее подпоследовательности, которые сходятся к различным пределам.

В качестве примера рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbf{N}$. Подпоследовательность, образованная членами этой последовательности с нечетными номерами, сходится к -1 , а подпоследовательность, образованная членами этой последовательности с четными номерами, — к 1 . Следовательно, данная последовательность расходится и дает пример расходящейся и ограниченной последовательности.

1.4. Число e . Примеры нахождения пределов последовательностей при помощи основных свойств

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, общий член которой $x_n = (1 + 1/n)^n$. Можно доказать, что она ограниченная и строго возрастающая. Следовательно, по теореме Вейерштрасса последовательность имеет конечный предел, который называют *экспонентой* и, следуя Л. Эйлеру, обозначают символом e (известно, что e — иррациональное число, $e \approx 2,71828\dots$):

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

С числом e связана система логарифмов, которая в ряде случаев оказывается более удобной, чем десятичная или любая другая система логарифмов. Логарифм числа x по основанию e (обозначают $\ln x$) называют *натуральным* логарифмом этого числа. Существует формула, связывающая десятичный

логарифм числа x с его натуральным логарифмом: $\ln x \approx 2,303 \lg x$. Функцию $y = e^x$, обратную функции натурального логарифма, называют экспоненциальной. Она играет важную роль в приложениях математического анализа. В частности, закон растворения лекарственных веществ из таблеток выражают экспоненциальной функцией $c = c_0 e^{-kt}$, где c — количество лекарственного вещества, оставшегося в таблетке ко времени растворения t ; c_0 — исходное количество лекарственного вещества в таблетке; k — постоянная скорости растворения. Экспонента присутствует, например, в записи закона изменения длины l клетки с течением времени t : $l = l_0 e^{(\alpha-\beta)t}$, где l_0 — длина клетки в начале роста; α, β — постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада. Число e находит применение при выводе закона, которому подчиняются многие естественные процессы: распад радиоактивного вещества, размножение бактерий, рост кристаллов и др. Он называется *законом непрерывного (органического) роста*.

Пример 1.3. Пусть закон, описывающий рост количества изучаемых объектов, имеет вид $A_n = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{t \cdot n}$, где A_n — количество объектов к моменту времени t (усл. ед.), где t отсчитывают от начала изучения процесса; a — исходное количество изучаемых объектов; p — процент увеличения единичного количества объектов в течение некоторого условного единичного периода времени. Вычислите $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$, если $a = 10000$, $p = 50\%$, $t = 1$.

Решение. Рассмотрим ситуацию, когда проценты присоединяются по отдельным частям единичного периода времени, равным его доле $1/n$, причем данный в условии процент p относится к целому единичному периоду времени и начисляется равномерно. Это означает, что по истечении доли $1/n$ первого такого периода количество объектов увеличивается на $\frac{p}{100n} \cdot a$ и становится равным $a_1 = a + \frac{p}{100n} \cdot a = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)$; по истечении двух таких долей периода количество объектов становится равным $a_2 = a_1 + \frac{p}{100n} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^2$; по истечении n таких долей, а значит, одного целого единичного периода времени — $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n$; по истечении $2n$ таких долей, а значит, двух единичных периодов — $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{2n}$ и т. д. Получаем формулу

$$A_n = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{t \cdot n}.$$

Вычислим $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$, если $a = 10\,000$, $p = 50\%$, $t = 1$:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100n}\right)^n = 10\,000 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\frac{1}{2n} = \frac{1}{m}, n = \frac{m}{2}\right] = \\ &= 10\,000 \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{2}} = 10\,000 \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} = 10\,000 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 16\,487. \end{aligned}$$

При вычислении предела были использованы свойства пределов последовательностей, замена переменных и определение экспоненты. Результат говорит о том, что при любом сколь угодно большом числе n количество объектов в конце одного периода времени при указанных условиях не может превысить 16 487. Для сравнения: вычисление простого

процента дает ответ $a + \frac{p}{100} \cdot a = 15\,000$.

Пример 1.4. Найдите пределы числовых последовательностей:

- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{8n-4};$ | 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1};$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5n^2 + n + 1};$ | 6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-2)! - n!}{(n-1)!};$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1});$ | 7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}\right);$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^2 + 2}{n^3 + 3};$ | 8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}.$ |

Решение:

1) преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, вынося в числителе и знаменателе дроби множитель n за скобки и затем сокращая дробь на n . Используя свойства пределов последовательностей из п. 1.3, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{8n-4} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{8 - \frac{4}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{5}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(8 - \frac{4}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n}} = \\ &= \frac{2 + 5 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}}{8 - 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}} = \frac{2 + 5 \cdot 0}{8 - 4 \cdot 0} = \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

2) используем свойство 2 (см. с. 14) и свойство 4 (см. с. 13):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5n^2 + n + 1} = \left[\frac{3}{+\infty} \right] = 0;$$

3) домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

Найдем предел полученного выражения при $n \rightarrow +\infty$, используя указанные ранее свойства:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) &= [(+\infty) - (+\infty)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \\ &= \left[\frac{2}{+\infty} \right] = 2 \cdot 0 = 0; \end{aligned}$$

4) вынесем старшую степень переменной n в числителе и знаменателе дроби за скобки, затем сократим дробь на n^3 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^2 + 2}{n^3 + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{3}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} \right)}{1 + \frac{3}{n^3}}.$$

Выражение в скобках в числителе дроби и знаменатель дроби на основании свойств пределов последовательностей стремятся к единице при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, их отношение тоже стремится к единице, и по свойству 2 (см. с. 14) окончательный ответ в примере будет плюс бесконечным:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^2 + 2}{n^3 + 3} = +\infty;$$

5) в примере $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - 1}$ в числителе дроби стоит выражение, которое соответствует неопределенности $[(+\infty) - (+\infty)]$, а знаменатель стре-

мится к бесконечности при $n \rightarrow +\infty$. Для нахождения предела преобразуем выражения в числителе и знаменателе дроби следующим образом:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{\sqrt{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1 - 1}{1 - 0} = 0;\end{aligned}$$

6) в примере $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-2)! - n!}{(n-1)!}$ в числителе дроби стоит выражение, которое соответствует неопределенности $[(+\infty) - (+\infty)]$, а знаменатель стремится к бесконечности при $n \rightarrow +\infty$. Для нахождения предела преобразуем выражения в числителе и знаменателе дроби следующим образом:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-2)! - n!}{(n-1)!} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \left(\frac{(n-2)!}{n!} - 1 \right)}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)! \left(\frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-1)n} - 1 \right)}{(n-1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(\frac{1}{(n-1)n} - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n-1} - n \right) = -\infty;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n-(n-1)}{(n-1) \cdot n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n}{(n-1) \cdot n} - \frac{n-1}{(n-1) \cdot n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n} &= [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^3 = e^3.\end{aligned}$$

1.5. Предел функции в точке.

Односторонние пределы функции в точке

Пусть $D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$, а точка $x_0 \in \mathbf{R}$ — предельная точка множества $D(f)$. Возможно, в самой точке x_0 функция не определена. Сформулируем три эквивалентных между собой определения предела функции в точке x_0 . Введем для краткости записи следующее обозначение проколотой δ -окрестности точки x_0 : $\dot{U}_\delta(x_0)$ (здесь $\dot{U}_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$).

Определение (геометрическое). Число A называют *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0), если для любой ε -окрестности $V_\varepsilon(A)$ точки A существует такая проколотая δ -окрестность $\dot{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 (зависящая от $V_\varepsilon(A)$), что для любого значения $x \in D(f) \cap \dot{U}_\delta(x_0)$ будет выполняться условие $f(x) \in V_\varepsilon(A)$. Краткая форма записи этого определения выглядит следующим образом:

$$\forall V_\varepsilon(A) \exists \dot{U}_\delta(x_0): \forall x \in D(f) \cap \dot{U}_\delta(x_0), \\ f(x) \in V_\varepsilon(A),$$

где $V_\varepsilon(A)$ — окрестность радиусом ε точки A на оси ординат; $\dot{U}_\delta(x_0)$ — окрестность радиусом δ точки x_0 на оси абсцисс.

Определение (по Коши). Число A называют *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого значения $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$ (зависящее от ε), что для любого значения $x \in D(f)$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Краткая форма записи этого определения выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x \in D(f), 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon, \\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (по Гейне). Число A называют *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, все члены которой удовлетворяют условиям $x_n \neq x_0$, $x_n \in D(f)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции в соответствующих точках сходится при $n \rightarrow +\infty$ к числу A , т. е. выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$. Краткая форма записи такова:

$$\forall \{x_n\}, x_n \in D(f), x_n \neq x_0, n \in \mathbf{N}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Для краткой записи того, что предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен A , приняты следующие обозначения: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$, или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$. Последние две формулы читают как «функция $f(x)$ стремится к числу A при x , стремящемся к x_0 ».

Поясним геометрический смысл определения предела функции в точке. Рассмотрим окрестность точки A любого радиусом $\varepsilon > 0$ (в том числе сколь угодно малого), лежащую на оси ординат. Тогда согласно определению для нее найдется такая окрестность точки x_0 радиусом $\delta_\varepsilon > 0$, лежащая на оси абсцисс, что для любого значения аргумента $x \neq x_0$ из пересечения этой окрестности и $D(f)$ соответствующее значение функции $f(x)$ будет принадлежать ε -окрестности точки A . Другими словами, для всех таких значений x точки графика $y = f(x)$ будут лежать внутри заштрихованной полосы шириной 2ε (рис. 1.2).

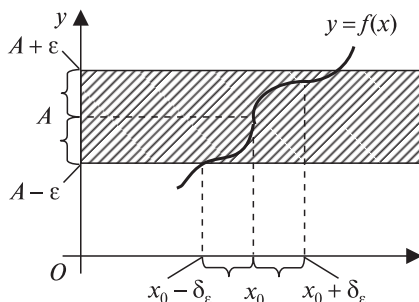


Рис. 1.2

Пример 1.5. Докажите по определению:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$;

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, где C — любая постоянная величина.

Решение:

1) функция $f(x) = 2x - 1$ определена на множестве $\mathbf{R}$. Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$, которое соответствует данному ранее определению по Коши предела функции в точке, т. е. для любого значения $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - 3| < \delta_\varepsilon$, будет выполняться неравенство $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Последнее можно записать в виде $2|x - 3| < \varepsilon$, откуда получаем эквивалентное неравенство $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, в качестве δ_ε можно взять число $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом,

показано, что такое число δ_ε , о котором говорится в определении, существует, и указан способ его выбора в зависимости от заданного числа $\varepsilon > 0$.

При выборе $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ определение предела функции в точке будет выполняться. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$;

2) функция $f(x) = C$ определена на множестве $\mathbf{R}$. Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$, которое соответствует данному ранее определению по Коши предела функции в точке, т. е. для любого значения $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, будет выполняться неравенство $|f(x) - C| = |C - C| < \varepsilon$. Последнее неравенство можно записать в виде $0 < \varepsilon$, оно является верным при любых значениях аргумента x и при любом выборе положительного числа ε . Следовательно, в качестве δ_ε можно взять любое положительное число δ_ε . Таким образом, показано, что такое число δ_ε , о котором говорится в определении, существует. При любом выборе $\delta_\varepsilon > 0$ определение предела функции в точке будет выполняться. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

По аналогии с введенными понятиями предела функции в точке можно дать определения *левостороннего* и *правостороннего* пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 (для левостороннего предела приняты обозначения $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), f(x_0 - 0)$, для правостороннего — $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x), f(x_0 + 0)$).

Их называют *односторонними* пределами функции $y = f(x)$ в точке x_0 . Иногда используют соответственно термины *предел слева функции $y = f(x)$ в точке x_0* , *предел справа функции $y = f(x)$ в точке x_0* . Если $x_0 = 0$, то приняты обозначения $\lim_{x \rightarrow -0} f(x), f(-0)$ для левостороннего предела функции в данной точке и $\lim_{x \rightarrow +0} f(x), f(+0)$ для правостороннего предела. В определении левостороннего (правостороннего) предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 считают, что рассматриваются только значения аргумента x , которые меньше x_0 (больше x_0).

Приведем краткие записи определений левостороннего предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Определение (геометрическое). Число A называют левосторонним пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall V_\varepsilon(A) \exists U(x_0): \forall x \in D(f) \cap U(x_0), f(x) \in V_\varepsilon(A),$$

где $V_\varepsilon(A)$ — окрестность радиусом ε точки A на оси ординат; $U(x_0)$ — левосторонняя окрестность радиусом δ_ε точки x_0 на оси абсцисс, т. е. интервал $(x_0 - \delta_\varepsilon; x_0)$.

Определение (по Коши). Число A называют левосторонним пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x \in D(f), x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (по Гейне). Число A называют левосторонним пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in D(f), x_n < x_0, n \in \mathbf{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Аналогичным образом формулируют определения правостороннего предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Определение (геометрическое). Число A называют правосторонним пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall V_\varepsilon(A) \quad \exists U(x_0): \forall x \in D(f) \cap U(x_0), f(x) \in V_\varepsilon(A),$$

где $V_\varepsilon(A)$ — окрестность радиусом ε точки A на оси ординат; $U(x_0)$ — правосторонняя окрестность радиусом δ_ε точки x_0 на оси абсцисс, т. е. интервал $(x_0; x_0 + \delta_\varepsilon)$.

Определение (по Коши). Число A называют правосторонним пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x \in D(f), x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (по Гейне). Число A называют правосторонним пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in D(f), x_n > x_0, n \in \mathbf{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Теорема 1.3. Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда имеет в этой точке конечные правосторонний и левосторонний пределы, равные между собой (они же равны пределу функции $y = f(x)$ в точке x_0).

Следствие. Если хотя бы одного из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует (в конечном смысле) или существуют оба, но они не равны между собой, то такая функция $y = f(x)$ не имеет конечного предела в точке x_0 .

Пример 1.6. Найдите односторонние пределы функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$. Определите, существует ли $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

Решение. Функция определена на множестве $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Точка $x_0 = 0$ является предельной точкой области определения функции. Раскрывая модуль по определению, получаем

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = -1, \dots$$

Поскольку левосторонний и правосторонний пределы функции в точке существуют в конечном смысле, но не равны между собой, делаем вывод, что предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ не существует.

1.6. Конечный предел функции при аргументе, стремящемся к бесконечности. Бесконечно большие функции

1.6.1. Конечный предел функции при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty; \infty$)

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $\mathbf{R}$. Приведем краткие записи трех определений конечного предела функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Определение (геометрическое). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall V_\epsilon(A) \exists U(\infty): \forall x \in U(\infty) \quad f(x) \in V_\epsilon(A),$$

где $V_\epsilon(A)$ — окрестность радиусом ϵ точки A на оси ординат; $U(\infty)$ — объединение бесконечных интервалов $(-\infty; -E) \cup (E; +\infty)$ на оси абсцисс, где положительное число E зависит от ϵ .

Определение (по Коши). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_\epsilon > 0: \forall x \in \mathbf{R}, |x| > E_\epsilon, |f(x) - A| < \epsilon.$$

Определение (по Гейне). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in \mathbf{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Приведем также краткие записи трех определений конечного предела функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Определение (геометрическое). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\forall V_\varepsilon(A) \exists U(+\infty): \forall x \in U(+\infty), f(x) \in V_\varepsilon(A),$$

где $V_\varepsilon(A)$ — окрестность радиусом ε точки A на оси ординат; $U(+\infty)$ — бесконечный интервал $(E; +\infty)$ на оси абсцисс, где положительное число E зависит от ε .

Определение (по Коши). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon > 0: \forall x \in \mathbf{R}, x > E_\varepsilon, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (по Гейне). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in \mathbf{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Аналогичным образом запишем три определения конечного предела функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Определение (геометрическое). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если

$$\forall V_\varepsilon(A) \exists U(-\infty): \forall x \in U(-\infty), f(x) \in V_\varepsilon(A),$$

где $V_\varepsilon(A)$ — окрестность радиусом ε точки A на оси ординат; $U(-\infty)$ — бесконечный интервал $(-\infty; -E)$ на оси абсцисс, где положительное число E зависит от ε .

Определение (по Коши). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon > 0: \forall x \in \mathbf{R}, x < -E_\varepsilon, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (по Гейне). Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in \mathbf{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Пример 1.7. Докажите по определению, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} = 1$.

Решение. Будем исходить из того, что $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3}$, $x \rightarrow -\infty$, $A = 1$. Об-

ластью определения функции является множество $\mathbf{R}$. Необходимо доказать, что выполняется определение по Коши предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, равного единице, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon > 0: \forall x \in \mathbf{R}, x < -E_\varepsilon, |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим неравенство $\left| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} - 1 \right| < \varepsilon$. Преобразуем последнее следующим образом:

$$\left| \frac{(x^2 + 3) - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{x^2 + 3} \right| = \left| \frac{1}{x^2 + 3} \right| = \frac{1}{x^2 + 3} < \varepsilon.$$

Заметим, что $\frac{1}{x^2 + 3} < \frac{1}{x^2}$ при любых значениях x , не равных нулю.

Если выполняется условие $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$, откуда $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, а значит, $x < -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ либо $x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, то выполняется и условие $\frac{1}{x^2 + 3} < \varepsilon$. Следовательно, если взять

в качестве числа E_ε из определения предела число $E_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, то при всех x , удовлетворяющих неравенству $x < -E_\varepsilon$, будет справедливо неравенство

$$\left| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} - 1 \right| < \varepsilon. \text{ Таким образом, мы обосновали, что такое число } E_\varepsilon, \text{ о ко-}$$

тором говорится в определении, существует, и указали формулу для его вычисления при любом $\varepsilon > 0$. Доказательство завершено.

1.6.2. Бесконечно большие функции при $x \rightarrow x_0$

Функцию $y = f(x)$ называют *бесконечно большой (плюс бесконечно большой, минус бесконечно большой) функцией при $x \rightarrow x_0$* , где символом x_0 обозначено действительное число или бесконечность со знаком либо без знака, если ее предел при $x \rightarrow x_0$ равен ∞ ($+\infty, -\infty$). Приведем краткие записи определений бесконечно большой (плюс бесконечно большой, минус бесконечно большой) функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, где символом x_0 обозначено действительное число.

Определение (геометрическое). Функцию $y = f(x)$ называют бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \right)$, если

$$\forall V(\infty) \exists \dot{U}(x_0): \forall x \in D(f) \cap \dot{U}(x_0), f(x) \in V(\infty),$$

где $V(\infty)$ — объединение бесконечных интервалов $(-\infty; -E) \cup (E; +\infty)$, расположенных на оси ординат, где положительное число E выбирается произвольным образом; $\dot{U}(x_0)$ — проколота окрестность точки x_0 на оси абсцисс, радиус которой зависит от E .

Определение (по Коши). Функцию $y = f(x)$ называют бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \right)$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists \delta_E > 0: \forall x \in D(f), 0 < |x - x_0| < \delta_E, \quad |f(x)| > E.$$

Определение (по Гейне). Функцию $y = f(x)$ называют бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \right)$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in D(f), x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \infty.$$

Приведем теперь краткие записи трех определений плюс бесконечно большой функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение (геометрическое). Функцию $y = f(x)$ называют плюс бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \right)$, если

$$\forall V(+\infty) \quad \exists \dot{U}(x_0): \forall x \in D(f) \cap \dot{U}(x_0),$$

$$f(x) \in V(+\infty),$$

где $V(+\infty)$ — бесконечный интервал $(E; +\infty)$, расположенный на оси ординат, где положительное число E выбирается произвольным образом; $\dot{U}(x_0)$ — проколота окрестность точки x_0 на оси абсцисс, радиус которой зависит от E .

Определение (по Коши). Функцию $y = f(x)$ называют плюс бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \right)$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists \delta_E > 0: \forall x \in D(f), 0 < |x - x_0| < \delta_E, \quad f(x) > E.$$

Определение (по Гейне). Функцию $y = f(x)$ называют плюс бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \right)$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in D(f), x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty.$$

Аналогичным образом запишем три определения минус бесконечно большой функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение (геометрическое). Функцию $y = f(x)$ называют минус бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \right)$, если

$$\forall V(-\infty) \exists \dot{U}(x_0): \forall x \in D(f) \cap \dot{U}(x_0), f(x) \in V(-\infty),$$

где $V(-\infty)$ — бесконечный интервал $(-\infty; -E)$, расположенный на оси ординат, где положительное число E выбирается произвольным образом; $\dot{U}(x_0)$ — проколота окрестность точки x_0 на оси абсцисс, радиус которой зависит от E .

Определение (по Коши). Функцию $y = f(x)$ называют минус бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \right)$, если

$$\forall E > 0 \exists \delta_E > 0: \forall x \in D(f), 0 < |x - x_0| < \delta_E, f(x) < -E.$$

Определение (по Гейне). Функцию $y = f(x)$ называют минус бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \right)$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in D(f), x_n \neq x_0, n \in \mathbf{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие (плюс бесконечно большие, минус бесконечно большие) функции при $x \rightarrow \infty (+\infty, -\infty)$, а также при $x \rightarrow x_0 - 0, x \rightarrow x_0 + 0$, где x_0 — некоторое действительное число. В качестве упражнения приведите формулировки различных определений для указанных случаев.

Пример 1.8. Докажите по определению, что функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$.

Решение. Область определения функции $f(x) = 1/x$ — множество $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Необходимо доказать, что выполняется определение по Коши предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow 0$, равного бесконечности, т. е.

$$\forall E > 0 \exists \delta_E > 0: \forall x \in D(f), 0 < |x| < \delta_E, |f(x)| > E.$$

Для любого $E > 0$ рассмотрим неравенство $|1/x| > E$. Оно с учетом области определения функции эквивалентно системе из двух неравенств: $0 < x < 1/E, -1/E < x < 0$, т. е. двойному неравенству $0 < |x| < 1/E$. Следовательно, если взять в качестве числа δ_E из определения предела число $\delta_E = 1/E$, то при всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x| < \delta_E$, будет справедливо неравенство $|1/x| > E$. Таким образом, мы обосновали, что такое число δ_E , о котором говорится в определении, существует, и указали формулу для его вычисления при любом $E > 0$. Доказательство завершено. Функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$ (в качестве x_0 здесь может выступать как число, так и бесконечность определенного знака или без знака), если ее предел при $x \rightarrow x_0$ равен нулю.

Примером бесконечно малой функции при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty, \infty$) может служить функция $f(x) = 1/x$, а примером плюс бесконечно большой функции при таком же стремлении аргумента — функция $f(x) = |x + 3|$. Определения бесконечно малой и бесконечно большой функций можно применять лишь к математической модели реального процесса, в котором действительную картину изменяют так, чтобы сделать это применение возможным, поскольку ни одна реальная величина не может безгранично приближаться к нулю либо безгранично увеличиваться.

Пример 1.9. На рис. 1.3 приведен график кусочной функции. Согласно ему запишите, чему равны пределы:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; | 5) $\lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x)$; |
| 2) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x)$; |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$; | 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. |
| 4) $\lim_{x \rightarrow x_1-0} f(x)$; | |

Решение. Пользуясь приведенным на рис. 1.3 графиком, находим пределы:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; | 5) $\lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x) = b$; |
| 2) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = e$; | 6) $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = d$; |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$; | 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. |
| 4) $\lim_{x \rightarrow x_1-0} f(x) = c$; | |

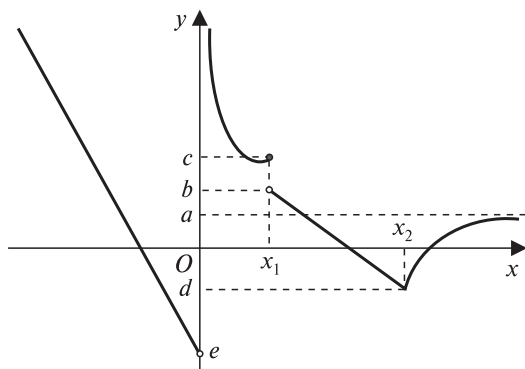


Рис. 1.3

1.7. Основные свойства пределов функций

Сформулируем основные свойства пределов функций, разбив их на три группы. В формулировках свойств под суммой конечного числа функций в точке x будем понимать такую функцию, формула которой в точке x представляет собой сумму формул всех складываемых функций в соответствующей точке. Под произведением конечного числа функций в точке x будем понимать такую функцию, формула которой в точке x представляет собой произведение формул всех перемножаемых функций в соответствующей точке.

Общие свойства пределов функций

Во всех приведенных далее формулировках свойств пределов функций в роли точки x_0 может быть действительное число, $(+\infty)$ или $(-\infty)$, если только в конкретном свойстве не оговорено другое условие его применимости.

1. Если функция имеет предел (в конечном смысле) при $x \rightarrow x_0$, где $x_0 \in \mathbf{R}$, то существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(x_0)$, при которой функция является ограниченной на множестве $\dot{U}(x_0) \cap D(f)$. Обратное утверждение неверно. Из ограниченности функции в пересечении ее области определения и некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}$ не следует существование конечного предела данной функции в рассматриваемой точке.

2. Если существует предел функции $f(x)$ в точке x_0 в конечном или бесконечном смысле, то он определяется единственным образом.

3. Сумма конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow x_0$ функций есть бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$ функция.

4. Произведение конечного числа функций, из которых одна бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$, а остальные ограниченные в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (к ним в том числе относятся, согласно свойству 1, все функции, имеющие конечный предел при $x \rightarrow x_0$), есть бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$ функция.

5. Если функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, то функция $1/f(x)$ — бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$. Если функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ является бесконечно большой, то функция $1/f(x)$ — бесконечно малой. Здесь предполагается, что существует проколотая окрестность точки x_0 , во всех точках которой функция $f(x)$ отлична от нуля.

6. Пусть функция f задана на множестве X , а функция g — на множестве Y , причем область значений $E(f)$ функции f является подмножеством множества Y . Если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, каждый из которых может быть как конечным, так и бесконечным, то сложная

функция $g(f(x))$ определена на множестве X и имеет предел при $x \rightarrow x_0$ на $\mathbf{R}$, выражаемый следующей формулой:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B.$$

7. Пусть α – наибольшее из всех чисел, ограничивающих множество X ($X \subset \mathbf{R}$) снизу: его называют *инфимум множества X* и обозначают $\inf X$ (в качестве $\inf X$ рассматривают $-\infty$, если множество не является ограниченным снизу). Пусть β – наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество X сверху: его называют *супремум множества X* и обозначают $\sup X$ (в качестве $\sup X$ рассматривают $+\infty$, если множество не является ограниченным сверху). Инфимум (супремум) множества X может как принадлежать этому множеству, так и не принадлежать.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$, возрастает на множестве X , то выполняются формулы

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x) &= \inf_{x \in X} \{f(x)\}, \\ \lim_{x \rightarrow \beta-0} f(x) &= \sup_{x \in X} \{f(x)\}.\end{aligned}$$

Если множество значений функции $\{f(x)\}$, $x \in X$, является ограниченным снизу, то первый из пределов будет конечным, а если не ограниченным снизу, то минус бесконечным. Если множество значений функции $\{f(x)\}$, $x \in X$, является ограниченным сверху, то второй из пределов будет конечным, а если не ограниченным сверху, то плюс бесконечным.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$, убывает на множестве X , то выполняются формулы

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x) &= \sup_{x \in X} \{f(x)\}, \\ \lim_{x \rightarrow \beta-0} f(x) &= \inf_{x \in X} \{f(x)\}.\end{aligned}$$

Если множество значений функции $\{f(x)\}$, $x \in X$, является ограниченным сверху, то первый из пределов будет конечным, а если не ограниченным сверху, то плюс бесконечным. Если множество значений функции $\{f(x)\}$, $x \in X$, является ограниченным снизу, то второй из пределов будет конечным, а если не ограниченным снизу, то минус бесконечным.

Свойства пределов функций, связанные с арифметическими операциями

1. Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$ – функции, имеющие конечные пределы A и B соответственно при $x \rightarrow x_0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Тогда

да справедливы свойства о существовании конечных пределов функций $f(x) \pm g(x)$, $C \cdot f(x)$ (C – константа), $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, и эти свойства выражаются следующими формулами:

- а) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
- б) $\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot A$, $C = \text{const}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
- г) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Последнее свойство выполняется при условии, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и $B \neq 0$.

2. Если хотя бы одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, имеющих конечные или бесконечные пределы при $x \rightarrow x_0$, бесконечно большая определенного знака при указанном стремлении аргумента x , то при нахождении пределов следует пользоваться правилами, которые схематично и кратко записаны в свойстве 2 (см. с. 14).

Замечание 1.4. Формулы из свойства 1 (см. с. 32) могут применяться лишь к функциям $y = f(x)$, $y = g(x)$, имеющим конечные пределы при $x \rightarrow x_0$. Основные неопределенности, которые могут возникать при нахождении пределов функций в конкретных примерах, приведены в п. 1.3.

Свойства пределов функций, выраженные неравенствами

1. Если для любого значения аргумента x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < g(x)$ ($f(x) > g(x)$) или неравенство $f(x) \leq g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$) и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то справедливо следующее свойство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right).$$

Замечание 1.5. Свойство 1 говорит о том, что при выполнении его условий в неравенстве можно переходить к пределу, причем неравенство, полученное в результате предельного перехода, является нестрогим.

Строгое неравенство между соответствующими значениями функций не влечет строгого неравенства для пределов. Например, $f(x) = 1 - x < 1 + x = g(x)$, $x \in (0; 1)$, но $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 1$.

Следствие. Если функция $f(x)$ неотрицательная (неположительная) в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то этот предел также будет неотрицательным (неположительным) числом.

2. Если для любого значения аргумента x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ (A — некоторое действительное число либо бесконечность определенного знака), то существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$$

(теорема о сжатой функции).

3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $a > b$ ($a < b$), где $a, b \in \mathbf{R}$, то существует такая проколотая окрестность точки x_0 , что для любого значения аргумента x , принадлежащего пересечению этой окрестности и области определения функции, будет выполняться неравенство $f(x) > b$ ($f(x) < b$).

Следствие. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $a > 0$ ($a < 0$), то существует такая проколотая окрестность точки x_0 , что при любом значении аргумента x , принадлежащем пересечению этой окрестности и области определения функции, функция $f(x)$ будет принимать положительные (отрицательные) значения.

Чтобы доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ вовсе не существует (здесь в роли точки x_0 по-прежнему может быть число, $+\infty$ или $-\infty$), часто пользуются определением по Гейне. Если существуют две различные последовательности значений аргумента $\{x_n^{(i)}\}$, $i = 1, 2$, $x_n^{(i)} \in D(f)$, $x_n^{(i)} \neq x_0$, $n \in \mathbf{N}$, сходящиеся при $n \rightarrow +\infty$ к x_0 и такие, что пределы соответствующих последовательностей значений функции существуют в конечном или бесконечном смысле и различны, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует.

Пример 1.10. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ не существует.

Решение. Рассмотрим две последовательности значений аргумента $\{x_n^{(i)}\}$, $i = 1, 2$ такие, что $x_n^{(1)} = \pi n$, $x_n^{(2)} = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{N}$. Обе эти последовательности принадлежат области определения функции $y = \sin x$, т. е. множеству $\mathbf{R}$, и являются плюс бесконечно большими при $n \rightarrow +\infty$. Заметим, что пределы соответствующих последовательностей значений функции $y = \sin x$ существуют в конечном смысле и различны между собой:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n^{(1)}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n^{(2)}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi/2 + 2\pi n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ не существует. В качестве упражнения докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ также не существует.

1.8. Замечательные пределы.

Примеры нахождения пределов функций

Приведем формулы, известные в математическом анализе под названием «замечательные пределы». Согласно введенным в п. 1.3 обозначениям, будем при этом записывать вид неопределенности в квадратных скобках.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1.$$

Эту формулу можно обобщить таким образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1.$$

Здесь и далее в данном подпункте $\alpha(x)$ — любая бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $x \rightarrow \infty$, определенная в некоторой окрестности $U(x_0)$ ($U(\infty)$) и отличная от нуля для всех точек из этой окрестности. Бесконечность в данном случае может быть определенного знака или без знака.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = [1^{\pm\infty}] = e$$

или $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = [1^\infty] = e.$

Эту формулу можно обобщить таким образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = [1^\infty] = e.$$

Приведем еще три замечательных предела в общем виде:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1,$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{(1 + \alpha(x))^\lambda - 1}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Пример 1.11. Найдите пределы следующих функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 1}{2x^2 + x - 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2} \right)^{1/x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{9+x} - 3}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{8x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\operatorname{tg} x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^x; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16^x - 4^x}{x}.$$

Решение:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{2 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{3+1}{2+1-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

В этом примере нет неопределенности, его решение осуществляют при помощи свойства 1 (см. с. 32). Здесь и далее также используют формулу $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, где x_0 — действительное число либо бесконечность со знаком

или без знака; C — постоянная величина;

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{9+x} - 3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{9+x} + 3)}{(\sqrt{9+x} - 3)(\sqrt{9+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{9+x} + 3)}{\sqrt{9+x}^2 - 3^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{9+x} + 3)}{9+x-9} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{9+x} + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{9+x} + 3) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{9+x} + \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 6. \end{aligned}$$

Здесь раскрывают неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, замечая, что знаменатель исходной дроби содержит выражение с квадратным корнем. Именно поэтому целесообразно использовать такой прием, как умножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное с выражением с корнем. При этом важно отметить, что существует такая проколотая окрестность $U(0)$, в которой данное выражение определено и не обращается в нуль. Далее применяют в знаменателе формулу разности квадратов, сокращают дробь на общий множитель $x \neq 0$ (истинность этого неравенства следует из условия примера) и используют свойства 6 (см. с. 31) и 1 (см. с. 32);

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{8x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{8x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{8x} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

В этом примере раскрывают неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ при помощи формулы первого замечательного предела, где в качестве бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ функции $\alpha(x)$ выбирают аргумент синуса: $\alpha(x) = 2x$. Замечают, что существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(0)$, в которой данная функция $\alpha(x)$ определена и не обращается в нуль. Умножая и деля дробь $\frac{\sin 2x}{8x}$ на выражение $2x$, а также применяя свойство 1 (см. с. 32), вычисляют искомый предел;

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^x = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{3x \cdot \frac{x}{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-x}{2} \right)^{\frac{2}{-x} \cdot \frac{-x}{2} \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{-x}{2} \right)^{\frac{2}{-x}} \right)^{\frac{-1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

В примерах 4 и 5 раскрывают неопределенность вида $[1^\infty]$, используя второй замечательный предел: в случае примера 4 в качестве бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$ функции $\alpha(x)$ выбирают $\alpha(x) = \frac{1}{3x}$, а в случае примера 5 в качестве бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ функции $\alpha(x)$ выбирают $\alpha(x) = \frac{-x}{2}$. Здесь отмечают, что существует такая окрестность $U(\infty)$ в первом случае и проколотая окрестность $\dot{U}(0)$ – во втором, в которой соответствующая функция $\alpha(x)$ определена и не обращается в нуль. Далее используют прием умножения и деления показателя степени на одно и то же ненулевое выражение, свойства степенной функции и свойство 6 (см. с. 31);

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{(1 + \alpha(x))^\lambda - 1}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lambda, \lambda \in \mathbf{R} \right] = \frac{1}{4}.$$

Здесь в квадратных скобках указан замечательный предел, который используется для решения примера. В качестве бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ функции $\alpha(x)$ выбирают $\alpha(x) = x$. Отмечают, что существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(0)$, в которой функция $\alpha(x)$ определена и не обращается в нуль. Число λ в данном случае равно $1/4$;

$$\begin{aligned}
 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\operatorname{tg} x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x) \cdot 4x \cdot \cos x}{4x \cdot \sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} \cdot 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4.
 \end{aligned}$$

Здесь используют прием умножения и деления дроби на одно и то же ненулевое выражение $4x$. В квадратных скобках указан замечательный предел, который применяется для решения примера. В качестве бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ функции $\alpha(x)$ выбирают $\alpha(x) = 4x$. Отмечают, что существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(0)$, в которой функция $\alpha(x)$ определена и не обращается в нуль. Кроме этого замечательного предела, также используют первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и свойство 1 (см. с. 32);

$$\begin{aligned}
 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16^x - 4^x}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x \cdot (4^x - 1)}{x} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \ln a, a = 4 \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 4^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{x} = 4^0 \cdot \ln 4 = \ln 4.
 \end{aligned}$$

В квадратных скобках здесь указан замечательный предел, который применяется для решения примера. В качестве бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ функции $\alpha(x)$ выбирают $\alpha(x) = x$, в качестве основания степени рассматривают число $a = 4$. Отмечают, что существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(0)$, в которой функция $\alpha(x)$ определена и не обращается в нуль. Также используют свойство 1 (см. с. 32).

Пример 1.12. В расчетной практике по абсорбции, дистилляции, экстракции и выщелачиванию встречается функция $f(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1} - 1}$. Найдите ее пределы при $x \rightarrow 1$ и $x \rightarrow +\infty$, если $n = 2$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^3 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

Здесь раскрывают неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, замечая, что $x = 1$ является корнем как многочлена в числителе, так и многочлена в знаменателе дроби. Применяют прием разложения числителя и знаменателя дроби на множители, сокращают общий множитель $(x-1)$, не обращающийся

в нуль в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(1)$, и используют свойство 1 (см. с. 32):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x}{x^3 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(1 - x/x^3)}{x^3(1 - 1/x^3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/x^2}{1 - 1/x^3} = 1.$$

При нахождении предела в случае, когда $x \rightarrow +\infty$, имеет место неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Применяют прием вынесения за скобки старшей степени переменной x в числителе и знаменателе дроби, сокращают общий ненулевой множитель x^3 и раскрывают неопределенность. При этом используют свойства 5 (см. с. 31) и 1 (см. с. 32).

Пример 1.13. Популяция микроорганизмов растет от начального размера в 1000 особей до размера $p(t)$ в момент времени t (выражается в днях) согласно уравнению $p(t) = \frac{1000e^t}{1 + 0,1(e^t - 1)}$. Найдите равновесную популяцию, т. е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$.

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1000e^t}{1 + 0,1(e^t - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1000e^t}{e^t \left(\frac{1}{e^t} + 0,1 - \frac{0,1}{e^t} \right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1000}{\frac{1}{e^t} + 0,1 - \frac{0,1}{e^t}} = 10\,000. \end{aligned}$$

При решении замечают, что функция $f(t) = e^t$ является плюс бесконечно большой при $t \rightarrow +\infty$, выносят ее как множитель за скобки в знаменателе дроби, сокращают дробь на $e^t \neq 0$ и используют свойства 5 (см. с. 31) и 1 (см. с. 32) из списка основных свойств пределов функций.

1.9. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции

Рассмотрим случай, когда $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, которые определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и отличны от нуля для всех точек из этой окрестности. Под x_0 понимается некоторое действительное число. Возможны также варианты, когда $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty, \infty$), $x \rightarrow x_0 \pm 0$. Здесь функции считаются определенными в некоторой окрестности соответствующей бесконечности либо

в соответствующей односторонней окрестности действительной точки x_0 и отличными от нуля для всех точек из рассматриваемой окрестности. При перечисленных условиях две бесконечно малые функции сравнивают с помощью их отношения.

Определение. Если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что функция $\alpha = \alpha(x)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем функция $\beta = \beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$. Обозначают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Определение. Если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то говорят, что функция $\alpha = \alpha(x)$ является бесконечно малой функцией более низкого порядка малости, чем функция $\beta = \beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$. Обозначают $\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Определение. Если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то говорят, что бесконечно малые функции $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ являются эквивалентными функциями при $x \rightarrow x_0$. Обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow x_0$.

Определение. Говорят, что бесконечно малая функция $\alpha(x)$ является ограниченной относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$ в окрестности $\dot{U}(x_0)$, если существует такая константа $M > 0$, что выполняется условие

$$\forall x \in \dot{U}(x_0) \quad |\alpha(x)| \leq M |\beta(x)|.$$

Это обозначают записью $\alpha(x) = O(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Можно показать, что для бесконечно малых функций, удовлетворяющих условиям из первого абзаца данного пункта, справедливо следующее утверждение: если существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, где A — некоторое ненулевое число, то при $x \rightarrow x_0$ выполняется система условий

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), \quad \beta(x) = O(\alpha(x)).$$

В этом случае говорят, что функции $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ являются бесконечно малыми функциями одного и того же порядка малости, и кратко обозначают $\alpha(x) \asymp \beta(x)$, $x \rightarrow x_0$.

Замечание 1.6. Введенные символы $O(f(x))$ и $o(f(x))$, по существу, обозначают целые классы функций, обладающих по сравнению с данной функцией $f(x)$ определенным свойством, поэтому равенства типа $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$ следует читать только слева направо. Например, запись $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$, следует понимать в том смысле, что функция

$y = x^2$ при $x \rightarrow 0$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем бесконечно малая функция $y = x$. Такое утверждение верно,

поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$. Однако при $x \rightarrow 0$ не всякая функция, бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $y = x$, является функцией $y = x^2$. Например, функция $y = x^3$, как и многие другие, тоже является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем функция $y = x$, при $x \rightarrow 0$.

Теорема 1.4. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, причем $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ и существует предел

$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1(x) \cdot \beta_1(x)) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \right)$ в конечном или бесконечном смысле. Тогда существует в соответствующем смысле предел $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) \cdot \beta(x)) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right)$, причем верны формулы

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) \cdot \beta(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1(x) \cdot \beta_1(x)), \\ \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \end{aligned}$$

Замечание 1.7. При нахождении предела выражения при $x \rightarrow x_0$ на практике в произведениях и частных бесконечно малые функции можно заменять на эквивалентные им при $x \rightarrow x_0$ бесконечно малые функции, и эта замена приведет к правильному результату нахождения предела (при выполнении условий теоремы 1.4). Однако такую замену нельзя осуществлять в суммах и разностях. Следующий пример демонстрирует ошибочность ответа в результате применения замены в разности функций.

Пример 1.14. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

Решение. Заметим, что $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$, существует проколота окрестность точки $x_0 = 0$, в которой эти функции определены и отличны от нуля, причем $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$. Действительно, согласно формуле первого замечательного предела

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1$, а эквивалентность бесконечно малых функций $\operatorname{tg} x$ и x при $x \rightarrow 0$ следует из формулы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Если заменить обе функции в числителе дроби $\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ на эквивалентную им функцию x , то в числителе окажется функция, тождественно равная нулю. Знаменатель, в свою очередь, отличен от нуля в любой проколотой окрестности точки $x_0 = 0$, следовательно, предел отношения $\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ при $x \rightarrow 0$ равен нулю. Такой ответ является ошибочным, потому что бесконечно малые функции были заменены в разности функций на эквивалентные им бесконечно малые.

Решим пример правильно. На основании формулы $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, теоремы 1.4, эквивалентностей $\sin x \sim x$, $\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, $x \rightarrow 0$, и свойств пределов функций решение можно записать так:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x \cdot x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \cdot x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} \cdot \frac{-2 \left(\frac{x}{2} \right)^2}{\cos x \cdot x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приведем еще две теоремы о сравнении бесконечно малых функций.

Теорема 1.5. Разность двух эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow x_0$ функций есть бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$ функция более высокого порядка малости, чем каждая из них.

Например, если $\alpha(x) = x^2 + x^3$, $\beta(x) = x^2 + 2x^4$, то $\alpha(x) \sim \beta(x) \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$, а $\alpha(x) - \beta(x) = x^3 - 2x^4 \sim x^3$ при $x \rightarrow 0$. Действительно, $\alpha(x) \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1$, а $\beta(x) \sim x^2$

при $x \rightarrow 0$, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x^4}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+2x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x^2) = 1$.

Разность функций $\alpha(x) - \beta(x) = x^3 - 2x^4$ эквивалентна функции x^3 при $x \rightarrow 0$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^4}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1-2x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x) = 1.$$

Функция x^3 является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем каждая из функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Теорема 1.6. Сумма конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow x_0$ функций различных порядков малости эквивалентна при $x \rightarrow x_0$ слагаемому низшего порядка.

Например, если $\alpha(x) = x^2 + x^3$, $\beta(x) = 2x^4$, то $\alpha(x) \sim x^2$, $\beta(x) \sim 2x^4$ при $x \rightarrow 0$, а $\alpha(x) + \beta(x) = x^2 + x^3 + 2x^4 \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 + 2x^4}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + x + 2x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + 2x^2) = 1.$$

Приведем ряд эквивалентных между собой при $x \rightarrow 0$ бесконечно малых функций. Указанные эквивалентности полезны при нахождении пределов выражений на практике:

$$\begin{aligned} x &\sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(x+1), \\ 1 - \cos x &= 2\sin^2(x/2) \sim x^2/2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1), \\ (1+x)^\lambda - 1 &\sim \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что эти формулы имеют место лишь при $x \rightarrow 0$.

В заключение отметим, что с геометрической точки зрения эквивалентность бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$ означает, что их графики практически неразличимы в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 .

1.10. Непрерывность и разрывность функции в точке.

Классификация точек разрыва функции

1.10.1. Непрерывность функции в точке

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке* x_0 , если выполняются следующие условия:

- 1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;
- 2) существует предел в конечном смысле функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$;
- 3) имеющийся предел равен значению функции в точке x_0 , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее условие можно на основании теоремы 1.3 записать в виде системы условий

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

Каждое из этих условий означает, что непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ является соответственно *непрерывной слева* и *непрерывной справа* в этой точке.

Поскольку равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ является истинным, то для функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0 , истинным также является равенство $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$. Отсюда следует, что *при нахождении предела при $x \rightarrow x_0$ непрерывной в точке x_0 функции символы предела и самой функции перестановочны между собой*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$ действительной оси. Выберем любую точку $x_0 \in (a; b)$. Для любого значения $x \in (a; b)$ разность $(x - x_0)$ называют *приращением аргумента x в точке x_0* и обозначают Δx : $\Delta x = x - x_0$. *Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0* (обозначают $\Delta f(x_0)$ или Δy), которое вызвано приращением аргумента Δx , называют разность вида $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Геометрическая иллюстрация к введенным понятиям представлена на рис. 1.4. На данном рисунке приращения как аргумента Δx , так и функции Δy в точке x_0 являются отрицательными.

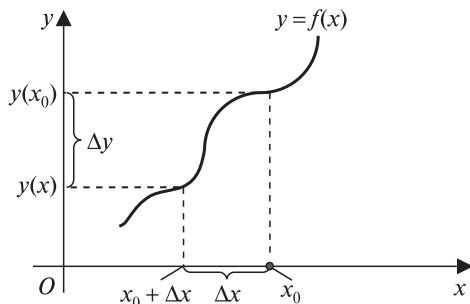


Рис. 1.4

Дадим еще одно определение непрерывности функции в точке, используя введенные термины приращений аргумента и функции в точке. Оно эквивалентно первому определению, данному ранее.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке x_0* , если выполняются следующие условия:

- 1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;
- 2) бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на интервале $(a; b)$* , если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на отрезке $[a; b]$* , если она непрерывна на интервале $(a; b)$, и справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b).$$

В конкретном эксперименте такие величины, как концентрация или химическое количество вещества, численность и биомасса популяции, температура, время и т. д., не могут принимать все значения, принадлежащие некоторому рассматриваемому промежутку. Формально говоря, области значений и области определения упомянутых функций не являются промежутками, а представляют собой некоторые шкалы, может быть с очень мелкими, но стандартными делениями. Если области определения и значений функции состоят из конечного, но достаточно большого числа элементов, близко расположенных друг к другу, то их заменяют соответствующими сплошными промежутками и функцию, определенную на одном из них со значениями в другом, считают непрерывной. Изучив эту модельную функцию, затем делают выводы относительно функции, фигурирующей в эксперименте.

Пример 1.15. Докажите, пользуясь двумя определениями, данными ранее, непрерывность функции $y = x^2 + 1$ в каждой точке действительной оси.

Решение. Функция $y = x^2 + 1$ определена в каждой точке действительной оси, следовательно, первое условие из обоих определений выполняется для любой точки, принадлежащей множеству $\mathbf{R}$. Обозначим через x_0 любую такую точку.

Воспользуемся первым определением непрерывности функции в точке. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 + \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

Следовательно, первое определение непрерывности функции $y = x^2 + 1$ в точке x_0 выполняется.

Теперь воспользуемся вторым определением непрерывности функции в точке. Обозначим приращение аргумента в точке x_0 через Δx и выразим приращение функции Δy в указанной точке:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = ((x_0 + \Delta x)^2 + 1) - (x_0^2 + 1) = \\ &= x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 1 - x_0^2 - 1 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

Рассмотрим предел приращения функции в точке x_0 , вызванного приращением аргумента Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 \cdot \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, второе определение непрерывности функции $y = x^2 + 1$ в точке x_0 выполняется. Доказательство закончено.

1.10.2. Разрывность функции в точке.

Классификация точек разрыва функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, возможно, самой этой точки. Точку x_0 называют *точкой разрыва функции* $y = f(x)$, если определение непрерывности функции в ней не выполняется. В зависимости от того, как именно нарушается определение непрерывности функции в точке разрыва, выделяют следующие основные типы точек разрыва, т. е. осуществляют классификацию точек разрыва функции.

Определение. Точку x_0 называют *точкой разрыва первого рода функции* $y = f(x)$, если существуют в конечном смысле односторонние пределы данной функции в этой точке, не равные между собой:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

При этом величину $\left| \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right|$ называют *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0 . Например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 1.5, имеет точку разрыва первого рода при $x = x_1$, так как $\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow x_1 + 0} f(x) = b$; $c, b \in \mathbf{R}$; $c \neq b$. Скачок функции $f(x)$ в точке x_1 равен $|b - c|$.

Определение. Точку x_0 называют *точкой устранимого разрыва функции* $y = f(x)$, если функция имеет разрыв в точке x_0 и существуют в конечном

смысле односторонние пределы данной функции в указанной точке, равные между собой:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Например, функция, график которой изображен на рис. 1.5, имеет точку устранимого разрыва при $x = x_2$, так как

$$\lim_{x \rightarrow x_2 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_2 + 0} f(x) = d, \quad d \in \mathbf{R}, \quad f(x_2) = 0, \quad 0 \neq d.$$

Функция может быть либо не определена в точке x_0 устранимого разрыва, но определена в некоторой проколотой окрестности данной точки, либо определена в точке x_0 , при этом существует в конечном смысле предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

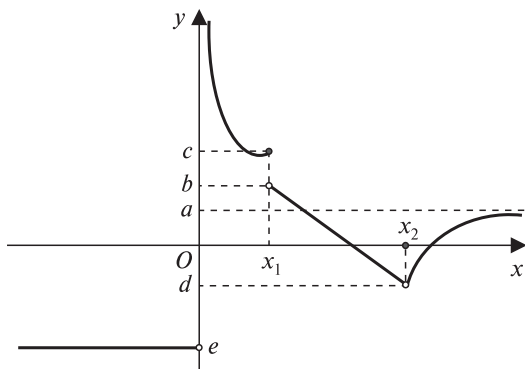


Рис. 1.5

Определение. Точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода функции* $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов данной функции в этой точке в конечном смысле не существует. Например, функция $y = f(x)$ (см. рис. 1.5) имеет разрыв второго рода при $x = 0$, так как $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$.

Приведем пример, связанный с моделью биологического процесса. Зависимость величины возбуждения (например, нервных клеток, мышц и т. п.) от времени при внешних воздействиях изображают функцией, имеющей разрывы. Если величину возбуждения E измерить в тех или иных единицах, то график возбуждения $E(t)$ имеет вид, представленный на рис. 1.6. В момент $t = t_0$ клетка получает сигнал. Возбуждение клетки происходит в момент $t_1 > t_0$. Отрезок $[t_0; t_1]$ называется латентным периодом.

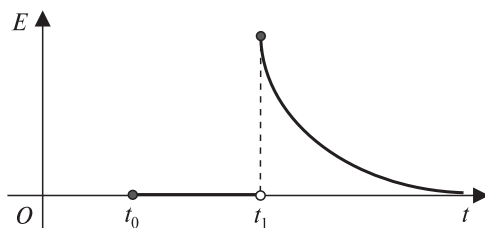


Рис. 1.6

В момент $t = t_1$ клетка мгновенно возбуждается до максимальной величины, а затем возбуждение постепенно уменьшается до тех пор, пока не будет дан новый сигнал. Если сигнала нет достаточно долго, то возбуждение становится равным нулю. На концах латентных периодов функция $E(t)$ имеет разрывы первого рода.

1.11. Основные свойства непрерывных функций

Перечислим основные свойства непрерывных функций.

1. Сумма, произведение, частное (в случае, когда делитель не обращается в нуль) двух непрерывных на отрезке (интервале) функций есть непрерывная на этом отрезке (интервале) функция.

2. Пусть f — функция, непрерывная в точке x_0 , а g — функция, непрерывная в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a; b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$; $A, B \in \mathbf{R}$, то существует обратная функция $x = \phi(y)$ на отрезке, соответствующем данному отрезку $[a; b]$, и она является непрерывной и строго монотонной в том же смысле на нем.

4. Всякая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке найдутся точки x_1 и x_2 такие, что значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут соответственно наибольшим и наименьшим из всех значений данной функции на отрезке $[a; b]$.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

(Свойство 5 известно в математическом анализе как *теорема Вейерштрасса*.)

6. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) \neq f(b)$, то она на этом отрезке прини-

мает и все промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$ значения. Иначе говоря, для любого числа C , заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что $f(c) = C$.

7. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения с противоположными знаками, то существует хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой данная функция равна нулю.

(Свойства 6 и 7 известны в математическом анализе как *теоремы Больцано – Коши*.)

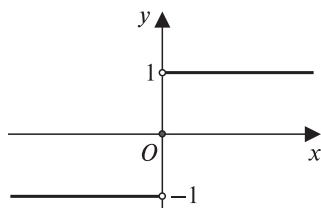
Пример 1.16. Исследуйте на непрерывность (разрывность) функции:

$$1) y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0; \end{cases}$$

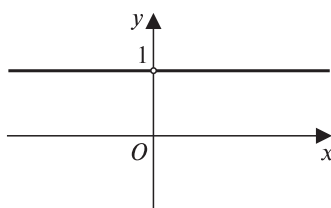
$$2) y = |\operatorname{sign} x|.$$

Выполните чертеж графиков функций.

Решение. Графики функций для случаев 1 и 2 показаны на рис. 1.7.



Случай 1



Случай 2

Рис. 1.7

Обе функции определены на действительной оси. В любой точке множества $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ обе функции являются непрерывными на основании свойства 4 непрерывных функций. В точке $x_0 = 0$ проведем отдельное исследование функций на непрерывность (разрывность).

1. Найдем односторонние пределы функции $y = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x_0 = 0$ конечны, но не равны между собой. Следовательно, данная точка является точкой разрыва первого рода для рассматриваемой функции. Скачок функции в данной точке

равен двум. Итак, функция $y = \operatorname{sign} x$ непрерывна в каждой точке действительной оси, кроме точки $x_0 = 0$, в которой имеется разрыв первого рода.

2. Найдем односторонние пределы функции $y = |\operatorname{sign} x|$ в точке $x_0 = 0$: $\lim_{x \rightarrow \pm 0} |\operatorname{sign} x| = \lim_{x \rightarrow \pm 0} 1 = 1$. Значение функции $y = |\operatorname{sign} x|$ в рассматриваемой точке равно нулю: $y(0) = |\operatorname{sign} 0| = 0$. Односторонние пределы функции в точке $x_0 = 0$ конечны и равны между собой, но не равны значению функции в данной точке. Следовательно, точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва для рассматриваемой функции. Итак, функция $y = |\operatorname{sign} x|$ непрерывна в каждой точке действительной оси, кроме точки $x_0 = 0$, в которой имеется устранимый разрыв.

Пример 1.17. Докажите, что уравнение $x^6 - 2x^2 - x = 3$ имеет хотя бы один действительный корень на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Рассмотрим функцию $y(x) = x^6 - 2x^2 - x - 3$ на заданном отрезке $[0; 2]$. Она определена и непрерывна в каждой точке данного отрезка на основании свойств 1 и 4 непрерывных функций. Заметим, что $y(0) = -3$, $y(2) = 64 - 2 \cdot 4 - 2 - 3 = 51$. Руководствуясь свойством 7, можно заключить, что найдется хотя бы одна точка, лежащая внутри отрезка, в которой функция принимает нулевое значение. Это и означает, что исходное уравнение имеет хотя бы один действительный корень на отрезке $[0; 2]$. Доказательство завершено.

Пример 1.18. Исследуйте на непрерывность (разрывность) кусочную функцию $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ \frac{1}{x-2}, & x \geq 1. \end{cases}$

Решение. Областью определения функции является множество $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, поэтому $x = 2$ — точка разрыва указанной функции, причем

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{2-0-2} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{2+0-2} \right] = +\infty.$$

Следовательно, точка $x = 2$ является точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$.

Функция непрерывна во всех точках множества $(-\infty; 1)$ как степенная функция на основании свойства 4 непрерывных функций. Она непрерывна во всех точках множества $(1; 2) \cup (2; +\infty)$ как частное непрерывных функций, в котором знаменатель не обращается в нуль, на основании свойств 1 и 4.

В точке $x=1$ проведем отдельное исследование функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-2} = -1.$$

Пределы функции слева и справа в точке $x=1$ конечны, но не равны между собой. Следовательно, $x=1$ — точка разрыва первого рода функции $y=f(x)$. Скачок функции в данной точке равен двум.

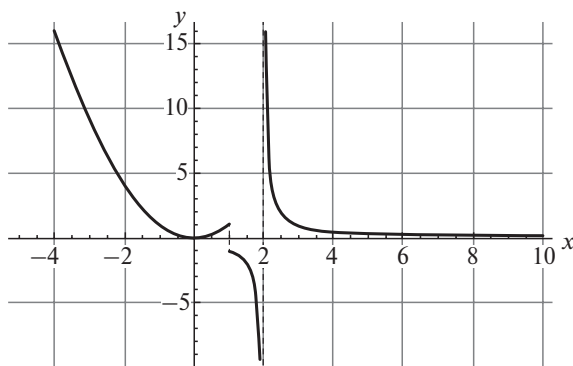


Рис. 1.8

Итак, функция $y=f(x)$ непрерывна на множестве действительных чисел, за исключением точки $x=1$, где имеется разрыв первого рода, и $x=2$, где имеется разрыв второго рода функции. График функции изображен на рис. 1.8.

Задачи

1. Найдите область определения функции:

1) $y = x^3 - x^2 - 1$;

4) $y = x^{1/\lg x}$;

2) $y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2 - 1, & x > 0; \end{cases}$

5) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}}$;

3) $y = \arcsin \frac{1+x^2}{2x}$;

6) $y = \log_x \cos x$.

Ответ: 1) $\mathbf{R}$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $\{-1; 1\}$; 4) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$; 6) $(0; 1) \cup \left(1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{N}$.

2. Найдите область значений функции:

1) $y = 1 + 2^{x+1}$;

4) $y = \frac{x+1}{x-2}$;

2) $y = x + \frac{1}{x}$;

5) $y = \frac{1}{x^2 + 1} + 1$;

3) $y = \sqrt{-x^2 - x + 2}$;

6) $y = \frac{1}{\arcsin(1-x)}$.

Ответ: 1) $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[0, 1\frac{1}{2}\right]$; 4) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
5) $(1; 2]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right] \cup \left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$.

3. Имеются два куска сплава меди с серебром. В первом сплаве содержится p % меди, во втором — q % меди ($p < q$). При переплавке x кг первого сплава с y кг второго получится сплав, содержащий r % меди. Выразите зависимость y от x .

Ответ: $y(x) = \frac{r-p}{q-r}x$, по смыслу задачи $x \in (0; +\infty)$, $p < r < q$.

4. Выразите объем цилиндра, вписанного в шар радиусом R , как функцию его высоты h .

Ответ: $V(h) = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$, $0 < h < 2R$.

5. Предварительно доказав строгую монотонность исходных функций на области определения, найдите функции, обратные данным:

1) $y = 2x - 3$;

2) $y = \lg(x-1)$;

3) $y = \frac{x}{1+x}$.

Ответ: 1) $x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$; 2) $x = 10^y + 1$; 3) $x = \frac{y}{1-y}$, $y \neq 1$.

6. Определите, композицией каких основных элементарных функций может быть получена функция $y = \cos^2(x^2)$.

Ответ: $y = \phi(\psi(u(x)))$, где $z = u(x) = x^2$, $t = \psi(z) = \cos z$, $y = \phi(t) = t^2$.

7. Пусть $y = f(x) = \sqrt{1-x}$, $x = \phi(t) = t^2 - 3t + 3$. Представьте функцию y как функцию аргумента t и найдите ее область определения.

Ответ: $y = \sqrt{-t^2 + 3t - 2}$, $t \in [1; 2]$.

8. Пусть $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Найдите функцию $f(f(x))$ и ее область определения.

Ответ: $y = \sqrt{x^2 - 2}$, $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

9. Выясните, определяют ли функции $y = \arccos x$ и $x = t^2 + 2t + 3$ y как функцию аргумента t .

Ответ: не определяют.

10. Установите, какие из следующих функций являются: четными, нечетными, ни теми, ни другими:

1) $y = \sqrt{3-x}$;

4) $y = \lg \frac{1-x}{1+x}$;

2) $y = x^2 + |x|$;

5) $y = x\sqrt{x^2}$;

3) $y = \operatorname{tg}^2 x - \cos x$;

6) $y = \cos x + \sin x$.

Ответ: функции четные в случаях 2) и 3), нечетные — 4) и 5), ни четные, ни нечетные — 1) и 6).

11. Определите, будут ли периодическими функции. Если да, то укажите основной период функций:

1) $y = x^2 + x - 1$;

2) $y = \sin \frac{3}{2}x + 1$;

3) $y = \cos^2 x$.

Ответ: 1) не является периодической; 2) периодическая, $T = \frac{4\pi}{3}$; 3) периодическая, $T = \pi$.

12. Установите, являются ли ограниченными следующие функции:

1) $y = x^2 - 4x + 4$;

2) $y = \lg(x^2 - 4x + 3)$, $x \in (3; +\infty)$;

3) $y = \sin x$.

Если являются, то определите, каким образом они ограничены (сверху, снизу, сверху и снизу).

Ответ: 1) ограниченная снизу функция, так как ее область значений — множество $[0; +\infty)$; 2) функция не является ограниченной, ее область значений — множество $(-\infty; +\infty)$; 3) ограниченная и снизу, и сверху функция, ее область значений — множество $[-1; 1]$.

13. Выведите формулу n -го члена числовой последовательности $\{x_n\}$, если дано следующее:

1) $x_1 = a$, $x_n = x_{n-1} + d$;

2) $x_1 = b$, $x_{n+1} = x_n \cdot q$, $q = \text{const} \neq 0$.

Ответ: 1) прогрессия арифметическая: $x_n = a + (n-1)d$; 2) прогрессия геометрическая: $x_n = b \cdot q^{n-1}$.

14. Докажите, что последовательность $x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$ является ограниченной.

Указание: следует доказать, что $0 < x_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

15. Докажите, что последовательность $x_n = \lg n - \lg(n-1)$ монотонная начиная с некоторого натурального номера n , $n > 1$.

Указание: следует доказать, что $x_{n+1} - x_n < 0$ при любых значениях $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

16. Докажите, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ является неограниченной.

Указание: следует доказать, что для любого числа $M > 0$ существует номер n такой, что $|x_n| > M$.

17. Укажите формулу общего члена последовательности, которая соответствует каждой из следующих последовательностей:

1) $\{2; 5; 10; 17; 26; \dots\};$

4) $\{1; 0; 1; 0; 1; 0; \dots\};$

2) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{8}; \frac{1}{11}; \frac{1}{14}; \dots\right\};$

5) $\left\{1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; \dots\right\};$

3) $\left\{1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \dots\right\};$

6) $\left\{1; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{4}; 5; \frac{1}{6}; \dots\right\}.$

Выберите соответствующую формулу из указанных вариантов:

1) $x_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2};$

4) $x_n = \frac{1}{2 + 3(n-1)};$

2) $x_n = n^2 + 1;$

5) $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{1 + 2(n-1)};$

3) $x_n = n^{(-1)^{n-1}};$

6) $x_n = n^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N}.$

Ответ: 1) -2 ; 2) -4 ; 3) -5 ; 4) -1 ; 5) -6 ; 6) -3 .

18. Докажите формулы, пользуясь определением предела последовательности (в конечном или бесконечном смысле):

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1;$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty;$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2;$

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty;$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0;$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n \cdot n) = \infty.$

19. Выясните, начиная с какого номера элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ϵ -окрестность точки a , если $x_n = 1/n$; $a = 0$, а ϵ равно:

1) $0,1$; 2) $0,01$; 3) $0,001$.

Ответ: $n \in \mathbb{N}$: 1) $n > 10$; 2) $n > 100$; 3) $n > 1000$.

20. Докажите, что последовательность $u_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ не имеет предела на $\bar{\mathbf{R}}$ при $n \rightarrow +\infty$. Определите, можно ли сказать то же о последовательности $v_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$.

Указание: для доказательства следует воспользоваться свойством, приведенным в конце п. 1.3.

21. Найдите пределы числовых последовательностей при $n \rightarrow +\infty$ на $\bar{\mathbf{R}}$, используя теоретический материал из п. 1.3 и 1.4:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n}$; | 11) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\dots+n)$; |
| 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$; | 12) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+1/2+1/4+\dots+1/2^n}{1+1/3+1/9+\dots+1/3^n}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$; | 13) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$; |
| 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$; | 14) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$; |
| 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + 1}$; | 15) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/n} - 1}{2^{1/n} + 1}$; |
| 6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$; | 16) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n} + 1}$; |
| 7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 4}}{n + 1}$; | 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n/2}$; |
| 8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$; | 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{2n}$; |
| 9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$; | 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n/3}$; |
| 10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$; | 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n$. |

Ответ: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 3; 4) $+\infty$; 5) 0; 6) 1; 7) 0; 8) 0; 9) 0; 10) 1; 11) $\frac{1}{2}$;
 12) $1\frac{1}{3}$; 13) $\frac{1}{2}$; 14) 1; 15) 0; 16) $+\infty$; 17) $e^{\frac{1}{2}}$; 18) e^2 ; 19) $e^{-\frac{1}{3}}$; 20) e .

22. Пользуясь свойствами пределов числовых последовательностей, выраженными неравенствами, выполните следующие задания:

- 1) найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!/n^n)$;
- 2) докажите, что последовательность, общий член которой задан формулой $a_n = 1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{n+1} + \dots + 1/\sqrt{2n}$, является плюс бесконечно большой при $n \rightarrow +\infty$;
- 3) докажите, что начиная с некоторого номера все члены последовательности $\left\{ \frac{-3n^2 - n + 2}{5n^2 + 4} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ являются отрицательными числами.

Ответ: 1) 0.

23. Приведите геометрическую иллюстрацию для каждого из следующих равенств: 1) $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = +\infty$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$; 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; 4) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$; 5) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -2$.

24. Приведите пример аналитической формулы функции, предел которой при $x \rightarrow 1$ равен: 1) 1; 2) 0; 3) ∞ ; 4) $+\infty$; 5) $-\infty$.

25. Приведите пример аналитической формулы функции, предел которой при $x \rightarrow \infty$ равен: 1) 2; 2) 0; 3) ∞ ; 4) $+\infty$; 5) $-\infty$.

26. Докажите, пользуясь определением предела функции, что $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 5) = 1$. Какому условию должно удовлетворять число $\delta > 0$, чтобы для $x \in (-2 - \delta; -2 + \delta)$ значения функции, задаваемой формулой $2x + 5$, отличались от 1 меньше чем: 1) на 0,1; 2) на 0,01; 3) на 0,001?

Ответ: полагая в формуле $\delta(\epsilon) = \epsilon/2$, находим: 1) $\delta(0,1) = 0,05$; 2) $\delta(0,01) = 0,005$; 3) $\delta(0,001) = 0,0005$.

27. Докажите, пользуясь определением предела функции, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x + 5}{4x} = \frac{9}{4}$. Какому условию должно удовлетворять число $E > 0$, чтобы для $|x| > E$ значения функции, задаваемой формулой $\frac{9x + 5}{4x}$, отличались от $\frac{9}{4}$ меньше чем: 1) на 0,1; 2) на 0,002; 3) на 0,000 005?

Ответ: полагая в формуле $E(\epsilon) = \frac{5}{4\epsilon}$, находим: 1) $E(0,1) = 12,5$; 2) $E(0,002) = 625$; 3) $E(0,000 005) = 250 000$.

28. Докажите, пользуясь определением предела функции (п. 1.6), что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$. Какому условию должно удовлетворять число $E_\epsilon > 0$, чтобы определение выполнялось?

Ответ: $E_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$, если $\epsilon \leq 1$, $E_\epsilon > 0$ — любое число, если $\epsilon > 1$.

29. Докажите, пользуясь определением предела функции (п. 1.5 и 1.6), что $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty$. Какому условию должно удовлетворять число δ_E , чтобы определение выполнялось?

Ответ: $\delta_E = \frac{3}{E-1}$, если $E > 1$, $\delta_E > 0$ — любое число, если $E \leq 1$.

30. Найдите пределы функций на $\bar{\mathbf{R}}$, используя теоретический материал из п. 1.7–1.9:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4 \pm 0} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 6};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x}{2x^4 - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x + 7};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-2x^2 + x};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{3x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x + 3}{\lg x};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x \cdot \sin 2x}{3x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x}{x - 1};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 7x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{x + 1}{(x - 3)^2};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \cdot 5^{-x}}{\operatorname{arctg}^2(3x)};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x + 3}{x^2 + 3};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{arctg}(x + 2)}{x^2 - 4};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} 2^{\frac{1}{x-2}};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{9 + x} - 3};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{4 - x^2};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x+1};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x - 3};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{5/x};$$

$$\begin{array}{ll}
25) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{1/x}; & 29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{8x} - 1}{\arcsin x}; \\
26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-2} \right)^x; & 30) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot ((1+1/x)^4 - 1) \right); \\
27) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{3x^4}; & 31) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}; \\
28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 5x)}{3x}; & 32) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.
\end{array}$$

Ответ: 1) $\pm\infty$ соответственно условию; 2) $+\infty$; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) $\pm\infty$ соответственно условию; 7) $+\infty$; 8) 1; 9) $+\infty$, 0 соответственно условию; 10) -3 ; 11) $\frac{1}{3}$; 12) $\frac{5}{8}$; 13) $\frac{1}{2}$; 14) 0; 15) $1\frac{2}{3}$; 16) 0; 17) $\frac{2}{3}$; 18) $\frac{2}{7}$; 19) ∞ ; 20) $-\frac{1}{4}$; 21) 12; 22) 0; 23) e^{12} ; 24) e^{-20} ; 25) e^3 ; 26) 0; 27) 0; 28) $1\frac{2}{3}$; 29) $8\ln 3$; 30) 4; 31) $e^{-1/2}$; 32) $e^{-1/2}$.

31. Сравните следующие бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$: $f(x) = 1 - \cos(3x)$, $g(x) = (x^2 + x)\sin \frac{x}{2}$.

Ответ: функции одного порядка малости, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 9$.

32. Определите, при каких значениях параметров α, β функция $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{\alpha x(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{\beta(x+1)^2}{(x+1)^2}$ будет бесконечно малой функцией при $x \rightarrow \infty$.

Ответ: $\alpha = 1$, $\beta = -3$.

33. Известно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^3 + cx - 3}{x + 4} = A$. Определите, при каких значениях параметров b и c : 1) $A = \infty$; 2) $A = 0$; 3) $A = -2$.

Ответ: 1) при $b \neq 0$, $c \in \mathbf{R}$; 2) при $b = c = 0$; 3) при $b = 0$, $c = -2$.

34. Известно, что $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg}(bx) \right) = A$. Определите, при каком значении параметра b :

- 1) $A = 1$;
- 2) $A = 0$;
- 3) $A = 1/7$.

Ответ: 1) при $b = 1$; 2) при $b \neq 2n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) при $b = 7$.

35. Определите, верна ли формула $\sin^2(x-2) = o(x^2-4)$, $x \rightarrow 2$.

Ответ: формула верна.

36. Докажите, пользуясь двумя определениями непрерывности функции в точке, что заданная функция непрерывна на ее области определения:

1) $f(x) = x^2 + 2x$;

2) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

37. Исследуйте функции на непрерывность и разрывность:

1) $f(x) = \frac{12}{x^2 + x + 1}$;

6) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 6}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$;

7) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;

3) $f(x) = \frac{x+1}{(x-3)^2}$;

8) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$;

4) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$;

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ 2 \cos x, & x \geq 0; \end{cases}$

5) $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$;

10) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ (x-1)^2, & x > 1. \end{cases}$

Ответ: 1) непрерывна на $\mathbf{R}$; 2) $x=1$ — точка разрыва второго рода; 3) $x=3$ — точка разрыва второго рода; 4) непрерывна на $\mathbf{R}$; 5) $x=2$ — точка разрыва второго рода; 6) $x=2, x=3$ — точка разрыва второго рода; 7) $x=-1, x=1$ — точка разрыва второго рода; 8) $x=2$ — точка разрыва первого рода; 9) $x=0$ — точка разрыва первого рода; 10) непрерывна на $\mathbf{R}$.

38. Исследуйте функцию на непрерывность и разрывность, выполните чертеж графика функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x=1$ — точка разрыва первого рода.

39. Определите, каким должно быть $f(0)$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на множестве $\mathbf{R}$, если $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Ответ: 0,5.

40. Задана функция $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0. \end{cases}$ Определите, при каком выборе

числа a функция будет непрерывна на множестве $\mathbf{R}$.

Ответ: 1.

41. Докажите, что уравнение $x^6 - 3x = 1$ имеет по крайней мере один корень, заключенный между 1 и 2.

42. Определите, что можно сказать о непрерывности суммы двух функций в точке, если: а) одна из них непрерывная в этой точке, а другая разрывная; б) обе функции разрывные в этой точке.

Ответ: а) функция разрывная; б) функция может быть как непрерывной, так и разрывной.

43. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$, не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки. Коэффициенты $a, b, c \in \mathbf{R}$ удовлетворяют условию $a + b + c < 0$. Определите знак коэффициента c .

Ответ: $c < 0$.

Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля

1. Схематически изобразите множество точек (x, y) на плоскости, которые удовлетворяют неравенству $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{4n} - |y|^n}{x^{4n} + |y|^n} > 0$.

Ответ: множество точек между параболой $y = x^4$ и $y = -x^4$.

2. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{4x - 2\cos x}$.

Ответ: $1/4$.

3. По истечении банковского года вклад A_0 увеличивается на p %. При увеличении p на величину $b > 0$ итоговая сумма через n лет станет в 3 раза больше, чем при годовой процентной ставке p %. Найдите годовую процентную ставку (выразите формулу через b и n).

Ответ: $p = \frac{b}{\sqrt[n]{3} - 1} - 100$.

4. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — некоторые различные положительные константы. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_k^n}$. Изменится ли ответ, если убрать требование различности констант?

Ответ: $\alpha_{\max}$. Не изменится.

5. В окружность O_1 радиусом 1 вписывается квадрат, в который вписывается окружность O_2 . В окружность O_2 вписывается правильный восьмиугольник, в него — окружность O_3 . В окружность O_3 вписывается правильный 16-угольник и т. д. На n -ом шаге в окружность O_n радиусом r_n вписывается правильный 2^{n+1} -угольник, а в него — окружность O_{n+1} . Найдите предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.

Ответ: $2/\pi$.

6. Докажите, что функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ разрывная в каждой точке $x \in \mathbf{R}$.

7. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ (если он существует) последовательности $a_n = \{(2 + \sqrt{2})^n\}$, где фигурными скобками обозначена дробная часть числа, стоящего в фигурных скобках.

Ответ: 1.

8. Пользуясь свойствами пределов числовых последовательностей, выраженными неравенствами, найдите предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$.

Ответ: 0.

Указание: следует доказать неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$.

9. Докажите, что последовательность $\left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \right\}$ является сходящейся на множестве $\mathbf{R}$ числовой последовательностью.

Указание: следует доказать, что последовательность является монотонно возрастающей и ограниченной.

10. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$.

Ответ: 1.

11. Найдите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax+1}{bx+2} \right)^{cx}$, $a, b > 0$.

Ответ: $e^{-\frac{c}{a}}$, если $a = b, c \neq 0; +\infty$, если $(a-b)c > 0$; 0, если $(a-b)c < 0$; 1, если $c = 0$.

12. Математические модели описывают изменение численности биологических многочисленных популяций при определенных условиях с помощью формул, где N_0, k, r — заданные действительные числа; $N(t)$ — текущая численность популяции в момент времени t . Найдите $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$

и дайте пояснения к полученным ответам с точки зрения динамики численности популяций:

$$1) N(t) = N_0 \cdot e^{r \cdot t};$$

$$2) N(t) = (N_0 + k(e^{r \cdot t} - 1)) \cdot e^{-r \cdot t};$$

$$3) N(t) = \frac{N_0 k e^{r \cdot t}}{k - N_0(1 - e^{r \cdot t})}.$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{cases} N \rightarrow +\infty, r > 0; \\ N = N_0, r = 0; \\ N \rightarrow 0, r < 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} N \rightarrow k, r > 0; \\ N = N_0, r = 0; \\ N \rightarrow -\infty, r < 0. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} N \rightarrow k, r > 0; \\ N = N_0, r = 0; \\ N \rightarrow 0, r < 0. \end{cases}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Приращение функции и аргумента

Пусть задана функция $f(x)$ на множестве X . Пусть $x_0 \in X$, тогда величина $\Delta x = x - x_0$, $x \in X$, изменения аргумента x называется *приращением аргумента* функции. Величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* в точке x_0 (рис. 2.1).

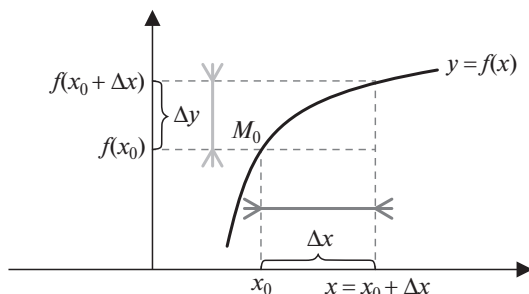


Рис. 2.1

Учитывая, что $x_0 \in X$ — произвольная точка из области определения функции, приращение можно записать в виде $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, $x, x + \Delta x \in X$.

2.2. Определение производной, ее геометрический и физический смысл

Определение. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю и этот предел существует, называется *производной* функции и обозначается $f'(x)$ или y' , т. е. $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Для обозначения производной используются также символы $\frac{dy}{dx}$, f'_x или $\dot{y}$.

Если существует предел слева $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или справа $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется *левой* или *правой производной* функции $f(x)$ в точке x .

Действие (операция) нахождения производной функции называется *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в точке, называют *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке.

Пример 2.1. Найдите производные по определению:

1) $y = C$, $C - \text{const}$;

2) $y = x$;

3) $y = \sin x$.

Решение. Воспользовавшись определением производной функции, получим:

1) $y + \Delta y = C$, $y = C \Rightarrow \Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow y' = 0$, следовательно, $C' = 0$;

2) $y + \Delta y = x + \Delta x$, $\Delta y = \Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow y' = 1$, $x' = 1$;

$$\begin{aligned} 3) y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x. \end{aligned}$$

Скорость v прямолинейного движения есть производная пути s по времени t , $v = \frac{ds}{dt}$. В этом состоит механический смысл производной. По аналогии производную любой функции часто называют скоростью изменения этой функции.

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 есть производная $f'(x_0)$. В этом состоит геометрический смысл производной (рис. 2.2), поэтому *уравнение касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. *Нормалью* к кривой в точке называется перпендикуляр к касательной в этой же точке. Следовательно, если $f'(x_0) \neq 0$, то *уравнение нормали* к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$

имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

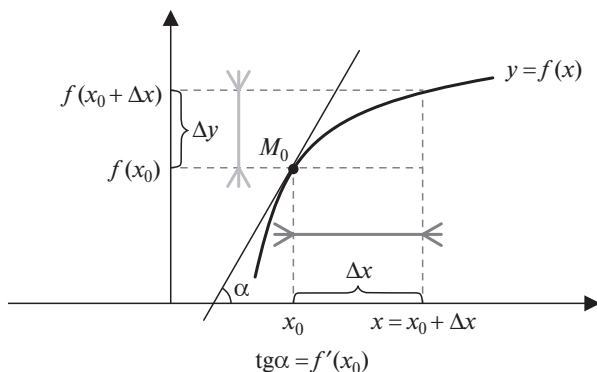


Рис. 2.2

2.3. Правила дифференцирования функций

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две дифференцируемые функции аргумента x , C — постоянная. Тогда справедливы следующие правила:

- 1) $C' = 0$;
- 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
- 3) $(uv)' = u'v + uv'$;
- 4) $(Cu)' = Cu'$;
- 5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Пример 2.2. Выведите правила дифференцирования функций 1–4.

Решение. В примере 2.1 приведен вывод правила 1. Рассмотрим правило 2.

Пусть $y = u \pm v$, тогда

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v) \Rightarrow \Delta y = \Delta u \pm \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow y' = u' \pm v'.$$

Далее выведем правило 3. Пусть $y = u \cdot v$, тогда

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta y &= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \\ + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = uv' + u'v + u' \cdot 0 \Rightarrow y' = uv' + u'v.$$

Из правила 3, в частности, следует правило 4.

Самостоятельно докажите правило 5.

2.4. Производная сложной функции

Пусть переменная y зависит от переменной u , которая, в свою очередь, зависит от переменной x , т. е. $y = y(u)$, $u = u(x)$. Тогда функция $y = y(u(x))$ называется *сложной функцией* от переменной x или функцией от функции, переменная u называется *промежуточной переменной*. Операция подстановки функции в функцию называется *суперпозицией функций*.

Приведем пример сложной функции. Пусть $y = \cos u$, $u = x^2$. В результате операции суперпозиции получим сложную функцию $y = \cos x^2$ переменной x .

Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, постоянная (константа) $y = C$ называются *основными элементарными функциями*. Всякая функция, которая получается из основных элементарных функций путем конечного числа суперпозиций и арифметических операций, называется *элементарной*.

Пусть имеется сложная функция $y = y(u(x))$. Требуется найти производную y по x . Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Перейдем к пределу и

тогда получим $y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot u'_x$. Таким образом, производная сложной функции равна произведению производных каждой из этих функций при условии, что они существуют.

Пусть имеется функция $y = y(u(t(x)))$. Тогда производная $y'_x = y'_u \cdot u'_t \cdot t'_x$.

Пример 2.3. Найдите производные заданных функций:

1) $y = \cos x^2$;

2) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $y = \arctg \sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)}$.

Решение. Применяя правила дифференцирования функции, получим:

$$1) y'_x = -\sin x^2 \cdot 2x = -2x \sin x^2;$$

$$2) y' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$\begin{aligned} 3) y'_x &= \frac{1}{1 + (\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)})^2} \cdot (\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)})' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)}} \cdot (\operatorname{tg}(x^2 + 1))' = \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 1)} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)}} \times \\ &\times \frac{1}{\cos^2(x^2 + 1)} \cdot 2x = \frac{x}{(1 + \operatorname{tg}(x^2 + 1)) \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)} \cdot \cos^2(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Основные правила дифференцирования и таблица производных основных элементарных функций приведены в прил. 1 и 2.

2.5. Производные высших порядков.

Неявное, логарифмическое и параметрическое дифференцирование

Рассмотрим производные высших порядков. Производная функции y' называется *второй производной* функции y и обозначается y'' . Таким образом, $y'' = (y')'$. Аналогично $y''' = (y'')'$, ..., $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Используются также обозначения $y^{(n)}(x)$, $f_x^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ и др.

Пример 2.4. Найдите $y^{(n)}(x)$, если $y = e^{5x}$.

Решение.

$$y' = (e^{5x})' = 5e^{5x}, \quad y'' = (5e^{5x})' = 5^2 e^{5x}, \quad \dots,$$

$$y^{(n)} = (5^{n-1} e^{5x})' = 5^n e^{5x}.$$

Пример 2.5. Смещение мышечной ткани в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением $y = \sin^2 \frac{t}{2}$, $t > 0$. Определите скорость и ускорение смещения в зависимости от времени.

Решение. Скорость смещения равна первой производной функции

$y = \sin^2 \frac{t}{2}$, $t > 0$, а ускорение смещения – второй производной:

$$y' = \left(\sin^2 \frac{t}{2} \right)' = 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin t,$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2} \sin t \right)' = \frac{1}{2} \cos t.$$

Функция $F(x, y) = 0$, где переменная y не представлена в виде $y = f(x)$, называется *заданной неявно*. Чтобы найти производную неявной функции, нужно обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x , считая y функцией от x , а затем полученное уравнение решить относительно y' . В результате найдем производную от неявной функции в виде $y' = \varphi(x, y)$.

Пример 2.6. Найдите:

- 1) производную неявной функции $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;
- 2) значение производной неявной функции $x \sin y - y \cos x = 0$ в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

1) продифференцируем обе части равенства, считая y функцией от x : $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(y + xy') = 0$, сократим на 3 и запишем в виде $x^2 - y - y'(x - y^2) = 0$, откуда получим $y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$;

2) продифференцируем обе части равенства, считая y функцией от x : $\sin y + x \cos y \cdot y' - y' \cos x + y \sin x = 0$, запишем в виде $\sin y + y \sin x - y'(\cos x - x \cos y) = 0$, откуда $y' = \frac{\sin y + y \sin x}{\cos x - x \cos y}$. Подставим в правую часть

последнего равенства значения $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, получим $y' = 1$.

Дифференцирование многих функций значительно упрощается после их предварительного логарифмирования. Если требуется найти производную y' функции $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, с помощью *логарифмического дифференцирования*, то нужно выполнить следующие шаги:

- 1) прологарифмировать обе части уравнения $y = f(x)$ по основанию e :

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$

- 2) продифференцировать обе части полученного равенства с учетом того, что $\ln y$ есть сложная функция от x :

$$\frac{1}{y} y' = \varphi'(x);$$

3) заменить u на $f(x)$ и определить y' :

$$y' = u\varphi'(x) = f(x)\varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, если заданная функция содержит так называемые логарифмические операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня), а также при нахождении производной от *показательно-степенной функции*.

Пусть требуется найти производную от функции $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, причем предполагается, что $u(x) > 0$. Прологарифмируем данную функцию по основанию e и получим $\ln y = v \ln u$. Далее продифференцируем обе части полученного равенства с учетом того, что $\ln y$ есть сложная функция от x :

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} y' &= y \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right) = \\ &= u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'. \end{aligned}$$

Соответственно, образована формула для нахождения производной от показательно-степенной функции:

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'.$$

Пример 2.7. Найдите:

- 1) y' , если $y = (\cos x)^{\sin x}$;
- 2) y' , если $y = \sqrt[5]{\frac{(x^4 + 1)^2 (x^2 + 2)^3 (x^2 + 3)^4}{(x^2 + 4)^2}}$.

Решение:

- 1) с помощью логарифмического дифференцирования получим

$$\ln y = \sin x \cdot \ln \cos x,$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

откуда

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right).$$

2) с помощью логарифмического дифференцирования получим

$$\ln y = \frac{2}{5} \ln(x^4 + 1) + \frac{3}{5} \ln(x^2 + 2) + \frac{4}{5} \ln(x^2 + 3) - \frac{2}{5} (x^2 + 4),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{8}{5} \cdot \frac{x^3}{x^4 + 1} + \frac{6}{5} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{8}{5} \cdot \frac{x}{x^2 + 3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{x}{x^2 + 4}.$$

откуда

$$y' = \sqrt[5]{\frac{(x^4 + 1)^2 (x^2 + 2)^3 (x^2 + 3)^4}{(x^2 + 4)^2}} \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{4x^3}{x^4 + 1} + \frac{3x}{x^2 + 2} + \frac{4x}{x^2 + 3} - \frac{2x}{x^2 + 4} \right).$$

Пусть функция $y(x)$ задана *параметрическими уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеют производные, причем $x'(t) \neq 0$ для $t \in [\alpha; \beta]$, то имеет место формула для нахождения производной функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad x = x(t). \quad \text{Здесь предполагается, что функция } x = x(t) \text{ является не-}$$

прерывной и строго монотонной в окрестности рассматриваемой точки t .

Для нахождения второй производной функции $y(x)$, заданной параметрически, следует применить сформулированное правило к ее первой производной:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad x = x(t).$$

Пример 2.8. Найдите:

$$1) y'_x, \text{ если } \begin{cases} x = e^t + 5, \\ y = e^{5t}; \end{cases}$$

$$2) y'_x \text{ и } y''_{xx}, \text{ если } \begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 4 \cos t. \end{cases}$$

Решение:

1) находим $x'_t = e^t$, $y'_t = 5e^{5t}$. Далее по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $x = x(t)$, получаем $y'_x = 5e^{4t}$, $x = e^t + 5$.

2) находим $x'_t = 2 \cos t$, $y'_t = -4 \sin t$. Далее по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $x = x(t)$, получаем $y'_x = -2 \operatorname{tg} t$, $x = 4 \cos t$. По формуле $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, $x = x(t)$, получаем

$$y''_{xx} = \frac{(-2 \operatorname{tg} t)'_t}{2 \cos t} = \frac{-2/\cos^2 t}{2 \cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}, \quad x = 2 \sin t.$$

2.6. Дифференциал функции и его приложения

Дифференциал функции $y = f(x)$ вычисляют по формуле $dy = f'(x)dx$ или $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Предполагается, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x . Для приближенного вычисления значений функций применяют формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. Здесь точку x_0 выбирают исходя из условия таким образом, чтобы значение исходной функции можно было вычислить очевидно. При этом следует учитывать тот факт, что чем меньше Δx , тем точнее результат.

2.6.1. Правила нахождения дифференциала функции

Пусть C — постоянная величина, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда имеют место следующие правила нахождения дифференциала функции:

- | | |
|---------------------------|--|
| 1) $dC = 0$; | 4) $d(u \cdot v) = vdu + u dv$; |
| 2) $d(Cu) = Cdu$; | 5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$, $v \neq 0$; |
| 3) $d(u + v) = du + dv$; | 6) $d\left(\frac{C}{u}\right) = -\frac{Cdu}{u^2}$, $u \neq 0$. |

Геометрический смысл дифференциала функции состоит в том, что его значение в точке x равно приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда аргумент x получает приращение Δx .

Если $y = f(x)$ — дифференцируемая функция и существует дифференциал от дифференциала, то он называется *дифференциалом второго порядка* данной функции и обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Для нахождения применяют формулу $d^2y = f''(x)dx^2$. Аналогично определяют и находят дифференциалы более высоких порядков. Формула дифференциала n -го порядка, $n \in \mathbf{N}$: $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Пример 2.9. Найдите дифференциал следующих функций:

- 1) $y = \frac{e^x}{x^2}$;
2) $y = \log_{x^2-x+1} e$.

Решение:

$$1) dy = y' dx \Rightarrow y' = \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{x^4} = \frac{x e^x - 2 e^x}{x^3} \Rightarrow dy = \frac{x e^x - 2 e^x}{x^3} dx;$$

2) по свойству логарифмов заданная функция примет вид

$$y = \frac{1}{\ln(x^2 - x + 1)}.$$

Тогда

$$dy = -\frac{1}{\ln^2(x^2 - x + 1)} \cdot (\ln(x^2 - x + 1))' dx = -\frac{1}{\ln^2(x^2 - x + 1)} \times \\ \times \frac{1}{x^2 - x + 1} (x^2 - x + 1)' dx = -\frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)\ln^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

Пример 2.10. Вычислите приближенно $\operatorname{tg} 44^\circ$.

Решение. $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x_0 = 45^\circ$, $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$ рад. Далее по формуле

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \Rightarrow \operatorname{tg}(45^\circ - 1^\circ) \approx \operatorname{tg} 45^\circ + \\ + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) \Big|_{(x = 45^\circ)} \approx 1 + \frac{1}{\cos^2 45^\circ} \left(-\frac{3,14}{180}\right) \approx 1 + \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2} (-0,017) \approx \\ \approx 1 + 2 \cdot (-0,017) \approx 1 - 0,034 = 0,966 \approx 0,97.$$

Пример 2.11. Объект исследования — шарообразная клетка радиусом r , которая, согласно модельным предположениям, не изменяя формы, непрерывно увеличивается в объеме. При помощи дифференциала найдите приближенное значение изменения объема клетки, если ее радиус увеличивается от $2,5 \cdot 10^{-3}$ до $2,6 \cdot 10^{-3}$ см. Вычислите приближенно объем клетки после ее увеличения.

Решение. Известна формула $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ для вычисления объема шара. Воспользуемся формулой $V(r_0 + \Delta r) \approx V(r_0) + V'(r_0) \cdot \Delta r$. Вводим следующие обозначения: $r_0 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ см, $\Delta r = dr = 2,6 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-3} = 10^{-4}$ см. Выражаем производную: $V'(r) = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi \cdot r^2$. Вычисляем приближенное значение изменения объема клетки:

$$\Delta V \approx dV = V'(r_0) \cdot dr = 4\pi \left(\frac{5}{2} \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 10^{-4} = 2,5\pi \cdot 10^{-9} \approx 7,85 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3.$$

Находим приближенное значение объема увеличенной клетки:

$$V(2,5 \cdot 10^{-3} + 10^{-4}) \approx V(2,5 \cdot 10^{-3}) + V'(2,5 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-4} = \\ = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5}{2} \cdot 10^{-3}\right)^3 + 2,5\pi \cdot 10^{-9} \approx 7,33 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3.$$

Пример 2.12. Вычислите $\Delta y(x_0)$ и $dy(x_0)$, если $y = x^2 + 2x + 5$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,001$.

Решение.

$$\begin{aligned}\Delta y(x_0) &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y(2,001) - y(2) = \\ &= 2,001^2 + 2 \cdot 2,001 + 5 - (2^2 + 2 \cdot 2 + 5) = 0,006\,001; \\ dy(x_0) &= y'(x_0)dx = (2x + 2)|_{x_0} \cdot \Delta x = (2 \cdot 2 + 2) \cdot 0,001 = 0,006.\end{aligned}$$

Абсолютная ошибка в этом примере, допускаемая при замене Δy на dy , $\Delta y - dy = 0,000\,001$. Относительная ошибка $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \frac{0,000\,001}{0,006\,001} < 0,02\%$, что говорит о достаточно хорошей точности для расчетов на практике.

Рассмотрим *погрешность* при вычислении значения функции, возникающую из-за погрешности в определении аргумента. Пусть α_x — абсолютная погрешность в определении аргумента x_0 . Тогда $|\Delta y| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x| \leq |f'(x_0)| \alpha_x$. Исходя из этого, в качестве *абсолютной погрешности* α_y значения функции можно рассмотреть величину $\alpha_y = |f'(x_0)| \alpha_x$. *Относительные погрешности* δ_x , δ_y для аргумента и функции соответственно выражаются формулами

$$\delta_x = \frac{\alpha_x}{|x_0|}, \quad \delta_y = \frac{\alpha_y}{|y_0|} = \frac{|f'(x_0)| \alpha_x}{|f(x_0)|}.$$

Самостоятельно найдите дифференциал функции $f(x) = \frac{\cos x^2}{x^2}$.

2.6.2. Связь непрерывности и дифференцируемости

Между понятиями непрерывности и дифференцируемости (существованием конечной производной) имеется простая связь. Сформулируем ее в виде теоремы о непрерывности дифференцируемой функции в точке.

Теорема 2.1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение уже не имеет места в общем случае. Это видно из следующего примера: функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке, так как в точке $x = 0$ нет определенной касательной, т. е. $y'(+0) = 1$, $y'(-0) = -1$, $y'(+0) \neq y'(-0)$.

2.7. Формулы Тейлора и Маклорена

Если функция $y = f(x)$ имеет производные в окрестности точки x_0 до $(n+1)$ -го порядка включительно, то существует точка $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) называется *формулой Тейлора* функции $y = f(x)$ в точке x_0 , а $R_n(x)$ — остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Частный случай при $x_0 = 0$ называется *формулой Маклорена*, которая имеет следующий вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c = \theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то с помощью формулы Тейлора можно приближенно представить (аппроксимировать) функцию $y = f(x)$ в виде многочлена Тейлора или многочлена Маклорена (при $x = 0$), т. е.

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ &+ \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \\ f(x) &\approx f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Формула Тейлора позволяет оценить возникающую при этом погрешность $R_n(x)$, которая может быть сделана сколь угодно малой лишь при значениях x , при которых $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Разложения для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ по формуле Маклорена выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c, \quad c = \theta x, \quad 0 < \theta < 1, \quad (2.2) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c, \end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Пример 2.13. Представьте в виде многочлена Тейлора (Маклорена) следующие функции:

1) $y = \frac{1}{x}$ в точке $x=1$;

2) $y = e^{-x^2}$.

Решение:

1) воспользуемся формулой Тейлора (2.1). Найдем производные функции и их значения в точке $x=1$:

$$y^{(1)}(1) = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1,$$

$$y^{(2)}(1) = \frac{2}{x^3} \Big|_{x=1} = 2, \quad y^{(3)}(1) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} \Big|_{x=1} = -6,$$

$$y^{(4)}(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \Big|_{x=1} = 24, \quad \dots, \quad y^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \Big|_{x=1} = (-1)^n n!$$

Далее, после подстановки в формулу (2.1) и упрощений, получим

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+2}};$$

2) воспользуемся формулой Маклорена (2.2) для разложения функции e^x и запишем ее в следующем виде:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^c, \quad c = \theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Положим, $u = -x^2$, тогда получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} e^c, \quad c = \theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Самостоятельно представьте в виде многочлена Маклорена следующие функции:

1) $y = x \sin 2x$;

2) $y = \cos \sqrt{x}$.

2.8. Приложения производных

2.8.1. Правило Лопиталю – Бернулли

Теория пределов позволяет раскрывать основные виды неопределенностей:

$$\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right], [0 \cdot \infty], [0^0], [1^\infty], [\infty - \infty], [\infty^0].$$

Рассмотрим отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 , исключая, может быть, саму точку x_0 . Пусть эти функции являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \rightarrow x_0$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех точек из окрестности точки x_0 . Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2 (Лопиталю – Бернулли). Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 2.1. Если, в свою очередь, отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям теоремы Лопиталю – Бернулли, то можно перейти к пределу отношения вторых производных и т. д.

2.8.2. Раскрытие неопределенностей вида

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Для раскрытия неопределенности вида $0 \cdot \infty$ необходимо преобразовать соответствующее произведение $f(x) \cdot g(x)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, например, следующим образом: $\frac{f(x)}{1/g(x)} \left[\frac{0}{0} \right]$ или $\frac{g(x)}{1/f(x)} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

В случае неопределенности вида $\infty - \infty$ необходимо преобразовать соответствующую разность $f(x) - g(x)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, в произведение $f(x) \cdot \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right)$ или к виду $\frac{1 - g(x)/f(x)}{1/f(x)}$. Возможны и другие виды преобразований с целью получения неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределенности видов $1^\infty, 0^0, \infty^0$ раскрываются с помощью предва-
рительного логарифмирования и нахождения предела показательного-сте-
пенной функции $u(x)^{v(x)}$. При этом можно воспользоваться тождеством
 $u(x)^{v(x)} = e^{\frac{\ln u(x)}{1/v(x)}}$. В некоторых случаях правило Лопиталя – Бернулли полез-
но комбинировать со способами нахождения пределов, изученными ранее,
в том числе использовать известные замечательные пределы.

Пример 2.14. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 2.15. Используя правило Лопиталя – Бернулли, найдите сле-
дующие пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{\ln(x^2 - 5x + 7)}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^6 2x}{e^{x^3} - x^3 - 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}};$$

Решение:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{\ln(x^2 - 5x + 7)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 7}{(2x - 5)/(x^2 - 5x + 7)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x - 7)(x^2 - 5x + 7)}{2x - 5} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 3 - 7)(3^2 - 5 \cdot 3 + 7)}{2 \cdot 3 - 5} = -1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^6 2x}{e^{x^3} - x^3 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin^5 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{3x^2 e^{x^3} - 3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} \times$$

$$\times \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{e^{x^3} - 1} = 16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{e^{x^3} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= 16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{3x^2 e^{x^3}} = 32 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{e^{x^3}} = 32 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 \cdot 1 =$$

$$= 32 \cdot 2^2 = 128;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = [0^0] = |u(x)^{v(x)}| = e^{\frac{\ln u(x)}{1/v(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^x / e^x - 1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + xe^x}} = e;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = [0^0] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right)}{\ln x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arctg x} \cdot \frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctg x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{1+x^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + xe^x + e^x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.16. Популяция микроорганизмов растет от начального размера в 1000 особей до размера $p(t)$ в момент времени t (выражается в днях) согласно уравнению $p(t) = \frac{100e^{t/2}}{1 + 5(e^{t/2} - 1)}$. Найдите равновесную популяцию, т. е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$.

Решение.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \frac{100e^{t/2}}{1 + 5(e^{t/2} - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(100e^{t/2})'}{(1 + 5(e^{t/2} - 1))'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50e^{t/2}}{5e^{t/2}} = 10.$$

2.8.3. Возрастание и убывание функций.

Локальные максимумы и минимумы

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (убывающей) в интервале (a, b) , если, каковы бы ни были значения x_1 и x_2 из этого интервала, из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$). Если для таких x_1 и x_2 из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) \leq f(x_1)$), то функция $f(x)$ называется *неубывающей* (невозрастающей) в интервале $(a; b)$. Функции такого вида называются *монотонными* и часто встречаются на практике. Например, освещенность, меняющаяся по мере удаления от источника света, — монотонно убывающая функция расстояния.

Теорема 2.3. Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, является неубывающей (невозрастающей) на нем, то ее производная в этом интервале не отрицательна (не положительна), т. е. $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Теорема 2.4. Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, удовлетворяет в нем условию $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), то эта функция не возрастает (не убывает) в интервале $(a; b)$.

Пример 2.17. Найдите интервалы возрастания (убывания) следующих функций:

1) $y = 10^x$;

2) $y = x^2$.

Решение:

1) $y' = 10^x \ln 10 > 0$ для всех x . Следовательно, функция всюду возрастает;

2) $y' = 2x$. Данная функция возрастает, если $x \in (0; +\infty)$ ($y' > 0$), и убывает, если $x \in (-\infty; 0)$ ($y' < 0$).

2.8.4. Локальные максимумы и минимумы

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *экстремумом* функции.

Замечание 2.2. Точки локального максимума (max) и минимума (min) функции более правильно называть точками локального экстремума.

Замечание 2.3. Локальные максимумы и минимумы функции могут достигаться лишь внутри области определения. Концы замкнутых отрезков не могут быть точками, в которых достигаются локальные экстремумы (рис. 2.3).

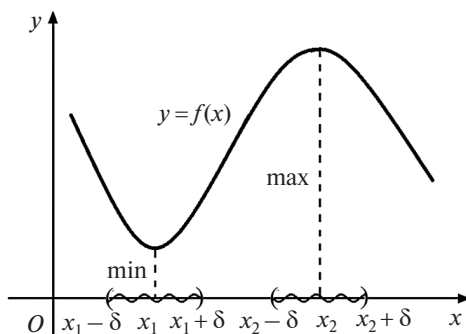


Рис. 2.3

Теорема 2.5 (необходимое условие существования экстремума). Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале (a, b) , имеет в точке x_0 , $a < x_0 < b$, экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Замечание 2.4. Условие $f'(x_0) = 0$ не является достаточным. Например, функция $y = x^3$ не имеет экстремума в точке $x = 0$, хотя ее производная $y' = 3x^2$ в этой точке равна нулю.

Определение. Точки из области определения функции, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует (обращается в бесконечность), называются *стационарными точками первого рода* или *критическими*.

Теорема 2.6 (первое достаточное условие существования экстремума). Если при переходе через стационарную точку x_0 слева направо значение производной меняет знак «плюс» («минус») на «минус» («плюс»), то x_0 является точкой локального максимума (локального минимума). Если при переходе через стационарную точку x_0 значение производной не меняет знак, то в этой точке экстремума нет.

2.8.5. Алгоритм исследования функции на экстремум и интервалы монотонности

Пусть задана дифференцируемая функция $f(x)$.

Шаг 1. Находим область определения $D(x)$ и наносим на числовую прямую.

Шаг 2. Находим производную $f'(x)$.

Шаг 3. Находим корни уравнения $f'(x) = 0$.

Шаг 4. Определяем знак $f'(x)$ слева и справа от каждого из найденных корней и согласно приведенным ранее теоремам делаем заключение об интервалах монотонности и экстремумах.

Шаг 5. Вычисляем значение функции в точках экстремума.

Пример 2.18. Исследуйте на интервалы монотонности и экстремумы функцию $y = x^3 - 3x - 5$.

Решение.

Шаг 1. $D(x): x \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. $y' = 3x^2 - 3$.

Шаг 3. $y' = 0$, $3x^2 - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Шаг 4. $D(x)$ и стационарные точки -1 и 1 наносим на числовую прямую. Определяем знак производной на каждом из полученных интервалов и делаем заключение о локальных экстремумах и об интервалах монотонности (рис. 2.4).

Шаг 5. Вычисляем значение функции в точках экстремума.

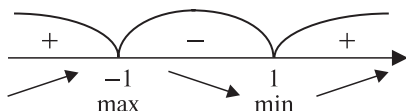


Рис. 2.4

Функция $y = x^3 - 3x - 5 \nearrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $\searrow x \in (-1; 1)$; $x = -1$, точка $\max$, $y_{\max}(-1) = -3$; $x = 1$, точка $\min$, $y_{\min}(1) = -7$.

Пример 2.19. Реакции организма на два лекарственных препарата выражаются соответственно функциями $y_1 = te^{-t}$ и $y_2 = t^2e^{-t}$, где t — время в часах, прошедшее с момента приема препарата. Определите максимальные реакции на оба препарата. Реакция на какой из препаратов усиливается дольше? Сравните реакции организма на препараты в конце первого и второго часов их действия.

Решение. Сначала записываем производные данных функций: $y'_1 = e^{-t}(1-t)$, $y'_2 = e^{-t}(2t-t^2)$. Замечаем, что исходные функции, как и их производные, определены на всей действительной оси (хотя по условию задачи имеет смысл рассматривать лишь значения $t > 0$). Условие $y'_1 = e^{-t}(1-t) = 0$ равносильно тому, что $t = 1$, а условие $y'_2 = e^{-t}t(2-t) = 0$ равносильно совокупности равенств $t = 0$ или $t = 2$ (здесь используется тот факт, что $e^{-t} > 0$ при любом действительном значении переменной t). Применяя сформулированные ранее теоремы, получаем результаты, которые представлены на рис. 2.5. Согласно этим результатам максимальная реакция на первый препарат достигается при $t = 1$ и равна $y_1(1) = e^{-1} \approx 0,37$, а максимальная реакция на второй препарат — при $t = 2$ и равна $y_2(2) = 4e^{-2} \approx 0,54$.

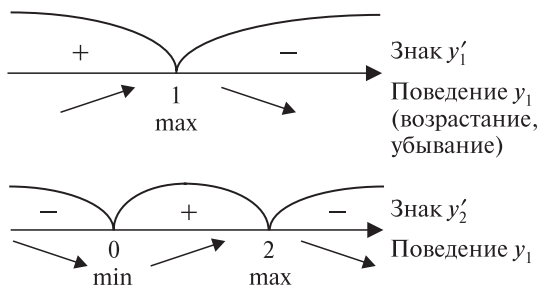


Рис. 2.5

Итак, максимальная реакция на второй препарат выражена более сильно, чем на первый. Реакция на второй препарат усиливается дольше, чем на первый. Легко заметить, что $y_1(1) = y_2(1) \approx 0,37$. Значит, в конце первого

го часа реакции организма на оба препарата одинаковы. Затем реакция на первый препарат начинает убывать, а на второй — продолжает возрастать и в конце второго часа достигает своего максимального значения. Таким образом, в конце второго часа реакция организма на второй препарат выражена значительно сильнее, чем на первый.

Самостоятельно исследуйте на интервалы монотонности и экстремумы функцию $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{8}{3}$.

2.8.6. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной (второе достаточное условие экстремума)

Теорема 2.7. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).

Пример 2.20. Исследуйте на экстремум функцию $y = x^3 - 3x - 5$.

Решение. $y' = 3x^2 - 3$, стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; $y'' = 6x$, $y''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow x = -1 (\cdot) \max$, $y''(1) = 6 > 0 \Rightarrow x = 1 (\cdot) \min$.

Теорема 2.8. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ n раз дифференцируема, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и выполняются условия $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если n — четное число, то в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, а именно максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n — нечетное число, то в точке x_0 функция не имеет локального экстремума.

2.8.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке достигаются на границах заданного отрезка или в стационарных точках функции, принадлежащих заданному отрезку.

Чтобы вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (глобальные $\max(y_{\text{наиб}})$ и $\min(y_{\text{наим}})$), следует найти стационарные точки функции, принадлежащие области ее определения, и вычислить значения функции в этих точках. Далее нужно вычислить значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ и из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 2.21. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-1; 5]$.

Решение. $y' = 6x^2 + 6x - 12$, $6x^2 + 6x - 12 = 0$, $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 1$ – стационарные точки,

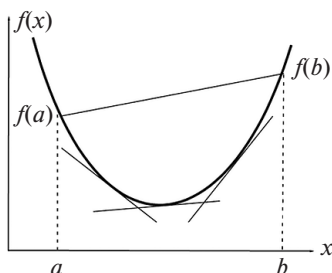
$$y(1) = -6, \quad y(-1) = 14, \quad y(5) = 266;$$

$$(\cdot) \quad x_1 = -2 \notin [-1; 5] \Rightarrow y_{\text{наим}} = -6, \quad y_{\text{наиб}} = 266.$$

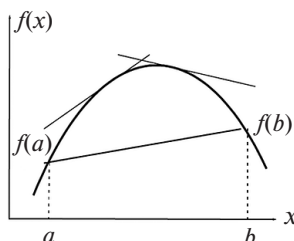
2.8.8. Выпуклость и вогнутость графика функции.

Точки перегиба

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (вогнутым)* в интервале $(a; b)$, если на этом интервале дуга кривой расположена ниже (выше) касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a; b)$ (рис. 2.6).



Вид графика вогнутой
(выпуклой вниз) функции



Вид графика выпуклой
(выпуклой вверх) функции

Рис. 2.6

Теорема 2.9 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если функция $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ в любой точке $x \in (a; b)$, то график функции $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$ выпуклый. Если $f''(x) > 0$ в любой точке $x \in (a; b)$, то график функции $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$ вогнутый.

Определение. Точка $(x_0; f(x_0))$ графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая ее выпуклую (вогнутую) часть от вогнутой (выпуклой), называется *точкой перегиба*.

Теорема 2.10. Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль и при переходе через эту точку меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

Определение. Точки, в которых $f''(x_0) = 0$ или не существует в конечном виде, называются *стационарными (критическими) точками второго рода*.

Пример 2.22. Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 11$.

Решение. $y' = 3x^2 - 12x + 3$, $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0$. Тогда $x = 2$ — стационарная точка второго рода. Для $x \in (-\infty; 2)$ $y'' < 0$, следовательно, на этом интервале график выпуклый; для $x \in (2; +\infty)$ $y'' > 0 \Rightarrow$ график вогнутый. Точка $x = 2$ — абсцисса точки перегиба; $y(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 11 = 8 - 24 + 6 + 11 = 1$, $(2; 1)$ — точка перегиба графика.

Пример 2.23. Исследуйте влияние щелочи, добавляемой в раствор кислоты, на pH раствора при указанных далее условиях. К водному раствору одноосновной кислоты НА с константой диссоциации K_α добавляют одно-кислотное основание — щелочь. Опыт проводят при температуре $T \approx 25^\circ\text{C}$. Пусть V_1 — это объем добавляемого раствора щелочи, л; C_1 — концентрация добавляемого раствора щелочи, М; V_2 — изначальный объем раствора кислоты НА, л; C_2 — изначальная концентрация данного раствора кислоты, М. Плотности всех растворов считают неизменными и приближенно равными 1 г/см^3 , что возможно при концентрациях не более $0,01 \text{ М}$ всех рассматриваемых растворов. Будем считать, что щелочь диссоциирует полностью и верно следующее допущение: до тех пор, пока количество (моль) щелочи, добавляемое на 1 л раствора, меньше C_2 , все добавляемые ионы OH^- стехиометрически превращают молекулы НА в ионы A^- . Другими словами, каждый гидроксил-ион, который получается в результате диссоциации щелочи, добавляемый в раствор кислоты, переводит одну молекулу кислоты в один анион кислотного остатка (до момента, пока в растворе присутствуют молекулы кислоты). При таком условии химическое количество добавленной щелочи равно химическому количеству образовавшейся соли. Подобное допущение возможно, если кислота не слишком слабая (будем считать $K_\alpha > 10^{-5}$) и концентрация соли не сильно превышает концентрацию непрореагировавшей кислоты (будем считать, что не более чем в 10 раз).

Принимая во внимание перечисленные допущения, запишите формулу функциональной зависимости между объемом V_1 добавляемого раствора щелочи и pH раствора. Найдите промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз графика функции, точки экстремума и перегиба (при их наличии). Приведите пример возможных реагентов. Проанализируйте полученные результаты с химической точки зрения.

Решение. Приведенным условиям соответствует следующая математическая модель:

$$\text{pH} = \text{p}K_\alpha + \lg \frac{[\text{Соль}]}{[\text{Кислота}]},$$

где $\text{p}K_\alpha = -\lg K_\alpha$; $[\text{Соль}]$ — равновесная концентрация соли в растворе, образовавшейся в результате химической реакции кислоты со щелочью, М;

[Кислота] – равновесная концентрация непрореагировавшей кислоты в растворе, М. Равновесные концентрации выражаются формулами

$$[\text{Соль}] = \frac{V_1 C_1}{V_1 + V_2};$$

$$[\text{Кислота}] = \frac{V_2 C_2 - V_1 C_1}{V_1 + V_2}.$$

Таким образом, $\text{pH} = -\lg K_\alpha + \lg \frac{V_1 C_1}{V_2 C_2 - V_1 C_1}$, откуда следует формула

$$\text{pH} = \lg \frac{V_1 C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - V_1 C_1)}.$$

Получили формулу функциональной зависимости между объемом V_1 добавляемого раствора щелочи и pH раствора. Обозначим для удобства аргумент V_1 через x , а функцию $\text{pH} = \lg \frac{x C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1)}$ через y : $y = \lg \frac{x C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1)}$. Проведем требуемое исследование данной функции.

Прежде всего находим область определения указанной функции, соответствующую химическому смыслу задачи. Согласно химическому смыслу переменной x и констант, входящих в формулу, а также области определения функции десятичного логарифма получаем систему условий $x > 0$, $V_2 C_2 - x C_1 > 0$. Отсюда делаем вывод, что область определения функции – это интервал $\left(0; \frac{C_2 V_2}{C_1}\right)$.

Находим первую производную рассматриваемой функции, используя формулу дифференцирования сложной функции и основные правила дифференцирования из прил. 1:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\lg \frac{x C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1)} \right)' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1)}{x C_1} \cdot \left(\frac{x C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1)} \right)' = \\ &= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1)}{x C_1} \cdot \frac{C_1 K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1) - x C_1 K_\alpha (-C_1)}{(K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1))^2} = \\ &= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x C_1} \cdot \frac{C_1 (V_2 C_2 - x C_1) + x C_1^2}{(V_2 C_2 - x C_1)} = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{V_2 C_2}{x (V_2 C_2 - x C_1)}. \end{aligned}$$

Первая производная функции существует и положительна на области определения функции, следовательно, согласно теоремам 2.3 и 2.4 функция $y(x)$ строго возрастает на области определения, точек экстремума не имеет.

Находим вторую производную рассматриваемой функции:

$$y'' = \left(\frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{V_2 C_2}{x(V_2 C_2 - x C_1)} \right)' = \frac{V_2 C_2}{\ln 10} \left((V_2 C_2 x - x^2 C_1)^{-1} \right)' =$$

$$= \frac{V_2 C_2}{\ln 10} \left(- \frac{V_2 C_2 - 2x C_1}{(V_2 C_2 x - x^2 C_1)^2} \right) = \frac{V_2 C_2}{\ln 10} \cdot \frac{2x C_1 - V_2 C_2}{x^2 (V_2 C_2 - x C_1)^2}.$$

Замечаем, что вторая производная существует на области определения функции и обращается в нуль в единственной точке $x = \frac{C_2 V_2}{2C_1}$, находящейся в центре рассматриваемого интервала $\left(0; \frac{C_2 V_2}{C_1} \right)$. Функция $y = \lg \frac{x C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - x C_1)}$ выпуклая вверх на промежутке $\left(0; \frac{C_2 V_2}{2C_1} \right)$, поскольку ее вторая производная отрицательна на указанном интервале, и выпуклая вниз на промежутке $\left(\frac{C_2 V_2}{2C_1}; \frac{C_2 V_2}{C_1} \right)$, поскольку ее вторая производная положительна на этом интервале. Здесь используем теорему 2.9. Согласно теореме 2.10 $x = \frac{C_2 V_2}{2C_1}$ — единственная точка перегиба функции $y(x)$ на области определения. Результаты проведенного математического исследования функции $y(x)$ при помощи ее первой и второй производных кратко можно изобразить в виде схемы, представленной на рис. 2.7.

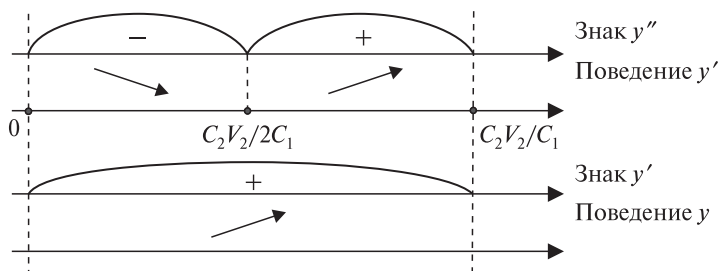


Рис. 2.7

На промежутке $\left(0; \frac{C_2 V_2}{2C_1}\right)$ скорость процесса, описываемого с помощью функции $y(x)$, убывает, на промежутке $\left(\frac{C_2 V_2}{2C_1}; \frac{C_2 V_2}{C_1}\right)$ возрастает, следовательно, в точке перегиба графика функции скорость процесса имеет минимум. Подставляя в функцию значение $x = \frac{C_2 V_2}{2C_1}$, замечая, что $\lg \frac{1}{K_\alpha} = -\lg K_\alpha = pK_\alpha$, и упрощая результат, получаем вторую координату точки перегиба графика функции $y = pK_\alpha$. Таким образом, единственная точка перегиба графика функции имеет вид $\left(\frac{C_2 V_2}{2C_1}; pK_\alpha\right)$.

Анализируя полученные результаты с химической точки зрения, можно сказать, что функция, описывающая уровень pH раствора в зависимости от объема добавляемого раствора щелочи, строго возрастает на всей области определения. Первая производная характеризует чувствительность уровня pH раствора к действию щелочи, и эта чувствительность минимальна в точке перегиба графика функции $\left(\frac{C_2 V_2}{2C_1}; pK_\alpha\right)$. Примерами возможных реагентов могут служить уксусная кислота CH_3COOH и щелочь NaOH. График функции $pH = \lg \frac{V_1 C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - V_1 C_1)}$ при значениях констант $K_\alpha = 1,75 \cdot 10^{-5}$, $C_1 = 0,008 \text{ М}$, $C_2 = 0,009 \text{ М}$, $V_2 = 10 \text{ л}$ изображен на рис. 2.8.

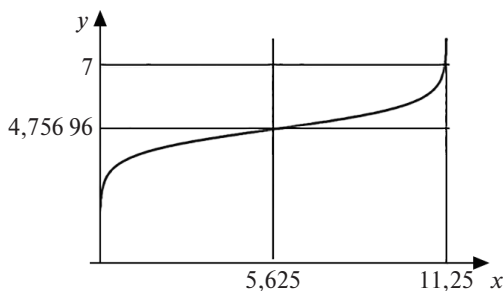


Рис. 2.8

Замечание 2.5. Примеры применения математического исследования функции при помощи ее второй производной можно привести из биохимии, поскольку такое исследование определяет условия, при которых не-

которая величина (например, скорость процесса) наиболее или наименее чувствительна к каким-либо воздействиям. Так исследуют эффективность работы буферных систем, которыми компенсируются краткосрочные колебания pH в живом организме. Буферная система представляет собой смесь слабой кислоты HA и сопряженного с ней основания A^- или слабого основания и сопряженной с ним кислоты. Такие системы могут нейтрализовать избыток как ионов гидроксония, так и гидроксил-ионов. В первом случае избыток протонов связывается основанием A^- с образованием воды и кислоты в недиссоциированной форме. Гидроксил-ионы взаимодействуют с HA с образованием A^- и воды. В обоих случаях уровень pH изменяется очень незначительно. Рассмотренный пример 2.23 подтверждает факт, что буферная система наиболее эффективна в области pH, соответствующей pK_α кислоты, поскольку в этой области чувствительность pH раствора к действию щелочи минимальна. Другими словами, буферная емкость системы максимальна при $pH = pK_\alpha$.

Самостоятельно найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = -x^4 - 2x^3 + 36x^2 + x + 1$.

2.8.9. Асимптоты

Асимптота — прямая, к которой неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удаляется от начала координат. Асимптоты бывают вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$.

Наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$, если они существуют, задают уравнением $y = kx + b$, где k и b определяют по формулам

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

В обеих формулах $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$.

Если окажется, что $k = 0$, то прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой*.

Пример 2.24. Найдите асимптоты кривых:

$$1) y = \frac{x^2 + 2}{x - 2};$$

$$2) y = e^{-x^2}.$$

Решение:

1) $x = 2$ — критическая точка, так как в ней функция не определена.

Находим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \rightarrow \frac{(2-0)^2 + 2}{2-0-2} \rightarrow \frac{6}{-0} \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \rightarrow \frac{(2+0)^2 + 2}{2+0-2} \rightarrow \frac{6}{+0} \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, $x_0 = 2$ — точка разрыва второго рода, а прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота. Находим наклонную асимптоту по формуле $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x - 2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + 2x}{x - 2} = 2.$$

Следовательно, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой;

2) функция $y = e^{-x^2}$ везде определена, поэтому вертикальных асимптот нет. Проверяем наклонные. Находим $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0$, следовательно, наклонных асимптот нет. Находим $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$, $y = 0$ (ось Ox) — горизонтальная асимптота.

Самостоятельно найдите асимптоты кривой $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

2.8.10. Схема исследования и построения графиков функций

Для полного исследования функции и построения ее графика рекомендуется использовать схему.

Шаг 1. Находим область определения функции.

Шаг 2. Проверяем функцию на четность, нечетность, периодичность.

Шаг 3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

Шаг 4. Исследуем на непрерывность и точки разрыва.

Шаг 5. Находим асимптоты.

Шаг 6. Находим интервалы монотонности и точки локальных экстремумов.

Шаг 7. Находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Шаг 8. Строим эскиз графика.

Пример 2.25. Проведите полное исследование и постройте график функции $y = \frac{x^2 + 8}{1 - x}$.

Решение.

Шаг 1. Находим область определения функции: исключаем точку $x = 1$ и получаем $D(x) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Шаг 2. Проверяем функцию на четность, нечетность, периодичность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 8}{1 - (-x)} = \frac{x^2 + 8}{1 + x}; \quad y(-x) \neq y(x); \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. имеет общий вид, непериодическая.

Шаг 3. Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy . Для этого вычислим значение функции при $x = 0$. Очевидно, что $y(0) = 8$. Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты $(0; 8)$. Точек пересечения с осью Ox нет, так как уравнение $\frac{x^2 + 8}{1 - x} = 0$ не имеет действительных корней.

Заметим, что числитель дроби $\frac{x^2 + 8}{1 - x}$, $x^2 + 8 > 0$, для любых x , поэтому при $x \in (-\infty; 1)$ функция $y > 0$ (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при $x \in (1; +\infty)$ функция $y < 0$ (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

Шаг 4. Исследуем на непрерывность точки разрыва.

Функция не определена в точке $x = 1$. Следовательно, $x = 1$ является критической (подозрительной на разрыв). Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = 1$. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = -\infty.$$

Поскольку пределы равны бесконечности, точка $x = 1$ является разрывом второго рода, а прямая $x = 1$ — вертикальной асимптотой.

Шаг 5. Находим асимптоты.

Исследуем поведение функции на бесконечности, т. е. при $x \rightarrow \pm\infty$. Далее используем правило Лопиталя — Бернулли:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-1} = +\infty.$$

Поскольку пределы бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Определим наклонные асимптоты вида $y = kx + b$. Вычисляем значения k, b по известным формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8}{x - x^2} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 8}{1 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 8 + x - x^2}{1 - x} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8 + x}{1 - x} \right) = \frac{1}{-1} = -1.$$

Таким образом, у функции есть одна наклонная асимптота $y = -x - 1$.

Шаг 6. Исследуем функцию на экстремумы и монотонность.

Найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 8}{1 - x} \right)' = \frac{(x^2 + 8)'(1 - x) - (x^2 + 8)(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{2x(1 - x) - (x^2 + 8)(-1)}{(1 - x)^2} =$$

$$= \frac{2x - 2x^2 + x^2 + 8}{(1 - x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(1 - x)^2}.$$

Заметим, что область определения производной совпадает с областью определения функции. Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки, т. е. те, где

$$y' = 0, \quad \frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2} = 0, \quad x^2 - 2x - 8 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 4,$$

$x = 1$ не является стационарной точкой, так как не принадлежит области определения заданной функции.

Получили две стационарные (критические) точки: $x = -2, x = 4$. Область определения функции разобьем стационарными точками, включая точку $x = 1$ (не принадлежит области определения), на интервалы и определим знаки производной в каждом промежутке (рис. 2.9).

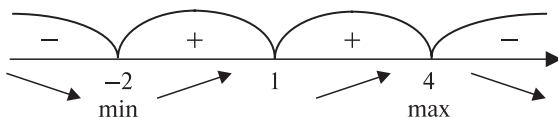


Рис. 2.9

При $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$ производная $y' < 0$, поэтому функция убывает на данных промежутках. При $x \in (-2; 1) \cup (1; 4)$ производная $y' > 0$, функция возрастает на данных промежутках. При этом $x = -2$ — точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), $x = 4$ — точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в указанных точках:

$$y(-2) = \frac{(-2)^2 + 8}{1 - (-2)} = \frac{12}{3} = 4,$$

$$y(4) = \frac{4^2 + 8}{1 - 4} = \frac{24}{-3} = -8.$$

Таким образом, точка минимума — $(-2; 4)$, точка максимума — $(4; -8)$.

Шаг 7. Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{x^2 - 2x - 8}{(1-x)^2} \right)' = -\frac{(x^2 - 2x - 8)'(1-x)^2 - (x^2 - 2x - 8)((1-x)^2)'}{(1-x)^4} = \\ &= -\frac{(2x-2)(1-x)^2 - (x^2 - 2x - 8) \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \\ &= -\frac{(2x-2)(1-x) + 2(x^2 - 2x - 8)}{(1-x)^3} = -\frac{2(-x^2 + 2x - 1 + x^2 - 2x - 8)}{(1-x)^3} = \\ &= -\frac{-2 \cdot (-9)}{(1-x)^3} = \frac{18}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Область определения второй производной $D(x) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Очевидно, что $y'' \neq 0$, так как дробь $\frac{18}{(1-x)^3} \neq 0$, поэтому точек перегиба нет. При этом, когда $x \in (-\infty; 1)$, выполняется условие $y'' > 0$, т. е. функция вогнутая, когда $x \in (1; +\infty)$, выполняется условие $y'' < 0$, т. е. функция выпуклая.

Шаг 8. Вычислим значение функции в некоторых других точках, чтобы точнее построить график:

$$y(-5) = 5; y(2) = -12; y(7) = -9,5.$$

Шаг 9. По полученным данным построим график (рис. 2.10).

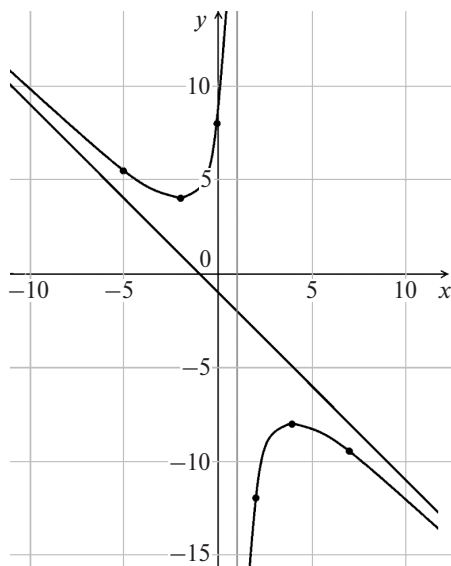


Рис. 2.10

Задачи для самостоятельного решения

В заданиях 1–6 найдите производные заданных функций.

1. 1) $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; $y' = ?$

6) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$; $y'_x = ?$

2) $y = 4^x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{6} - 3^x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$; $y' = ?$

7) $y = \operatorname{tg} \frac{2x}{y}$; $y'_x = ?$

3) $y = \sqrt[3]{(1+x^5)^2} - \frac{1}{x+3}$; $y' = ?$

8) $z = \lg(2 - \cos^4(2y))$; $\frac{dz}{dy} = ?$

4) $y = \arctg(x^2)$; $y'' = ?$

9) $f(x) = 5^{2x}$; $f^{IV}(0) = ?$

5) $y = (\arcsin x)^{2x}$; $y' = ?$

2. 1) $y = x \ln x - x$; $y' = ?$

4) $y = \arcsin(x^2)$; $y'' = ?$

2) $y = 8^x \cdot \log_{1/3}(x^2) + \cos(8x)$; $y' = ?$

5) $y = x^{\arctg x}$; $y' = ?$

3) $y = \sqrt{\frac{\pi - \sin 2x}{\pi + \cos 2x}}$; $y' = ?$

6) $\begin{cases} y = \operatorname{tg} t, \\ x = 1/\cos t, \end{cases}$ $y'_x = ?$

- 7) $e^x \sin y = e^y \cos x$; $y'_x = ?$
- 8) $y = (\arctg \sqrt{z^4 + 1})^5 + e$; $\frac{dy}{dz} = ?$
3. 1) $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x}$; $y' = ?$
- 2) $y = \log_2(x^2 + 6) \cdot \arctg x + 3^{x^3}$; $y' = ?$
- 3) $y = -\frac{\cos x}{2 \sin(3x)} + \operatorname{ctg}(2x)$; $y' = ?$
- 4) $y = e^{-x^2}$; $y'' = ?$
- 5) $y = (\sin 2x)^{\cos 2x}$; $y' = ?$
4. 1) $y = \sqrt{e^{2x}}$; $y' = ?$
- 2) $y = \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) - \frac{\cos x}{\sin(4x)}$; $y' = ?$
- 3) $y = x \lg(4x) - \sin \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)$; $y' = ?$
- 4) $y = \sin^4 x + \cos^2 x$; $y'' = ?$
- 5) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; $y' = ?$
5. 1) $y = \sqrt{\arcsin^2 x + 2^{x^2}}$; $y' = ?$
- 2) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$; $y' = ?$
- 3) $y = \log_8(x + \sqrt{1 + x^2}) - 1$; $y' = ?$
- 4) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$; $y'' = ?$
- 5) $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}$; $y' = ?$
6. 1) $y = (1 + x^2) \arctg x$; $y' = ?$
- 2) $y = \sqrt[3]{\lg(5x)} + \frac{\operatorname{ctg} x}{x^2}$; $y' = ?$
- 3) $y = \operatorname{arccctg}(8x^2 + 1)$; $y' = ?$
- 9) $f(x) = 3^{4x}$; $f^{IV}(0) = ?$
- 6) $\begin{cases} x = t - \arctg t, \\ y = \ln(1 + t^2); \end{cases} y'_x = ?$
- 7) $y - x = \arcsin y - \arcsin x$; $y'_x = ?$
- 8) $z = \sin^2 y + \sin y^2$; $\frac{dz}{dy} = ?$
- 9) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$; $f^{IV}(0) = ?$
- 6) $\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = (t/(t+1))^2; \end{cases} y'_x = ?$
- 7) $yx + \arctg(x + y) = 0$; $y'_x = ?$
- 8) $z = \sqrt[5]{\lg(10^y + 2)}$; $\frac{dz}{dy} = ?$
- 9) $f(x) = x^5 + 5x$; $f^V(0) = ?$
- 6) $\begin{cases} x = \cos(\ln(2t)), \\ y = \sin(\ln(2t)); \end{cases} y'_x = ?$
- 7) $xy = \arctg \frac{x}{y}$; $y'_x = ?$
- 8) $z = \cos^3(e^{3y})$; $\frac{dz}{dy} = ?$
- 9) $f(x) = e^{-6x}$; $f^{VI}(0) = ?$
- 4) $y = x^3 \ln(7x)$; $y'' = ?$
- 5) $y = (\arctg x)^{\arcsin x}$; $y' = ?$
- 6) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \cos^2 \frac{t}{2}; \end{cases} y'_x = ?$

$$7) 3^x + 3^y = 3^{x-y}; y'_x = ?$$

$$9) f(x) = x^5 + 3x^3 + 1; f^V(0) = ?$$

$$8) z = y \log_9(y^2 + 1); \frac{dz}{dy} = ?$$

7. Покажите, что функция $y = x \cdot \ln x + x^3 + 2x^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \cdot y''' + y'' = 12x + 4$.

8. Найдите уравнения касательной и нормали к эллипсу $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$

в точке M_0 , соответствующей значению параметра $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

9. Найдите тангенс угла наклона касательной к кривой, заданной неявным образом $y \cdot e^y = e^{x+1}$, в точке $M_0(0; 1)$.

10. Найдите дифференциалы:

$$1) d\left(\frac{1+x}{1-x}\right);$$

$$2) d(u^2 \cdot 2^v);$$

$$3) d(x^2 - 2u^3).$$

Здесь x — независимый аргумент, а u и v — дифференцируемые функции от этого аргумента на рассматриваемом множестве.

11. Для функции $y = 8x - x^3 + 2x^2$ найдите дифференциал в любой точке x из области определения функции: а) по определению дифференциала функции в точке; б) пользуясь правилами дифференцирования.

12. Найдите второй дифференциал функции $y = \sin(x^2 + 1)$ в любой точке x из области определения функции.

13. С помощью дифференциала найдите приближенные значения выражений:

$$1) \sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}};$$

$$3) \ln 1,005;$$

$$2) \operatorname{arctg} 0,97;$$

$$4) \cos 61^\circ.$$

Проверьте ответы с помощью калькулятора.

14. Вычислите пределы с помощью правила Лопиталья — Бернулли:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + x + 1}{e^{-x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot e^{1/x^2});$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{3x^2 + x + 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right);$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{e^{5x} - 5x - 1};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^6 2x}{e^{x^3} - x^3 - 1};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{1/\ln x}.$$

15. Проведите исследование функции с помощью первой производной, укажите промежутки возрастания и убывания, найдите точки экстремума функции $y = (3-x) \cdot x^{2/3}$.

16. Проведите исследование функции с помощью второй производной, укажите промежутки выпуклости вверх и вниз графика функции, найдите точки экстремума скорости изменения функции $y = x^2(x-3) + 8x + 2$.

17. Вычислите, сколько корней имеют следующие уравнения:

$$1) \ln(1+x^2) = 1-x^2;$$

$$2) x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0.$$

18. Для ограждения клумбы, имеющей форму кругового сектора, имеется 20 м декоративной гибкой ленты, причем использоваться должна вся лента. Определите, какой радиус сектора следует взять, чтобы площадь клумбы получилась наибольшей.

19. Число 8 разбейте на два таких неотрицательных слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

20. Проведите согласно алгоритму из п. 2.8.10 (см. с. 89) исследование функции на ее области определения и постройте эскиз графика:

$$1) y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3;$$

$$6) y = 4x - 5 \ln x - 5;$$

$$2) y = x + \frac{x}{3x-1};$$

$$7) y = \frac{(x-1)^2}{x-2};$$

$$3) y = \frac{8-x^2}{4-x^2};$$

$$8) y = \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^2;$$

$$4) y = \exp \left(-\frac{(x+3)^2}{2} \right);$$

$$9) y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

$$5) y = \frac{\ln x}{x};$$

21. Исследуйте функциональную зависимость $\text{pH} = \lg \frac{V_1 C_1}{K_\alpha (V_2 C_2 - V_1 C_1)}$

между объемом V_1 добавляемого в раствор кислоты раствора щелочи и pH раствора кислоты. Здесь C_1 — концентрация добавляемого раствора щелочи, М; V_2 — изначальный объем раствора кислоты, л; C_2 — изначальная концентрация раствора кислоты, М; K_α — константа диссоциации кислоты. Постройте график функции при следующих значениях констант:

$$K_\alpha = 3,9 \cdot 10^{-5}; \quad C_1 = 0,01 \text{ М}; \quad C_2 = 0,004 \text{ М}; \quad V_2 = 10 \text{ л}.$$

22. Рассмотрите уравнение Аррениуса $k = k_0 e^{-\frac{E}{RT}}$, где T — абсолютная температура, К; E — энергия активации, Дж/моль; $R \approx 8,314$ — универсальная газовая постоянная, Дж/(К · моль); k_0 — аррениусовый постоянный множитель, имеющий размерность константы скорости реакции k , которая в данной математической модели, в отличие от моделей в изотермической кинетике, является не константой, а функцией от переменных E и T . Исследуйте:

1) функциональную зависимость между энергией активации и значением константы скорости элементарной реакции. Абсолютную температуру в данном случае следует считать фиксированной положительной величиной. Постройте с помощью технических средств график функции при $k_0 = 3,771 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$; $T = 296,150 \text{ К}$;

2) функциональную зависимость между абсолютной температурой и значением константы скорости элементарной реакции. Энергию активации в данном случае следует считать фиксированной положительной величиной. Постройте с помощью технических средств график функции при $k_0 = 3,771 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$; $E = 6,928 \cdot 10^4 \text{ Дж/моль}$.

Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля

1. Покажите, что функция $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$ является константой при $x > 0$. Укажите эту константу.

Ответ: $\pi/2$.

2. Вычислите предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\text{tg} x)^{\text{ctg} x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

Ответ: 1) 1; 2) 2/3; 3) 2.

$$3. \text{ Задана функция } f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin\left(\frac{\pi}{|x|^m}\right), & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, m > 0. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Найдите, при каких значениях $m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{R}$:

- 1) функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$;
- 2) функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$;
- 3) функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в точке $x = 0$.

Ответ: 1) $n > 0$, $m > 0$; 2) $n > 1$, $m > 0$; 3) $n > m + 1$, $m > 0$.

4. Найдите производную функции

$$f(x) = \ln(x + \ln(x + \ln(x + \dots))).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{x + f(x) - 1}.$$

5. Найдите количество действительных корней производной функции

$$f(x) = x(x^2 - 9)(x^2 - 4).$$

Ответ: 4.

6. К многочлену степени $n \geq 1$ один из студентов прибавил производную этого многочлена, к полученному многочлену другой студент тоже прибавил его производную и т. д., пока у s -го студента не получился исходный многочлен. Докажите, что кто-то из студентов допустил ошибку.

7. Найдите многочлен наименьшей степени, имеющий при $x = 0$ локальный максимум, равный 2011, а при $x = 2011$ — локальный минимум, равный нулю.

$$\text{Ответ: } \frac{2}{2011^2} x^3 - \frac{3}{2011} x^2 + 2011.$$

8. Известно, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$. Вычислите значение производной функции $f(g(x))$ в точке $x = 0$, если

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0. \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Ответ: 0.

9. Определите количество действительных нулей функции

$$f(x) = 2e^{2-x^2} (x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 1) - 2e - 5.$$

Ответ: 4.

10. Найдите углы, под которыми пересекаются линии $y = x^2$ и $\begin{cases} x = 5/3 \cdot \cos t, \\ y = 5/4 \cdot \sin t. \end{cases}$

Ответ: $\arctg(20,5) \approx 1,522$ рад или $\arctg(20,5) \approx 87,21^\circ$.

11. Докажите, что производная функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

выражается формулой

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

12. Докажите, что производная функции

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

выражается формулой

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 \left(4x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) - \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

13. Докажите, что функция $f(x)$ из примера 11 не является возрастающей ни в какой окрестности точки $x_0 = 0$, хотя в этой точке имеет положительную производную.

14. Докажите, что функция $f(x)$ из примера 12 в точке $x_0 = 0$ имеет минимум, хотя не является монотонной ни в какой односторонней окрестности точки $x_0 = 0$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Ранее было введено новое действие — дифференцирование (нахождение по заданной функции ее производной). Однако для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование. К этому приводят разнообразные задачи из приложений математики практически во всех сферах знания.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для заданной функции $f(x)$ на данном промежутке, если на данном промежутке $F'(x) = f(x)$.

Пример 3.1. Укажите первообразные для функций:

- 1) $f(x) = 2x$;
- 2) $f(x) = -\sin x$.

Решение:

- 1) $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$. Отметим, что вместе с $F(x) = x^2$ первообразной для функции $f(x) = 2x$ является любая функция $\Phi(x) = x^2 + C$, C — произвольная постоянная, так как $C' = 0$;
- 2) $F(x) = \cos x$, $f(x) = -\sin x$ ($\Phi(x) = -\sin x + C$).

Теорема 3.1. Если $F(x)$ — первообразная для заданной функции $f(x)$ на данном промежутке, то $F(x) + C$ также первообразная в этом промежутке.

Из теоремы следует, что две первообразные для заданной функции $f(x)$ на данном промежутке отличаются на постоянное число, а также если известна какая-нибудь первообразная для заданной функции $f(x)$, то множество первообразных исчерпывается функциями $F(x) + C$.

Важный факт: если производная для функции одна, т. е. операция дифференцирования однозначна, то нахождение первообразной для функции возможно с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

Определение. Выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ — первообразная для заданной функции $f(x)$ и C — произвольная константа, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, где $\int$ — знак неопределенного интеграла; $f(x)$ — подынтегральная функция; $f(x)dx$ — подынтегральное выражение; x — переменная интегрирования.

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$.

Теорема 3.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке у функции $f(x)$ существует первообразная.

Далее будем говорить о первообразных непрерывных функций, поэтому рассматриваемые интегралы существуют.

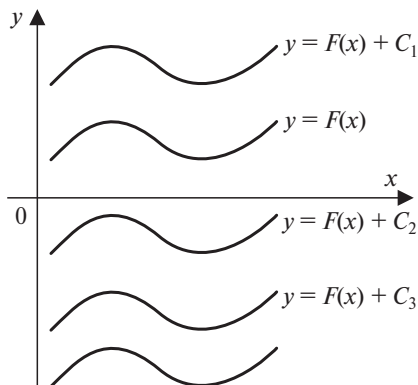


Рис 3.1

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство изоклин («параллельных кривых») $y = F(x) + C$, где каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства. График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой* (рис. 3.1).

3.2. Свойства неопределенного интеграла

Из определения неопределенного интеграла вытекают следующие его свойства:

$$1^\circ) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ или } d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$2^\circ) \int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x) dx = F(x) + C;$$

$$3^\circ) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ где } k - \text{постоянный множитель};$$

$$4^\circ) \int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Свойство 4° справедливо для алгебраической суммы любого конечного числа функций. Равенства в 3° и 4° следует понимать с точностью до постоянного множителя.

Таблица основных неопределенных интегралов приведена в прил. 4.

3.3. Метод непосредственного интегрирования

Метод непосредственного интегрирования состоит в приведении подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример 3.2. Найдите неопределенные интегралы:

$$1) \int \left(5x^4 - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx;$$

$$2) \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^2-10}} \right) dx.$$

Решение:

$$1) \int \left(5x^4 - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx = 5 \int x^4 dx - \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = x^5 - \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

При нахождении интеграла применялись свойства 3° , 4° и формулы 3, 14 из таблицы простейших интегралов (см. прил. 4);

$$2) \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^2-10}} \right) dx = -\int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-3} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-10}} dx = -\ln|x| + \\ + 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \ln|x + \sqrt{x^2-10}| + C = -\ln|x| - \frac{1}{x^2} - \ln|x + \sqrt{x^2-10}| + C.$$

При нахождении интеграла применялись свойства 3° , 4° неопределенного интеграла и формулы 3, 4, 13 из таблицы интегралов (см. прил. 4).

3.4. Метод подстановки или замены переменной интегрирования

Метод подстановки или замены переменной интегрирования часто удобен в случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ не может быть непосредственно преобразован к табличному виду.

Введем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x) = f(\varphi(t))$, $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (3.1)$$

Формула (3.1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле*.

Иногда вместо подстановки $x = \varphi(t)$ удобнее ввести подстановку $t = \varphi(x) \Rightarrow x = \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ – обратная функция по отношению к $t = \varphi(x)$). Далее см. формулу (3.1).

Следствие.

1. $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$

2. $\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$

3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$

Пример 3.3. Вычислите $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \cos x = (\sin x)' \right|_{\text{следствие 1}} = \ln|\cos x| + C.$$

Пример 3.4. Вычислите $\int \frac{2x}{x^2+9} dx$.

Решение.

$$\int \frac{2x dx}{x^2+9} = \int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \left| \text{следствие 2} \right| = \ln(x^2+9) + C.$$

Пример 3.5. Вычислите $\int \cos(5x+9) dx$.

Решение.

$$\int \cos(5x+9) dx = \left| \text{следствие 3} \right|_{\text{см. прил. 4, п. 8}} = \frac{1}{5} \sin(5x+9) + C.$$

Пример 3.6. Вычислите $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \left| x=t^2, t=\sqrt{x}, dx=2tdt \right| = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \ln|t+1| + C = 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

Пример 3.7. Вычислите $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \left| t=e^x, dt=e^x dx = tdx, dx = \frac{dt}{t} \right| = \int \frac{dt}{t(t+t^{-1})} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C. \end{aligned}$$

Во многих случаях нет необходимости вводить в явном виде новую переменную, т. е. записывать, какое выражение мы принимаем за нее.

Пример 3.8. Вычислите $\int \sqrt{x+10} dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{x+10} dx = \int (x+10)^{1/2} d(x+10) = \frac{2}{3} (x+10)^{3/2} + C = \frac{2}{3} (x+10) \sqrt{x+10} + C.$$

Пример 3.9. Вычислите $\int x e^{x^2} dx$.

Решение.

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Из метода замены переменной следует *способ интегрирования функций поднесением множителя под знак дифференциала*. Его суть состоит в том, чтобы поднести некоторый множитель из подынтегральной функции под знак дифференциала, т. е. найти первообразную данного множителя и записать ее под знаком дифференциала. При этом применяется формула $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Целью такого поднесения является введение новой переменной интегрирования с помощью подстановки $t = \varphi(x)$, в результате чего исходный интеграл сводится к более простому или табличному.

Отметим некоторые преобразования дифференциалов функций с помощью поднесения множителя под знак дифференциала:

- 1) $dx = d(x + b)$, $b \in \mathbf{R}$;
- 2) $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;
- 3) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$;
- 4) $x^\alpha dx = d\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)$, $\alpha \neq -1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, в частности $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$;
- 5) $\sin x dx = -d(\cos x)$;
- 6) $\cos x dx = d(\sin x)$;
- 7) $e^x dx = d(e^x)$;
- 8) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$;
- 9) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$;
- 10) $\frac{dx}{x} = d(\ln|x|)$;
- 11) $\varphi'(x)dx = \frac{1}{a} d(a\varphi(x) + b)$, где $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$, $\varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция на рассматриваемом множестве.

В формулах 8–10 подразумевается, что знаменатели дробей не обращаются в нуль на рассматриваемых промежутках.

Пример 3.10. Найдите неопределенные интегралы:

$$1) \int \sin^7 x \cdot \cos x dx;$$

$$2) \int \frac{x^2 dx}{7x^3 + 3};$$

$$3) \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{9 - 4\ln^2 x}}.$$

Подразумевается, что формулы, содержащие под знаком интеграла дробь, а в случае формулы 3 – натуральный логарифм и квадратный корень, рассматриваются лишь на промежутках, на которых дробь, логарифм и квадратный корень определены.

Решение:

$$1) \int \sin^7 x \cdot \cos x dx = \int (\sin x)^6 d(\sin x) = [\sin x = u] = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C;$$

$$2) \int \frac{x^2 dx}{7x^3 + 3} = \int \frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{7x^3 + 3} = \frac{1}{3 \cdot 7} \int \frac{d(7x^3 + 3)}{7x^3 + 3} = [7x^3 + 3 = u] = \frac{1}{21} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{21} \ln|u| + C = \\ = \frac{1}{21} \ln|7x^3 + 3| + C;$$

$$3) \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{9 - 4\ln^2 x}} = \int \frac{\ln x}{\sqrt{9 - 4\ln^2 x}} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{\ln x \cdot d \ln x}{\sqrt{9 - 4\ln^2 x}} = [\ln x = u] = \int \frac{u \cdot du}{\sqrt{9 - 4u^2}} = \\ = \int \frac{d\left(\frac{u^2}{2}\right)}{\sqrt{9 - 4u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du^2}{\sqrt{9 - 4u^2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \int \frac{d(9 - 4u^2)}{\sqrt{9 - 4u^2}} = -\frac{1}{8} \int \frac{d(9 - 4u^2)}{\sqrt{9 - 4u^2}} = [9 - 4u^2 = t] = \\ = -\frac{1}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\frac{1}{4} \sqrt{9 - 4\ln^2 x} + C.$$

Пример 3.11. Скорость изменения концентрации $c(t)$ препарата с изотопным индикатором в момент времени t есть $c'(t) = 2^{-t}$ (t выражается в часах). Найдите формулу для выражения концентрации в момент времени t , если начальная концентрация (при $t = 0$) составляет 1 мкг/л.

Решение.

$$c(t) = \int 2^{-t} dt = -\int 2^{-t} d(-t) = [-t = u] = \\ = -\int 2^u du = -\frac{2^u}{\ln 2} + C = -\frac{2^{-t}}{\ln 2} + C.$$

Из условия $c(0) = 1$ получаем, что $-\frac{2^0}{\ln 2} + C = 1$, т. е. $C = 1 + \frac{1}{\ln 2}$. Окончательная формула для выражения концентрации в момент времени t выглядит так: $c(t) = \frac{1 - 2^{-t}}{\ln 2} + 1$.

3.5. Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Из определения дифференциала функции следует, что $d(uv) = vdu + udv$ ($(uv)' = u'v + uv'$) $\Rightarrow udv = d(uv) - vdu$. Интегрируя последнее соотношение, получим $\int udv = \int d(uv) - \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$.

Формула интегрирования по частям выглядит следующим образом:

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad (3.2)$$

Произвольная постоянная C здесь включена в слагаемое $\int vdu$. Смысл формулы (3.2) состоит в том, что подынтегральное выражение в исходном интеграле udv следует разбить на две части так, чтобы интеграл в правой части (3.2) вычислялся проще, чем исходный.

Пример 3.12. Найдите неопределенный интеграл $\int \ln x dx$.

Решение.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, \quad \int dv = \int dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Пример 3.13. Найдите неопределенный интеграл $\int \arctg x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям.

1. $\int P_n(x) e^{ax+b} dx$, $\int P_n(x) \sin(ax+b) dx$, $\int P_n(x) \cos(ax+b) dx$ и др.

2. $\int P_n(x) \ln(ax+b)dx$, $\int P_n(x) \arcsin(ax+b)dx$, $\int P_n(x) \arccos(ax+b)dx$,
 $\int P_n(x) \operatorname{arctg}(ax+b)dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg}(ax+b)dx$ и др.

3. а) $\int e^{mx+n} \sin(ax+b)dx$; б) $\int e^{mx+n} \cos(ax+b)dx$; в) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$;
 г) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$; д) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ и др.

Здесь $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени n .

Вычисление интегралов вида 1 осуществляется путем разбиения подынтегрального выражения на две части следующим образом: в качестве функции u берут многочлен, а оставшуюся часть подынтегрального выражения за dv . При этом формулу интегрирования по частям применяют столько раз, какова степень многочлена.

При вычислении интегралов вида 2 в качестве функции u берут подынтегральную функцию, а $dv = P_n(x)dx$.

При вычислении интегралов вида 3 для пунктов а), б) формулу (3.2) применяют дважды. В результате получают *рекуррентное уравнение* относительно исходного интеграла (оно линейное), решив которое находят значение исходного интеграла. Для пунктов в), г), д) формулу (3.2) применяют один раз. В результате получают рекуррентное уравнение относительно исходного интеграла, решив которое находят значение исходного интеграла. При этом следует вычислить полученный в результате преобразований интеграл в правой части.

Замечание 3.1. Интегралы в пунктах в), г), д) также можно вычислить с помощью специальных тригонометрических подстановок.

3.6. Методы интегрирования специальных классов функций

3.6.1. Интегрирование дробно-рациональных функций

Выражение вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — постоянные числа; $n \in \mathbb{N}$ — показатель степени; x — переменная, называется многочленом степени n . Функция вида $y = P_n(x)$ — целая рациональная функция.

Примеры многочленов:

1) $n = 0 \Rightarrow P_0(x) = a_0$ — многочлен нулевой степени (представляет собой числа);

2) $n = 1 \Rightarrow P_1(x) = a_1 x + a_0$ — многочлен первой степени (линейная функция $y = ax + b$);

3) $n = 2 \Rightarrow P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ — многочлен второй степени (квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$).

Функция вида $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n

и m соответственно, называется *дробно-рациональной*.

Если $n < m$, то дробь называется правильной. Если $n \geq m$, то дробь называется неправильной. Прежде чем интегрировать неправильную дробь, следует выделить целую часть дроби путем деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.

3.6.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Любая правильная рациональная дробь представима в виде суммы простейших дробей. Простейшими рациональными дробями первого – четвертого типов называются соответственно правильные дроби следующего вида:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{A}{x-a} \left(\frac{A}{ax+b} \right); & 3) & \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \left(\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \right); \\ 2) & \frac{A}{(x-a)^k} \left(\frac{A}{(ax+b)^k} \right), k=2, 3, \dots; & 4) & \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}, l=2, 3, \dots \end{aligned}$$

1. Интегрирование простейших дробей первого типа:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

2. Интегрирование простейших дробей второго типа:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{A}{(-k+1)(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

3. Интегрирование простейших дробей третьего типа:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \\ \alpha^2 = \frac{p^2-4q}{4}, \quad p^2 > 4q, \\ \beta^2 = \frac{4q-p^2}{4}, \quad p^2 < 4q \end{array} \right| = \left[\begin{array}{l} \int \frac{dx}{t^2 - \alpha^2}, \\ \int \frac{dt}{t^2 + \beta^2} \end{array} \right] - \text{табличные интегралы;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 6) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = |(x^2+px+q)' = 2x+p| = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p) - p + 2B/A}{x^2+px+q} dx = \\
 & = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \times \\
 & \times \int \frac{dx}{x^2+px+q}.
 \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл вычислен с помощью метода подстановки ($\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$; см. следствие 1 на с. 103). Второй интеграл вычисляется с помощью пункта 3, а.

$$4. \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l} dx, \quad l=2, 3, \dots \text{ с помощью подстановки } t=x+\frac{p}{2}, \quad l>1, \\
 \frac{p^2}{4}-q<0, \text{ сводится к вычислению двух интегралов:}$$

$$\int \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^l}, \quad (3.3)$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^l}. \quad (3.4)$$

Интеграл вида (3.3) находят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^l} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+\alpha^2)}{(t^2+\alpha^2)^l} = |t^2+\alpha^2=y| = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^\alpha} = \\
 &= \frac{1}{2} \int y^{-\alpha} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C = \frac{1}{2(1-\alpha)(t^2+\alpha^2)^{\alpha-1}} + C.
 \end{aligned}$$

Интеграл вида (3.4) находят при помощи формулы интегрирования по частям:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n>1, \quad a \neq 0.$$

$$\text{При } n=1, \quad a \neq 0 \text{ интеграл } J_n \text{ выражается так: } J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Если при нахождении интеграла J_n ($n \in \mathbb{N}, n>1$) принять в качестве u функцию $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, а в качестве dv — дифференциал dx , то в результате применения формулы интегрирования по частям получим рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n \cdot 2na^2} + J_n \cdot \frac{2n-1}{2na^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0.$$

3.6.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называют отношение двух многочленов. Рациональная дробь называется правильной (неправильной), если степень многочлена в числителе меньше (больше или равна) степени многочлена в знаменателе.

Неправильную рациональную дробь всегда можно свести к правильной путем деления числителя на знаменатель столбиком. При этом будет выделена целая часть, т. е. многочлен. В связи этим в дальнейшем будем рассматривать интегрирование лишь правильных рациональных дробей.

Примеры правильных и неправильных дробей:

$$\frac{2x+7}{x^2-6x+11}, \frac{x+5}{x^3-1}, \frac{x^4}{x^6-3} - \text{правильные};$$

$$\frac{x^4}{x^2+1}, \frac{x^4-1}{x+1}, \frac{x^4-x^3+3}{x^2+x-2} - \text{неправильные}.$$

Примеры приведения неправильных дробей к правильным:

$$\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1} = (x^2-1) + \frac{1}{x^2+1};$$

$$\frac{x^4-1}{x+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x+1} = (x+1)(x^2+1); \quad \frac{x^4-x^3+3}{x^2+x-2} = (x^2-x+2) - \frac{4x-7}{x^2+x-2}.$$

Пусть задана правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Без ограничения

общности можно считать, что коэффициент при старшей степени многочлена равен единице. Предполагается также, что коэффициенты многочленов — действительные числа. Тогда из курса алгебры известно, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители вида

$$(x-a)^k (x^2+px+q)^l,$$

где $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3. Для дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой можно разложить на множители вида $(x-a)^k (x^2+px+q)^l$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$, справедливо такое разложение на сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Здесь $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_l, C_l$ — постоянные числа; a — действительный корень кратности k многочлена $Q(x)$.

Замечание 3.2. Правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие справедливо при любом конечном числе линейных и квадратичных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q(x)$.

3.6.4. Метод неопределенных коэффициентов

Один из способов определения неизвестных коэффициентов в разложении правильной рациональной дроби на простейшие — метод неопределенных коэффициентов. Поясним на примере.

Пример 3.14. Разложите на простейшие дроби:

$$\frac{x+10}{x^3-2x^2+5x} = \frac{x+10}{x(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}.$$

Решение. Домножим обе части равенства на общий знаменатель дробей. В результате получим следующее равенство:

$$x+10 = A(x^2-2x+5) + (Bx+C)x. \quad (3.5)$$

Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему

$$\begin{cases} x^2: & A+B=0, \\ x^1: & -2A+C=1, \\ x^0: & 5A=10. \end{cases}$$

Решив последнюю, получим $A=2$, $B=-2$, $C=5$.

Тогда дробь примет следующий вид:

$$\frac{x+10}{x^3-2x^2+5x} = \frac{2}{x} + \frac{-2x+5}{x^2-2x+5} = \frac{2}{x} - \frac{2x-5}{x^2-2x+5}.$$

Для отыскания неизвестных коэффициентов можно также использовать метод пробных точек (способ частных значений), который основан

на том, что, подставляя любое конкретное допустимое значение переменной x в обе части равенства (3.5), получаем верное числовое равенство.

Поясним на примере: $\frac{3x-5}{x^2-5x+6} = \frac{3x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$. Домножим обе части последнего равенства на общий знаменатель дробей, получим равенство $3x-5 = A(x-3) + B(x-2)$, откуда при $x=2 \Rightarrow A=-1$, $x=3 \Rightarrow B=4$.

Тогда дробь примет вид $\frac{3x-5}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{4}{x-3} = \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x-2}$.

3.6.5. Интегрирование правильных рациональных дробей

Для вычисления интеграла от правильной рациональной дроби необходимо разложить эту дробь на простейшие согласно теореме 3.3 и найти интеграл от полученной суммы простейших дробей. Следовательно, интеграл от любой правильной рациональной дроби есть элементарная функция, которая представляет собой сумму элементарных функций, полученных в результате интегрирования простейших дробей.

Пример 3.15. Вычислите $\int \frac{x+10}{x^3-2x^2+5x} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+10}{x^3-2x^2+5x} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{разложение} \\ \text{на простейшие дроби} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{2x-5}{x^2-2x+5} dx = 2\ln|x| - \int \frac{(2x-2)-3}{x^2-2x+5} dx = \\ &= 2\ln|x| - \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} = 2\ln|x| - \ln(x^2-2x+5) - \\ &- 3 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} = 2\ln|x| - \ln(x^2-2x+5) - 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \\ &= 2\ln|x| - \ln(x^2-2x+5) - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C. \end{aligned}$$

При вычислении интегралов использованы табличные интегралы $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ и следствие из способа подстановки $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

Пример 3.16. Вычислите $\int \frac{3x-5}{x^2-5x+6} dx$.

Решение.

$$\int \frac{3x-5}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{4}{x-3} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = 4 \ln|x-3| - \ln|x-2| + C.$$

Здесь использовано полученное ранее разложение на простейшие дроби (см. подп. 3.6.3), а также табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3.7. Интегрирование некоторых видов тригонометрических выражений

3.7.1. Интегралы, содержащие произведения тригонометрических функций

При вычислении интегралов, содержащих произведения тригонометрических функций, используют формулы преобразования произведений соответствующих тригонометрических функций в их сумму, а также табличные интегралы

$$\int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + C, \quad \int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + C.$$

$$\begin{aligned} 1. \int \sin \alpha x \sin \beta x dx &= \left| \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \right| = \frac{1}{2} \int \cos(\alpha - \beta) x dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \cos(\alpha + \beta) x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta} \sin(\alpha - \beta) x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta} \sin(\alpha + \beta) x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \cos \alpha x \cos \beta x dx &= \left| \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \right| = \frac{1}{2} \int \cos(\alpha - \beta) x dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \cos(\alpha + \beta) x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta} \sin(\alpha - \beta) x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta} \sin(\alpha + \beta) x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \sin \alpha x \cos \beta x dx &= \left| \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \right| = \frac{1}{2} \int \sin(\alpha - \beta) x dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sin(\alpha + \beta) x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta} \cos(\alpha - \beta) x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta} \cos(\alpha + \beta) x + C. \end{aligned}$$

Пример 3.17. Вычислите $\int \cos 5x \cos 7x dx$.

Решение.

$$\int \cos 5x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 12x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{24} \sin 12x + C.$$

3.7.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{N}$

Если m, n – четные числа, то интеграл находится с помощью тригонометрических формул

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$
$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел m или n нечетное, то от нечетной степени отделяется множитель первой степени и вводится новая переменная.

Пример 3.18. Найдите $\int \sin^6 x \cos^5 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \cos^5 x dx &= \int \sin^6 x \cos^4 x \cos x dx = \\ &= \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = |\sin x = t| = \int t^6 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) dt = \\ &= \frac{1}{7} t^7 - \frac{2}{9} t^9 + \frac{1}{11} t^{11} + C = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{9} \sin^9 x + \frac{1}{11} \sin^{11} x + C. \end{aligned}$$

Пример 3.19. Найдите $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

3.7.3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, $R(u, v)$ – рациональная функция

Интеграл от рациональной функции, содержащий $\sin x$ и $\cos x$, может быть сведен к интегралу от рациональной функции аргумента t подстановкой $t = \operatorname{tg}(x/2)$. При этом используются известные формулы

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тогда $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt.$

Пример 3.20. Найдите $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3+5\cos x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(x/2) = t, x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2)+5(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \\ &= \int \frac{dt}{2^2-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+\operatorname{tg}(x/2)}{2-\operatorname{tg}(x/2)} \right| + C. \end{aligned}$$

3.8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

3.8.1. Интегралы с линейной иррациональностью

Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}$ ($a \neq 0$), то применяют подстановку $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

Пример 3.21. Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{5x+6}}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{5x+6}} &= \left| t = \sqrt[5]{5x+6}, x = \frac{1}{5}(t^5-6), dx = t^4 dt \right| = \int \frac{t^4 dt}{t} = \\ &= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sqrt[5]{(5x+6)^4} + C. \end{aligned}$$

Для нахождения интегралов вида $\int R(x, \sqrt{x}, \dots, \sqrt[k]{x}) dx$, где R — рациональная функция относительно x и различных дробных степеней x , используется подстановка $x = t^p$. Здесь в качестве p берут наименьшее общее кратное (НОК) всех показателей корней.

Пример 3.22. Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} &= \left| \text{НОК}(2, 3) = 6 \right|_{x=t^6, dx=6t^5 dt} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = \\ &= 6 \int \frac{(t^3 + 1) - 1}{t+1} dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \dots, \sqrt[k]{ax+b}) dx$, где R — рациональная функция относительно x и различных дробных степеней $ax+b$. В этом случае используется подстановка $ax+b=t^p$. В качестве p также берут НОК всех показателей корней.

Пример 3.23. Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5} - \sqrt{3x+5}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5} - \sqrt{3x+5}} &= \left| \text{НОК}(2, 3) = 6 \right|_{3x+5=t^6, dx=2t^5 dt} = \int \frac{2t^5 dt}{t^2 - t^3} = \\ &= -2 \int \frac{t^3 dt}{t-1} = -2 \int \frac{(t^3 - 1) + 1}{t-1} dt = -2 \int \left(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= -\frac{2}{3} t^3 - t^2 - 2t - 2 \ln|t-1| + C = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{3x+5} - \sqrt{3x+5} - \\ &\quad - 2\sqrt[6]{3x+5} - 2 \ln|\sqrt[6]{3x+5} - 1| + C. \end{aligned}$$

3.8.2. Интегралы с квадратичной иррациональностью

При вычислении интегралов следующего вида: а) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$; б) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$; в) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, где $a \neq 0$, используют как формулу интегрирования по частям, так и специальные тригонометрические подстановки:

1) $x = a \sin t$ ($x = a \cos t$);

2) $x = \frac{a}{\sin t}$ ($x = \frac{a}{\cos t}$);

3) $x = a \operatorname{tg} t$ ($x = a \operatorname{ctg} t$).

Пример 3.24. Найдите $\int \sqrt{x^2 - 25} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 25} dx &= \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \sqrt{x^2 - 25}, du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 25}} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2 - 25} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 25}} dx = \\ &= x\sqrt{x^2 - 25} - \int \frac{(x^2 - 25) + 25}{\sqrt{x^2 - 25}} dx = x\sqrt{x^2 - 25} - \int \sqrt{x^2 - 25} dx - 25 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} = \\ &= x\sqrt{x^2 - 25} - \int \sqrt{x^2 - 25} dx + 25 \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}|. \end{aligned}$$

Далее обозначим исходный интеграл через $i = \int \sqrt{x^2 - 25} dx$. Тогда получим рекуррентное равенство

$$\begin{aligned} i &= x\sqrt{x^2 - 25} - i - 25 \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| \Rightarrow 2i = x\sqrt{x^2 - 25} - 25 \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| \Rightarrow \\ &\Rightarrow i = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - 25} - 25 \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}|) + C. \end{aligned}$$

Пример 3.25. Найдите $\int \sqrt{16 - x^2} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{16 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = 4 \cos t \\ dx = -4 \sin t \\ t = \arccos \frac{x}{4} \end{array} \right| = \int \sqrt{16 - 16 \cos^2 t} (-4 \sin t) dt = \\ &= -16 \int \sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t dt = -16 \int \sin^2 t dt = -8 \int (1 - \cos 2t) dt = \\ &= -8t + 4 \sin 2t + C = -8 \arccos \frac{x}{4} + 4 \sin \left(2 \arccos \frac{x}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

Используя свойства тригонометрических выражений, ответ можно преобразовать к виду $-8 \arccos \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + C$.

Замечание 3.3. К интегралам вида 1–3 (см. п. 3.5, с. 106–107) можно свести вычисление интегралов вида $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена.

3.8.3. Интегралы с квадратичной иррациональностью в знаменателе дроби

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}.$$

С помощью выделения полного квадрата из квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ в зависимости от знака A интеграл сводится к одному из табличных:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0) \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a \neq 0).$$

Пример 3.26. Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2-4-5}} = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{3} + C. \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{Mx + N}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx.$$

С помощью следующих преобразований сводится к табличному интегралу (см. прил. 4, п. 15) и интегралу вида $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \ln|f(x)| + C$ (см. прил. 3, п. 6°):

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx &= \int \frac{Mx + N}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx = \int \frac{Mx + N}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx = \\ &= \frac{M}{A} \int \frac{2Ax + \frac{2AN}{M}}{2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx = \frac{M}{A} \int \frac{(2Ax + B) + \left(\frac{2AN}{M} - B\right)}{2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx = \\ &= \frac{M}{A} \int \frac{(2Ax + B)dx}{2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} + \left(N - \frac{BM}{2A}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \\ &= \frac{M}{A} \sqrt{Ax^2 + Bx + C} + \left(N - \frac{BM}{2A}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}. \end{aligned}$$

Пример 3.27. Найдите $\int \frac{(4x+6)dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{(4x+6)dx}{\sqrt{7-6x-x^2}} &= \left| (7-6x-x^2)' = -6-2x \right| = -4 \int \frac{(-2x-6)+3}{2\sqrt{7-6x-x^2}} dx = \\ &= -4 \int \frac{(-2x-6)}{2\sqrt{7-6x-x^2}} dx - 6 \int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}} = -4 \int \frac{d(7-6x-x^2)}{2\sqrt{7-6x-x^2}} - 6 \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x-7)}} = \\ &= \left| \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C \right| = -4\sqrt{7-6x-x^2} - 6 \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+3)^2-16}} = \\ &= -4\sqrt{7-6x-x^2} - 6 \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x+3)^2}} = \left| \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0 \right| = \\ &= -4\sqrt{7-6x-x^2} - 6 \arcsin \frac{x+3}{4} + C. \end{aligned}$$

В завершение пункта следует отметить, что производная от элементарной функции есть элементарная функция. Это утверждение не всегда является верным для первообразной функции. Существуют неопределенные интегралы, которые не выражаются через элементарные функции, например:

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ — интеграл Эйлера — Пуассона;
- 2) $\int \frac{e^x}{x} dx = \left| \begin{matrix} x \neq 0, e^x = t, \\ x = \ln t, dx = \frac{dt}{t} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\ln t}$ — интегральный логарифм;
- 3) $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ — интегралы Френеля;
- 4) $\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx$ ($x \neq 0$) — интегральные синус и косинус.

Задачи для самостоятельного решения

В заданиях 1–15 найдите неопределенные интегралы и укажите множества, на которых выполняются полученные формулы.

1. 1) $\int \frac{6+3x+5x^2}{\sqrt{x}} dx;$ 3) $\int e^{1-x} dx;$
- 2) $\int (5x-1)^{3/2} dx;$ 4) $\int x \sin(6x^2+5) dx;$

- 5) $\int \frac{x dx}{\sin^2(4x^2)};$
- 6) $\int \frac{dx}{4-16x^2};$
- 7) $\int \frac{x dx}{4-16x^2};$
- 8) $\int \sqrt[3]{\ln x} \frac{dx}{x};$
- 9) $\int \frac{dx}{\cos^2(x/3)};$
- 10) $\int \operatorname{ctg}(3x-1) dx;$
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x};$
- 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}};$
- 13) $\int \ln(3x-2) dx;$
- 14) $\int \arcsin(2x) dx;$
- 15) $\int (3x+5)e^x dx;$
2. 1) $\int \frac{x-3\sqrt{x}+2}{x} dx;$
- 2) $\int \sin(2x+5) dx;$
- 3) $\int \sqrt[4]{1-7x} dx;$
- 4) $\int x^2 \exp(3x^3-1) dx;$
- 5) $\int x(5+6x^2) dx;$
- 16) $\int (x^2+2x) \sin x dx;$
- 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}};$
- 18) $\int \frac{x^3-x-8}{x^4-4x^2} dx;$
- 19) $\int \frac{dx}{4+3\sin x};$
- 20) $\int \sin^2(2x) \cos^2(2x) dx;$
- 21) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x};$
- 22) $\int \frac{(x+5) dx}{\sqrt[3]{3x+1}};$
- 23) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt{x^3}} dx;$
- 24) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}};$
- 25) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}};$
- 26) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x+1}}.$
- 6) $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^3}} dx;$
- 7) $\int \sqrt{3+2\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2};$
- 8) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} dx;$
- 9) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{3}+2\right)};$
- 10) $\int \frac{4e^{3x}}{5+6e^{3x}} dx;$

- 11) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{3+2\cos x}};$
- 12) $\int \frac{dx}{5-x^2};$
- 13) $\int (3x+5)\sin(2x)dx;$
- 14) $\int \ln(3x+5)dx;$
- 15) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$
- 16) $\int x \cdot 5^{x/2} dx;$
- 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x-x^2}};$
- 18) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)};$
3. 1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx;$
- 2) $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{7x^2+5}};$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+5}};$
- 4) $\int \sin(2x-3)dx;$
- 5) $\int x \sin(2x^2-3)dx;$
- 6) $\int x \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) dx;$
- 7) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+5\right)};$
- 8) $\int \frac{\sqrt[3]{3+\ln x}}{x} dx;$
- 9) $\int \frac{dx}{1-5x^2};$
- 19) $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x};$
- 20) $\int \sin(3x) \cdot \cos(5x) dx;$
- 21) $\int \operatorname{tg}^2(x/2) dx;$
- 22) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}};$
- 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})};$
- 24) $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}};$
- 25) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+5x+x^2}};$
- 26) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$
- 10) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2} dx;$
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+11}};$
- 12) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{(3-7x^3)^2} dx;$
- 13) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$
- 14) $\int (x^2-x)\sin(3x) dx;$
- 15) $\int \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) dx;$
- 16) $\int x \cdot 3^x dx;$
- 17) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx;$
- 18) $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x-4)};$

- 19) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x};$
- 20) $\int \sin(3x) \cdot \cos(2x) dx;$
- 21) $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx;$
- 22) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}};$
4. 1) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x}}{x} dx;$
- 2) $\int \operatorname{tg}(1+2x) dx;$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}};$
- 4) $\int \frac{dx}{x(2+3\ln x)};$
- 5) $\int x \sin(2x^2 + 2) dx;$
- 6) $\int x(5x^2 - 1)^7 dx;$
- 7) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$
- 8) $\int \frac{dx}{3-7x^2};$
- 9) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}};$
- 10) $\int \frac{(2+x)dx}{x^2 + 4x + 7};$
- 11) $\int \cos^6 x \cdot \sin x dx;$
- 12) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^4}};$
- 13) $\int \ln(3x+1) dx;$
- 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5} + \sqrt[3]{(x+5)^2}};$
- 24) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}};$
- 25) $\int \ln^2 x dx;$
- 26) $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$
- 14) $\int (2x+1) \cdot 3^{2x} dx;$
- 15) $\int x \operatorname{arctg}(2x) dx;$
- 16) $\int x^2 \sin(2x) dx;$
- 17) $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx;$
- 18) $\int \frac{x^4+4}{x^3+x} dx;$
- 19) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2};$
- 20) $\int \cos(7x) \cdot \sin(3x) dx;$
- 21) $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x};$
- 22) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)dx}{\sqrt{x}+1};$
- 23) $\int \exp(\sqrt[3]{x}) dx;$
- 24) $\int \sqrt{16-x^2} dx;$
- 25) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx;$
- 26) $\int x^2 e^{3-x^3} dx.$

$$5. 1) \int \frac{1-3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$2) \int \sin\left(\frac{5}{4}x+5\right) dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{7x-8}};$$

$$4) \int x(3x^2+5)^4 dx;$$

$$5) \int (5x-1)^{19} dx;$$

$$6) \int xe^{4x^2} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{3x}{2}};$$

$$8) \int \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$$

$$9) \int \frac{dx}{2+5x^2};$$

$$10) \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x};$$

$$11) \int x \cdot e^{-x^2/4} dx;$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}};$$

$$13) \int (3x+2)\sin(3x) dx;$$

$$6. 1) \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx;$$

$$2) \int \sin(6x-3) dx;$$

$$3) \int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$4) \int xe^{3x^2-2} dx;$$

$$14) \int x^2 \operatorname{arctg} x dx;$$

$$15) \int (x^2+2x)e^{-x} dx;$$

$$16) \int \ln(2x-1) dx;$$

$$17) \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5x+1}};$$

$$18) \int \frac{dx}{x^2(x^2+4)};$$

$$19) \int \frac{dx}{3-2\sin x};$$

$$20) \int \sin x \cdot \cos(5x) dx;$$

$$21) \int \cos 2x \cdot \cos^2 x \cdot dx;$$

$$22) \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$$

$$23) \int \frac{dx}{2 \cdot \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-2}};$$

$$24) \int x^2 \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$25) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx;$$

$$26) \int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1} dx.$$

$$5) \int \frac{x dx}{\sqrt{4-9x^2}};$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}};$$

$$7) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} x}};$$

- 9) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}};$
- 10) $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4} dx;$
- 11) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x \cdot dx}{1+x^2};$
- 12) $\int \frac{dx}{4-5x^2};$
- 13) $\int (x^2+x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx;$
- 14) $\int \arcsin(3x) dx;$
- 15) $\int \ln(3x+13) dx;$
- 16) $\int (5x-1)e^{-5x} dx;$
- 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}};$
7. 1) $\int \frac{2+3\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{x} dx;$
- 2) $\int x \sin(4x^2) dx;$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{7x-5}};$
- 4) $\int \sqrt[3]{\ln x} \frac{dx}{x};$
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}};$
- 6) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{7}\right)};$
- 18) $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2+4}{x^3+4x^2+4x} dx;$
- 19) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 4};$
- 20) $\int \cos^2(4x) dx;$
- 21) $\int \frac{dx}{\sin^6 x};$
- 22) $\int \frac{dx}{5+\sqrt{2x-1}};$
- 23) $\int \frac{(3+\sqrt[3]{x+2}) dx}{(1+\sqrt{x+2})(\sqrt[6]{x+2})^5};$
- 24) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}};$
- 25) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$
- 26) $\int \sqrt[7]{1+\cos^2 x} \sin 2x dx.$
- 7) $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 x(1+x^2)};$
- 8) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos x}};$
- 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4}};$
- 10) $\int \frac{xdx}{4+5x^4};$
- 11) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx;$
- 12) $\int e^{8-5x} dx;$

- 13) $\int (x^2 + 4)e^{x/2} dx;$
- 14) $\int (3x + 5) \ln x dx;$
- 15) $\int x \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx;$
- 16) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx;$
- 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}};$
- 18) $\int \frac{x^4 + 2}{x^3 + x} dx;$
- 19) $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x};$
8. 1) $\int \cos\left(\frac{3x}{2} - 1\right) dx;$
- 2) $\int \sqrt[3]{x} (1 + 2\sqrt{x})^2 dx;$
- 3) $\int (4x - 8)^5 dx;$
- 4) $\int \frac{x dx}{\cos^2(4x^2)};$
- 5) $\int \frac{(8x + 1) dx}{5 - x - 4x^2};$
- 6) $\int x e^{3x^2 - 1} dx;$
- 7) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}};$
- 8) $\int \frac{x dx}{4 - 9x^2};$
- 9) $\int \frac{dx}{4 - 9x^2};$
- 10) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}(3x)}}{1 + 9x^2} dx;$
- 20) $\int \operatorname{tg}^3 x dx;$
- 21) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x};$
- 22) $\int \frac{x^3 dx}{1 + \sqrt[3]{x^4 + 1}};$
- 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt[3]{2x - 1}};$
- 24) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} dx;$
- 25) $\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1 - 4 \ln x - \ln^2 x}} dx;$
- 26) $\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arccos x};$
- 12) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx;$
- 13) $\int (2x + 1) e^{-3x} dx;$
- 14) $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx;$
- 15) $\int x^2 \sin x dx;$
- 16) $\int \ln(3x + 4) dx;$
- 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 10}};$
- 18) $\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 6x + 5} dx;$
- 19) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5};$
- 20) $\int \cos x \cdot \cos(3x) dx;$

- 21) $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx;$
- 22) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+8} dx;$
- 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}(1+\sqrt[3]{x+3})};$
9. 1) $\int \frac{5+x^2+2\sqrt{x}}{x} dx;$
- 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x-1}};$
- 3) $\int xe^{3x^2+2} dx;$
- 4) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx;$
- 5) $\int \sin\left(\frac{3x}{2}+5\right) dx;$
- 6) $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)} dx;$
- 7) $\int \frac{\sqrt[3]{2+3\ln x}}{x} dx;$
- 8) $\int \frac{5-12x}{4+5x-6x^2} dx;$
- 9) $\int \frac{(a^{2x}-1)dx}{\sqrt{a^x}}, a>0, a\neq 1;$
- 10) $\int \operatorname{tg}(4x+5) dx;$
- 11) $\int \left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)^2 dx;$
- 12) $\int \operatorname{tg}^4 x \frac{dx}{\cos^2 x};$
- 13) $\int \arcsin \frac{x}{4} dx;$
- 24) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}};$
- 25) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx;$
- 26) $\int \frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^4 x} dx.$
- 14) $\int (3x+2)\sin(2x) dx;$
- 15) $\int (\ln x)^2 dx;$
- 16) $\int (x^2-3x)e^x dx;$
- 17) $\int \frac{dx}{2+x-x^2};$
- 18) $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx;$
- 19) $\int \frac{dx}{3+2\cos x};$
- 20) $\int \sin x \cdot \cos(8x) dx;$
- 21) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x};$
- 22) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1};$
- 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}};$
- 24) $\int x^2 \sqrt{16-x^2} dx;$
- 25) $\int e^{x^3} dx;$
- 26) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx.$

$$10. 1) \int \frac{(5 + \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$2) \int \cos\left(\frac{x}{5} - 15\right) dx;$$

$$3) \int (4x - 5)^{14} dx;$$

$$4) \int e^{-3x+8} dx;$$

$$5) \int \frac{\ln^2 x + 5}{x \ln x} dx;$$

$$6) \int \frac{dx}{\sin^2(x/6)};$$

$$7) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx;$$

$$8) \int \frac{dx}{4 + 5x^2};$$

$$9) \int \frac{xdx}{3x^2 + 8};$$

$$10) \int \operatorname{tg}(3x) dx;$$

$$11) \int x \cdot \sqrt[4]{6x^2 - 8} dx;$$

$$12) \int 6^x (6^x + 4)^3 dx;$$

$$13) \int x \cdot \ln(2x) dx;$$

$$11. 1) \int \frac{x^2 + 2x - 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$2) \int (1 - 8x)^6 dx;$$

$$3) \int \frac{xdx}{(5x^2 - 1)^3};$$

$$14) \int \arcsin(4x) dx;$$

$$15) \int \frac{xdx}{\sin^2 x};$$

$$16) \int x \cdot 4^{x/3} dx;$$

$$17) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 5x + 10}};$$

$$18) \int \frac{x^3}{x^2 + 2x - 8} dx;$$

$$19) \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x};$$

$$20) \int \frac{dx}{5 \cos^2 x - 1};$$

$$21) \int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$22) \int \frac{xdx}{\sqrt{x} + 2};$$

$$23) \int \frac{(1 + \sqrt{x}) dx}{\sqrt[6]{x^5} (1 + \sqrt[3]{x})};$$

$$24) \int \frac{dx}{(x^2 - 9) \sqrt{x^2 - 9}};$$

$$25) \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx;$$

$$26) \int \frac{x^2}{x^2 - 4x + 8} dx.$$

$$4) \int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x};$$

$$5) \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx;$$

$$6) \int \frac{dx}{9 - 16x^2};$$

- 7) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x)};$
- 8) $\int \frac{(1+2\operatorname{ctg} x)^3 dx}{\sin^2 x};$
- 9) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{5+6x^3}};$
- 10) $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} dx;$
- 11) $\int \frac{x^5 dx}{x^3+2};$
- 12) $\int e^{1-3x} dx;$
- 13) $\int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx;$
- 14) $\int (2x+1)\sin(2x)dx;$
- 15) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx;$
- 16) $\int \arccos \frac{x}{4} dx;$
12. 1) $\int x\sqrt{4+5x^2} dx;$
- 2) $\int \sin(2+3x)dx;$
- 3) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{x^2} dx;$
- 4) $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx;$
- 5) $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx;$
- 6) $\int \frac{dx}{2+9x^2};$
- 17) $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+4x+13};$
- 18) $\int \frac{5dx}{(x+1)(2x^2+2x+5)};$
- 19) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x};$
- 20) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x};$
- 21) $\int \sin^4 x dx;$
- 22) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x(\sqrt{x}+4)} dx;$
- 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}};$
- 24) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}};$
- 25) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx;$
- 26) $\int \cos(\ln x) dx.$
- 7) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x}-4};$
- 8) $\int \frac{x^3 dx}{5x^4+8};$
- 9) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x dx}{\cos^2 x};$
- 10) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx;$
- 11) $\int \frac{32^x-2^x}{4^x} dx;$
- 12) $\int \frac{\ln x dx}{x};$

- 13) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx;$
- 14) $\int x \ln(x^2 + 5) dx;$
- 15) $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx;$
- 16) $\int x \cos(3x) dx;$
- 17) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}};$
- 18) $\int \frac{3x^2 + 14x + 37}{(x-1)(x^2 + 4x + 13)} dx;$
- 19) $\int \frac{dx}{1 + \sin x};$
- 20) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^6 x};$
- 21) $\int \cos(3x) \cdot \cos(5x) dx;$
- 22) $\int \sin \sqrt[3]{x} dx;$
- 23) $\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx;$
- 24) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}};$
- 25) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}};$
- 26) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$
13. 1) $\int \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$
- 9) $\int x^2 \cdot e^{3x^3} dx;$
- 2) $\int x(4x^2 + 5)^6 dx;$
- 10) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x};$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-7x}};$
- 11) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2 + 6x + 4};$
- 4) $\int \frac{\ln^3 x dx}{x};$
- 12) $\int \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx;$
- 5) $\int \frac{dx}{5-9x^2};$
- 13) $\int x \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) dx;$
- 6) $\int \frac{dx}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right)};$
- 14) $\int x \ln(x^2 + 1) dx;$
- 7) $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x};$
- 15) $\int (x^2 + 2x) \cdot e^x dx;$
- 8) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}};$
- 16) $\int x \cdot \sin \left(\frac{x}{4} \right) dx;$

$$17) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}};$$

$$18) \int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)};$$

$$19) \int \frac{dx}{4-5\cos x};$$

$$20) \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x};$$

$$21) \int \sin^2(3x)dx;$$

$$14. 1) \int \sin(x^2 + 5)x dx;$$

$$2) \int (6-5x)^4 dx;$$

$$3) \int (\sqrt{x} + 3)^2 dx;$$

$$4) \int \frac{\arctg^3 x dx}{1+x^2};$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}};$$

$$6) \int \sin^6 x \cdot \cos x dx;$$

$$7) \int \frac{\sqrt[3]{\tg^2 x} dx}{\cos^2 x};$$

$$8) \int \frac{dx}{x(3\ln x + 5)};$$

$$9) \int x \cdot e^{3x^2-2} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{4-9x^2};$$

$$11) \int \frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+8};$$

$$22) \int \frac{\sqrt{x+5} dx}{1+\sqrt{x+5}};$$

$$23) \int \frac{dx}{2 \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}};$$

$$24) \int \frac{dx}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}};$$

$$25) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx;$$

$$26) \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx.$$

$$12) \int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2};$$

$$13) \int \ln(x+2)dx;$$

$$14) \int (x^2 + 3x) \sin x dx;$$

$$15) \int \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) dx;$$

$$16) \int x \cdot e^{\frac{x}{3}} dx;$$

$$17) \int \frac{dx}{\sqrt{3+2x+x^2}};$$

$$18) \int \frac{2x^2 - x + 1}{x^4 + x^3 + x^2} dx;$$

$$19) \int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x};$$

$$20) \int \sin(4x) \cdot \cos(2x) dx;$$

$$21) \int \cos^2 \frac{x}{3} dx;$$

$$22) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x+1}};$$

- $$23) \int \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}};$$
- $$24) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}};$$
15. 1) $\int (7-2x)^7 dx;$
- $$2) \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx;$$
- $$3) \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x-x^2-2}};$$
- $$4) \int \frac{dx}{(x^2+4)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)};$$
- $$5) \int \frac{dx}{\cos^2(x) \cdot \sqrt[7]{\operatorname{tg}(x)}};$$
- $$6) \int \frac{\ln^2(x+2)dx}{x+2};$$
- $$7) \int \frac{\sin(3x)dx}{\cos(3x) \cdot \sqrt[3]{\cos(3x)}};$$
- $$8) \int \frac{e^{2x}dx}{2e^{2x}+7};$$
- $$9) \int \frac{x^3 dx}{\sin^2(x^4)};$$
- $$10) \int \frac{dx}{\cos^2 x (1+\operatorname{tg}^2 x)};$$
- $$11) \int \frac{2^x dx}{\sqrt{4-2^{2x}}};$$
- $$12) \int 8^{5-4x} dx;$$
- $$13) \int x \cdot \arcsin(5x) dx;$$
- $$25) \int \sin(\ln x) dx;$$
- $$26) \int \cos^3 x \sin^{10} x dx.$$
- $$14) \int x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx;$$
- $$15) \int x^7 \ln x dx;$$
- $$16) \int x \cdot e^{7x} dx;$$
- $$17) \int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-x^2}};$$
- $$18) \int \frac{x^2+3x-2}{x^3-2x^2+x} dx;$$
- $$19) \int \frac{dx}{1-2\sin x};$$
- $$20) \int \frac{5+\sin^3 x}{\cos^2 x} dx;$$
- $$21) \int (2+\sin x)^3 dx;$$
- $$22) \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{3x-1-1}};$$
- $$23) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}};$$
- $$24) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$$
- $$25) \int e^{2x} \sin x dx;$$
- $$26) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

**Задачи повышенной сложности из фондов
студенческих олимпиад по математике для факультетов
нематематического профиля**

В заданиях 1–15 найдите неопределенные интегралы и укажите множества, на которых выполняются полученные формулы.

1. $\int \frac{\ln(2x+1)dx}{x^3}.$

Ответ: $-\frac{1}{x} - 2\ln|x| + 2\ln(2x+1) - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2} + C, x > -\frac{1}{2}, x \neq 0.$

2. $\int \left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2 dx.$

Ответ: $\frac{1}{8e^{2x}}(-2 + \cos(2x) - \sin(2x)) + C, x \in \mathbf{R}.$

3. $\int \frac{(e^{2x} - 6e^x + 4)dx}{(e^{2x} - 8e^x + 16)}.$

Ответ: $\frac{1}{e^x - 4} + \frac{1}{4}(x + 3\ln|e^x - 4|) + C, x \neq 2\ln 2.$

4. $\int \cos(4x) \cdot e^{2x} dx.$

Ответ: $\frac{1}{10}e^{2x}(\cos(4x) + 2\sin(4x)) + C, x \in \mathbf{R}.$

5. $\int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{dx}{(x^2-1)}.$

Ответ: $-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C, -1 < x < 1.$

6. $\int \frac{\sin(2x)dx}{\sqrt{9-4\sin^4 x}}.$

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sin^2 x}{3} + C, x \in \mathbf{R}.$

7. $\int \frac{\ln(2x)dx}{x\ln(4x)}.$

Ответ: $\ln(2x) - \ln 2 \cdot \ln|\ln(4x)| + C, x > 0, x \neq \frac{1}{4}.$

$$8. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$\text{Ответ: } -\sqrt{1+x^2} + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C, x \in \mathbf{R}.$$

$$9. \int \frac{\ln(\operatorname{tg} x) dx}{\sin(2x)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} \ln^2(\operatorname{tg} x) + C, \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$10. \int \frac{(e^{4x} + 1) dx}{e^{2x} - e^x}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{e^x} + e^x + \frac{e^{2x}}{2} + x + 2 \ln \left| 1 - \frac{1}{e^x} \right| + C, x \neq 0.$$

$$11. \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x}, |x| > 1.$$

$$\text{Ответ: } \ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C, |x| > 1.$$

$$12. \int \frac{dx}{(1-2^x)^2}.$$

$$\text{Ответ: } x + \frac{1}{\ln 2 - 2^x \ln 2} - \frac{\ln |1-2^x|}{\ln 2} + C, x \neq 0.$$

$$13. \int \max(1, x^2) dx.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x + C, & |x| \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

$$14. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2} dx}{x^3}.$$

$$\text{Ответ: } \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C, x \neq 0.$$

$$15. \int e^{ax} \sin(bx) dx, a, b \neq 0.$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^{ax} (a \sin(bx) - b \cos(bx))}{a^2 + b^2} + C, x \in \mathbf{R}.$$

16. Для функции $y = \left(\frac{x+1}{4}\right)^3$ найдите первообразную, которая проходит через точку $M_0(0; 0)$.

Ответ: $f(x) = \frac{(x+1)^4}{256} - \frac{1}{256}, x \in \mathbf{R}$.

17. Скорость изменения текущей концентрации вещества A в зависимости от времени в процессе бимолекулярной химической реакции математически моделируется с помощью производной $\frac{dC_A}{dt} = \frac{-2kC_0^2}{(1+2ktC_0)^2}$.

Выразите текущую концентрацию $C_A(t)$ вещества A (здесь k, C_0 — положительные постоянные; t — время). Следует считать, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальная концентрация вещества A равна C_0 .

Ответ: $C_A(t) = \frac{C_0}{1+2ktC_0}, t > 0$.

18. Скорость изменения текущей численности популяции в зависимости от времени математически моделируется с помощью производной $\frac{dP}{dt}$, которая удовлетворяет уравнению $\frac{dP}{k_1 P - k_2 P^2} = dt$ (здесь k_1, k_2 — положительные постоянные; t — время; $P(t)$ — численность популяции в момент времени t). Проинтегрируйте данное равенство: левую часть — по переменной P , правую — по переменной t . Выразите из полученного равенства текущую численность популяции $P(t)$. Следует считать, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальная численность популяции равна P_0 .

Ответ: $P(t) = \frac{P_0 k_1 e^{k_1 t}}{k_1 - P_0 k_2 + P_0 k_2 e^{k_1 t}}, t > 0$.

19. Рассмотрите интеграл из п. 7.3 вида

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2, \quad a \neq 0.$$

Примените к нему формулу интегрирования по частям, приняв в качестве u функцию $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$, а в качестве dv — дифференциал dx . Докажите рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n \cdot 2na^2} + J_n \cdot \frac{2n-1}{2na^2}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a \neq 0.$$

20. При помощи формулы интегрирования по частям либо замен переменных, указанных в п. 7.7, выведите формулы, которые использовались в п. 7.4:

$$1) \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} - \frac{a^2}{2} \arccos \frac{u}{a} + C;$$

$$2) \int \sqrt{u^2 + \alpha} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + \alpha}| + C.$$

В указанных формулах $a > 0$ и $\alpha \neq 0$ — некоторые заданные действительные числа.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Понятие определенного интеграла

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox задана непрерывная функция $y = f(x)$, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией*.

Пусть $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$. Найдем площадь S криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и восстановим в точках деления этого отрезка перпендикуляры до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ (рис. 4.1). Тем самым мы разложим рассматриваемую криволинейную трапецию на n частей.

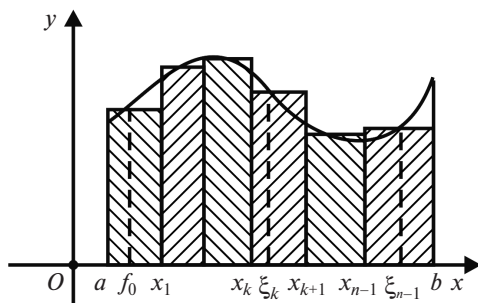


Рис. 4.1

На каждом из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и заменим k -ю криволинейную трапецию разбиения прямоугольником с основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотой $f(\xi_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Таким образом заменим исходную криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из n прямоугольников. Площадь k -го прямоугольника равна произведению основания на высоту, т. е. $f(\xi_k) \Delta x_k$.

Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь всей ступенчатой фигуры:

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта величина может быть принята за приближенное значение площади рассматриваемой криволинейной трапеции: $S \approx S_n$.

Приближение к искомой площади S криволинейной трапеции будет тем точнее, чем более мелкое разбиение отрезка $[a; b]$ на части будем брать. Исходя из этого, за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n , когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_k \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Задача о вычислении пройденного пути по заданной скорости. Пусть точка M движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, где $f(t)$ — заданная функция времени t . Вычислим длину пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T . Промежуток $[t_0; T]$ разобьем на n промежутков $[t_0; t_1], [t_1; t_2], \dots, [t_{n-1}; T]$ длиной $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

В течение малого промежутка времени Δt_k скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t'_k)$, где t'_k — некоторое значение из промежутка $[t_k; t_{k+1}]$. Длина пути, пройденного за этот промежуток времени, приближенно равна $f(t'_k)\Delta t_k$. Складывая все длины $f(t'_k)\Delta t_k$, получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T :

$$S_n = f(t'_0)\Delta t_0 + f(t'_1)\Delta t_1 + \dots + f(t'_{n-1})\Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t'_k)\Delta t_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max \Delta t_k \rightarrow 0$, находим точное значение длины пути:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t'_k)\Delta t_k.$$

Работа переменной силы. Пусть материальная точка под действием постоянной силы F перемещается по направлению этой силы. Если пройденный путь равен S , то работа этой силы A выражается по формуле $A = Fs$. Пусть материальная точка движется от точки a до точки b под действием переменной силы F , направленной вдоль оси Ox и являющейся функцией от x , т. е. $F = f(x)$. Тогда для вычисления работы этой силы поступим таким же образом, как и при решении задачи о вычислении пути. В результате получим аналогичное приближенное выражение для работы

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \cdot \Delta x_i, \text{ где } \tau_i - \text{одна из точек частичного отрезка } [x_{i-1}; x_i]. \text{ Тогда}$$

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \cdot \Delta x_i.$$

Сравнивая результаты приведенных задач, можно заметить общий метод их решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на части; составление суммы S_n , которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины; предельный переход. Этот метод применяется и для решения многих других задач, поэтому пределы такого рода стали предметом особого исследования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ произвольным образом на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ — длина частичного отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

которая называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$, соответствующей разбиению отрезка $[a; b]$ с фиксированными точками ξ_k .

Пусть λ — длина наибольшего частичного отрезка разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Данная величина называется *диаметром разбиения*.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\lambda \rightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k , то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

а сама функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$.

Таким образом, определенный интеграл есть число, к которому стремится интегральная сумма, когда $\lambda \rightarrow 0$.

Символ $\int_a^b f(x) dx$ читается как «определенный интеграл от a до b

f от $x dx$ ». Число a называется *нижним пределом интегрирования*, число b — *верхним пределом интегрирования*, функция $f(x)$ — *подынтегральной*

функцией, выражение $f(x)dx$ — подинтегральным выражением, x — переменной интегрирования.

Обозначение определенного интеграла неслучайно похоже на обозначение неопределенного: вычисление определенного сводится к вычислению неопределенного. Отличие заключается в том, что определенный интеграл от $f(x)$ на $[a; b]$ есть число, а неопределенный интеграл — множество первообразных $F(x) + C$.

В условиях рассмотренных ранее задач, приведших к понятию определенного интеграла, пределы интегральных сумм являются определенными интегралами.

1. Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Таким образом,

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

2. Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, то путь s , пройденный телом за время движения от $t = t_0$ до $t = T$, можно определить по формуле

$$s = \int_{t_0}^T f(t)dt.$$

В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Если материальная точка движется от точки a до точки b под действием переменной силы F , направленной вдоль оси Ox и являющейся функцией от x , т. е. $F = f(x)$, то работа этой силы $A = \int_a^b f(x)dx$.

Теорема 4.1 (необходимое условие интегрируемости функции). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на данном отрезке.

Теорема 4.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4.3. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4.4. Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теоремы 4.2–4.4 выражают достаточные условия интегрируемости функций.

4.2. Свойства определенного интеграла

Определенный интеграл обладает некоторыми свойствами.

$$1. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(y)dy.$$

Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.

$$2. \text{ По определению полагают, что } \int_a^a f(x)dx = 0; \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$3. \int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$ и

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то она интегрируема на двух других отрезках, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

При $a < c < b$ данное равенство имеет простой геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a; c]$ и $[c; b]$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), то функция $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и для всех $x \in [a; b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

10. **Теорема о среднем:** если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a),$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Величину μ называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Замечание 4.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то теорема о среднем принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a), \quad (4.1)$$

где $c \in [a, b]$.

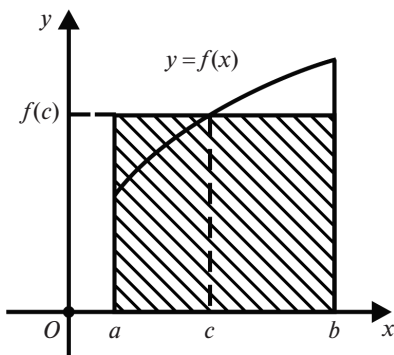


Рис. 4.2

Равенство (4.1) имеет следующий геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной ординате некоторой точки данной линии, т. е. для криволинейной трапеции существует равновеликий прямоугольник с тем же основанием $(b - a) > 0$ и высотой $f(c)$ (рис. 4.2).

4.3. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a; b]$. Если $x \in [a; b]$, то данная функция интегрируема также на отрезке $[a; x]$, т. е. существует $\int_a^x f(t)dt$. Предположим, что x меняется на отрезке $[a; b]$. Тогда на этом отрезке определена функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

которая задается определенным интегралом с переменным верхним пределом интегрирования. Переменную интегрирования обозначают здесь через t , чтобы не смешивать ее с верхним пределом x . Разумеется, изменение обозначения переменной интегрирования не отражается на величине интеграла.

Очевидно, что $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Теорема 4.5 (Барроу). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда функция $\Phi(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in [a; b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$.

Таким образом, любая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную (следовательно, и бесконечное множество первообразных), одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Кроме того, поскольку всякая другая первообразная

для функции $f(x)$ может отличаться от $\Phi(x)$ только на постоянную, то установлена связь между неопределенным и определенным интегралами:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Теорема 4.6 (формула Ньютона – Лейбница). Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (4.2)$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Формула (4.2) называется формулой Ньютона – Лейбница, и ее можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ — двойная подстановка от a до b .

Вычисление определенных интегралов непосредственно по определению очень громоздко и затруднительно даже для простых функций. Более удобно вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Рассмотрим этапы вычисления определенного интеграла:

1) находим первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа C в определенном интеграле не добавляется. Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим;

2) подставляем значение верхнего предела интегрирования в первообразную функцию: $F(b)$;

3) подставляем значение нижнего предела интегрирования в первообразную функцию: $F(a)$;

4) рассчитываем разность $F(b) - F(a)$.

Таблица основных неопределенных интегралов приведена в прил. 4.

Пример 4.1. Вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^2 2x^2 dx$.

Решение:

1) выносим константу за знак интеграла;

2) интегрируем по таблице (см. прил. 4) с помощью третьей формулы

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$. Получаем первообразную $x^3/3$. Появившуюся константу

$1/3$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку;

3) используем формулу Ньютона – Лейбница. Сначала подставляем в x^3 верхний предел интегрирования — число 2, затем нижний предел. Вычисляем разность этих чисел и получаем окончательный ответ:

$$\int_{-1}^2 2x^2 dx = 2 \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{2}{3} (2^3 - (-1)^3) = \frac{2}{3} (8 + 1) = 6.$$

Пример 4.2. Вычислите определенный интеграл $\int_1^2 x^2 dx$.

Решение.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Пример 4.3. Вычислите интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

Решение. Используем формулу из таблицы интегралов $\int \sin x dx = -\cos x + C$. В первообразную $-\cos x$ подставляем вместо x сначала верхний предел интегрирования $\pi/2$, а затем нижний предел 0 и берем разность этих чисел. Получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1.$$

Пример 4.4. Вычислите определенный интеграл $\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx = 8(x) \Big|_{-2}^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-2}^4 = \\ &= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3} (4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3} (64 + 8) = \\ &= 48 + 12 - 24 = 36. \end{aligned}$$

Рассмотрим этапы вычисления:

1) используем свойства 3 и 4 (см. п. 4.2) линейности определенного интеграла;

2) интегрируем по таблице, при этом все константы выносим за скобки;

3) для каждого из трех слагаемых применяем формулу Ньютона — Лейбница.

При наличии определенных навыков решение можно оформить значительно короче:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 = \left(32 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left(-16 + 4 + \frac{8}{3} \right) = 36.$$

Пример 4.5. Вычислите интеграл $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

Решение. Преобразуя подынтегральную функцию и применяя свойства определенного интеграла (см. п. 4.2), формулу Ньютона – Лейбница (4.2), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$. Тогда для вычисления определенных интегралов для четных и нечетных подынтегральных функций можно использовать формулу

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) \text{ четная,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пример 4.6. Вычислите интегралы $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^6 x dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x e^{x^2} dx$.

Решение. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^6 x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x e^{x^2} dx = 0$, так как обе подынтегральные функции нечетные.

4.4. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Формула Ньютона – Лейбница (4.2) позволяет вычислять определенный интеграл любой функции, для которой мы умеем находить первообразную. Эти вычисления производятся по следующей схеме:

- 1) найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$;
- 2) осуществить двойную подстановку в функцию $F(x)$ (т. е. вычислить $F(x) \Big|_a^b$).

При вычислении определенных интегралов также широко используются метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Теорема 4.7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[\alpha; \beta]$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$ и производная $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$;

2) множеством значений функции $\varphi(t)$ является отрезок $[a; b]$ (т. е. $\varphi(t) \in [a; b]$ для всех $t \in [\alpha; \beta]$);

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (4.3)$$

Формулу (4.3) называют *формулой замены переменной под знаком определенного интеграла*.

Отметим следующее:

- при нахождении методом замены переменной неопределенного интеграла мы были вынуждены возвращаться к старой переменной; при вычислении методом замены переменной определенного интеграла в этом нет необходимости, поскольку определенный интеграл — число;

- часто вместо замены $x = \varphi(t)$ применяют замену $t = \varphi(x)$;

- не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменной.

Пример 4.7. Найдите $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

Решение. Положим, $x = 2 \sin t$, тогда $dx = 2 \cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $\pi/2$. Исходя из этого,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\ &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - 2 \left(0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \pi. \end{aligned}$$

Пример 4.8. Найдите $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx$.

Решение. Под знаком интеграла видим сложную функцию $e^{\sin x}$, а рядом — производную внутренней функции $\cos x$ ($(\sin x)' = \cos x$). В связи с этим внутреннюю функцию $\sin x$ заменяем новой переменной t , $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x dx$. Если $x = 0$, то $t = \sin 0 = 0$; если $x = \pi/2$, то $t = \sin(\pi/2) = 1$. Исходя из этого,

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Пример 4.9. Найдите $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Введем новую переменную t по формуле $\sqrt{1+x^2} = t$, тогда $1+x^2 = t^2$, $2xdx = 2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0$ имеем $t = 1$; при $x = \sqrt{3}$, $t = 2$. Таким образом, получаем

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^2 \frac{tdt}{t} = \int_1^2 dt = t \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Пример 4.10. Найдите $\int_{-1}^3 xe^{x^2} dx$.

Решение. Под знаком интеграла видим сложную функцию e^{x^2} , а рядом — «почти» производную внутренней функции (с точностью до константы) — это x ($(x^2)' = 2x$). Исходя из этого, внутреннюю функцию x^2 заменяем новой переменной t . Пересчитаем пределы интегрирования: если $x = -1$, то $t = 1$, а если $x = 3$, то $t = 9$. Получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 xe^{x^2} dx &= \left[\begin{array}{ll} x^2 = t, & x = -1, t = 1 \\ xdx = \frac{dt}{2}, & x = 3, t = 9 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^9 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_1^9 = \frac{1}{2} (e^9 - e^1). \end{aligned}$$

Теорема 4.8. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

Пример 4.11. Найдите $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = (x)' dx = 1 \cdot dx = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Пример 4.12. Найдите $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \operatorname{arctg} x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.5. Вычисление площадей плоских фигур

Как указывалось ранее, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Таким образом,

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $-f(x) \geq 0$ на $[a; b]$. Исходя из этого, площадь соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S = -\int_a^b f(x) dx \text{ или } S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Площадь криволинейной фигуры $ABCD$, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f_2(x)$, снизу — графиком непрерывной функции $y = f_1(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$), слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 4.3), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Геометрически данное равенство очевидно: площадь указанной криволинейной фигуры представляет собой разность площадей двух криволинейных трапеций, ограниченных снизу осью Ox .

Аналогично площадь криволинейной фигуры, ограниченной слева графиком непрерывной функции $x = \varphi_1(y)$, справа — графиком непрерывной

функции $x = \varphi_2(y)$, снизу и сверху — прямыми $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy.$$

Если плоская фигура имеет сложную форму, то прямыми, параллельными оси Oy (или оси Ox), ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить известные формулы для вычисления площадей.

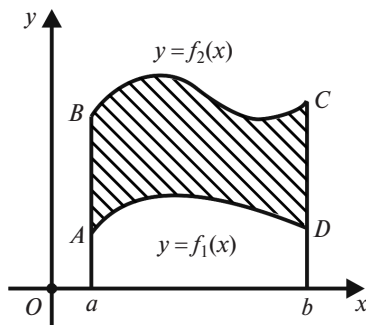


Рис. 4.3

Пример 4.13. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2$.

Решение. Изобразив графики обеих функций на плоскости (рис. 4.4), убеждаемся, что речь идет о криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком функции $y = x$, снизу — графиком функции $y = x^2$. Точки пересечения графиков $(0; 0)$ и $(1; 1)$ легко находятся из уравнения $x = x^2$.

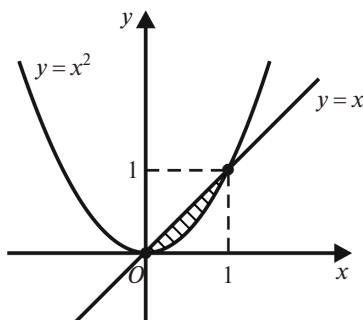


Рис. 4.4

Таким образом, $f_2(x) = x$, $f_1(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$ и

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Пример 4.14. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = x$.

Решение. В данном случае часть фигуры находится под осью Ox , но на вычисление площади это не влияет. Построим графики и посмотрим, какую площадь нужно найти (рис. 4.5). Первая функция представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз, вторая функция — прямую линию.

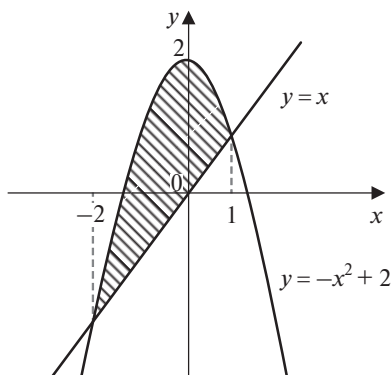


Рис. 4.5

Найдем пределы интегрирования, решив следующую систему:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x. \end{cases}$$

Приравниваем правые части $x = 2 - x^2$ и решаем квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, откуда получаем корни $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Вычисляем площадь:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2 + 4 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

Вычисление площади в полярных координатах. Пусть требуется определить площадь сектора (рис 4.6, заштрихованная фигура), ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $r = r(\varphi)$ — функция на отрезке $[\alpha; \beta]$.

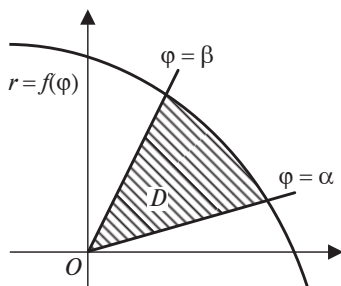


Рис. 4.6

Тогда, исходя из определения определенного интеграла и формулы площади сектора, получим формулу $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$.

Пример 4.15. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$ (рис. 4.7).

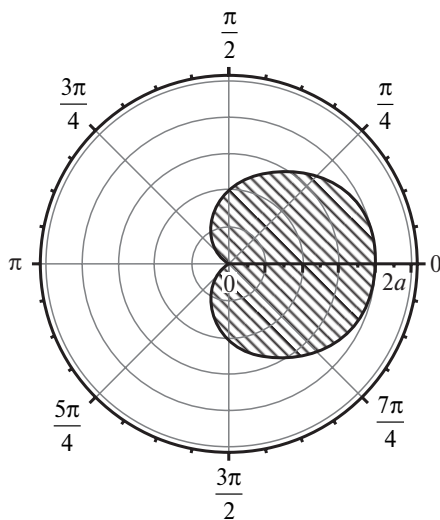


Рис. 4.7

Решение. Кардиоида симметрична относительно полярной оси. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\
 &= a^2 \left(\varphi \Big|_0^{\pi} + 2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) = a^2 \left(\pi + 0 + \frac{1}{2} \left(\varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} \right) \right) = \\
 &= a^2 \left(\pi + \frac{1}{2} (\pi + 0) \right) = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ кв. ед.}
 \end{aligned}$$

4.6. Вычисление объемов геометрических тел

Покажем, что с помощью определенного интеграла можно вычислить объем тела, если известна площадь любого поперечного сечения.

Разобьем данное тело на элементарные слои плоскостями, перпендикулярными оси Ox , и определенными уравнениями $x = \text{const}$ (рис. 4.8). Для любого фиксированного $x \in [a; b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения данного тела. Элементарный слой, отсеченный плоскостями $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$, $x_0 = a$, $x_n = b$), заменим цилиндром с высотой $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и площадью основания $S(\xi_k)$, где $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Объем этого цилиндра будет равен $S(\xi_k) \Delta x_k$. Составим сумму всех таких произведений:

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) \Delta x_k,$$

являющуюся интегральной суммой функции $S(x)$ на отрезке $[a; b]$. Она равна объему ступенчатого тела, состоящего из элементарных цилиндров и приближенно заменяющего данное тело.

Пусть $\lambda = \max \Delta x_k$. Объем тела определим следующим образом:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) \Delta x_k.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b S(x) dx.$$

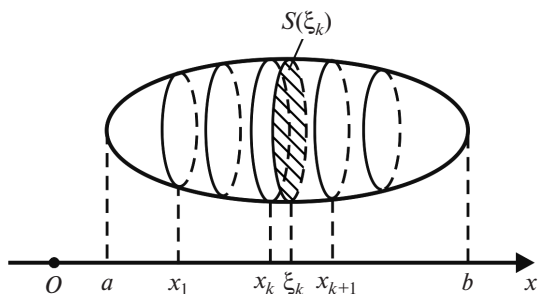


Рис. 4.8

Получаем формулу для вычисления объема тела по заданным поперечным сечениям:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (4.5)$$

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. В этом случае каждое поперечное сечение представляет собой круг радиусом $f(x)$, откуда $S(x) = \pi f^2(x) = \pi y^2(x)$ (рис. 4.9, а), и формула (4.5) принимает следующий вид:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

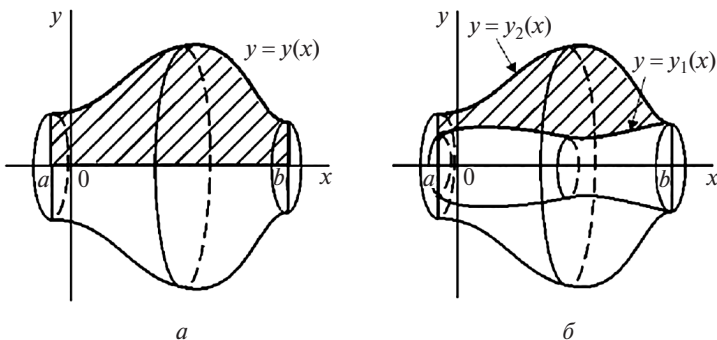


Рис. 4.9

Если фигура, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) для $x \in [a; b]$, вращается вокруг оси Ox , то объем тела вращения определяется по формуле $V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx$ или $V = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx$ (рис. 4.9, б).

Пример 4.16. Найдите объем шара радиусом R .

Решение. Шар радиусом R можно рассматривать как тело, образованное вращением верхней полуокружности $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox . Тогда

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Пример 4.17. Найдите объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $x = 1$, вокруг оси Ox . Это тело называется сегментом параболоида вращения (рис. 4.10).

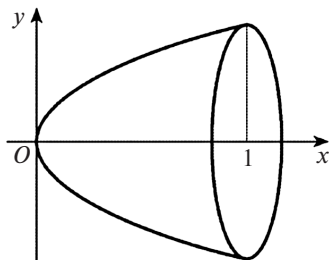


Рис. 4.10

Решение. По формуле $V = \pi \int_a^b y^2(x) dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ куб. ед.

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной справа графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$, $y \in [c; d]$, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Пример 4.18. Вычислите объем вулкана, профиль которого ограничен гиперболой $Hx = 100$, прямыми $H = 1$, $H = 100$ и осью OH (здесь x — расстояние; H — высота).

Решение. Объем вулкана равен объему тела, полученного вращением вокруг оси OH криволинейной трапеции $CcdD$, где CD — дуга кривой $x = \frac{100}{H}$ (рис. 4.11):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{100} \left(\frac{100}{H} \right)^2 dH = 10\,000\pi \int_1^{100} H^{-2} dH = -10\,000\pi \cdot \frac{1}{H} \Big|_1^{100} = \\ &= -10\,000\pi \left(\frac{1}{100} - 1 \right) = 9900\pi. \end{aligned}$$

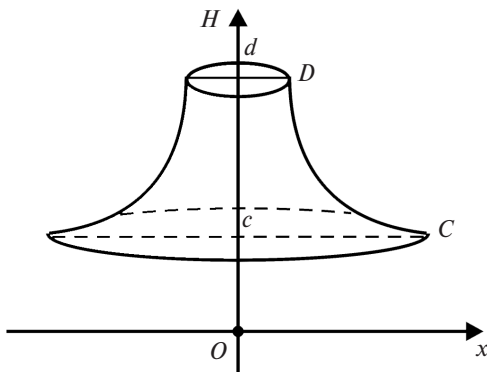


Рис. 4.11

4.7. Длина дуги плоской кривой. Площадь поверхности вращения

Ограничимся случаем кривой, которая является графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Будем считать, что функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и впишем в рассматриваемую кривую ломаную с вершинами в точках $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $\dots$, $(x_n, f(x_n))$ (рис. 4.12). Обозначим через L_n длину полученной ломаной.

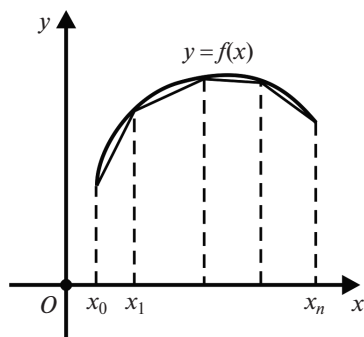


Рис. 4.12

Если существует конечный и не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части предел $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$, то кривая K , образованная графиком функции $y = f(x)$, называется *спрямляемой*, а этот предел — *длиной дуги кривой*.

Теорема 4.9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда кривая K , образованная графиком этой функции, является спрямляемой, а длина ее дуги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Замечание 4.2. Если дуга кривой задана в полярных координатах, $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то длина дуги $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$.

Пример 4.19. Найдите длину окружности радиусом R .

Решение (1-й способ). Найдем вначале длину l четверти окружности, задаваемой уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $0 \leq x \leq R$. Поскольку

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

то

$$l = \int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \cdot \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Тогда длина всей окружности $L = 4l = 4R \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi R$.

Решение (2-й способ). Запишем уравнение окружности в полярных координатах: $r = R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. По формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} R d\varphi = R\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Пусть поверхность образована вращением дуги, которая задана уравнением $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), где функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a; b]$. Тогда имеет место следующая формула:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Вывод этой формулы осуществляется с помощью построения интегральной суммы функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с использованием формулы площади поверхности усеченного конуса.

Если дуга кривой задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Пример 4.20. Найдите площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, если $x \in [a; b]$ ($-R \leq a, b \leq R$).

Решение. Воспользуемся формулой $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$. В нашем случае

функция, которая описывает дугу окружности, задана неявно, поэтому найдем производную по правилу дифференцирования неявных функций.

Имеем $2x + 2y \cdot y' = 0$, $y' = -\frac{x}{y}$, $1 + y'^2 = \frac{R^2}{y^2}$, так как $\frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{R^2}{y^2}$ (следует из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$). Тогда

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx = \\ &= 2\pi \int_a^b y \cdot \frac{R}{y} dx = 2\pi R \int_a^b dx = 2\pi R(b - a). \end{aligned}$$

В частности, при $a = -R$, $b = R$ получаем $S = 4\pi R^2$ – площадь сферы.

4.8. Приложения определенного интеграла к задачам физики и химии

Задача о пройденном пути. Найдите путь, пройденный материальной точкой за отрезок времени $[t_0; T]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$. Ранее (см. п. 4.1) при рассмотрении задач, приводящих к понятию определенного интеграла, мы показали, что путь, пройденный материальной точкой за отрезок времени $[t_0; T]$, может быть найден по формуле $S = \int_{t_0}^T v(t) dt$.

Пример 4.21. Найдите путь, пройденный материальной точкой за первые 3 с с момента начала движения при заданном выражении для скорости (выражается в метрах в секунду) $v(t) = 3t^2 + 4t - 4$.

Решение.

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^T v(t) dt = \int_0^3 (3t^2 + 4t - 4) dt = \left(3 \frac{t^3}{3} + 4 \frac{t^2}{2} - 4t \right) \Big|_0^3 = (t^3 + 2t^2 - 4t) \Big|_0^3 = \\ &= 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 = 33 \text{ м.} \end{aligned}$$

Работа переменной силы. Пусть материальная точка под действием постоянной силы F перемещается по направлению этой силы. Если пройденный путь равен s , то работа этой силы A выражается по формуле $A = Fs$. Пусть материальная точка движется от точки a до точки b под действием переменной силы F , направленной вдоль оси Ox и являющейся функцией от x , т. е. $F = F(x)$. Тогда, как показано в п. 4.1, работу этой силы можно найти по формуле $A = \int_a^b F(x) dx$.

Пример 4.22. Вычислите работу, которая необходима, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удлинения ее на 1 см нужно приложить силу в 1 кН.

Решение. Согласно закону Гука, сила F , растягивающая пружину, пропорциональна ее растяжению, т. е. $F = kx$, где x — растяжение пружины, м; k — коэффициент пропорциональности.

По условию при $x = 0,01$ м сила $F = 1$ кН. Тогда из равенства $1 = 0,01k$ получаем $k = 100 \Rightarrow F = 100x$. Следовательно, искомая работа

$$A = \int_a^b F(x) dx = \int_0^{0,1} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,5 \text{ кДж.}$$

Пример 4.23. Биохимический реактор для промышленного производства вакцины от коронавирусной инфекции имеет форму параболоида вращения (сегмент параболоида (рис. 4.13)). Высота (глубина) $H = 5$ м, радиус верхнего основания сегмента $R = 2,5$. Реактор заполнен раствором с питательной средой плотностью $\rho = 1,05$ т/м³. Вычислите работу, необходимую для перекачивания физраствора через край реактора.

Решение. Выделим тонкий слой с питательной средой на глубине $H - y$, толщину слоя обозначим через dy . Объем этого тонкого слоя – цилиндр радиусом x с высотой dy , $dV = \pi x^2 dy$ (формула объема цилиндра: $V = \pi R^2 H$). В сечении реактора плоскостью Oxy лежит парабола $V = \pi R^2 H$.

В сечении реактора плоскостью Oxy лежит парабола $x^2 = 2py$, так как его форма – параболоид вращения. Парабола проходит через точку $(R, H) \Rightarrow R^2 = 2pH \Rightarrow 2p = \frac{R^2}{H} \Rightarrow x^2 = \frac{R^2}{H} y$ (уравнение параболы в сечении плоскостью Oxy).

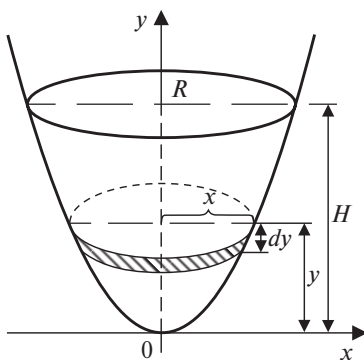


Рис. 4.13

Тогда находим объем слоя $dV = \pi \frac{R^2}{H} y dy$, далее – массу выделенного слоя $dm = \rho dV = \rho \pi \frac{R^2}{H} y dy$. Вес выделенного слоя составит величину $dP = dm \cdot g = \rho \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot y \cdot dy \cdot g = g \cdot \rho \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot y \cdot dy$. Элементарная работа dA по перекачиванию тонкого слоя весом dP из глубины $H - y$ составит $dA = (H - y)dP = (H - y) \cdot g \cdot \rho \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot y \cdot dy = \pi \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{R^2}{H} \cdot y \cdot (H - y) dy$ ($0 \leq y \leq H$).

Тогда работу, которую нужно затратить на перекачивание физраствора через край реактора, найдем по формуле

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^H \pi \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{R^2}{H} \cdot y \cdot (H - y) dy = \\
 &= \pi \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{R^2}{H} \int_0^H y \cdot (H - y) dy = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot g}{H} \int_0^H (Hy - y^2) dy = \\
 &= \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot g}{H} \left(\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H^2 \cdot \rho \cdot g}{6}.
 \end{aligned}$$

Получили формулу для вычисления работы, которую нужно затратить на перекачивание физраствора с питательной средой через край реактора, имеющего форму сегмента параболоида вращения:

$$A = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H^2 \cdot \rho \cdot g}{6}.$$

В нашем случае по условию задачи

$$A = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H^2 \cdot \rho \cdot g}{6} = \frac{3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 1,05 \cdot 9,81}{6} = 842,28 \text{ кДж}.$$

Количество электричества. Пусть по проводнику течет ток переменной силы $I = I(t)$, $I(t) \geq 0$. Тогда количество электричества Q , протекающего через поперечное сечение проводника за промежуток времени $[t_1; t_2]$, вычисляется по формуле $Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$, где сила тока I выражена в амперах; время t — в секундах.

Пример 4.24. Сила тока I в проводнике меняется со временем по закону $I(t) = 3t^2 + 5$. Определите, какое количество электричества проходит через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 3$ с до $t_2 = 5$ с.

Решение.

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = \int_3^5 (3t^2 + 5) dt = (t^3 + 5t) \Big|_3^5 = 5^3 + 5 \cdot 5 - 3^3 - 5 \cdot 3 = 101 \text{ Кл}.$$

Задача об инфильтрации воды в почву. Функция $y = a + bt^{-0,5}$ связывает скорость инфильтрации воды в почву со временем t . Общее количество Q воды, просочившейся в почву за некоторый промежуток времени, графически представляется площадью, расположенной под кривой между границами временного интервала (рис. 4.14).

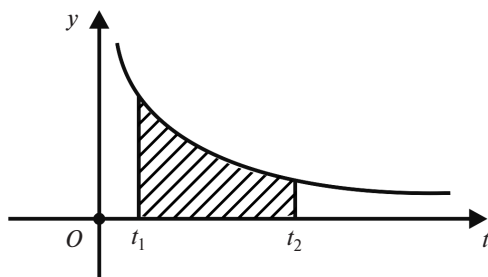


Рис. 4.14

Таким образом, $Q = \int_{t_1}^{t_2} (a + bt^{-0,5}) dt$.

Пример 4.25. Найдите общее количество воды, проникшей в грунт за период времени от 0,1 до 0,5 ч, если скорость инфильтрации изменяется по закону $y = 15 + 5t^{-0,5}$.

Решение. Искомое количество воды:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{0,1}^{0,5} (15 + 5t^{-0,5}) dt = (15t + 10t^{0,5}) \Big|_{0,1}^{0,5} = \\ &= 15 \cdot 0,5 + 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(15 \cdot 0,1 + 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 6 + 5\sqrt{2} - \sqrt{10} \approx 9,91 \text{ ед.} \end{aligned}$$

Пример 4.26. Скорость инфильтрации воды в почву со временем описывается функцией $y = 20 + 7t^{-0,5}$. Составьте уравнение инфильтрации $I(t)$ воды в почву, если $I(1) = 50$.

Решение. Находим

$$I(t) = \int y dt = \int (20 + 7t^{-0,5}) dt = 20t + 7 \cdot \frac{t^{0,5}}{0,5} + C = 20t + 14\sqrt{t} + C,$$

где C — произвольная постоянная. Согласно условию задачи, $I(1) = 50$. С другой стороны, подставляя $t = 1$ в полученное равенство, получаем $I(1) = 20 + 14 + C = 34 + C$. Отсюда $34 + C = 50$, т. е. $C = 16$. Таким образом, $I(t) = 20t + 14\sqrt{t} + 16$.

С помощью определенных интегралов также решают задачи по вычислению моментов инерции плоских фигур, координаты центра масс, силу давления жидкости на пластины различной формы и др. Кроме того, в приложениях часто используется теорема о среднем.

4.9. Несобственные интегралы

4.9.1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Вводя определенный интеграл, мы предполагали, что отрезок интегрирования конечен, а подынтегральная функция на этом отрезке ограничена. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то данное в п. 4.1 определение теряет смысл. Однако и для этих случаев можно обобщить понятие определенного интеграла. Так появилось понятие несобственного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a; +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a; b]$, где $b > a$.

Определение. Предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (4.6)$$

называют *несобственным интегралом первого рода* функции $y = f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если предел (4.6) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Если предел (4.6) не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Геометрически несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от неотрицательной функции выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева — отрезком прямой $x = a$, снизу — осью Ox (рис. 4.15). В случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, в случае расходящегося — бесконечной.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) = F(+\infty) - F(a).$$

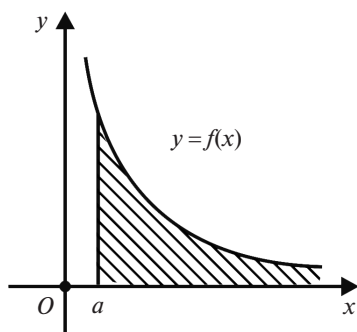


Рис. 4.15

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

и несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где c — произвольное число. В последнем случае интеграл слева сходится, если сходятся оба интеграла справа.

Пример 4.27. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2};$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$

Решение:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1;$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|b| - 0) = +\infty, \text{ т. е. интеграл}$$

расходится.

Пример 4.28. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Заданный несобственный интеграл сходится и определяет площадь бесконечной криволинейной трапеции, расположенной под кривой $y = e^{-x} > 0$, на промежутке $[0; +\infty)$.

Пример 4.29. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 4.27. При $\alpha \neq 1$ получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 4.30. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\arctg x \Big|_a^0 \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctg x \Big|_0^b \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \arctg a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Данный интеграл сходится и определяет площадь бесконечной криволинейной трапеции S , изображенной на рис. 4.16.

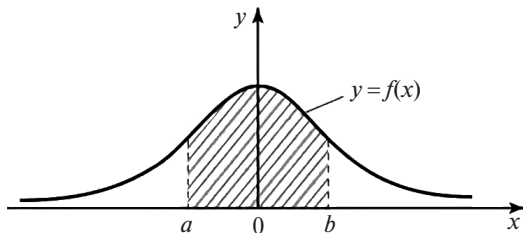


Рис. 4.16

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл, достаточно знать, сходится он или нет. Приведем признаки сходимости.

Признак сравнения. Если при $x \geq a$ выполнены неравенства $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ — расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Например, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ сходится, так как при $x \geq 1$ имеет место неравенство $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$ и сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (см. пример 4.29).

Признак сравнения в предельной форме. Если на промежутке $[a; +\infty]$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a; b]$, и существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (0 < A < +\infty),$$

то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 4.3. При применении признаков сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с так называемой эталонной функцией, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла уже установлена. Часто используют несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, исследованный в примере 4.29.

Пример 4.31. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Решение. Воспользуемся признаком сравнения.

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}} \\ \forall x \in [1; +\infty),$$

то из сходимости $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ следует сходимость и данного интеграла.

Пример 4.32. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{3x+2}{x^3-x^2+7x+11} dx$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения. При $x \rightarrow \infty$ подынтегральная функция $f(x)$ эквивалентна $g(x) = \frac{3}{x^2}$ (т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$).

Таким образом, $\alpha = 2 > 1$, и данный интеграл сходится.

Абсолютная сходимость несобственных интегралов первого рода. В случае если подынтегральная функция меняет знак на бесконечном интервале, вводят понятие абсолютной сходимости.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Функция $f(x)$ называется при этом *абсолютно интегрируемой* на $[a; +\infty)$.

Теорема 4.10. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *условно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится на $[a; +\infty)$.

Пример 4.33. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция знакопеременная, при этом $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|$, а $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно.

Пример 4.34. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x e^{-x} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\operatorname{arctg} x e^{-x}| dx &\leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} |e^{-x}| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^A = \frac{\pi}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, данный интеграл сходится абсолютно.

4.9.2. Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y = f(x)$ не ограничена в проколотой окрестности точки c отрезка $[a; b]$ и является интегрируемой на любом отрезке $[\alpha; \beta] \subset [a; c) \cup (c; b]$.

Определение. Сумму пределов

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \quad \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx \quad (4.7)$$

называют несобственным интегралом второго рода функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx.$$

Если оба предела (4.7) существуют и конечны, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. Если хотя бы один из пределов (4.7) не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

В случае $c = b$ получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad (4.8)$$

а в случае $c = a$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx. \quad (4.9)$$

Несобственный интеграл (4.8) или (4.9) называется сходящимся, если существует конечный предел соответствующего определенного интеграла в правой части, и в противном случае расходящимся.

Геометрически несобственный интеграл второго рода от неотрицательной функции также выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, которая в случае сходящегося интеграла является конечной,

в случае расходящегося — бесконечной. Для случая $c = b$ бесконечная криволинейная трапеция изображена на рис. 4.17.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (F(b-\varepsilon) - F(a)),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} (F(b) - F(a+\eta)).$$

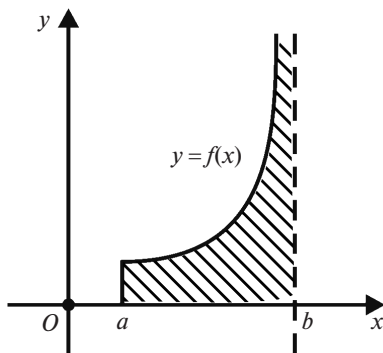


Рис. 4.17

Пример 4.35. Вычислите несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или установите его расходимость.

Решение. Функция $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ не ограничена в правой проколотой окрестности точки $x = 0$. Следовательно, имеем дело с несобственным интегралом второго рода, который находится по формуле (4.9):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{\eta}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left(2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\eta}^1 \right) = \lim_{\eta \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{\eta}) = 2.$$

Пример 4.36. Вычислите интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ или установите его расходимость.

Решение. Функция $y = 1/x^2$ не ограничена в проколотой окрестности точки $x = 0$. Следовательно, имеем дело с несобственным интегралом второго рода, который находится по формуле (4.7). Тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\eta \rightarrow +0} \left(-1 + \frac{1}{\eta} \right) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Замечание 4.4. Если интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ вычислить по формуле Ньютона – Лейбница, не обращая внимания на точку разрыва, то получится сходящийся интеграл: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$. Этот результат неверен и противоречит свойствам определенного интеграла от положительной подынтегральной функции.

Пример 4.37. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. Точка разрыва второго рода для подынтегральной функции $-x = 0$. Тогда $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty$, т. е. несобственный интеграл расходится. Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции не ограничена.

Пример 4.38. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция не определена в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. При $x \rightarrow -1$ и $x_2 \rightarrow 1$ эта функция неограниченно возрастает. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{-1+\eta}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_{-1+\eta}^0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\eta \rightarrow +0} (\arcsin 0 - \arcsin(-1+\eta)) + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Пример 4.39. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Решение. Рассмотрим три случая:

1) $\alpha = 1$, тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln|b-x| \Big|_a^{b-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|) = \infty,$$

т. е. интеграл расходится;

2) $\alpha > 1$, тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} d(b-x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{-\alpha+1} \cdot \frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} \Big|_a^{b-\varepsilon} = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится;

3) $\alpha < 1$, тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} d(b-x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{-\alpha+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

т. е. интеграл сходится.

Таким образом, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Для несобственных интегралов второго рода справедливы признаки сравнения, аналогичные признакам для несобственных интегралов первого рода.

Замечание 4.5. При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с так называемой эталонной функцией $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha > 0$, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла установлена в примере 4.39.

Пример 4.40. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^5}}$.

Решение. При $x = 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Сравним подынтегральную функцию с $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{x+x^5}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ для всех $x \in (0; 1]$. При этом

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 = 2.$$

Исходя из этого, несобственный интеграл от большей функции сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

Пример 4.41. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. При $x = 1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}},$$

но $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится, следовательно, исходный интеграл тоже сходится.

Для знакопеременных подынтегральных функций справедлива следующая теорема.

Теорема 4.11. Если $f(x)$ — знакопеременная функция, непрерывная на $[a; b)$ и имеющая разрыв при $x = b$, и если $\int_a^b |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

4.10. Приближенное вычисление определенного интеграла

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции $f(x)$. Интеграл может быть вычислен по формуле Ньютона — Лейбница, если удастся найти первообразную $F(x)$ подынтегральной функции $f(x)$. Если первообразная не выражается через элементарные функции или если $f(x)$ задана графически или таблично, то для вычисления интеграла прибегают к приближенным формулам, точность которых может быть сколь угодно большой.

Определенный интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ — это число, и метод его приближенного интегрирования основан на вычислении приближенного значения этого числа.

Определение. Пусть I — искомое число, $\tilde{I}$ — его приближенное значение, тогда разность $I - \tilde{I} = \Delta$ называется *абсолютной погрешностью* вычисления числа I .

Можно сформулировать две задачи приближенного вычисления интегралов:

- найти приближенное значение числа $\tilde{I}$ и оценить погрешность вычисления;
- найти приближенное значение числа I с заданной погрешностью Δ .

Приближенные методы вычисления определенного интеграла в большинстве случаев основаны на том, что определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$

численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$. Благодаря этому задача о приближенном вычислении интеграла равносильна задаче о приближенном вычислении площади криволинейной трапеции. При этом кривая $f(x)$ заменяется новой кривой, которая достаточно близка к данной. Тогда искомая площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной новой кривой. В качестве этой кривой выбирают ту, для которой площадь криволинейной трапеции подсчитывается просто. В зависимости от выбора новой кривой (метода аппроксимации) получаем ту или иную приближенную формулу, часто называемую *квадратурной*.

Формула прямоугольников. Данная формула основана на замене подинтегральной функции $f(x)$ на кусочно-постоянную функцию. Отрезок $[a; b]$ разбивается на n частей равной длины $h = \frac{b-a}{n}$.

На каждой из частей длины h функция $f(x)$ заменяется постоянными величинами $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно приравняется к площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников (рис. 4.18). Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

Здесь $x_i = a + i \cdot h$; $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

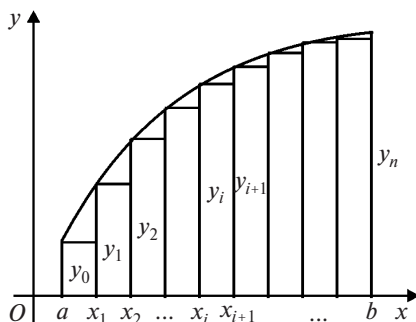


Рис. 4.18

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a; b]$ вторую производную $f''(x)$, то погрешность Δ_n приближенной оценки интеграла оценивается неравенством $\Delta_n \leq M \frac{(b-a)^2}{24n^2}$, $M = \sup_{[a; b]} |f''(x)|$. Здесь и далее $M = \sup_{[a; b]} |f''(x)|$ — наибольшее значение второй производной на $[a; b]$.

Для повышения точности (уменьшения ошибки вычисления) требуется увеличивать n — число элементов разбиения отрезка $[a; b]$ на части. При этом резко возрастает количество вычислений.

Формула трапеций. Формула аналогична формулам прямоугольников, но $f(x)$ заменяется на каждом отрезке длиной h линейной функцией, а площадь — суммой площадей трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Таким образом, площадь криволинейной трапеции приближенно равна площади ступенчатой фигуры (рис. 4.19).

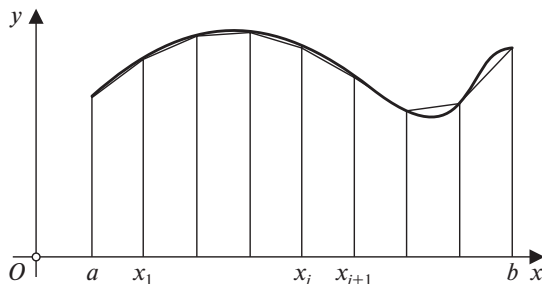


Рис. 4.19

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a; b]$ вторую производную $f''(x)$, то погрешность Δ_n приближенной оценки интеграла оценивается неравенством $\Delta_n \leq M \frac{(b-a)^3}{12n^2}$, $M = \sup_{[a; b]} |f''(x)|$.

Формула Симпсона. Данный метод приближенного вычисления определенного интеграла основан на замене графика подынтегральной функции дугами парабол, оси которых параллельны оси OY .

Разобьем отрезок $[a; b]$ на четное число $2n$ равных отрезков $h = \frac{b-a}{n}$.

Через каждые три точки $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ проводится дуга параболы $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Таким образом, на участке $[x_{i-1}; x_{i+1}]$ кривая $f(x)$ заменяется параболой (рис. 4.20).

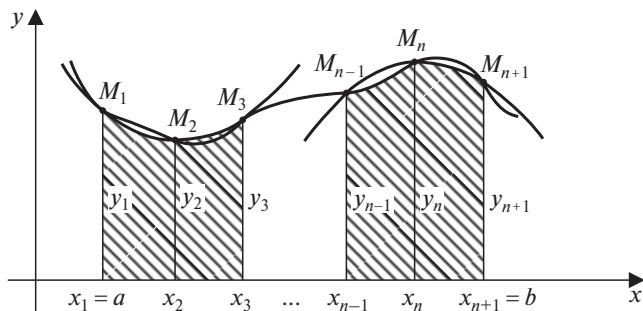


Рис. 4.20

Площадь, ограниченную одной из парабол, нетрудно подсчитать:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6} \left(P_2(x_{i-1}) + 4P_2\left(\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}\right) + P_2(x_{i+1}) \right).$$

Суммируя эти площади, в результате найдем приближенное значение интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \times (y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})).$$

Это есть *формула Симпсона*.

Можно показать, что если подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a; b]$ производную четвертого порядка, то погрешность Δ_n приближенной оценки интеграла оценивается неравенством

$$\Delta_n \leq M \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}, \quad M = \sup_{[a; b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Пример 4.42. Вычислите приближенно $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение. Разобьем отрезок $[1; 2]$ на 10 равных частей, полагая $h = 0,1$.

Составим таблицу значений подынтегральной функции:

x	$y = 1/x$	x	$y = 1/x$
1,0	1,000 00	1,6	0,625 00
1,1	0,909 09	1,7	0,588 24
1,2	0,833 33	1,8	0,555 56
1,3	0,769 23	1,9	0,526 32
1,4	0,714 29	2,0	0,500 00
1,5	0,666 67	—	—

По формуле прямоугольников имеем

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx h \sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0,1 \cdot 7,187 73 = 0,718 773,$$

по формуле трапеций имеем

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) = 0,1(0,75 + 6,187 73) = 0,693 77,$$

по формуле Симпсона имеем

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &\approx \frac{0,1}{3} (y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})) = \\ &= \frac{0,1}{3} (1,5 + 2 \cdot 2,728 18 + 4 \cdot 3,459 55) = 0,693 15. \end{aligned}$$

В действительности $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,693 147 2$ (с точностью до седьмого знака).

Таким образом, при разбиении отрезка интегрирования на 10 частей получили 5 верных знаков по формуле Симпсона, 3 — по формуле трапеций, 1 — по формуле прямоугольников.

Пример 4.43. Вычислите $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ по формуле трапеций, приняв $n = 10$.

Решение. Составим таблицу значений функции, необходимых для приближенного вычисления данного определенного интеграла:

i	x_i	$\sin x_i$	$\frac{\sin x_i}{x_i}$
0	0	0	1
1	0,1	0,099 85	0,998 50
2	0,2	0,198 67	0,993 35
3	0,3	0,295 52	0,985 07
4	0,4	0,389 42	0,973 55
5	0,5	0,479 43	0,958 86
6	0,6	0,564 64	0,941 07
7	0,7	0,644 22	0,920 31
8	0,8	0,717 36	0,896 70
9	0,9	0,783 33	0,870 37
10	1	0,841 47	0,841 47
		Σ	10,379 25

Поскольку

$$h = 0,1; \quad y_0 + y_{10} = 1,841\,47; \quad y_1 + \dots + y_9 = 10,379\,25 - 1,841\,47 = 8,537\,78,$$

то

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) = 0,1(0,920\,74 + 8,537\,78) = 0,945\,85.$$

Точное значение этого интеграла равно 0,946 08.

Пример 4.44. Вычислите приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Решение. По формуле Симпсона получим

$$\begin{aligned} \int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx \approx \frac{8 - (-2)}{6 \cdot 5} & \left[y(-2) + y(8) + 2(y(0) + y(2) + y(4) + y(6)) + \right. \\ & \left. + 4(y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) + y(7)) \right]. \end{aligned}$$

Таблица значений подынтегральной функции

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,828	3,873	4	4,123	4,899	6,557	8,944	11,874	15,232	18,947	22,978

С учетом вычисленных значений подынтегральной функции получим

$$\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx \approx \frac{8 - (-2)}{6 \cdot 5} [2,828 + 22,978 + 2(4 + 4,899 + 8,944 + 15,232) + 4(3,873 + 4,123 + 6,557 + 11,874 + 18,947)] = 91,151.$$

Точное значение этого интеграла равно 91,173. Как видно, даже при сравнительно большом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная.

Задачи

1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{-2}^3 (5x^4 - 3x^2 + 1) dx;$

6) $\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$

2) $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) dx;$

7) $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{x^2 + 1} + \cos 2x \right) dx;$

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1};$

8) $\int_1^2 \frac{x^5 + 5x^4 - 7x + 1}{x^3} dx;$

4) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1};$

9) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 + 5) dx;$

10) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

Ответ: 1) 245; 2) $\frac{1}{2}(1 + e^2)$; 3) $\ln 2$; 4) $\pi/2$; 5) $51/41$; 6) 17; 7) $2 \arctg(\pi/2)$;

8) $161/24$; 9) $\sqrt{3} - 1$; 10) $\pi/6$.

2. Вычислите определенный интеграл методом замены переменной:

1) $\int_0^1 x \cos x^2 dx;$

4) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$

2) $\int_3^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} dx;$

5) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}};$

3) $\int_1^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx;$

6) $\int_1^2 x \sqrt{2-x} dx;$

$$7) \int_0^5 x\sqrt{x+4} dx;$$

$$9) \int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$$

$$8) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$10) \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Ответ: 1) $\frac{\sin 1}{2}$; 2) $100/3$; 3) $\frac{1}{2}e(e-1)$; 4) $\sin 1$; 5) $3 + \ln \frac{16}{9}$; 6) $14/15$;

7) $506/15$; 8) $\pi/4$; 9) $\pi/6$; 10) π .

3. Вычислите определенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$1) \int_0^1 x e^{2x} dx;$$

$$6) \int_1^e x \ln x dx;$$

$$2) \int_1^e \ln x dx;$$

$$7) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x};$$

$$3) \int_0^{\pi/2} x \sin 4x dx;$$

$$8) \int_1^{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{x} dx;$$

$$4) \int_0^1 \arcsin x dx;$$

$$9) \int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$5) \int_0^{\pi} x \cos x dx;$$

$$10) \int_1^e x \ln^2 x dx.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{4}(1+e^2)$; 2) 1 ; 3) $-\pi/8$; 4) $\frac{1}{2}\pi - 1$; 5) -2 ; 6) $\frac{1}{4}(1+e^2)$;

7) $\frac{5\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln 3$; 8) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 64}{12}$; 9) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{2}$; 10) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$$1) y = 4x - x^2, y = 0;$$

$$8) xy = 6, x + y = 7;$$

$$2) y = 2x - x^2 + 8, y = 0;$$

$$9) y = x - 1, x = 1, y = \frac{4}{x^2};$$

$$3) y = x^2 - 5x + 4, y = 0;$$

$$10) y = x^2 + 2, y + x = 4;$$

$$4) y = x^2, y = 2 - x;$$

$$11) y = -x^2 - 3x + 6, y = x^2 - x - 6;$$

$$5) y = x^2, y = 4;$$

$$12) r^2 = 4 \cos \varphi;$$

$$6) y = 2x - x^2, y = -x;$$

$$13) r = 2 + \cos \varphi;$$

$$7) x = y^2 - 5y + 4, x = 0;$$

$$14) r^2 = 4 \sin 2\varphi.$$

Ответ: 1) $32/3$; 2) 36 ; 3) 18 ; 4) $9/2$; 5) $32/3$; 6) $9/2$; 7) $9/2$; 8) $17,5 - 6\ln 6$;

9) 4 ; 10) $9/2$; 11) $125/3$; 12) $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$; 13) $\approx 14,13$; 14) 4π .

5. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями:

- 1) $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, $y = 0$, Ox ; 5) $y = 4 - x^2$, $x \geq 0$, $y = 0$, Oy ;
 2) $y^2 = 2x$, $x = 4$, $y = 0$, Ox ; 6) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, Oy ;
 3) $y^2 = x$, $x^2 = y$, Ox ; 7) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y = 0$, Ox ;
 4) $y = 4x - x^2$, $y = x$, Ox ; 8) $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$, $y = 0$, Ox .

Ответ: 1) 8π ; 2) 16π ; 3) $3\pi/10$; 4) $21,6\pi$; 5) $256\pi/15$; 6) $(96/5)\pi$; 7) $\pi^2/2$;
 8) $\pi(e - 2)$.

6. Вычислите длину дуги линии:

- 1) $y^2 = x^3$, $0 \leq x \leq 1$; 3) $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
 2) $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1/2$; 4) $r = 2 \sin \varphi$.

Ответ: 1) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)$; 2) $\ln 3 - \frac{1}{2}$; 3) $\frac{\ln 3}{2}$.

7. Найдите площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой вокруг оси Ox :

- 1) $\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;
 2) $y^2 = 2x + 1$, $1 \leq x \leq 7$.

Ответ: 1) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$; 2) $112\pi/3$.

8. Исследуйте сходимость несобственных интегралов первого рода:

- 1) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$; 7) $\int_0^{+\infty} \cos x dx$;
 2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^5}$; 8) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;
 3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^8}}$; 9) $\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(t+1)^{10}} dt$;
 4) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$; 10) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$;
 5) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$; 11) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos 3x dx$;
 6) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; 12) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^2 x}$.

Ответ: 1) расходится; 2) $1/4$; 3) расходится; 4) 1 ; 5) $\pi/4$; 6) $\pi^2/8$; 7) расходится; 8) расходится; 9) $1/630$; 10) $1/2$; 11) $2/13$; 12) расходится.

9. Исследуйте сходимость несобственных интегралов второго рода:

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 1};$$

$$6) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5};$$

$$7) \int_0^1 x \ln x dx;$$

$$3) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}};$$

$$8) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}};$$

$$9) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 - x^2};$$

$$5) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}};$$

$$10) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 8}.$$

Ответ: 1) расходится; 2) расходится; 3) π ; 4) 2; 5) π ; 6) -1 ; 7) $-1/4$; 8) 2; 9) расходится; 10) расходится.

10. Вычислите приближенное значение определенного интеграла с помощью формул трапеций и Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей:

$$1) \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^3} dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3};$$

$$2) \int_0^1 e^{-x^2} dx;$$

$$4) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ответ: 1) 1,364; 2) 0,747; 3) 0,836; 4) 0,881.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите определенные интегралы:

$$1) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx;$$

$$4) \int_{-1}^3 (4x^2 - 3x + 3) dx;$$

$$7) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx;$$

$$2) \int_1^4 (2\sqrt{x} - 3x) dx;$$

$$5) \int_0^1 (x^2 - x^3 + 2) dx;$$

$$8) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$$

$$3) \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) dx;$$

$$6) \int_{-1}^3 2xe^{x^2} dx;$$

$$9) \int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx;$$

$$\begin{array}{lll}
10) \int_1^2 x\sqrt{2-x} dx; & 17) \int_0^1 \arccos x dx; & 24) \int_0^{\pi/4} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx; \\
11) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx; & 18) \int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx; & 25) \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \\
12) \int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1} dx; & 19) \int_1^e \ln^2 x dx; & 26) \int_1^8 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx; \\
13) \int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2+4x+13}; & 20) \int_1^e x^2 \ln x dx; & 27) \int_0^{2\pi} x \cos^2 x dx; \\
14) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}; & 21) \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx; & 28) \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx; \\
15) \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+2}; & 22) \int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx; & 29) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx; \\
16) \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx; & 23) \int_0^{\pi/2} \sin^2 2x dx; & 30) \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 x dx.
\end{array}$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$$\begin{array}{ll}
1) y = 2x^2 + 2x - 4, y = 0; & 7) y = \frac{5}{7}x + \frac{20}{7}, y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}, y = 0; \\
2) y = 2x - x^2 + 3, y = 0; & 8) x = y^2 - 6y + 8, y + x = 4; \\
3) y = x^2 - 2x + 2, y = x + 2; & 9) y = -x^2 + 5x + 6, y = x^2 + 3x + 2; \\
4) y = x^2 - 3x + 5, y = -3x + 6; & 10) y = x, y = 2x, y = \frac{1}{x}; \\
5) y = \operatorname{tg} x, y = -x + 1 + \frac{\pi}{4}, y = 0; & 11) r = a \sin 3\varphi \text{ (площадь одной петли);} \\
6) y = \ln x, y = -x + 1 + e, y = 0; & 12) r = 4 \sin^2 \varphi \text{ (площадь одного лепестка).}
\end{array}$$

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{array}{ll}
1) y = 0,5x; y = \sqrt{x}, Ox; & 3) y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0, Ox; \\
2) y = \operatorname{tg} x, 0 \leq x \leq \pi/4, Ox; & 4) y = \sqrt{x}, y = x, Ox;
\end{array}$$

4. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения (выражается в метрах в секунду) $v(t) = 18t - 6t^2$.

5. Вычислите работу, необходимую для растяжения пружины на 0,05 м, если известно, что для растяжения ее на 0,01 м необходимо приложить силу в 100 Н.

6. Биохимический реактор, имеющий форму эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ высотой 4 м, заполнен раствором с питательной средой плотностью $\rho = 0,8 \text{ т/м}^3$. Вычислите работу, которую нужно затратить на перекачивание физраствора через край реактора.

7. Исследуйте сходимость несобственных интегралов первого рода:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5};$$

$$6) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx;$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 16};$$

$$7) \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} dx;$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{x+5}{x^3 \sqrt{x}} dx;$$

$$8) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^5};$$

$$4) \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx;$$

$$9) \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t+1)^4} dt;$$

$$5) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$10) \int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin 2x dx.$$

8. Исследуйте сходимость несобственных интегралов второго рода:

$$1) \int_0^2 \frac{dx}{1-x^2};$$

$$4) \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}};$$

$$2) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}};$$

$$5) \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$3) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^5}};$$

$$6) \int_0^1 x \ln^2 x dx.$$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной независимой переменной не охватывают всех зависимостей, существующих в природе. Многие величины, представляющие интерес, зависят не от одного, а от очень многих факторов. Например, тип почвы y зависит от климата x_1 , растительности x_2 , жизнедеятельности организмов x_3 , материнской породы x_4 , осадков x_5 и времени x_6 , т. е. $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. В связи с этим естественно ввести понятие функции нескольких переменных. В данной теме будут рассматриваться функции действительных переменных, принимающие значения во множестве действительных чисел.

5.1. Основные понятия

Напомним, что пара чисел x и y называется упорядоченной, если указано, какое из этих чисел считается первым, а какое — вторым. Упорядоченную пару чисел записывают в виде (x, y) , где x — первое число; y — второе число.

Определение. Пусть D — некоторое множество упорядоченных пар действительных чисел. Соответствие f , которое с каждой парой чисел (x, y) из D сопоставляет одно и только одно число $z \in E \subset \mathbf{R}$, называется *функцией двух переменных* и записывается в виде $z = f(x, y)$ или $f : D \rightarrow \mathbf{R}$.

Переменные x и y называются *независимыми переменными* (или аргументами), z — *зависимой переменной*; говорят также, что $f(x, y)$ есть значение функции f в точке (x, y) . Множество D называется *областью определения* или *существования функции* f . Множество значений E , принимаемых переменной z , называется *областью значений* этой функции.

Поскольку каждой упорядоченной паре чисел (x, y) в декартовой прямоугольной системе координат соответствует единственная точка M плоскости и, наоборот, каждой точке M соответствует единственная упорядоченная пара чисел (x, y) , то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки M и вместо $z = f(x, y)$ писать $z = f(M)$.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве. Значение функции $z = f(x, y)$ при $x = a$ и $y = b$ обозначается через $f(a, b)$. Под *графиком функции двух пе-*

ременных понимают геометрическое место точек $M(x; y; z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют соотношению $z = f(x, y)$.

С геометрической точки зрения область определения функции двух переменных D представляет собой множество точек плоскости Oxy , ограниченной линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается D , во втором случае — *открытой*.

Способы задания функции двух переменных, как и одной, могут быть различными. Чаще используется аналитический способ, т. е. применяется формула. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Пример 5.1. Найдите область определения функции:

1) $z = x^2 + y^2$;

2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение:

1) областью определения функции $z = x^2 + y^2$ является множество всех пар чисел (x, y) , т. е. вся плоскость Oxy ;

2) областью определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является множество точек, для которых определено выражение $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, т. е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. Множество всех таких точек образует круг с центром в начале координат и радиусом $R = 1$.

Пример 5.2. Найдите область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \ln(4 - x^2 - y^2)$.

Решение. Искомая область определения функции двух переменных с учетом свойства логарифмической функции будет определяться систе-

мой неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ 4 - x^2 - y^2 > 0. \end{cases}$$

Перепишем указанную систему в виде
$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

Систему неравенств заменим системой равенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Здесь каждое из равенств определяет окружность радиусом 1 и 2 соответственно. Графически область определения данной функции будет заключена между двумя концентрическими окружностями: $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. При этом исключаются точки, принадлежащие окружностям (рис. 5.1).

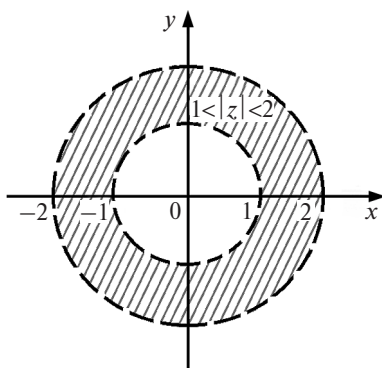


Рис. 5.1

Пример 5.3. Найдите область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Запишем функцию в виде $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Функция z определена для значений x и y , которые удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 4$. Геометрически это означает, что функция определена во всех точках, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 \leq 4$ и на ее границе (рис. 5.2).

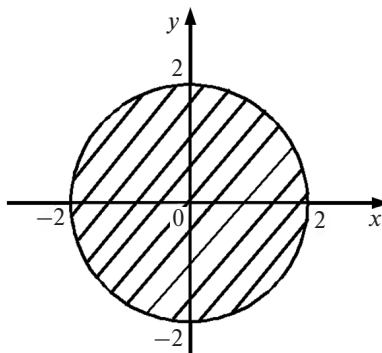


Рис. 5.2

Пример 5.4. Найдите область определения функции $u = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Решение. Должно выполняться условие $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$. Эта дробь будет положительной, когда положителен ее знаменатель, т. е. $x^2 - y^2 > 0$, или $y^2 < x^2$. Последнее равносильно неравенству $|y| < |x|$.

Рассмотрим два случая:

1) если $x > 0$, то $|x| = x$, и тогда $|y| < x$, или $-x < y < x$. Геометрически это означает, что область определения есть часть правой полуплоскости (так как рассматриваются значения $x > 0$), ограниченная прямыми $y = x$ и $y = -x$, причем точки, лежащие на этих прямых, не рассматриваем;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x$, и тогда $|y| < -x$, или $x < y < -x$. Последние неравенства определяют часть левой полуплоскости, которая находится между прямыми $y = -x$ и $y = x$, причем точки, принадлежащие этим прямым, не рассматриваем. Область определения функции приведена на рис. 5.3.

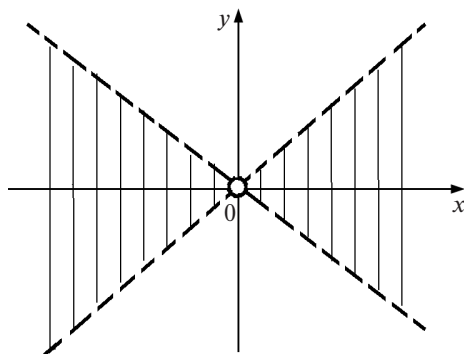


Рис. 5.3

Определение. Соответствие f , которое с каждой упорядоченной тройкой действительных чисел (x, y, z) сопоставляет одно и только одно действительное число u , называется *функцией трех переменных* и записывается в виде $u = f(x, y, z)$.

Область определения — множество V точек пространства, для которых функция определена. Функцию трех переменных можно рассматривать как функцию точки $M(x; y; z)$ пространства.

Аналогичным образом определяется функция n ($n \in \mathbb{N}$) переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. В этом случае множество всех упорядоченных совокупностей n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ образует n -мерное пространство, а каждая точка $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется точкой этого пространства.

Примеры функций нескольких переменных:

1) $y = \pi x_1^2 x_2$;

2) $y = a_0 x_1^\alpha x_2^\beta$ — производственная функция Кобба — Дугласа, где y выражает величину общего продукта; x_1 — затраты труда; x_2 — объем производственных фондов;

3) $y = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i)$, $a_i > 0$, $x_i > c_i > 0$, — логарифмическая функция по-

лезности (экономическая теория).

Пример 5.5. Найдите область определения функции:

1) $u = x^2 + y^2 + z^2$;

2) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

Решение:

1) область определения функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ составляют все точки трехмерного пространства;

2) область определения функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ — все точки трехмерного пространства, не принадлежащие шару радиусом 1 (граница шара — сфера, также не принадлежит области определения).

Как известно, функция одной переменной изображается на плоскости в виде линии, определяемой уравнением $y = f(x)$. Функция двух переменных изображается в пространстве в виде поверхности, определяемой уравнением $z = f(x, y)$. Например, функция $z = x - y$ задает плоскость, а функция $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ — полусферу.

Построение поверхностей в пространстве представляет значительные трудности, поэтому существует еще один способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $z = c$, где c — некоторое число.

Определение. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy , в которых эта функция принимает одно и то же значение.

Термин «линия уровня» заимствован из картографии, где означает линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря постоянна. По ним можно судить не только о высоте над уровнем моря определенной точки местности, но и о характере рельефа, что особенно важно, если местность гористая. Соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или одинаковым средним суточным давлением, получим соответственно изотермы и изобары, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды.

Пример 5.6. Постройте линии уровня функции $z = 4x^2 + 9y^2$.

Решение. Линии уровня определяются уравнением $4x^2 + 9y^2 = c$, где $c \geq 0$. При $c = 0$ уравнение задает точку $O(0; 0)$. При $c \neq 0$ уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{c/4} + \frac{y^2}{c/9} = 1.$$

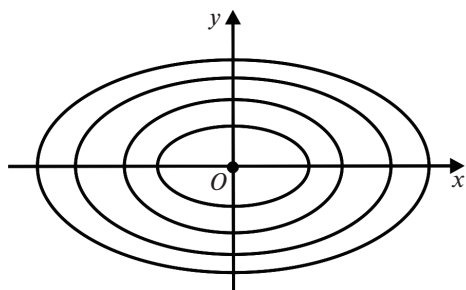


Рис. 5.4

Придавая параметру c различные значения, получаем семейство линий уровня, представляющих собой эллипсы. На рис. 5.4 изображено семейство найденных линий уровня (при увеличении c эллипсы неограниченно расширяются). Фигура представляет собой эллиптический параболоид.

5.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Рассмотрим понятия предела и непрерывности для функции двух переменных. Для функции большего числа переменных данные понятия вводятся аналогично.

Напомним, что расстояние между двумя точками плоскости $M(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$ определяется по формуле

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Аналогично определяется расстояние между точками $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$:

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}.$$

Напомним также, что δ -окрестностью точки a на координатной прямой называется интервал $(a - \delta; a + \delta)$, т. е. множество таких точек прямой, которые удалены от точки a на расстояние, меньшее δ : $\rho(x, a) < \delta$. Аналогично определяется δ -окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$ в координатной плоскости: это множество всех таких точек $M(x; y)$, для которых $\rho(M, M_0) < \delta$.

Геометрически δ -окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$ представляет собой внутренность круга (без его границы) с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и радиусом δ (рис. 5.5). Такой круг без границы называют открытым.

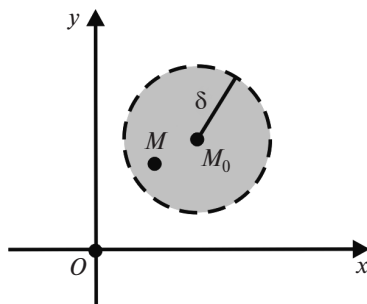


Рис. 5.5

В случае функции $u = f(x, y, z)$ трех переменных δ -окрестность точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ представляет собой открытый шар с центром в этой точке и радиусом δ . Если из δ -окрестности точки M_0 удалить саму точку M_0 , то получится проколотая δ -окрестность точки M_0 ; точки проколотой δ -окрестности удовлетворяют двойному неравенству $0 < \rho(M, M_0) < \delta$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Сформулируем два эквивалентных между собой определения предела функции в точке.

Определение. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех точек $M(x; y)$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ или $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

Определение. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ в точке M_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую проколотую δ -окрестность точки M_0 , в которой выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такая проколотая δ -окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, во всех точках $M(x; y)$ которой аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x, y)$ отличаются от числа A по модулю меньше чем на ε .

Из определения предела функции также следует, что существование предела функции в точке M_0 (если он существует, то и его значение) не зависит от значения функции в точке M_0 (если она определена в этой точке).

Отметим, что определение предела функции нескольких переменных дословно повторяет определение предела функции одной переменной.

В связи с этим она обладает аналогичными свойствами (см. подп. 1.7.1–1.7.3). Например, справедлива теорема 5.1.

Теорема 5.1. Пусть $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$, $\lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = B$ ($A, B \in \mathbf{R}$). Тогда в точке M_0 существуют пределы функций $f(M) \pm g(M)$, $f(M)g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$ ($g(M) \neq 0$), причем:

- а) $\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B$;
- б) $\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M)g(M)) = A \cdot B$, в частности $\lim_{M \rightarrow M_0} (c f(M)) = c A$;
- в) $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

Пример 5.7. Найдите предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (5x^2 + 2y - 4)$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (5x^2 + 2y - 4) = 5 \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} x^2 + 2 \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} y - 4 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 = 7.$$

Пример 5.8. Найдите предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Пример 5.9. Найдите пределы:

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$;
- 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - 5y}{x + 5y}$;
- 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \operatorname{tg}(xy)}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3, \text{ так как } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1;$$

2) будем приближаться к точке $O(0; 0)$ по прямой $y = kx$, где k — угловой коэффициент прямой. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x-5y}{x+5y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x-5kx}{x+5kx} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x(1-5k)}{x(1+5k)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1-5k}{1+5k}.$$

Функция $z = \frac{x-5y}{x+5y}$ в точке $O(0; 0)$ предела не имеет, так как при различных значениях k функция имеет различные предельные значения;

3) обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Условие $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ равносильно условию. Тогда $r \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1-r)}{r} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \text{правило Лопиталя} - \text{Бернулли} \right| = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\ln(1-r))'}{r'} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-1/(1-r)}{1} = -1. \end{aligned}$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности (обычной, а не проколотой) точки $M_0(x_0; y_0)$.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0; y_0)$, если существует предел $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Для непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ существенно выполнение следующих условий:

1) функция $z = f(x, y)$ должна быть определена в окрестности (обычной, а не проколотой, как в случае определения предела) точки $M_0(x_0; y_0)$;

2) функция $z = f(x, y)$ должна иметь предел $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

3) предел функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ должен быть равен значению функции в этой точке.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества, называется *непрерывной на этом множестве*. Точки, в которых непрерывность функции нарушается, называются *точками разрыва* этой функции.

Например, функция $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки $M(0; 0)$, в которой функция терпит бесконечный разрыв, а функция $z = \frac{2}{y-3x}$ имеет линию разрыва $y = 3x$.

Определение непрерывной функции можно переписать и в другом, эквивалентном приведенному ранее виде. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Величины Δx и Δy называются *приращениями аргументов* x и y , а величина Δz — *полным приращением функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ и приращения Δx и Δy таковы, что точка $N(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ не выходит за пределы указанной окрестности.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0, \quad (5.1)$$

т. е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов стремятся к нулю.

Равенство (5.1) можно переписать в виде $\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta z = 0$, где $\Delta \rho = \rho(M, M_0)$.

Поскольку непрерывность в точке для функции нескольких переменных определяется так же, как и в случае функции одной переменной, то локальные свойства непрерывной функции нескольких переменных аналогичны соответствующим свойствам функции одной переменной (см. п. 1.11).

5.3. Частные производные функции нескольких переменных

Поскольку переменные x и y , являющиеся аргументами функции $z = f(x, y)$, независимы, то одна из них может изменяться, а другая — оставаться фиксированной. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Если мы припишем y постоянное значение y_0 и будем изменять x , то z будет являться функцией от одной переменной x . Придадим значению x_0 приращение Δx , тогда функция z получит *частное приращение* $\Delta_x z$ по x в точке $M_0(x_0; y_0)$, которое обозначается $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется *частное приращение* $\Delta_y z$ по y в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных в фиксированной точке называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частные производные по x и по y в точке $M_0(x_0; y_0)$ определяются соответственно формулами

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x выражает скорость изменения функции в данном направлении ($y = y_0$), или скорость изменения функции $\varphi = f(x, y_0)$ одной переменной x .

Частные производные функции $z = f(x, y)$ имеют следующую геометрическую интерпретацию: $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$, $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$, где α — угол между осью Ox и касательной в точке $N(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$; β — угол между осью Oy и касательной в той же точке к линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x = x_0$ (рис. 5.6).

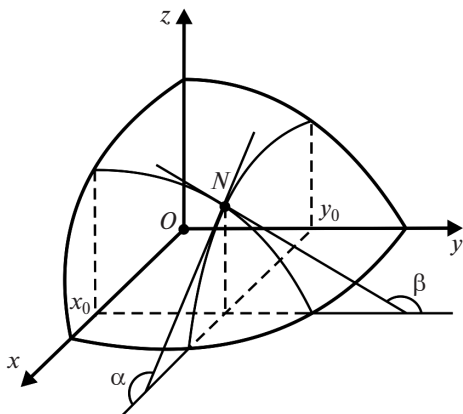


Рис. 5.6

Очевидно,

$$f'_x(x_0, y_0) = \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad f'_y(x_0, y_0) = \left. \frac{df(x_0, y)}{dy} \right|_{y=y_0},$$

т. е. частная производная в данной точке равна производной функции одной переменной, вычисленной при соответствующем значении аргумента,

поэтому при нахождении частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Пример 5.10. Найдите частные производные функции $z = x^2 + 2xy + y^3$, а также их значения в точке $M_0(4; 1)$.

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя функцию по x , получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y + 0 = 2(x + y).$$

Считая x постоянной и дифференцируя функцию по y , получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x + 3y^2 = 2x + 3y^2.$$

Значения частных производных в точке $M_0(4; 1)$, т. е. при $x = 4$, $y = 1$,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 2(4 + 1) = 10,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1^2 = 11.$$

Аналогично определяются частные производные функций трех и более переменных. Например, если $u = f(x, y, z)$, то ее частная производная по x в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ определяется формулой

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Пример 5.11. Найдите частные производные первого порядка следующих функций:

$$1) z = \cos x^2 y + \sin xy^2 + xe^{-y};$$

$$2) u = x^2 y - xy^2 + xz^2 - y^2 z + 5.$$

Решение:

1) z — функция двух независимых переменных x и y . Определяя частную производную данной функции по переменной x , вторую независимую переменную y будем рассматривать как величину постоянную. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\sin x^2 y (x^2 y)'_x + \cos xy^2 (xy^2)'_x + e^{-y} = \\ &= -2xy \sin x^2 y + y^2 \cos xy^2 + e^{-y}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= -\sin x^2 y (x^2 y)'_y + \cos xy^2 (xy^2)'_y + xe^{-y} (-y)'_y = \\ &= -x^2 \sin x^2 y + 2xy \cos xy^2 - xe^{-y};\end{aligned}$$

2) $u(x, y, z)$ — функция трех независимых переменных x, y и z . При определении частной производной по каждой из этих переменных две другие считаем величинами постоянными. Получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - y^2 + z^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2xy - 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2xz - y^2.$$

Частные производные функции нескольких переменных называют *частными производными первого порядка* (или *первыми частными производными*). Их также можно рассматривать как функции нескольких переменных.

Частными производными второго порядка (или *вторыми частными производными*) данной функции называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных. Для функции $z = f(x, y)$ по определению имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = [f'_x(x, y)]'_x = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = [f'_y(x, y)]'_y = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = [f'_x(x, y)]'_y = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = [f'_y(x, y)]'_x = f''_{yx}(x, y).$$

Производные f''_{xy} и f''_{yx} называются *смешанными частными производными*.

Теорема 5.2. Пусть функция $z = f(x, y)$ и ее смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, причем f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Итак, если смешанные производные непрерывны, то они равны, т. е. результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Пример 5.12. Найдите частные производные второго порядка функции $z = x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + y^3$.

Решение. Найдём сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8xy - 6y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 12xy + 3y^2.$$

Отсюда по определению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 8xy - 6y^2) = 6x + 8y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 8xy - 6y^2) = 8x - 12y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2 - 12xy + 3y^2) = 8x - 12y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 - 12xy + 3y^2) = -12x + 6y.$$

Как видно, в силу непрерывности исходной функции и ее частных производных второго порядка в любой точке $M(x; y)$ имеет место равенство $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Пример 5.13. Покажите, что функция $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение. Упростим функцию: $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right)'_x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(-\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right)'_y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Теперь найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{x'(x^2 + y^2) - x(x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{y'(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Подставив полученные частные производные второго порядка в уравнение Лапласа, получим $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$.

Дифференцируя частные производные второго порядка по x и y , получаем частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Частная производная n -го порядка функции $z = f(x, y)$ есть первая частная производная от ее частной производной $(n-1)$ -го порядка. Аналогично определяются частные производные функций трех и большего числа переменных.

5.4. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Рассмотрим полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение. Если существуют не зависящие от Δx и Δy числа P и Q такие, что полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = P\Delta x + Q\Delta y + \varepsilon\Delta\rho, \quad (5.2)$$

где $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\Delta\rho \rightarrow 0$, то выражение $P\Delta x + Q\Delta y$ называется *полным дифференциалом* функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 .

В равенстве (5.2) первая часть $P\Delta x + Q\Delta y$ является линейной относительно Δx и Δy и представляет собой *главную часть приращения* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ обозначается через dz , т. е.

$$dz = P\Delta x + Q\Delta y. \quad (5.3)$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде (5.2).

Теорема 5.3 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные, причем

$$P = f'_x(x_0, y_0), \quad Q = f'_y(x_0, y_0).$$

Данная теорема дает возможность записать формулу (5.3) в виде

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Из формул (5.2) и (5.3) следует, что $\Delta z \approx dz$, или

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx \\ &\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Полученная формула используется в приближенных вычислениях.

Пример 5.14. Вычислите приближенно величину $\sqrt{(3,02)^2 + (1,95)^4}$.

Решение.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}; \quad x = 3,02; \quad x_0 = 3; \quad \Delta x = x - x_0 = 0,02;$$

$$y = 1,95; \quad y_0 = 2; \quad \Delta y = y - y_0 = -0,05;$$

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^4}; \quad f(3, 2) = \sqrt{3^2 + 2^4} = 5.$$

Найдем частные производные функции:

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}}, \quad f'_y = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}};$$

$$f'_x(3, 2) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^4}} = \frac{3}{5}, \quad f'_y(3, 2) = \frac{2 \cdot 2^3}{\sqrt{3^2 + 2^4}} = \frac{16}{5};$$

$$\sqrt{(3,02)^2 + (1,95)^4} \approx 5 + \frac{3}{5} \cdot 0,02 + \frac{16}{5} \cdot (-0,05) =$$

$$= 5 + 0,012 - 0,16 = 4,852.$$

Пример 5.15. Вычислите приближенно величину $(1,05)^{3,05}$.

Решение. Будем исходить из функции $f(x, y) = x^y$ и воспользуемся формулой (5.4). В нашем случае $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$. Тогда получим

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} \approx x^y + yx^{y-1} \cdot \Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y.$$

Поскольку $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0,05$, $\Delta y = 0,05$, то

$$1,05^{3,05} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0,05 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0,05 = 1 + 0,15 = 1,15.$$

Теорема 5.4 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ имеет в окрестности точки M_0 частные производные первого порядка и они непрерывны в самой этой точке, то функция дифференцируема в точке M_0 .

Перейдем от точки $M_0(x_0; y_0)$ к точке $M(x; y)$, в которой функция $z = f(x, y)$ определена и удовлетворяет условиям теоремы 5.4. Положим, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, и назовем эти величины *дифференциалами переменных*. Тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

т. е. полный дифференциал функции равен сумме произведений частных производных первого порядка на соответствующие дифференциалы независимых переменных.

Пример 5.16. Найдите полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$.

Решение. По определению приращение

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 = \\ &= \cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{xy} - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y + \\ &\quad + \cancel{y^2} + 2y\Delta y + \Delta y^2 - \cancel{x^2} + \cancel{xy} - \cancel{y^2} = \\ &= 2x\Delta x - y\Delta x + 2y\Delta y - y\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2 = \\ &= (2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2. \end{aligned}$$

Выражение $(2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y = (2x - y)dx + (2y - x)dy$ линейное относительно Δx и Δy , есть дифференциал dz , а величина $\alpha = \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Итак, $\Delta z = dz + \alpha$.

Пример 5.17. Найдите dz , если $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}.$$

Аналогично определяется полный дифференциал функции трех и более переменных. Например, если $u = f(x, y, z)$ и существуют числа P, Q, R такие, что

$$\Delta u = P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z + \varepsilon\Delta\rho,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\Delta\rho \rightarrow 0$, то полным дифференциалом называется сумма первых трех слагаемых: $du = Pdx + Qdy + Rdz$. Если первые частные производные функции u непрерывны в точке $M(x; y; z)$, то

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$.

Арифметические свойства дифференциала функции одной переменной сохраняются и для полного дифференциала функции двух и большего числа переменных.

Полным дифференциалом n -го порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$ -го порядка. Так, если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то ее полный дифференциал второго порядка будет следующим:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy = \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

5.5. Дифференцирование сложных и неявных функций

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных x и y , каждая из которых является функцией независимой переменной t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ — сложная функция одной независимой переменной t , а переменные x и y называются *промежуточными переменными*.

Теорема 5.5. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 , а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ дифференцируема в точке t_0 и в этой точке

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (5.5)$$

Частный случай. Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то $z = f(x, \varphi(x))$ — сложная функция переменной x . На основании формулы (5.5), в которой роль t играет x , получаем формулу полной производной $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$.

Пример 5.18. Найдите производную функции $z = \ln^2(x^4 + y^2)$, если $y = e^{\sqrt{x}}$.

Решение. Определим производные, входящие в формулу полной производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln^2(x^4 + y^2))'_x = 2\ln(x^4 + y^2) \cdot \frac{1}{x^4 + y^2} \cdot 4x^3 = \frac{8x^3 \ln(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln^2(x^4 + y^2))'_y = 2\ln(x^4 + y^2) \cdot \frac{1}{x^4 + y^2} \cdot 2y = \frac{4y \ln(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Далее, подставляя в формулу полной производной, получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{8x^3 \ln(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2} + \frac{4y \ln(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{2\ln(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2} \left(4x^3 + \frac{ye^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

Пример 5.19. Найдите $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^4 + 2xy - y^3$, $x = \sin 2t$, $y = \arctg t$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2},$$

откуда

$$\frac{dz}{dt} = 4(2x^3 + y)\cos 2t + \frac{2x - 3y^2}{1+t^2}.$$

Пусть теперь x и y являются функциями двух переменных u и v : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда функция $z = f(x(u, v), y(u, v))$ является сложной функцией двух независимых переменных u и v . Если функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке $N_0(u_0; v_0)$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, то

в точке $N_0(u_0; v_0)$ существуют частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ и

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (5.6)$$

Частная производная сложной функции (z) по каждой независимой переменной (u или v) равна сумме произведений частных производных этой функции (z) по ее промежуточным переменным (x и y) и их частных производных по соответствующей независимой переменной (u или v).

Формулу (5.6) можно обобщить на случай функций любого конечного числа переменных.

Пример 5.20. Найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^3 + y^3$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2, & \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= v, & \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{v}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= u, & \frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{u}{v^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 3x^2 v + 3y^2 \cdot \frac{1}{v} = \\ &= 3u^2 v^3 + 3 \frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{1}{v} = 3u^2 \left(v^3 + \frac{1}{v^3} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 3x^2 u - 3y^2 \cdot \frac{u}{v^2} = \\ &= 3u^2 v^2 u - 3 \frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{u}{v^2} = 3u^3 \left(v^2 - \frac{1}{v^4} \right). \end{aligned}$$

Пример 5.21. Найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u \cos v$, $y = v \sin u$.

Решение. Определим частные производные, входящие в формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \cos v, & \frac{\partial y}{\partial u} &= v \cos u, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -u \sin v, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \sin u. \end{aligned}$$

Подстановка этих производных дает следующее:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \cos v + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot v \cos u = \\
 &= \frac{2}{x^2 + y^2} (x \cos v + yv \cos u) = \\
 &= \frac{2}{(u \cos v)^2 + (v \sin u)^2} (u \cos^2 v + v^2 \sin u \cos u); \\
 \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot u \sin v + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \sin u = \\
 &= \frac{2}{x^2 + y^2} (-xu \sin v + y \sin u) = \\
 &= \frac{2}{(u \cos v)^2 + (v \sin u)^2} (-u^2 \cos v \sin v + v \sin^2 u).
 \end{aligned}$$

Функция z от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется *неявной* , если она задана уравнением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0, \quad (5.7)$$

не разрешенным относительно z .

Если функция F и ее частные производные $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \dots, F'_{x_n}, F'_z$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0; z_0)$, причем $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0) = 0$, а $F'_z(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки $(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, в которой уравнение (5.7) определяет единственную непрерывную и дифференцируемую функцию $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такую, что $z(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = z_0$ и

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_z}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В частности, если z — функция одной переменной x , то

$$z' = \frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_z};$$

если z — функция двух переменных x и y , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Пример 5.22. Найдите производную функции y , заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 - 5xy = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $z = f(x, y)$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 5xy$. Чтобы воспользоваться формулой, найдем частные производные f'_x и f'_y , $f'_x = 3x^2 - 5y$, $f'_y = 3y^2 - 5x$. Подставляя эти выражения, получим $y' = -\frac{3x^2 - 5y}{3y^2 - 5x}$.

Пример 5.23. Найдите частные производные функции z , заданной уравнением $e^z + z - x^5y + 2 = 0$.

Решение. Здесь $F(x, y, z) = e^z + z - x^5y + 2$, $F'_x = -5x^4y$, $F'_y = -x^5$, $F'_z = e^z + 1$, откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{5x^4y}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^5}{e^z + 1}.$$

5.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если на поверхности через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ провести всевозможные кривые и к ним в этой точке построить касательные прямые, то окажется, что все эти касательные лежат в одной плоскости, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке $M(x_0; y_0; z_0)$, а перпендикуляр к касательной плоскости, восстановленный к ней в точке касания $M(x_0; y_0; z_0)$, называется нормалью к поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ к данной поверхности записывается в следующем виде:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а канонические уравнения нормали, проведенной через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхности, — таким образом:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана в неявном виде: $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ записывается как

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнение нормали к поверхности в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ — как

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пример 5.24. Найдите уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $M_0(1; 2; -1)$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$. По условию $F(x, y, z) = 0$. Найдём частные производные функции $F(x, y, z) = 0$ и их значения в точке $M_0(1; 2; -1)$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = (x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6)'_x \Big|_{M_0} = (3x^2 + yz) \Big|_{M_0} = 1,$$

$$F'_y(x_0, y_0, z_0) = (x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6)'_y \Big|_{M_0} = (3y^2 + xz) \Big|_{M_0} = 11,$$

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) = (x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6)'_z \Big|_{M_0} = (3z^2 + yx) \Big|_{M_0} = 5.$$

Для получения уравнения касательной плоскости в точке $M_0(1; 2; -1)$ воспользуемся формулой

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Получаем

$$(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = x + 11y + 5z - 18 = 0.$$

Для нахождения уравнения нормали воспользуемся формулой

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

Тогда канонические уравнения нормали имеют вид $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}$.

5.7. Экстремумы функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Если для всех точек (x, y) этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$), то M_0 называется *точкой минимума (максимума)* функции $z = f(x, y)$. Точки минимума и максимума называются *точками экстремума*, а значения функции в них — *экстремумами функции*.

Отметим, что, как и в случае функции одной переменной, точки минимума и максимума функции $z = f(x, y)$ имеют локальный характер: значение функции в точке M_0 сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к M_0 .

Теорема 5.6 (необходимое условие экстремума). В точке экстремума дифференцируемой функции все ее первые частные производные равны нулю, т. е. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точка $M(x; y)$, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, т. е. $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$, называется *стационарной точкой*. Стационарные точки и точки, в которых не существует хотя бы одна частная производная, называются *критическими точками* или *точками, подозрительными на экстремум*.

В критических точках функция может иметь или не иметь экстремум. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Например, для функции $f(x, y) = xy$ в точке $O(0; 0)$ имеют место равенства $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$, однако точка $O(0; 0)$ не является точкой экстремума функции, поскольку в любой окрестности этой точки имеются точки $A(\epsilon; \epsilon)$ и $B(-\epsilon; \epsilon)$ такие, что $f(A) = \epsilon^2 > 0 = f(O)$ и $f(B) = -\epsilon^2 < 0 = f(O)$.

Теорема 5.7 (достаточное условие экстремума). Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка, т. е. точка, в которой $df(x_0, y_0) = 0$. Тогда:

- 1) если $d^2f(x_0, y_0) < 0$, то $M_0(x_0; y_0)$ — точка максимума;
- 2) если $d^2f(x_0, y_0) > 0$, то $M_0(x_0; y_0)$ — точка минимума.

Указанные условия можно переписать в эквивалентном виде.

Пусть $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

- 1) если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то $M_0(x_0; y_0)$ — точка максимума;
- 2) если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то $M_0(x_0; y_0)$ — точка минимума;
- 3) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума нет.

В случае $d^2f(x_0, y_0) = 0$ ($\Delta = 0$) экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ может быть, а может и не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример 5.25. Найдите экстремум функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8.$$

Решение. Сначала найдем стационарные точки. Поскольку

$$f'_x = 2x - 2, \quad f'_y = 2y + 4,$$

то, решая систему

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y + 4 = 0, \end{cases}$$

получим одну стационарную точку $M_0(1; -2)$. Находим частные производные второго порядка: $f''_{xx} = 2 = A$, $f''_{xy} = 0 = B$, $f''_{yy} = 2 = C$. Поскольку $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$, $A > 0$, то $M_0(1; -2)$ — точка минимума функции $f(x, y)$, причем $\min f(x, y) = f(1, -2) = 3$.

Пример 5.26. Исследуйте на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 6xy + 8.$$

Решение. Найдем частные производные:

$$z'_x = 3x^2 - 6y, \quad z'_y = 3y^2 - 6x.$$

Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0. \end{cases}$$

После сокращения на 3 получим
$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $y = \frac{x^2}{2}$. Подставляя его во второе уравнение, получим $\frac{x^4}{4} - 2x = 0$, или $x^4 - 8x = 0$, $x(x^3 - 8) = 0$.

Из последнего уравнения следует, что $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Подставляя эти значения x в равенство $y = \frac{x^2}{2}$, получаем $y_1 = 0$, $y_2 = 2$. Таким образом, получены две стационарные точки: $M_1(0; 0)$, $M_2(2; 2)$.

Далее для каждой стационарной точки определим число $\Delta = AC - B^2$. С этой целью находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 6y)'_x = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 6y)'_y = -6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3y^2 - 6x)'_y = 6y.$$

Найдем значения частных производных второго порядка в точках $M_1(0; 0)$, $M_2(2; 2)$:

$$A_1 = 6x|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \quad B_1 = -6, \quad C_1 = 6y|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

Тогда $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = -36 < 0$. Следовательно, в точке $M_1(0; 0)$ функция экстремума не имеет:

$$A_2 = 6x|_{\substack{x=2 \\ y=2}} = 12, \quad B_2 = -6, \quad C_2 = 6y|_{\substack{x=2 \\ y=2}} = 12;$$

$$\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 12 \cdot 12 - 36 = 108 > 0.$$

Следовательно, в точке $M_2(2; 2)$ экстремум есть, причем минимум, так как $A_2 = 12 > 0$. Значение функции в точке минимума

$$z_{\min}(2, 2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 + 8 = 0.$$

5.8. Условный экстремум

На практике в ряде случаев приходится иметь дело с исследованием на экстремум функций нескольких переменных при наличии определенных условий, связывающих эти переменные. Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$ при условии, что x и y связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0$ — *уравнением связи*. Обозначим через D множество $\{(x, y) : \varphi(x, y) = 0\}$. Точка $M_0(x_0; y_0) \in D$ называется *точкой условного минимума функции* $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки $M_0(x_0; y_0) \in D$ $U(M_0)$, что для всех точек $M(x, y) \in U(M_0) \cap D$, отличных от M_0 , выполняется неравенство $f(M_0) < f(M)$.

Аналогично определяется *точка условного максимума*, только заключительное неравенство имеет вид $f(M_0) > f(M)$. Точки условного максимума или минимума называются *точками условного экстремума функции* $z = f(x, y)$, при этом говорят, что функция имеет в этих точках *условный экстремум*.

При наличии условия $\varphi(x, y) = 0$ из переменных x и y лишь одна независимая, а вторая определяется из этого условия. Если разрешить условие относительно y и подставить в функцию $z = f(x, y)$ вместо y найденное выражение, получим z как функцию одного переменного x . Таким приемом часто пользуются при решении задач. Однако бывают случаи, когда выразить y из условия $\varphi(x, y) = 0$ затруднительно или вообще невозможно. В этом случае пользуются *методом множителей Лагранжа*.

Необходимое условие условного экстремума. Пусть необходимо исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y)$ при наличии условия $\varphi(x, y) = 0$. Введем вспомогательную функцию, называемую *функцией Лагранжа*:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ существует условный экстремум функции $z = f(x, y)$, то координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 0, \\ F'_y(x, y, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Первое достаточное условие существования условного экстремума. Решения системы (5.8), если они существуют, являются критическими точками на условный экстремум. Пусть $(x_0; y_0; \lambda_0)$ — критическая точка. Тогда один из методов проверки критической точки на условный экстремум следующий. Находим частные производные первого порядка функции $\varphi(x, y)$,

частные производные второго порядка функции Лагранжа $F(x, y, \lambda)$. Далее вычисляем их значения в точке $(x_0; y_0; \lambda_0)$ и составляем из полученных значений определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Если значение определителя $\Delta > 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет условный максимум, если $\Delta < 0$ — условный минимум.

Второе достаточное условие существования условного экстремума. Данный метод сводится к проверке знака выражения второго дифференциала (дифференциала второго порядка) функции Лагранжа и состоит в следующем. Находим частные производные второго порядка функции Лагранжа $F(x, y, \lambda)$ и их значения в стационарной точке. Подставляем эти значения в формулу второго дифференциала $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$ для значений x, y и λ , полученных из системы (5.8), при условии, что dx и dy связаны уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Функция $z = f(x, y)$ имеет условный максимум, если $d^2F < 0$, и условный минимум, если $d^2F > 0$.

Пример 5.27. Найдите условные экстремумы функции двух переменных $z = xy$, выражающей площадь прямоугольника через его стороны x и y при условии $2x + 2y = 100$, означающем, что существует цепь, которой можно ограничить этот прямоугольник, и ее длина равна 100.

Решение. Приведем уравнение условия связи к виду с нулем в правой части: $2x + 2y - 100 = 0$ — и составим функцию Лагранжа:

$$F(x, y) = xy + \lambda(2x + 2y - 100).$$

Составляем систему (5.8) уравнений из равенств частных производных нулю и уравнения условия связи (необходимый признак существования условного экстремума). Решения этой системы уравнений являются точками возможного условного экстремума — стационарными (критическими) точками. Система уравнений (5.8) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} x + 2\lambda = 0, \\ y + 2\lambda = 0, \\ 2x + 2y - 100 = 0. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений выразим соответственно x и y :
 $x = -2\lambda$, $y = -2\lambda$. Подставим эти выражения в третье уравнение и найдем значение множителя Лагранжа:

$$-4\lambda - 4\lambda = 100, \quad -8\lambda = 100, \quad \lambda = -12,5.$$

Подставим теперь значение множителя Лагранжа в выражения x и y и найдем значения переменных исходной функции:

$$x = -2(-12,5) = 25, \quad y = -2(-12,5) = 25.$$

Эти значения являются также координатами стационарной точки $M_0(25; 25)$. Чтобы определить, минимумом или максимумом является условный экстремум, нужно найти второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$, и в полученном выражении подставить вместо λ ее значения (значения множителя Лагранжа), найденные ранее.

Найдем второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2F = 0 + 2 \cdot 1 \cdot dxdy + 0 = 2dxdy$. Поскольку первая и третья составляющие равны нулю, нам не придется подставлять в них значения множителя Лагранжа, однако нужно найти отношения между дифференциалами dx и dy : $2x = -2y + 100$, $x = -y + 50$, $dx = -dy$. Полученные значения противоположны по знаку, значит, величина $2dxdy < 0$.

Теперь можем найти значение условного экстремума исходной функции, являющееся максимумом: $z_{\max} = 25 \cdot 25 = 625$. Это заданная исходной функцией максимальная площадь прямоугольника, который можно ограничить цепью длиной 100.

Пример 5.28. Найдите экстремумы функции $z = 9 - 8x - 6y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 25$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Находим ее частные производные по x и y :

$$F'_x = -8 + 2\lambda x, \quad F'_y = -6 + 2\lambda y.$$

Система уравнений (5.8) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0, \\ -6 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda x - 4 = 0, \\ \lambda y - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим два множества значений: $\lambda_1 = 1$, $x_1 = 4$, $y_1 = 3$; $\lambda_2 = -1$, $x_2 = -4$, $y_2 = -3$.

Находим вторые частные производные: $F''_{xx} = 2\lambda$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 2\lambda$, откуда $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$. Поскольку $d^2F > 0$ при $\lambda_1 = 1$, то функция z имеет условный минимум в точке $M_1(4; 3)$. Поскольку $d^2F < 0$ при $\lambda_2 = -1$, то функция z имеет условный максимум в точке $M_2(-4; -3)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} z_{\min} &= \min f(x, y) = f(4, 3) = 9 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = -41, \\ z_{\max} &= \max f(x, y) = f(-4, -3) = 9 - 8(-4) - 6(-3) = 59. \end{aligned}$$

5.9. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области

Непрерывная функция двух переменных $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Чтобы найти эти наибольшее и наименьшее значения в ограниченной замкнутой области G , следует:

- найти все критические точки функции $z = f(x, y)$, принадлежащие области G ;
- найти все стационарные точки условного экстремума на границах области G ;
- вычислить значения функции $z = f(x, y)$ во всех найденных ранее точках, а также в точках пересечения границ области G .

Самое большое из найденных значений функции $z = f(x, y)$ будет наибольшим значением этой функции в области G . Соответственно, наименьшим значением функции $z = f(x, y)$ в области G будет наименьшее из найденных значений функции.

Пример 5.29. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$.

Решение. Представим указанную область графически (рис. 5.7). Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, могут находиться как внутри области, так и на ее границе.

1. Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то в этой точке частные производные $z'_x = 2x + 4y - 6$ и $z'_y = -4y + 4x$ должны обращаться в нуль. Найдем стационарные точки,

решая систему
$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Имеем одну точку $M_1(1; 1)$, которая находится внутри заданной области. В точке M_1 значение функции будет следующим:

$$z(M_1) = z(1, 1) = 1^2 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 1 - 1 = -4.$$

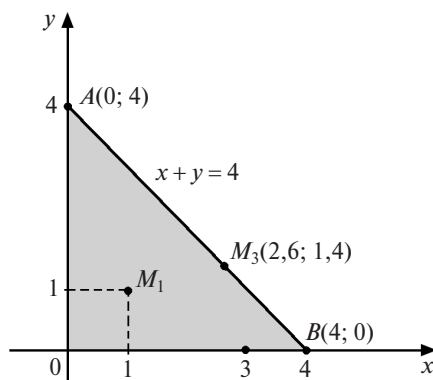


Рис. 5.7

2. Перейдем к исследованию функции на границах области:

а) на отрезке OA : $x = 0$, $0 \leq y \leq 4$, $z = -2y^2 - 1 = z(y)$. Задача сводится к отысканию стационарной точки функции одного аргумента на отрезке $[0; 4]$. Находим производную $z'_y = -4y$. Решаем уравнение $z'_y = 0$, откуда получаем: $y = 0$. На отрезке OA находится одна стационарная точка $O(0; 0)$. Находим значение функции z в этой точке: $z(0) = -1$;

б) на отрезке OB : $y = 0$, $0 \leq x \leq 4$, $z = x^2 - 6x - 1 = z(x)$. Находим $z'_x = 2x - 6$, $z'_x = 0$ при $x = 3$. Получили стационарную точку $M_2(3; 0)$ на отрезке OB . Значение функции z в этой точке: $z(M_2) = z(3, 0) = -10$;

в) на отрезке AB : $x + y = 4$, или $y = 4 - x$, где $0 \leq x \leq 4$. В этом случае получаем функцию одной переменной:

$$z = x^2 - 2(4 - x)^2 + 4x(4 - x) - 6x - 1 = -5x^2 + 26x - 33 = z(x).$$

Ее исследование на экстремум дает $z'_x = -10x + 26$, далее $z'_x = 0$, откуда $x = 2,6$, тогда $y = 1,4$. Таким образом, на отрезке AB имеем стационарную точку $M_3(2,6; 1,4)$. Значение функции z в точке M_3 будет $z(M_3) = z(2,6; 1,4) = 0,8$.

3. Вычислим значение функции $z(x, y)$ в точках пересечения границ O, A, B . В точке $O(0; 0)$ расчет уже произведен, $z(A) = z(0, 4) = -33$; $z(B) = z(4, 0) = -9$.

Из всех полученных нами значений функции в стационарных точках $z(M_1) = -4$, $z(0) = -1$, $z(M_2) = -10$, $z(M_3) = 0,8$ и в точках пересечения границ области $z(A) = -33$, $z(B) = -9$ выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z_{\text{наиб}} = z(M_3) = z(2,6; 1,4) = 0,8;$$

$$z_{\text{наим}} = z(A) = z(0, 4) = -33.$$

Пример 5.30. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 7x - 13y + 3$ в области $x^2 + y^2 \leq 64$, $y \leq x$.

Решение.

1. Для отыскания стационарных точек заданной функции нужно составить и решить систему

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 7 \neq 0, \\ z'_y = -13 \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку частные производные заданной функции в нуль не обращаются, то функция стационарных точек не имеет.

2. Исследуем функцию на границах области (рис. 5.8):

а) на отрезке AB : $y = x$; имеем $z = 7x - 13x + 3 = -6x + 3 = z(x)$, $z'_x = -6 \neq 0$. На прямой AB производная в нуль не обращается, значит, функция не имеет на этой прямой стационарных точек;

б) для исследования функции на окружности $x^2 + y^2 = 64$ используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\phi(x, y) = 7x - 13y + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 64)$.

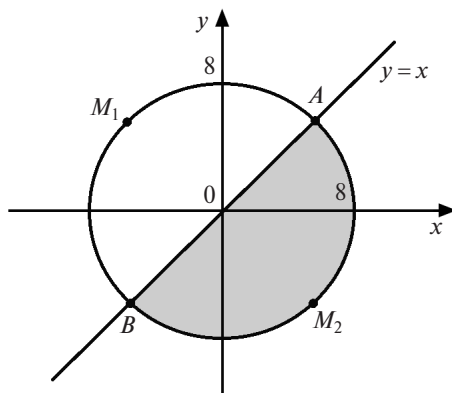


Рис. 5.8

Для нахождения стационарных точек необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 + 2\lambda x = 0, \\ -13 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 64. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений найдем $x = -\frac{7}{2\lambda}$, $y = \frac{13}{2\lambda}$. Полученные значения подставим в третье уравнение: $\frac{49}{4\lambda^2} + \frac{169}{4\lambda^2} = 64 \Rightarrow 256\lambda^2 = 218 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{218}{256} \approx 0,852$, откуда $\lambda \approx \pm 0,923$. Получили две стационарные точки на окружности. При $\lambda_1 = 0,923$ находим: $x_1 = -3,79$, $y_1 = 7,04$. Точка $M_1(-3,79; 7,04)$ не принадлежит заданной области (см. рис. 5.8). Значению $\lambda_2 = -0,923$ соответствуют $x_2 = 3,79$, $y_2 = -7,04$. Точка $M_2(3,79; -7,04)$ принадлежит заданной области. Вычислим значение функции z в этой точке: $z(M_2) = z(3,79; -7,04) = 121,05 \approx 121$.

3. Вычислим значения функции в точках пересечения границ $x^2 + y^2 = 64$ и $y = x$: $x^2 + x^2 = 64$, откуда $x^2 = 32$, или $x = \pm\sqrt{32} \approx \pm 5,66$. В точке $A(5,66; 5,66)$ $z(A) = -30,96 \approx -31,0$. В точке $B(-5,66; -5,66)$ $z(B) = 36,96 \approx 37,0$. Нашли одну стационарную точку M_2 : $z(M_2) = 121$, и вычислили функцию в двух «угловых» точках: $z(A) \approx -31,0$; $z(B) \approx 37,0$. Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее. Таким образом, получаем

$$z_{\text{наиб}} = z(M_2) = z(3,79; -7,04) = 121;$$

$$z_{\text{наим}} = z(A) = z(5,66; 5,66) = -31,0.$$

5.10. Производная в данном направлении. Градиент функции

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\vec{l} = \overline{MM_1}$ называется $\lim_{|\overline{MM_1}| \rightarrow 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|\overline{MM_1}|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\rho} = \frac{\partial z}{\partial l}$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$, где α, β — углы, образованные вектором $\vec{l} = \overline{MM_1}$ с осями Ox и Oy . Производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ показывает скорость изменения функции z в направлении вектора $\vec{l}$.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор, выходящий из точки $M(x, y)$ и имеющий своими координатами частные производные функции: $\text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$.

Аналогично определяется понятие производной по направлению и градиента для функции трех и более переменных. Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная в данном направлении вычисляется по формуле $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, где α, β, γ — углы, образованные вектором $\vec{l} = \overline{MM_1}$ с осями Ox, Oy, Oz ; градиент — по формуле

$$\overline{\text{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Градиент функции и производная в направлении вектора $\vec{l}$ связаны формулой $\frac{\partial z}{\partial l} = np_l \overline{\text{grad} z}$. Градиент указывает направление наибо́льшего роста функции в данной точке.

Пример 5.31. Вычислите производную функции $z = 2x^2 + xy$ в точке $M(-1; 2)$ в направлении вектора $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ и градиент.

Решение. Найдем значение частных производных в точке $M(-1; 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x + y) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2}} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2}} = -1.$$

Вычислим направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M(-1, 2)} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M(-1, 2)} \cdot \cos \beta = \\ &= -2 \cdot \frac{3}{5} + (-1) \cdot \frac{4}{5} = -2. \end{aligned}$$

$$\overline{\text{grad} z} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M(-1, 2)} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M(-1, 2)} \cdot \vec{j} = -2\vec{i} - \vec{j}.$$

5.11. Метод наименьших квадратов

В различных сферах научной и практической деятельности используются эмпирические формулы, полученные на основе опытов и наблюдений. Один из математически обоснованных способов получения таких формул — *метод наименьших квадратов*. Далее изложим этот метод для случая линейной зависимости двух величин.

Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y , например между ценой нефти и индексами акций нефтяных компаний в определенный промежуток времени. Соответствующие наблюдения сводим в таблицу:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

В дальнейшем величины x и y будем рассматривать как прямоугольные координаты точек на плоскости. Пары (x_i, y_i) можно изобразить точками на координатной плоскости Oxy ($i = 1, 2, \dots, n$). Поскольку рассматривается случай линейной зависимости y от x , то можно допустить, что точки

$$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$$

расположены почти на некоторой прямой (рис. 5.9).

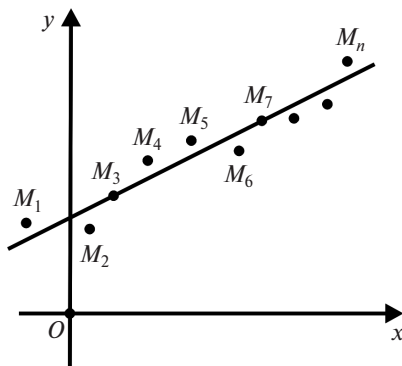


Рис. 5.9

Необходимо так подобрать параметры a и b , чтобы линейное уравнение $y = a + bx$ наилучшим образом описывало зависимость y от x .

Разность между точными значениями функции $y = ax + b$ в точке x_i и соответствующим значением y_i из таблицы будем называть *отклонением*

(уклонением) и обозначать через ε_i , т. е. $\varepsilon_i = ax_i + b - y_i$. Сумма квадратов уклонений есть функция величин a и b , т. е. $u(a, b) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$.

Метод наименьших квадратов основан на принципе нахождения неизвестных величин a и b из условия минимизации функции двух независимых переменных $u(a, b)$. Согласно методу исследования таких функций на локальные экстремумы (см. п. 5.7) на первом шаге находим частные производные функции $u(a, b)$ по переменным a и b и приравниваем их к нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = \\ &= 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2bn - 2 \sum_{i=1}^n y_i = 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (5.9)$$

Это окончательный вид так называемой *нормальной системы* метода наименьших квадратов. Легко показать, что система (5.9) имеет единственное решение. Для этого достаточно проанализировать определитель второго порядка при неизвестных a и b . Пусть $a = a_*$, $b = b_*$ – решение системы (5.9). Тогда, используя достаточные условия существования экстремума функции двух переменных (см. п. 5.7), можно доказать, что при $a = a_*$, $b = b_*$ функция $u(a, b)$ достигает минимума. Следовательно, линейная функция $y = a_*x + b_*$ является эмпирической формулой.

По аналогии можно получить эмпирические формулы для квадратичной и других видов функций.

В случае $y = ax^2 + bx + c$ по аналогии с линейной функцией составляем функцию $F(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min$.

Найдя частные производные и приравняв их к нулю, после преобразования получим *линейную систему* трех уравнений с тремя неизвестными a, b, c :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (5.10)$$

Можно доказать, что определитель системы (5.10) не равен нулю, следовательно, система имеет единственное решение.

Аналогично определяются значения параметров других функций.

Пусть $y = a \lg x + b$. Тогда, произведя замену $\lg x = t$, получим линейную функцию $y = at + b$, для которой способ нахождения неизвестных параметров a, b рассмотрен в п. 5.9.

Если $y = \frac{a}{x} + b$, то сделаем замену $\frac{1}{x} = t$ и снова получим линейную функцию $y = at + b$.

При $y = ax^b$, $a > 0$, прологарифмируем обе части равенства. Получим $\lg y = \lg a + b \lg x$. Сделаем замену: $\lg y = z$, $\lg x = t$, и придем к линейной функции $z = bt + \lg a$.

Аналогично при $y = ab^x$, $a > 0$, $\lg y = \lg a + x \lg b$, $\lg y = z$. Тогда $z = \lg b \cdot x + \lg a$.

Эмпирические формулы, полученные в результате обработки экспериментальных и статистических данных по методу наименьших квадратов, позволяют решать задачи прогнозирования, машинного обучения, обучения искусственных нейронных сетей и др.

Пример 5.32. Результаты измерений величин x и y приведены в следующей таблице:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	4	3,6	3	2,4	2	1,7

Установите вид зависимости между этими величинами методом наименьших квадратов.

Решение. Построим точки $M_1(1; 4)$, $M_2(2; 3,6)$, $M_3(3; 3)$, $M_4(4; 2,4)$, $M_5(5; 2)$, $M_6(6; 1,7)$ на координатной плоскости Oxy (рис. 5.10). Из чертежа видно, что эти точки располагаются приблизительно на некоторой прямой.

Следовательно, можно предположить, что между величинами x и y существует линейная зависимость, уравнение которой может быть записано в виде $y = a + bx$, где a и b — неизвестные параметры, подлежащие определению.

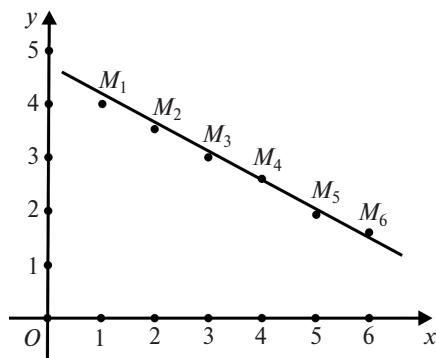


Рис. 5.10

Определим параметры a и b , решая систему (5.9). Для этого подсчитаем необходимые суммы, записывая результаты в таблицу:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	4	4	1
2	2	3,6	7,2	4
3	3	3	9	9
4	4	2,4	9,6	16
5	5	2	10	25
6	6	1,7	10,2	36
Σ	21	16,7	50	91

Полагая, что $n = 6$, находим

$$b = \frac{6 \cdot 50 - 21 \cdot 16,7}{6 \cdot 91 - 21^2} = -0,483;$$

$$a = \frac{1}{6} \cdot 16,7 - \frac{1}{6} \cdot 21 \cdot (-0,483) = 4,473.$$

Следовательно, зависимость между величинами x и y выражается приближенной формулой $y = 4,473 - 0,483x$.

Задачи

1. Найдите область определения функции:

1) $z = x + 2y + 3$;

4) $z = \sqrt{2xy}$;

2) $z = \frac{3}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$;

5) $z = \operatorname{tg} xy$;

3) $z = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

6) $u = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$.

Ответ: 1) все точки координатной плоскости Oxy ; 2) все точки плоскости Oxy , лежащие внутри окружности $x^2 + y^2 = 25$, исключая точки этой окружности; 3) все точки плоскости Oxy , где $x = y \neq 0$; 4) $xy > 0$ (I и III четверти координатной плоскости Oxy); 5) все точки плоскости Oxy , где $xy \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (k — целое число); 6) $x^2 - y^2 + z^2 > 0$ (все точки $\mathbf{R}^3$, лежащие вне конической поверхности).

2. Постройте линии уровня следующих функций:

1) $z = x + y$;

3) $z = \frac{1}{x^2 + 9y^2}$;

2) $z = 16x^2 - 9y^2$;

4) $z^2 = xy$.

3. Найдите предел следующих функций:

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$;

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow e^3 \\ y \rightarrow 0}} \ln(x^3 + y^2)$;

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{x + y}$;

5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sin(5xy)}$;

3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{5 - \sqrt{25 - xy}}$;

6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}^2 2y - \sin 2x}{\sqrt{16 + \sin 2x} - \operatorname{tg}^2 2y - 4}$.

Ответ: 1) 3; 2) не существует; 3) 10; 4) 9; 5) 1/5; 6) -8.

4. Найдите точки разрыва функций:

1) $z = \frac{1}{(x+1)^2 + (y-3)^2}$;

3) $u = \frac{2}{x^2 + y^2 - z}$;

2) $z = \frac{x^2 + y^2 - 3y}{x + y}$;

4) $u = \frac{2}{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$.

Ответ: 1) $x = -1$, $y = 3$; 2) все точки, лежащие на прямой $y = -x$; 3) все точки $\mathbf{R}^3$, лежащие на эллиптическом параболоиде $z = x^2 + y^2$; 4) $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$.

5. Найдите частные производные первого порядка следующих функций:

$$1) z = x^2 + y^2 - 5xy + 3x - 2y + 1; \quad 5) z = \sin^2(x \cos^2 y + y \sin^2 x);$$

$$2) z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad 6) z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy};$$

$$3) z = x^2 \sin(x + 5y); \quad 7) z = (x^3 + y^3 - xy^2)^3;$$

$$4) z = \arcsin \frac{y}{x}; \quad 8) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Ответ: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3 + 2x - 5y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2 - 5x + 2y$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

$$3) \frac{\partial z}{\partial x} = x^2 \cos(x + 5y) + 2x \sin(x + 5y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 \cos(x + 5y); \quad 4) \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\frac{1}{y^2 - x^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sqrt{\frac{x^2}{y^2(y^2 - x^2)}}, \quad 5) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(1 + \cos(2y) + 2y \sin(2x)) \sin(2(x \cos^2(y) + y \sin^2(x))),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = y(\sin^2(x) - x \sin(2y)) \sin(x + y - y \cos(2x) + x \cos(2y)); \quad 6) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2}; \quad 7) \frac{\partial z}{\partial x} = 3(3x^2 - y^2)(x^3 - xy^2 + y^3)^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y(-2x + 3y)(x^3 - xy^2 + y^3)^2;$$

$$8) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{y^2 + x(x + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

6. Найдите частные производные второго порядка следующих функций:

$$1) z = x^3 + y^3 + x^2 y^2 + 1;$$

$$4) z = e^{x^3 y^4};$$

$$2) z = \cos(3x + 2y);$$

$$5) z = \sin(2x - 3y);$$

$$3) z = \frac{x^4 + 4}{y + 5};$$

$$6) z = e^x \ln y + e^y \ln x.$$

Ответ: 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 + 6y$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$

$$= -9 \cos(3x + 2y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6 \cos(3x + 2y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 \cos(3x + 2y); \quad 3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{12x^2}{5 + y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{4x^3}{(5 + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(4 + x^4)}{(5 + y)^3}; \quad 4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3e^{x^3 y^4} x y^4 (2 + 3x^3 y^4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12e^{x^3 y^4} x^2 y^3 (1 + x^3 y^4), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4e^{x^3 y^4} x^3 y^2 (3 + 4x^3 y^4); \quad 5) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= -4\sin(2x - 3y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6\sin(2x - 3y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9\sin(2x - 3y); 6) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{e^y}{x^2} + e^x \ln y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{e^y}{x} + \frac{e^x}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} + e^y \ln x.$$

7. Найдите частные производные третьего порядка от указанных функций:

1) $z = x^3 + y^3$; 3) $u = xyz$;

2) $z = x^4 - y^4$; 4) $z = e^{xy}$.

Ответ: 1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 6$; 2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dots = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 0$; 3) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dots = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$; 4) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y^3 e^{xy}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dots = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = e^{xy} y(2 + xy)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^3 e^{xy}$.

8. Покажите, что функция $z = f(x, y)$ удовлетворяет указанным уравнениям:

1) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

2) $z = e^{-\cos(x+3y)}$, $9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

3) $z = \frac{y}{x}$, $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

4) $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Найдите полные дифференциалы следующих функций:

1) $z = y \ln 2x$; 3) $z = x^3 + xy^2 + x^2 y$;

2) $u = \frac{xy}{z}$; 4) $z = e^{x^2 - y^2}$.

Ответ: 1) $dz = \frac{y}{x} dx + \ln(2x) dy$; 2) $du = \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz$; 3) $dz = (3x^2 + y^2 + 2xy) dx + (2xy + x^2) dy$; 4) $dz = 2e^{x^2 - y^2} (x dx - y dy)$.

10. Найдите полный дифференциал второго порядка от указанных функций:

1) $z = \ln xy$;

2) $z = x^2 y$;

$$3) z = \cos(x + y);$$

$$4) z = e^{x+y}.$$

$$\text{Ответ: } 1) d^2z = \frac{1}{x^2} dx^2 - \frac{1}{y^2} dy^2; \quad 2) d^2z = 2y dx^2 + 2x dx dy; \quad 3) d^2z =$$

$$= -\cos(x + y)(dx^2 + dx dy + dy^2); \quad 4) e^{x+y}(dx^2 + dx dy + dy^2).$$

11. Вычислите приближенно данные выражения, заменив приращения соответствующих функций их полными дифференциалами:

$$1) 1,08^{3,96}; \quad 3) \sqrt{(4,05)^2 + (2,95)^2};$$

$$2) \frac{\sin 1,49 \cdot \arctg 0,07}{2^{2,95}}; \quad 4) (1,02)^3 \cdot (0,97)^3.$$

$$\text{Ответ: } 1) 1,32; \quad 2) 0,01; \quad 3) 5,01; \quad 4) 1,00.$$

12. Найдите производные сложных функций:

$$1) u = e^{z-2y}, \quad z = \sin x, \quad y = x^3; \quad \text{найдите } \frac{du}{dx};$$

$$2) z = e^{x^2+y^2}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad \text{найдите } \frac{dz}{dt};$$

$$3) z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, \quad y = 2x + 3; \quad \text{найдите } \frac{dz}{dx};$$

$$4) z = x^2 + y^2, \quad x = u + v, \quad y = u - v; \quad \text{найдите } \frac{\partial z}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\text{Ответ: } 1) \frac{du}{dx} = e^{z-2y}(\cos x - 6x^2); \quad 2) \frac{dz}{dt} = 2e^{x^2+y^2}(-x \sin t + y \cos t); \quad 3) \frac{dz}{dx} = \frac{4x(y-x)}{(x^2+y)^2}; \quad 4) \frac{\partial z}{\partial u} = 2x + 2y; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2x - 2y.$$

13. Вычислите значение производной сложной функции $u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$, с точностью до двух знаков после запятой:

$$1) u = x^2 e^y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \pi;$$

$$2) u = \ln(e^x + e^{-y}), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1;$$

$$3) u = \arcsin \frac{x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi.$$

$$\text{Ответ: } 1) -1; \quad 2) -2,5; \quad 3) 1.$$

14. Найдите производные неявных функций:

$$1) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}; \quad \text{найдите } \frac{dy}{dx};$$

$$2) \cos(x + y) + y = 0; \quad \text{найдите } \frac{dy}{dx};$$

3) $x \sin x + \cos 2y = \cos y$; найдите $y' \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$;

4) $x + y + z = e^z$; найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ответ: 1) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$; 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}$; 3) -1 ; 4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^z - 1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 1}$.

15. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

1) $S: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, M_0(1; -1; 1)$;

2) $S: 2z = x^2 - y^2, M_0(3; 1; 4)$;

3) $S: z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4, M_0(-1; 0; 1)$;

4) $S: x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, M_0(1; 2; -1)$;

5) $S: xyz^2 + 2y^2 + 3yz + 4 = 0, M_0(0; 2; -2)$.

Ответ: 1) $x - 2y + 3z - 6 = 0, \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$; 2) $3x - y - z - 4 = 0, \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-1}$; 3) $6x + y + z - 7 = 0, \frac{x+1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$; 4) $x + 11y + 5z - 18 = 0, \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$; 5) $4x + y + 3z + 4 = 0, \frac{x}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{3}$.

16. Исследуйте на экстремум следующие функции:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;

4) $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x + 1$;

2) $z = x^3 + xy^2 + 12xy$;

5) $z = y\sqrt{x} + 2x + y^2 + 7y + 4$;

3) $z = x^3 + xy^2 + 12xy$;

6) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Ответ: 1) $z_{\min}(1, 4) = -21$; 2) $z_{\min}(3, -3) = -54, z_{\max}(-3, -3) = 54$; 3) $z_{\min}(1, -2) = 5$; 4) $z_{\max}(4, -2) = 13$; 5) $z_{\min}(1, -4) = -20$; 6) $z_{\min}(2, 1) = -28, z_{\max}(-2, -1) = 28$.

17. Найдите условный экстремум следующих функций:

1) $z = xy$, если $2x + 3y - 5 = 0$; 3) $z = 16 - 10x - 24y$, если $x^2 + y^2 = 169$;

2) $z = x^2 + y^2$, если $3x + 4y = 12$; 4) $z = x^2 - y^2$, если $x + 2y = 6$.

Ответ: 1) $z_{\max}\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$; 2) $z_{\min}\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right) = \frac{144}{25}$; 3) $z_{\min}(5, 12) = -322$,

$z_{\max}(-5, -12) = 354$; 4) $z_{\min}(-2, 4) = -12$.

18. Найдите наибольшую площадь прямоугольника с данным периметром $2p$.

Ответ: $p^2/4$.

19. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найдите такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Ответ: равнобедренный.

20. Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда, имеющего при данной полной поверхности S максимальный объем.

Ответ: $x = y = z = a, a = \sqrt[3]{\frac{S}{6}}$.

21. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих сумму трех измерений, равную положительной постоянной a , найдите тот, объем которого наибольший.

Ответ: $x = y = z = \frac{a}{3}$ (куб).

22. Найдите экстремальные значения функции в указанных областях:

- 1) $z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 \leq 4$; 3) $z = x^2 + 3y^2 + x - y; x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1$;
2) $z = xy; x^2 + y^2 \leq 1$; 4) $z = 1 + 2x + 3y; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$.

Ответ: 1) $z_{\text{наиб}} = z(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = z(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4, z_{\text{наим}} = z(0, 0) = 0$; 2) $z_{\text{наиб}} = z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = z\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}, z_{\text{наим}} = z\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = z\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$;

3) $z_{\text{наиб}} = z(1, 1) = 4, z_{\text{наим}} = z(0, 5; 0, 5) = 1$; 4) $z_{\text{наиб}} = z(0, 6) = 19, z_{\text{наим}} = z(0, 0) = 1$.

23. Вычислите производную функции $z = x^2 + 2xy - y^2$ в точке $M(1; -2)$ в направлении вектора $\vec{l} = 8\vec{i} + 15\vec{j}$ и градиент.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{104}{17}, \overline{\text{grad} z} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$.

24. Вычислите производную функции $u = 2x^2 - y^2 + z$ в точке $M(3; 6; 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и градиент.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{1}{3}, \overline{\text{grad} u} = 12\vec{i} - 12\vec{j} + \vec{k}$.

25. Вычислите производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M(1; 2; 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{7}{9}, \overline{\text{grad} u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$.

26. Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	-2	-1	0	1	4	2
y_i	5	4	1	2	2,5	1,5

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, способом наименьших квадратов определите a, b и запишите эмпирическую формулу.

Ответ: $y = -0,4x + 2,867$.

27. В таблице приведены результаты наблюдений за ценами на нефть x (усл. ед.) и индексами акций нефтяных компаний y (усл. ед.):

x	46	44	48	60	52
y	105	100	104	130	111

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, постройте способом наименьших квадратов эмпирическую формулу. Используя полученную формулу, сделайте вывод о связи между ценами на нефть и индексами акций.

Ответ: $y = -1,838x + 18,125$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите пределы:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^3 - y}{x^2 + y^2};$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^4 + y^4};$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^3 - y^3}{x - y};$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{\operatorname{tg} xy}{x}.$$

2. Найдите частные производные первого порядка следующих функций:

$$1) z = x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 5y - 8; \quad 3) z = \frac{x - y}{x + y};$$

$$2) z = x^2 \cos(x + 3y); \quad 4) z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

3. Найдите значения частных производных первого порядка функции

$$z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}} \text{ в точке } M_0(1; 1).$$

4. Найдите полный дифференциал первого порядка функции $z = \ln(xy)$.

5. Найдите частные производные второго порядка следующих функций:

$$1) z = x^3 + y^3 - x^2y + xy^2;$$

$$2) z = e^x \ln y;$$

$$3) z = \sin(x^2 + y^2).$$

$$6. \text{ Найдите } \frac{dz}{dt}, \text{ если } z = \ln(4 + x^2 + y^2), \quad x = t^2 + 1, \quad y = t^3.$$

$$7. \text{ Найдите } \frac{\partial z}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v}, \text{ если } z = \frac{x^2}{y}, \quad x = u - 2v, \quad y = 2u + v.$$

8. Найдите частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

9. Исследуйте на экстремум следующие функции:

1) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

2) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

10. Реакция на инъекцию x ед. лекарственного препарата описывается функцией $y = x^2(a - x)te^{-t}$, где t выражается в часах с момента инъекции. Определите, когда при заданной дозе лекарства реакция достигнет максимума.

11. В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x , y и z . Скорость реакции v в любой момент времени выражается законом $v = kx^2yz$, где $k > 0$. Найдите концентрации x , y и z , при которых скорость течения реакции максимальна.

12. Найдите размеры открытого прямоугольного бассейна объемом $V = 32 \text{ м}^3$, на облицовку которого нужно затратить минимум материала.

13. Найдите экстремумы функции $z = 8 - 2x - 4y$ при условии, что $x^2 + 2y^2 = 12$.

14. Имеются данные о внесении минеральных удобрений и урожае сахарной свеклы с гектара за 5 лет:

Год	Количество минеральных удобрений, ц	Урожай с 1 га, т
2017	4	20
2018	5	24
2019	6	29
2020	8	35
2021	9	50

Предполагая линейную зависимость урожайности от количества внесенных удобрений вида $y = ax + b$, найдите по этим данным параметры a и b при помощи метода наименьших квадратов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производные различных порядков. Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Выделяют *обыкновенные* дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями одной переменной, и дифференциальные уравнения *в частных производных*, в которых неизвестные функции являются функциями двух и большего числа переменных. Далее будут рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка в общем виде можно записать следующим образом:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6.1)$$

где x — независимая переменная; $y = y(x)$ — искомая функция; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ — ее производные.

Если уравнение (6.1) можно разрешить относительно производной наивысшего порядка, то получаем уравнение в нормальной форме:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (6.2)$$

Замечание 6.1. С учетом того факта, что

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка может быть записано в виде соотношения между независимой переменной x , искомой функцией y и их дифференциалами.

Решением дифференциального уравнения (6.1) (или (6.2)) называется такая действительная функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале $(a; b)$, которая вместе со своими производными обращает данное

уравнение в тождество. При этом производные функции $y = y(x)$ предполагаются существующими.

Примером обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка может служить уравнение $y' - 5y = x$; второго порядка — $y'' - 4y' + 4y = 0$; третьего порядка — $y''' - xy' = 0$.

Пример 6.1. Докажите, что функция $y = xe^{2x}$, определенная на всей числовой прямой, является решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Подставим в данное уравнение функцию и ее производные $y' = e^{2x}(1 + 2x)$, $y'' = 4e^{2x}(1 + x)$, получим тождество $4e^{2x}(1 + x) - 4e^{2x}(1 + 2x) + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(1 + x - 1 - 2x + x) \equiv 0$.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях дифференциальное уравнение (6.2) имеет решение, притом единственное, дает теорема Коши о существовании и единственности решения.

Теорема 6.1 (Коши). Если правая часть уравнения (6.2) является непрерывной функцией в окрестности значений

$$x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, \quad (6.3)$$

то уравнение (6.2) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале $(a; b)$, содержащем x_0 такое, что

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (6.4)$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то $y = y(x)$ — единственное решение.

Числа из совокупности (6.3) называются *начальными данными*, а равенства (6.4) — *начальными условиями*.

Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка формулируется следующим образом: найдите решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (6.1) или (6.2), удовлетворяющее начальным данным (6.3), т. е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (6.4).

Любое дифференциальное уравнение (6.2) в области, удовлетворяющей теореме Коши, имеет бесконечное множество решений. Это справедливо и для дифференциального уравнения (6.1). Для описания этих множеств решений вводится понятие общего решения.

Общим решением дифференциального уравнения (6.1) или (6.2) называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ или — в краткой форме — $y = \varphi(x, C_i)$ (где C_i ($i = 1, n$) — произвольные постоянные), удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция является решением дифференциального уравнения (6.1) или (6.2) при любых значениях C_i ($i = \overline{1, n}$);

2) для любых начальных данных $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{i0}$ ($i = \overline{1, n}$) такие, что будут выполнены начальные условия: $\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0, \varphi'(x_0, C_{i0}) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0^{(n-1)}$.

Общее решение $\Phi(x, y, C_i) = 0$ ($i = \overline{1, n}$), полученное в неявном виде, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i ($i = \overline{1, n}$), называются соответственно *частным решением* или *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Замечание 6.2. У дифференциального уравнения может существовать решение (интеграл), которое невозможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных C_i ($i = \overline{1, n}$). Такое решение (интеграл) называют *особым*.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad (6.5)$$

связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную y' .

Если уравнение (6.5) можно разрешить относительно y' , то его записывают в виде

$$y' = f(x, y) \quad (6.6)$$

и называют дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. В некоторых случаях уравнение (6.6)

удобно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Последнее уравнение является частным случаем уравнения в дифференциальной форме вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где переменные x и y играют равноправную роль.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка формулируется следующим образом: найдите решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (6.1) или (6.2), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \text{ или } y|_{x=x_0} = y_0.$$

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка в некоторой области G плоскости Oxy называется функция

$y = \varphi(x, C)$, зависящая от x , произвольной постоянной C и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $y = \varphi(x, C)$ является решением рассматриваемого дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении постоянной C ;

2) каково бы ни было начальное условие (6.4), где $M_0(x_0; y_0) \in G$, можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять данному начальному условию.

Определение. Частным решением дифференциального уравнения первого порядка в некоторой области G плоскости Oxy называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ этого уравнения при фиксированном значении произвольной постоянной $C = C_0$.

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy , а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ — одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$.

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется общим интегралом дифференциального уравнения. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, полученное из общего интеграла путем фиксирования значения постоянной C , называется частным интегралом дифференциального уравнения.

Следует отметить, что общего метода решения дифференциальных уравнений первого порядка не существует. Рассматривают только некоторые отдельные типы таких уравнений, для каждого из которых есть свой особый способ решения. Далее будут рассмотрены следующие из них:

- простейшие дифференциальные уравнения;
- уравнения с разделенными и разделяющимися переменными;
- однородные дифференциальные уравнения;
- линейные дифференциальные уравнения;
- уравнения в полных дифференциалах.

6.2. Простейшие дифференциальные уравнения и уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

К простейшим дифференциальным уравнениям первого порядка относятся уравнения вида $y' = f(x)$ и $y' = g(y)$, где $f(x)$ и $g(y)$ — функции, определенные и непрерывные на некотором промежутке.

Общее решение уравнения $y' = f(x)$ имеет вид $y = \int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения $y' = g(y)$ получают по схеме $\frac{dy}{dx} = g(y)$, $\frac{dy}{g(y)} = dx$, $\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx$, $G(y) + C = x$, где $G(y)$ — одна из первообразных функции $\frac{1}{g(y)}$, т. е. $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$, C — произвольная постоянная.

Замечание 6.3. При почленном делении уравнения $y' = g(y)$ на выражение $g(y)$ могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно привести к следующему виду:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (6.7)$$

где $M_1(x)$, $M_2(x)$ — функции, зависящие только от x ; $N_1(y)$, $N_2(y)$ — функции, зависящие только от y ;

$$y' = f(x) \cdot g(y). \quad (6.8)$$

Разделив почленно уравнение (6.7) на $N_1(y)M_2(x)$ и предположив, что $N_1(y)M_2(x) \neq 0$, получим следующее уравнение:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \quad (6.9)$$

Выражение (6.9) называется *уравнением с разделенными переменными*: при dx находится функция только от x , а при dy — функция только от y . Взяв неопределенные интегралы от обеих частей этого уравнения, получим

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Данным равенством выражается общий интеграл уравнения (6.7).

Замечание 6.4. При почленном делении уравнения (6.7) на выражение $N_1(y)M_2(x)$ могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

В случае уравнения вида (6.8) поступают следующим образом. Записывают производную в так называемой дифференциальной форме. В результате уравнение принимает вид $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. Далее домножают обе части на так называемый интегрирующий множитель $\frac{dx}{g(y)}$, предполагая, что $g(y) \neq 0$. В результате получается уравнение с разделенными переменными $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, решение которого осуществляется непосредственным интегрированием обеих частей.

Пример 6.2. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

Решение. Приведем уравнение к виду $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, откуда

$$x dx + y dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделенными переменными. Взяв неопределенные интегралы от обеих его частей, имеем

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C,$$

или $x^2 + y^2 = 2C$ — общий интеграл дифференциального уравнения (семейство окружностей с центром в начале координат).

Пример 6.3. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Решение. Приведем уравнение к виду $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, откуда

$$y dx + x dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными вида (6.9), где $M_1(x) = 1$, $N_1(y) = y$, $M_2(x) = x$, $N_2(y) = 1$. Разделив обе части этого уравнения на $N_1(y)M_2(x) = xy \neq 0$, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$\ln|x| + \ln|y| = C_1.$$

Постоянную C_1 можно записать в виде $C_1 = \ln|C|$ ($C \neq 0$), поскольку любое число может быть представлено как логарифм другого, положительного числа. Таким образом,

$$\ln|x| + \ln|y| = \ln|C|,$$

откуда $y = \frac{C}{x}$ ($C \neq 0$) — общее решение дифференциального уравнения (семейство гипербол).

При разделении переменных было потеряно решение $y = 0$, которое может быть получено из общего решения при $C = 0$. Исходя из этого, окончательно получаем, что общим решением дифференциального уравнения является $y = C/x$, где $C \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными.

Пример 6.4. Ветер, проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, теряет скорость. На бесконечно малом пути данная потеря пропорциональна скорости ветра в начале этого пути и его длине. Найдите скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что начальная его скорость была 12 м/с, а после прохождения в лесу пути $s = 1$ м скорость уменьшилась до 11,8 м/с.

Решение. Пусть на расстоянии s от начала леса скорость ветра равна v , а потеря скорости на пути Δs равна Δv . Согласно условию задачи $\Delta v = -kv\Delta s$ при $\Delta s \rightarrow 0$ (здесь k — коэффициент пропорциональности). Считая скорость функцией пути и переходя в равенстве $\frac{\Delta v}{\Delta s} = -kv$ к пределу при $\Delta s \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dv}{ds} = -kv$.

Разделяя переменные и затем интегрируя, имеем следующее:

$$\frac{dv}{v} = -kds, \quad \ln|v| = -ks + \ln|C|, \quad v(s) = Ce^{-ks}.$$

Для определения произвольной постоянной C используем начальное условие $v(0) = 12$. Находим $C = 12$. Значит, закон изменения скорости от пути имеет вид $v(s) = 12e^{-ks}$.

Для определения коэффициента пропорциональности k используем дополнительное условие: при $s = 1$ м скорость $v = 11,8$ м/с. Отсюда $v(1) = 12e^{-k} = 11,8$; $e^{-k} = \frac{11,8}{12} \approx 0,983$; $v(150) = 12 \cdot 0,983^{150} \approx 12 \cdot 0,0764 \approx 0,92$ м/с.

Таким образом, скорость ветра, углубившегося в лес на 150 м, составит примерно 0,92 м/с.

Пример 6.5. Решите дифференциальное уравнение, найдите частное решение:

$$\frac{y'}{x} = y \cos x^2, \quad y(0) = 2.$$

Решение. Предполагая, что $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на y и умножим на x . Получим $\frac{y'}{y} = x \cos x^2$. Данное уравнение можно переписать

сать так: $\frac{dy}{y} = x \cos x^2 dx$. Получается уравнение с разделенными переменными. Взяв интегралы от обеих частей, получим общее решение:

$$\ln|y| = 0,5 \sin x^2 + \ln|C|.$$

В последней записи произвольная постоянная обозначена не C , а $\ln|C|$. Причина этого становится понятной при выполнении потенцирования последнего равенства. Далее находим

$$y(x) = Ce^{\sin x^2}.$$

В результате непосредственной подстановки в исходное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$ является его решением. Очевидно, что это решение получается из последнего равенства при $C = 0$. Таким образом, общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид $y(x) = Ce^{\sin x^2}$.

Найдем указанное частное решение, для чего определим значение параметра C . Подставляя в последнее выражение $x = 0$ и $y = 2$, получаем $2 = Ce^0$, откуда $C = 2$. Следовательно, искомое частное решение определяется формулой $y = 2e^{\sin x^2}$.

6.3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $F(x, y)$ называется *однородной измерения n* , если при любом $t \in \mathbf{R}$ имеет место равенство

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y).$$

Например, функция $F(x, y) = x + 2y$ является однородной функцией первой степени, а $F(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ — однородной функцией второй степени.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (6.10)$$

называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени n , т. е. при любом $t \in \mathbf{R}$

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^n Q(x, y). \quad (6.11)$$

Если дифференциальное уравнение первого порядка записано в виде $y' = f(x, y)$, то оно будет однородным, когда его правая часть $f(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени, т. е. выполняется равенство

$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$. Например, в уравнении $y' = \frac{x+y}{x}$ правая часть удовлетворяет данному равенству, так как $\frac{tx+ty}{tx} = \frac{t(x+y)}{tx} = \frac{x+y}{x}$.

С помощью новой переменной $u = u(x)$, вводимой по формуле

$$u = \frac{y}{x}, \quad (6.12)$$

однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, положив, что в равенствах

$$(6.11) \quad t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad \text{получаем}$$

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} P(x, y), \quad Q\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} Q(x, y).$$

Отсюда

$$P(x, y) = x^n P\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad Q(x, y) = x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Подставив эти выражения в уравнение (6.10), получим

$$x^n P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

или

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Из равенства (6.12) следует, что $y = ux$ и $dy = udx + xdu$, в силу чего последнее уравнение примет следующий вид:

$$P(1, u)dx + Q(1, u)(udx + xdu) = 0,$$

или

$$[P(1, u) + uQ(1, u)]dx + xQ(1, u)du = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными x и u . Найдя его общее решение (или общий интеграл), следует заменить u на $\frac{y}{x}$ для получения общего решения (интеграла) исходного уравнения.

Пример 6.6. Решите дифференциальное уравнение

$$(x + y)dx + xdy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным, поскольку $P(x, y) = x + y$ и $Q(x, y) = x$ — однородные функции первой степени.

Положим, $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ и $dy = udx + xdu$. Подставляем в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}(x + ux)dx + x(udx + xdu) &= 0, \\ xdx + 2xudx + x^2du &= 0, \\ x(1 + 2u)dx + x^2du &= 0.\end{aligned}$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Делим на $(1 + 2u)x^2 \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{1 + 2u} = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{1 + 2u} = C_1,$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1 + 2u| = \frac{1}{2}\ln|C|, \text{ где } \frac{1}{2}\ln|C| = C_1, C \neq 0,$$

$$2\ln|x| + \ln|1 + 2u| = \ln|C|, \quad x^2(1 + 2u) = C.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $x^2\left(1 + 2 \cdot \frac{y}{x}\right) = C$, или $x^2 + 2xy = C$, — общий интеграл исходного уравнения, откуда $y = \frac{C}{2x} - \frac{x}{2}$ — общее решение исходного уравнения.

В процессе решения мы полагали, что $(1 + 2u)x^2 \neq 0$. Если $1 + 2u = 0$, то $y = -\frac{x}{2}$. Обе функции $y = -\frac{x}{2}$ и $x = 0$ являются решениями исходного уравнения, причем первое решение находится из общего при $C = 0$. Таким образом,

$$y = \frac{C}{2x} - \frac{x}{2}, \quad C \in \mathbf{R}, \quad x = 0.$$

Пример 6.7. Решите дифференциальное уравнение

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

Решение. Поскольку $y' = \frac{dy}{dx}$, имеем

$$x \frac{dy}{dx} = y - x e^{\frac{y}{x}}, \quad \left(x e^{\frac{y}{x}} - y \right) dx + x dy = 0.$$

Полученное уравнение является однородным, так как $P(x, y) = x e^{\frac{y}{x}} - y$ и $Q(x, y) = x$ — однородные функции первой степени.

Положим, $u = \frac{y}{x}$, $u = u(x)$. Тогда $y = ux$, $dy = u dx + x du$,

$$(x e^u - ux) dx + x(u dx + x du) = 0,$$

$$x e^u dx + x^2 du = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Делим на $e^u x^2 \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{e^u} = 0, \quad \int \frac{dx}{x} + \int e^{-u} du = C,$$

$$\ln|x| - e^{-u} = C.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $\ln|x| - e^{-\frac{y}{x}} = C$ ($C \in \mathbf{R}$) — общий интеграл исходного уравнения.

Пример 6.8. Решите дифференциальное уравнение

$$(y^4 - 2x^3 y) dx + (x^4 - 2xy^3) dy = 0.$$

Решение. Функции $P(x, y) = y^4 - 2x^3 y$; $Q(x, y) = x^4 - 2xy^3$ являются однородными функциями четвертого порядка. Вводим новую переменную u по формуле $y = ux$, тогда $dy = u dx + x du$. Преобразуем исходное уравнение, подставив в него выражения для y и dy :

$$(u^4 + u) dx - (1 - 2u^3) x du = 0,$$

$$\text{или } \frac{dx}{x} = \frac{1 - 2u^3}{u + u^4} du, \quad \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{u} - \frac{3u^2}{1 + u^3} \right) du.$$

Проинтегрируем последнее уравнение: $\ln|x| = \ln|u| - \ln|1 + u^3| + \ln|C|$, откуда $x(1 + u^3) = Cu$. Поскольку $u = y/x$, то $x^3 + y^3 - Cxy = 0$ — общий интеграл данного уравнения.

6.4. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad (6.13)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — заданные функции; $y = y(x)$ — искомая функция. Если $a(x) \neq 0$ на некотором промежутке I , то уравнение (6.13) можно переписать в приведенном виде:

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (6.14)$$

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на промежутке I .

Уравнение (6.14) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными путем следующего приема. Заменим функцию y произведением двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$:

$$y = uv.$$

Одной из них можно распорядиться совершенно произвольно, в то время как вторая должна быть определена таким образом, чтобы произведение uv удовлетворяло заданному дифференциальному уравнению.

Поскольку $y' = u'v + uv'$, то подстановка выражений для u и y' в уравнение (6.14) приводит его к виду

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

или

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x).$$

Выберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в квадратных скобках было равно нулю, т. е. решим дифференциальное уравнение

$$v' + p(x)v = 0. \quad (6.15)$$

Имеем

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \quad \ln|v| = -\int p(x)dx + C.$$

В силу произвольности выбора функции v можно предположить, что $C = 0$. Тогда

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Для нахождения функции u имеем с учетом уравнения (6.15) следующее уравнение:

$$u'v = q(x).$$

Подставляя найденную функцию v в это уравнение, получаем

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad \frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}, \quad u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения (6.14) имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right). \quad (6.16)$$

Непрерывность коэффициентов уравнения (6.14) гарантирует существование всех указанных интегралов.

Факт, что функция, получаемая из (6.16), при каждом фиксированном C представляет собой решение уравнения (6.14), проверяется простой подстановкой. Обычным образом проверяется также, что, каковы бы ни были числа $x_0 \in I$ и $y_0 \in \mathbf{R}$, всегда существует константа C_0 такая, что получаемое при $C = C_0$ частное решение будет решением начальной задачи $y(x_0) = y_0$ для уравнения (6.14), т. е. формула (6.16) доставляет общее решение уравнения (6.14).

Пример 6.9. Решите дифференциальное уравнение

$$xy' + 2y = x^2.$$

Решение. Рассматриваемое уравнение является линейным: $a(x) = x$, $b(x) = 2$, $c(x) = x^2$. Полагаем, что $y = uv$. Тогда

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv', \\ x(u'v + uv') + 2uv &= x^2, \\ xu'v + u(xv' + 2v) &= x^2. \end{aligned}$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' + 2v = 0$. Имеем

$$x \frac{dv}{dx} = -2v, \quad \frac{dv}{v} = -2 \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -2 \ln|x| + C.$$

Положим, $C = 0$, тогда получим $v = \frac{1}{x^2}$. Подставляя функцию $v = \frac{1}{x^2}$ в уравнение $xu'v = x^2$, имеем

$$x \cdot \frac{1}{x^2} u' = x^2, \quad \frac{du}{dx} = x^3, \quad u = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

откуда $y = uv = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^4}{4} + C \right) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbf{R}$.

Пример 6.10. Решите дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' - y \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x.$$

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Будем искать общее решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — подлежащие определению пока неизвестные функции. Подставляя это выражение в уравнение, получим $u'v + v'u - uv \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x$, или $u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = 2 \operatorname{tg} x$. Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю. Имеем

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x}, \quad v = \frac{1}{\cos x}.$$

Из всей совокупности решений этого уравнения выбрано в качестве функции v одно конкретное. Далее получаем $u'v = 2 \operatorname{tg} x$, $u' = 2 \sin x$, откуда $u = -2 \cos x + C$. Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = uv = -2 + \frac{C}{\cos x}.$$

6.5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (6.17)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U = U(x, y)$, т. е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU.$$

В этом случае уравнение (6.16) может быть записано как $dU = 0$, а его общий интеграл имеет вид

$$U(x, y) = C.$$

Нахождение решения уравнения (6.17) сводится к отысканию такой функции $U = U(x, y)$, дифференциал которой равен $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Признак уравнения в полных дифференциалах устанавливается следующей теоремой.

Теорема 6.2. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G плоскости Oxy , то

для того, чтобы уравнение (6.17) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

На практике во многих случаях общий интеграл уравнения в полных дифференциалах может быть найден следующим образом. Как известно, полный дифференциал функции $U = U(x, y)$ выражается формулой

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

откуда следует, что искомая функция должна удовлетворять требованиям

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

Учитывая первое из них, находят

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y), \quad (6.18)$$

где интеграл справа берется в предположении, что y фиксировано, а $\varphi(y)$ — произвольная функция от y , которая предполагается дифференцируемой. Затем дифференцируют обе части равенства (6.18) по y и приравнивают производную правой части к функции $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Из полученного равенства находят функцию $\varphi(y)$ и подставляют ее в равенство (6.18).

Пример 6.11. Решите дифференциальное уравнение

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Решение. Для данного уравнения

$$P(x, y) = x + y + 1, \quad Q(x, y) = x - y^2 + 3.$$

Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x, y)$, для которой

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y + 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - y^2 + 3.$$

Интегрируя первое из этих уравнений (y считается постоянной), находим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int (x + y + 1) dx + \varphi(y) = \\ &= \frac{x^2}{2} + xy + x + \varphi(y), \end{aligned}$$

где $\varphi(y)$ — функция, подлежащая определению. Дифференцируя полученное равенство для U по переменной y , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} + xy + x \right) + \varphi'(y) &= x - y^2 + 3, \\ x + \varphi'(y) &= x - y^2 + 3, \quad \varphi'(y) = -y^2 + 3, \quad \frac{d\varphi}{dy} = -y^2 + 3, \\ \varphi(y) &= \int (-y^2 + 3) dy = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1, \end{aligned}$$

откуда

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1 = C_2,$$

или

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y = C, \quad \text{где } C = C_2 - C_1.$$

6.6. Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение. Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (6.19)$$

связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные y' и y'' .

Обычно изучают уравнения, которые могут быть разрешены относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (6.20)$$

Так же, как и для дифференциального уравнения первого порядка, определенная на промежутке I функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (6.19) (или (6.20)), если она дважды дифференцируема во всех точках $x \in I$ и при подстановке в данное уравнение обращает его в тождество. График решения дифференциального уравнения второго порядка называется *интегральной кривой*.

Для уравнения второго порядка имеет место теорема существования и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме для уравнения первого порядка.

Начальные условия для уравнения (6.20) имеют вид

$$y = y_0, \quad y' = y'_0 \quad \text{при } x = x_0. \quad (6.21)$$

Общим решением дифференциального уравнения (6.20) в некоторой области G изменения переменных x, y и y' называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1, C_2 , удовлетворяющая следующим условиям:

1) $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением рассматриваемого дифференциального уравнения при любых фиксированных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 :

2) каковы бы ни были начальные условия (6.21), где $M_0(x_0, y_0, y'_0) \in G$, существуют такие значения постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Всякое решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ уравнения (6.20), полученное из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при фиксированных значениях произвольных постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, называется частным решением данного уравнения.

Если общее решение уравнения (6.20) задано в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

то оно называется общим интегралом этого уравнения. Соотношение $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$, полученное из общего интеграла путем фиксирования значений постоянных C_1 и C_2 , называется частным интегралом дифференциального уравнения (6.20).

Геометрически общее решение представляет собой бесконечную совокупность интегральных кривых, зависящую от двух неизвестных параметров C_1 и C_2 . Через каждую точку $M_0(x_0; y_0)$ плоскости Oxy проходит пучок интегральных кривых. Именно поэтому, чтобы из всего семейства интегральных кривых выделить одну определенную интегральную кривую L , недостаточно указать точку $M_0(x_0; y_0)$, через которую должна проходить

эта кривая, следует указать еще направление, в котором кривая L проходит через точку M_0 , т. е. задать тангенс угла α_0 , образованного касательной к этой кривой в точке M_0 с положительным направлением оси Ox . Аналитически, если обозначить $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$, приходим к начальным условиям (6.21). Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения дифференциального уравнения (6.20), удовлетворяющего заданным начальным условиям (6.21), называется задачей Коши.

Рассмотрим, например, уравнение второго порядка $y'' = 2$. Общее решение найдем двукратным последовательным интегрированием: находим сначала первую производную $y' = 2x + C_1$, а затем общее решение $y = x^2 + C_1x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Геометрически общее решение представляет собой семейство парабол, причем так как оно зависит от двух произвольных постоянных, то через каждую точку плоскости проходит бесконечное множество парабол, имеющих различные касательные в этой точке. В связи с этим для выделения одной параболы из полученного семейства, кроме точки $(x_0; y_0)$, через которую проходит парабола, нужно задать еще угловой коэффициент y'_0 касательной к параболе в этой точке.

Зададим начальные условия $y = 1, y' = 1$ при $x = 1$. Подставляя эти значения в выражения для общего решения $y = x^2 + C_1x + C_2$ и его производной $y' = 2x + C_1$, для определения C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = 1 + C_1 + C_2, \\ 1 = 2 + C_1, \end{cases}$$

откуда находим $C_1 = -1$ и $C_2 = 1$. Следовательно, искомым частным решением является функция $y = x^2 - x + 1$, график которой — парабола, проходящая через точку $(1; 1)$ с угловым коэффициентом, равным единице.

К простейшим интегрируемыми дифференциальными уравнениями второго порядка относятся уравнения, для которых функция, стоящая в правой части равенства (6.20), зависит только от одного из трех аргументов, т. е. от уравнения вида

$$y'' = f(x), \quad (6.22)$$

$$y'' = f(y), \quad (6.23)$$

$$y'' = f(y'). \quad (6.24)$$

1. Общее решение уравнения (6.22) находится двукратным интегрированием:

$$\begin{aligned} dy' &= f(x)dx, \quad y' = \int f(x)dx = F_1(x) + C_1, \\ dy &= (F_1(x) + C_1)dx, \end{aligned}$$

$$y = \int (F_1(x) + C_1) dx = F_2(x) + C_1 x + C_2,$$

где $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = F_1(x)$, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. Уравнение (6.23) с помощью подстановки

$$y' = p,$$

где $p = p(y)$ — новая неизвестная функция, сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

$$p \frac{dp}{dy} = f(y), \quad p dp = f(y) dy.$$

Здесь роль независимой переменной играет y .

3. Уравнение (6.24) с помощью подстановки

$$y' = p,$$

где $p = p(x)$ — новая неизвестная функция, также сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = f(p), \quad \frac{dp}{f(p)} = dx.$$

Пример 6.12. Найдите решение дифференциального уравнения

$$2y'y'' = 1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 1$.

Решение. Полагая, что $y' = p$, где $p = p(x)$, имеем $2p \frac{dp}{dx} = 1$. Разделяя переменные, получаем $2p dp = dx$, откуда $p^2 = x + C_1$.

Для определения постоянной C_1 используем начальное условие $p = y' = 2$ при $x = 1$. Имеем $4 = 1 + C_1$, откуда $C_1 = 3$. Следовательно, $p^2 = x + 3$ и $\frac{dy}{dx} = p = \sqrt{x+3}$ (корень берем со знаком «+», так как при $x = 1$ $p = 2$). Отсюда

$$dy = \sqrt{x+3} dx, \quad y = \frac{2}{3} (x+3)^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

С учетом условия $y = 0$ при $x = 1$ получаем $0 = \frac{2}{3} + C_2$, откуда $C_2 = -\frac{2}{3}$ и $y = \frac{2}{3} \left((x+3)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$.

Укажем еще два случая, когда дифференциальное уравнение второго порядка (6.20) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

1. Пусть правая часть уравнения (6.20) не содержит явно независимой переменной x , т. е. уравнение имеет вид

$$y'' = f(y, y').$$

Полагая, что $y' = p$, где $p = p(y)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

где роль независимой переменной играет переменная y .

2. Пусть правая часть уравнения (6.20) не содержит явно искомой функции y , т. е. уравнение имеет вид

$$y'' = f(x, y').$$

Полагая, что $y' = p$, где $p = p(x)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

с неизвестной функцией p .

Пример 6.13. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

Решение. Данное уравнение не содержит явно независимой переменной x , поэтому полагаем, что $y' = p$, где $p = p(y)$. Имеем

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0, \quad y p dp - p^2 dy = 0, \quad \frac{dp}{p} - \frac{dy}{y} = 0 \quad (yp^2 \neq 0),$$

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0), \quad p = C_1 y, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y, \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx,$$

$$\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0), \quad y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Решения $y = 0$ и $y = C$ ($y' = 0$) получаются из общего решения при $C_2 = 0$ и $C_1 = 0$ соответственно. Таким образом, ответом на задачу является $y = C_2 e^{C_1 x}$, где $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

6.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (6.25)$$

где p и q — некоторые числа.

Два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ уравнения (6.25) называются *линейно независимыми* на промежутке I , если равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Очевидно, что решения y_1 и y_2 линейно независимы тогда и только тогда, когда их отношение не равно постоянной величине: $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$

С помощью непосредственной подстановки в уравнение (6.25) нетрудно показать, что если y_1 и y_2 — решения уравнения (6.25), то решением этого уравнения является также функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (6.26)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Следующая теорема отвечает на вопрос о том, при каких условиях функция (6.26) будет общим решением уравнения (6.25).

Теорема 6.3. Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка линейно независимы на промежутке I , то общим решением этого уравнения является функция (6.26), представляющая собой линейную комбинацию частных решений.

Говорят, что совокупность любых двух линейно независимых на промежутке I частных решений y_1 и y_2 линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка образует *фундаментальную систему решений* этого уравнения. Таким образом, для нахождения общего решения уравнения (6.25) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему решений.

Будем искать частные решения уравнения (6.25) в виде $y = e^{kx}$, где k — константа, подлежащая определению. Подставляя в уравнение (6.25) выражения $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, получим

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

или

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (6.27)$$

Уравнение (6.27) называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (6.25).

При решении характеристического уравнения (6.27) в соответствии со знаком дискриминанта $D = p^2 - 4q$ возможны три случая.

1. Корни k_1 и k_2 уравнения (6.27) действительные и различные ($D > 0$). В этом случае частными линейно независимыми решениями уравнения (6.25) являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Следовательно, общее решение уравнения (6.25) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. Корни k_1 и k_2 уравнения (6.27) действительные и равные $\left(D = 0, k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \right)$. В этом случае имеем лишь одно частное решение: $y_1 = e^{k_1 x}$. Однако наряду с y_1 решением уравнения (6.25) будет и $y_2 = x e^{k_1 x}$. В силу условия $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq \text{const}$ частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$ линейно независимы и, следовательно, общее решение уравнения (6.25) имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. Корни k_1 и k_2 уравнения (6.27) комплексно сопряженные: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ ($D < 0$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4} > 0$). По формуле Эйлера имеем

$$e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Можно показать, что функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ являются линейно независимыми частными решениями уравнения (6.25), порождаемыми корнем $k_1 = \alpha + \beta i$. Сопряженный корень $k_2 = \alpha - \beta i$ не порождает новых линейно независимых частных решений, поэтому общее решение уравнения (6.25) записывается в виде

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 6.14. Решите уравнение $y'' - 2y' - 8y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k - 8 = 0$. Оно имеет два различных действительных корня: $k_1 = 4$ и $k_2 = -2$ (см. случай 1 на с. 249). Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$.

Пример 6.15. Решите уравнение $y'' - 2y' + 2 = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет два комплексно-сопряженных корня: $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общее решение имеет вид $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Пример 6.16. Решите уравнение $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 13 = 0$. Оно имеет комплексно сопряженные корни $k_1 = 3 + 2i$ и $k_2 = 3 - 2i$ (см. случай 3 на с. 249). Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример 6.17. Решите уравнение $y'' - 8y' + 25y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 25 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 4 + 3i$, $k_2 = 4 - 3i$, поэтому общее решение имеет вид $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

6.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y'' + py' + qy = r(x), \quad (6.28)$$

где p и q — некоторые числа; $r(x)$ — непрерывная функция, определенная на некотором промежутке I .

Структура общего решения уравнения (6.28) определяется следующей теоремой.

Теорема 6.4. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (6.28) определяется формулой

$$y = y_0 + y_*,$$

где y_0 — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (6.25); y_* — некоторое частное решение уравнения (6.28).

В простейших случаях, когда правая часть $r(x)$ уравнения (6.28) имеет специальный вид, частное решение y_* этого уравнения находится мето-

дом неопределенных коэффициентов: по виду правой части уравнения (6.28) записывают ожидаемый вид его частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют частное решение в уравнение и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

1. Пусть правая часть уравнения (6.28) имеет вид $r(x) = P_n(x)$ — многочлен степени n . Тогда частное решение ищут в виде многочлена той же степени. При этом возможны следующие случаи:

а) $q \neq 0$ (коэффициент при y в исходном и, соответственно, в характеристическом уравнении). Тогда $y_* = Q_n(x)$. При этом неизвестные коэффициенты $Q_n(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов (приравнивают коэффициенты в обеих частях уравнения (6.28) после подстановки $Q_n(x)$ вместе с его первой и второй производными в левую часть уравнения (6.28));

б) $q = 0$. Тогда $y_* = xQ_n(x)$, если 0 — простой (т. е. кратности 1) корень характеристического уравнения;

в) $p = q = 0$ (0 — двукратный корень характеристического уравнения). Тогда $y_* = x^2Q_n(x)$.

2. Пусть правая часть уравнения (6.28) имеет вид $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n , $\alpha \in \mathbf{R}$. В этом случае частное решение y_* ищут в виде

$$y_* = x^s Q_n(x) e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами $A_0, A_1, \dots, A_n$; α — корень кратности s ($s = 0, 1, 2$) характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

В частном случае, когда $r(x) = ae^{\alpha x}$, где $a \in \mathbf{R}$, частное решение y_* ищут в виде:

а) $y_* = Ae^{\alpha x}$, если α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$;

б) $y_* = Axe^{\alpha x}$, если α является простым (т. е. кратности 1) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$;

в) $y_* = Ax^2 e^{\alpha x}$, если α является двукратным корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

3. Пусть правая часть уравнения (6.28) имеет вид

$$r(x) = e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x),$$

где $\alpha, \beta, M, N \in \mathbf{R}$. В этом случае частное решение y_* ищут в виде

$$y_* = x^s e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$; $s = 1$, если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического

уравнения $k^2 + pk + q = 0$; A и B — неопределенные коэффициенты. После подстановки y_* в уравнение (6.28) приравнивают коэффициенты, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях полученного равенства.

Пример 6.18. Решите уравнение $y'' + y' - 2y = 4x^2 - 8x + 2$.

Решение. В данном случае правая часть уравнения представляет собой многочлен второй степени. Характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ соответствующего линейного однородного уравнения имеет два различных действительных корня: $k_1 = 1$ и $k_2 = -2$. Тогда $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Поскольку число $q \neq 0$ (коэффициент при y в исходном и, соответственно, в характеристическом уравнении), то частное решение исходного уравнения будем искать в виде $y_* = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C — неопределенные коэффициенты. Находя производные $y_*' = 2Ax + B$, $y_*'' = 2A$ и подставляя выражения для y_* , y_*' и y_*'' в исходное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} 2A + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) &= 4x^2 - 8x + 2, \\ -2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) &= 4x^2 - 8x + 2. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B, C :

$$\begin{cases} -2A = 4, \\ 2A - 2B = -8, \\ 2A + B - 2C = 2, \end{cases}$$

откуда $A = -2$, $B = 2$, $C = -2$. Следовательно, $y_* = -2x^2 + 2x - 2$ и общее решение исходного линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2x^2 + 2x - 2.$$

Пример 6.19. Решите уравнение $y'' - 2y' + 1 = 2e^x$.

Решение. Находим общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + 1 = 0$. Составляем характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 1 = 0$. Оно имеет кратный корень $k = 1$. Тогда общее решение однородного уравнения будет: $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_* = Ax^2 e^x$, так как в правой части исходного уравнения многочлен нулевой степени (константа), а 1 является кратным корнем характеристического уравнения (см. п. 16 на с. 251). Тогда

$$\begin{aligned} y_*''(x) &= Ax(x+2)e^x, \\ y_*'(x) &= A(x^2 + 4x + 2)e^x. \end{aligned}$$

После подстановки в исходное уравнение y_* , y'_* и y''_* получим

$$A(x^2 + 4x + 2)e^x - 2Ax(x + 2)e^x + Ax^2e^x = 2e^x, \quad 2A = 2,$$

откуда находим $A = 1$. Тогда частное решение имеет вид $y_* = x^2e^x$. Решение исходного уравнения: $y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + x^2e^x$.

Пример 6.20. Решите уравнение $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$. Поскольку характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет комплексно сопряженные корни $k_1 = 1 + i$ и $k_2 = 1 - i$, то общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Поскольку число $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение исходного уравнения будем искать в виде $y_* = Ae^{2x}$, где A — неопределенный коэффициент. Найдя производные $y'_* = 2Ae^{2x}$ и $y''_* = 4Ae^{2x}$, подставляем выражения для y_* , y'_* и y''_* в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} 4Ae^{2x} - 2 \cdot 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} &= 6e^{2x}, \\ Ae^{2x} &= 3e^{2x}, \quad A = 3. \end{aligned}$$

Следовательно, $y_* = 3e^{2x}$ и общее решение исходного линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{2x}.$$

Пример 6.21. Решите уравнение $y'' + y = \cos 2x$.

Решение. В данном случае $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $M = 1$, $N = 0$. Поскольку характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет комплексно сопряженные корни $k_1 = i$ и $k_2 = -i$, то общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение исходного уравнения будем искать в виде $y_* = A \cos 2x + B \sin 2x$. Находим

$$\begin{aligned} y'_* &= -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \\ y''_* &= -4A \cos 2x - 4B \sin 2x. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y_* и y''_* в исходное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} -4A \cos 2x - 4B \sin 2x + A \cos 2x + B \sin 2x &= \cos 2x, \\ -3A \cos 2x - 3B \sin 2x &= 1 \cos 2x + 0 \sin 2x. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями, получаем систему

$$\begin{cases} -3A = 1, \\ -3B = 0, \end{cases}$$

откуда $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$. Следовательно, $y_* = -\frac{1}{3}\cos 2x$ и общее решение исходного линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x.$$

Пример 6.22. Решите уравнение $y'' - 7y' + 12y = -48\sin 3x$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 7y' + 12y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 12 = 0$ имеет различные действительные корни: $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, поэтому общее решение однородного уравнения определяется формулой $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$. Частное исходного уравнения будем искать в виде $y_1 = A \cos 3x + B \sin 3x$. Подставим y_1 , $y_1' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$, $y_1'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$ в уравнение и получим

$$\begin{aligned} -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - 7(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + \\ + 12(A \cos 3x + B \sin 3x) = -48 \sin 3x, \end{aligned}$$

или

$$(3A - 21B) \cos 3x + (21A + 3B) \sin 3x = -48 \sin 3x.$$

Последнее равенство должно выполняться для всех x , и это возможно, когда $3A - 21B = 0$, $21A + 3B = -48$, $A = -\frac{56}{25}$, $B = -\frac{8}{25}$. Следовательно, $y_1 = -\frac{56}{25} \cos 3x - \frac{8}{25} \sin 3x$. Искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - \frac{8}{25} (7 \cos 3x + \sin 3x)$.

Метод вариации произвольных постоянных. Этот метод предложен Лагранжем и применяется для нахождения решений неоднородных линейных уравнений как с постоянными коэффициентами, так и с коэффициентами, которые являются функциями от x .

Пусть y_1 и y_2 — два линейно независимых частных решения однородного уравнения (6.25), соответствующего неоднородному уравнению (6.28). Тогда общее решение этого однородного уравнения (см. теорему 6.3) есть $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение неоднородного уравнения (6.28) будем искать в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \quad (6.29)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Нахождение неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \quad (6.30)$$

Определитель этой системы (вронскиан) $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ не обращается в нуль. Следовательно, можем найти $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ как определенные функции от x : $C_1'(x) = \varphi_1(x)$, $C_2'(x) = \varphi_2(x)$.

Интегрируя, получим $C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + A$, $C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + B$, где A и B — произвольные постоянные. Подставляя найденные выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в равенство (6.29), при этом заменив A и B с учетом конкретных числовых величин при них на C_1 и C_2 , найдем решение уравнения (6.28), зависящее от двух произвольных постоянных, т. е. его общее решение. Если положить, что $C_1 = C_2 = 0$, то получим частное решение уравнения (6.28).

Пример 6.23. Найдите общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 7k + 6 = 0$. Оно имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 6$. Частные линейно независимые решения имеют вид $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{6x}$. Общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Решение неоднородного исходного уравнения будем искать с помощью формулы (6.29).

Воспользуемся системой (6.30). В нашем случае $y_1' = e^x$, $y_2' = 6e^{6x}$, $r(x) = (x-2)e^x$. Тогда система (6.30) примет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{6x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 6C_2'(x)e^{6x} = (x-2)e^x. \end{cases}$$

Решив последнюю относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получим $C_1'(x) = -\frac{1}{5}(x-2)$, $C_2'(x) = \frac{1}{5}(x-2)e^{-5x}$. Проинтегрировав два последних равенства по x , получим $C_1(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{5}x + A$, $C_2(x) = \left(-\frac{1}{25}x + \frac{9}{125}\right)e^{-5x} + B$, где A и B — произвольные постоянные. Тогда согласно равенству (6.29) общее решение исходного

уравнения примет вид $y = \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{5}x + A\right)e^x + \left(\left(-\frac{1}{25}x + \frac{9}{125}\right)e^{-5x} + B\right)e^{6x}$,
 после упрощений $y = \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)e^x + \left(A + \frac{9}{125}\right)e^x + Be^{6x}$. Обозначив в последнем равенстве $C_1 = A + \frac{9}{125}$, $C_2 = B$, окончательно получим общее решение уравнения в виде $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)e^x$.

6.9. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Дифференциальные уравнения используются при изучении различных процессов реального мира. К их интегрированию приводит решение многих научных и технических задач дифференциальных уравнений. Приступая к составлению дифференциального уравнения, нужно выбрать независимую переменную и искомую функцию. Составление дифференциального уравнения по условию научной или технической задачи состоит в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, нахождении выражения для производной. Кроме того, при составлении дифференциального уравнения в зависимости от условия задачи используются соответствующие законы физики, механики, химии и других наук. При этом можно использовать физическую или геометрическую интерпретацию первой, второй или производной более высокого порядка искомой функции (например, $s'(t)$ — скорость тела в момент времени t ; $s''(t)$ — ускорение тела в момент времени t ; $q'(t)$ — сила тока в проводнике в момент времени t и т. д.).

Пример 6.24 (задача о распаде радиоактивного вещества). Имеется некоторое количество радиоактивного вещества. Известно, что через 30 дней распадается 50 % этого вещества. Определите, через сколько дней останется 1 % от первоначального количества.

Решение. Используем закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

Пусть $Q(t)$ — количество радиоактивного вещества в момент времени t после начала распада. За время Δt распадается $Q(t) - Q(t + \Delta t)$ вещества. В соответствии с законом радиоактивного распада имеем

$$\frac{Q(t) - Q(t + \Delta t)}{\Delta t} = kQ(t),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Переходя в данном равенстве к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ,$$

решая которое, находим $Q(t) = Ce^{-kt}$, где C — произвольная постоянная.

Пусть первоначальное количество вещества равно Q_0 . Тогда из начального условия $Q(0) = Q_0$ находим, что $C = Q_0$ и $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$. По условию задачи

$$0,5Q_0 = Q_0 e^{-30k}, \text{ откуда } k = \frac{1}{30} \ln 2. \text{ Наконец, из условия } 0,01Q_0 = Q_0 e^{-\frac{t}{30} \ln 2}$$

получаем $t = \frac{\ln 100}{\ln 2} \cdot 30 \approx 199$ дней — время, по истечении которого останется лишь 1 % от первоначального количества вещества.

Пример 6.25. Найдите семейство функций таких, что абсцисса точки пересечения касательной к графику каждой из них (в произвольной точке области определения функции) с осью абсцисс равна удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Выберем произвольную функцию искомого семейства и обозначим ее аргумент буквой x , а саму функцию — $y(x)$. Пусть $(x_0; y_0)$ — произвольная точка графика этой функции. Уравнение касательной к графику функции в указанной точке будет иметь вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = y'(x_0)$. Найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью абсцисс. Для этого предположим, что в уравнении касательной $y = 0$, и найдем значение переменной x из полученного уравнения. Легко видеть, что $x = x_0 - \frac{y_0}{k}$. По условию задачи имеем $x = 2x_0$, поэтому $2x_0 = x_0 - \frac{y_0}{k}$, или $kx_0 = -y_0$. Опуская в этом уравнении нулевой индекс и заменяя величину k ее значением, получим дифференциальное уравнение искомого семейства функций: $xy' = -y$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, получим $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$, откуда интегрированием находим, что $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$. Значит, искомое семейство функций $y = \frac{C}{x}$.

Пример 6.26. Известно, что скорость остывания горячей жидкости (например, чая) пропорциональна разности между температурой этой

жидкости и температурой окружающей среды. Найдите температуру жидкости через 10 мин после начала процесса остывания, если ее начальная температура была 100°C , а через 5 мин после начала остывания — 60°C . Температура окружающего воздуха равна 20°C .

Решение. $T(t)$ — температура жидкости в момент времени t . Тогда скорость остывания жидкости равна производной $T'(t)$. По условию задачи имеем

$$T'(t) = k(T(t) - 20).$$

Эта зависимость описывает закон остывания жидкости. Ее можно рассматривать как уравнение для определения неизвестной функции $T(t)$. Перепишем это уравнение в виде $T' = k(T - 20)$, а затем в виде $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$. Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dT}{(T - 20)} = k dt.$$

Теперь интегрируем:

$$\begin{aligned} \ln|T - 20| &= kt + \ln|C|; \\ T - 20 &= Ce^{kt}; \quad T = 20 + Ce^{kt}. \end{aligned}$$

Найдем величины C и k , исходя из условия задачи. При $t = 0$ имеем $T = 100$. Подставляя, получаем $100 = 20 + Ce^0 = 20 + C$, откуда находим, что $C = 80$. Далее при $t = 5$ имеем $T = 60$, откуда

$$\begin{aligned} 60 &= 20 + 80e^{5k}; \quad 40 = 80e^{5k}; \\ e^{5k} &= \frac{1}{2}; \quad 5k = \ln \frac{1}{2}; \\ k &= \frac{1}{5} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{5} \ln 2. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем $T(t) = 20 + 80e^{\left(-\frac{1}{5} \ln 2\right)t}$. Теперь можно найти ответ на вопрос задачи. При $t = 10$ получим

$$T = 20 + 80e^{\left(-\frac{1}{5} \ln 2\right)10} = 20 + 80e^{-2 \ln 2} = 20 + 80 \cdot \frac{1}{4} = 40.$$

Температура жидкости через 10 мин после начала остывания будет равна 40°C .

Пример 6.27. Известно, что, чем выше над уровнем моря, тем воздух разреженнее: атмосферное давление с высотой уменьшается. Определите зависимость $p = p(h)$ давления p от высоты h .

Решение. Напомним, что за величину атмосферного давления принимается вес вертикального столба воздуха с площадью сечения $s = 1 \text{ см}^2$. Проведем мысленно два горизонтальных сечения этого столба воздуха на высотах h и $h + \Delta h$ (рис. 6.1).

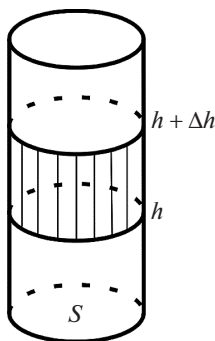


Рис. 6.1

Разность давления на указанных высотах $p(h) - p(h + \Delta h) = -\Delta p(h)$ численно равна весу столба воздуха между двумя сечениями: $-\Delta p(h) = \Delta mg$, где Δm — масса этого воздуха; g — ускорение свободного падения (у поверхности Земли $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$). Объем столба $\Delta V = s\Delta h = \Delta h$, поэтому если средняя плотность воздуха в столбе равна $\rho_{\text{ср}}$, то $\Delta m = \rho_{\text{ср}}\Delta h$, откуда

$$-\Delta p(h) = g\rho_{\text{ср}}\Delta h \text{ и } \frac{\Delta p(h)}{\Delta h} = -g\rho_{\text{ср}}.$$

Обозначим плотность воздуха на высоте h через $\rho(h)$. Тогда при Δh , стремящемся к нулю, средняя плотность $\rho_{\text{ср}}$ стремится к $\rho(h)$. Переходя к пределу в последнем соотношении при $\Delta h \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dh} = -g\rho(h),$$

в котором функция $\rho(h)$ наряду с функцией $p(h)$ является неизвестной.

Предположим, что температура воздуха одна и та же во всех слоях атмосферы. Тогда из закона Бойля — Мариотта или из уравнения газового состояния легко вывести, что давление пропорционально плотности:

$$p(h) = b\rho(h),$$

где b — коэффициент пропорциональности. Исходя из этого, окончательно получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{g}{b} p,$$

представляющее собой уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, получаем $\frac{dp}{p} = -\frac{g}{b} dh$, $\ln|p| = -\frac{g}{b} h + \ln|C|$, откуда $p(h) = Ce^{-\frac{g}{b} h}$ — общее решение уравнения.

Если над уровнем моря (при $h = 0$) атмосферное давление равно p_0 , то $C = p_0$ и закон изменения атмосферного давления в зависимости от

высоты над уровнем моря имеет вид $p(h) = p_0 e^{-\frac{g}{b} h}$.

Итак, давление убывает с высотой по экспоненциальному закону в соответствии с полученной так называемой *барометрической формулой*. Данная формула на больших высотах (сравнимых по величине с радиусом Земли) дает большую погрешность. Это связано с тем, что мы пренебрегаем изменением не только температуры с высотой, но и ускорения свободного падения.

Пример 6.28. Опишите процесс развития коронавирусной инфекции, если вызывающие ее вирусы COVID-19 размножаются со скоростью, пропорциональной k_1 , и погибают со скоростью, пропорциональной k_2 , а их первоначальное количество составляет в момент t_0 величину y_0 .

Решение. Пусть $y = y(t)$ составляет величину популяции вирусов COVID-19 в момент времени t . Тогда прирост популяции Δy за малый промежуток Δt составит величину

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t = (k_1 - k_2) y \Delta t.$$

Разделим обе части последнего равенства на Δt . В результате получим $\frac{\Delta y}{\Delta t} = (k_1 - k_2) y$. Далее в обеих частях полученного равенства перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В результате получим равенство $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (k_1 - k_2) y$ или $y' = (k_1 - k_2) y$ (дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными). Решим его:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (k_1 - k_2) y, & \frac{dy}{y} &= (k_1 - k_2) dt, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (k_1 - k_2) dt, \end{aligned}$$

$$\ln|y| = (k_1 - k_2)t + \ln|C|, \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = (k_1 - k_2)t, \quad y = Ce^{(k_1 - k_2)t}.$$

Константу C найдем из следующего условия: в момент $t = t_0$, $y = y_0$. Подставляем эти значения вместо y и t в равенство $y = Ce^{(k_1 - k_2)t}$. В результате получим $y_0 = Ce^{(k_1 - k_2)t_0}$, откуда $C = y_0 e^{-(k_1 - k_2)t_0}$. После несложных преобразований получим окончательный ответ: $y = y_0 e^{(k_1 - k_2)(t - t_0)}$. В частности, при $t_0 = 0$, $y(0) = y_0$ получим $y = y_0 e^{(k_1 - k_2)t}$.

Пример 6.29. В сосуд, содержащий 10 л воды, со скоростью 2 л/мин непрерывно поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 мин?

Решение. Примем за независимую переменную время t , а за искомую функцию $y(t)$ — количество соли в сосуде через t мин после начала опыта. Найдем то, как изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. В одну минуту в сосуд поступает 2 л раствора, а в Δt минут — $2\Delta t$ л; в этих $2\Delta t$ л содержится $0,3 \cdot 2\Delta t = 0,6\Delta t$ кг соли. С другой стороны, за тот же промежуток времени Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ л раствора. В момент t во всем сосуде (10 л) содержится $y(t)$ кг соли. Следовательно, в $2\Delta t$ л вытекающего раствора содержалось бы $0,2\Delta t y(t)$ кг соли, если бы содержание соли в сосуде оставалось неизменным за время Δt . Однако поскольку за указанное время оно меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \rightarrow 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ л содержится $0,2\Delta t(y(t) + \alpha)$ кг соли, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Следовательно, в растворе, поступающем за промежуток времени Δt , содержится $0,6\Delta t$ кг соли, а в вытекающем — $0,2\Delta t(y(t) + \alpha)$ кг.

Приращение количества соли за указанное время $y(t + \Delta t) - y(t)$ равно разности найденных выражений, т. е.

$$\begin{aligned} y(t + \Delta t) - y(t) &= 0, \\ 6\Delta t - 0,2\Delta t(y(t) + \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Разделим обе части полученного уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$y'(t) = 0,6 - 0,2y(t).$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое можно записать как

$$\frac{dy}{0,6 - 0,2y} = dt.$$

Интегрируя его, получим

$$y = 3 - Ce^{-0,2t}.$$

Поскольку при $t = 0$ соли в сосуде не было, то $y(0) = 0$. Полагая в последней формуле, что $t = 0$, найдем $y(0) = 3 - C$; $C = 3$. Подставляя это значение C , получим $y = 3 - 3e^{-0,2t}$. При $t = 5$ в сосуде будет

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2 \cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1,9 \text{ кг.}$$

Пример 6.30. Найдите семейство линий, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой точке M , принадлежащей каждой из них, в p раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку M с началом координат. Из полученного семейства линий выделите ту, которая проходит через $M(2; 8)$ при $p = 3$.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка, принадлежащая одной из линий семейства. Тогда угловой коэффициент прямой, соединяющей точку M с началом координат, $k = \frac{y}{x}$. С другой стороны, согласно геометрическому смыслу производной угловой коэффициент касательной $k = y'$. Тогда по условию задачи $y' = p \cdot \frac{y}{x}$. Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим данное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = p \cdot \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = p \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = p \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln \left| \frac{y}{C} \right| = p \ln|x|, \quad \frac{y}{C} = x^p, \quad y = Cx^p.$$

В результате получили, что семейство линий, обладающих указанным в условии свойством, задается уравнением $y = Cx^p$. Выделим из данного уравнения линию, которая проходит через заданную точку $M(2; 8)$ при $p = 3$. После подстановки заданных значений в уравнение $y = Cx^p$ получим $8 = C \cdot 2^3$, $C = 1$. Окончательно получаем уравнение искомой линии: $y = x^3$.

Пример 6.31 (внутреннее питание глюкозой). Введение глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим функцию $y = y(t)$ как количество глюкозы в крови в момент времени t . Предположим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью v (г/мин). В то же время глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы. Пусть v_1 — скорость удаления глюкозы из кровенос-

ной системы, $y(0) = y_0$ — начальное количество глюкозы в крови. Аналитически опишите процесс питания глюкозой и найдите равновесное количество глюкозы в крови.

Решение. По условию задачи скорость изменения количества глюкозы в крови $y'(t) = v - v_1$, скорость удаления глюкозы из кровеносной системы $v_1 = ky(t)$, где k — положительная постоянная. Тогда $y'(t) = v - ky(t)$, или $y' + ky = v$. В результате получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Метод решения таких уравнений подробно изложен в п. 6.4. Согласно формулам из п. 6.4 решение имеет вид

$y = Ce^{-kt} + \frac{v}{k}$. Выразим постоянную C через начальное количество глюкозы в крови $y(0)$. При $t = 0$ из общего решения следует, что $y_0 = C + \frac{v}{k}$, откуда $C = y_0 - \frac{v}{k}$. Тогда общее решение можно записать в виде $y = y(x)$. Из последнего равенства видно, что при увеличении времени величина $y(t)$ приближается к пределу $\frac{v}{k}$. Это и есть равновесное количество глюкозы в крови.

Пример 6.32 (закон перехода вещества в раствор). Рассмотрим процесс перехода вещества в раствор. Известно, что при фиксированной температуре количество вещества, которое содержится в заданном объеме растворителя, не может превзойти некоторого числа P , определенного для насыщенного раствора каждого вещества. Также известно, что по мере приближения к насыщенному раствору уменьшается количество вещества, переходящего в раствор за единицу времени. Другими словами, чем больше вещества перешло в раствор, тем меньше скорость перехода. Задача состоит в том, чтобы в указанных условиях получить формулу, описывающую процесс перехода вещества в раствор.

Решение. Пусть $x(t)$ — количество вещества, перешедшего в раствор к моменту времени t . Тогда $x'(t)$ — скорость перехода, и согласно условию задачи можно написать: $x'(t) = \varphi(x)$, где $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow P$ ($x < P$). Эксперименты показывают, что для многих веществ функция $\varphi(x)$ пропорциональна разности $P - x$, т. е. $\varphi(x) = k(P - x)$. Тогда $x'(t) = k(P - x)$, где k ($k > 0$) — коэффициент пропорциональности. Последнее равенство можно записать в виде $x'(t) + kx = kP$ — неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Согласно формулам из п. 6.4 решение имеет вид $x = Ce^{-kt} + P$. Произвольную постоянную C найдем из условия: пусть t_0 — момент времени, с которого начался процесс перехода вещества в раствор, очевидно, что $x(t_0) = 0$. Тогда получаем $Ce^{-kt_0} + P = 0$, откуда $C = -Pe^{-kt_0}$. Следовательно,

$$x(t) = P(1 - e^{-k(t-t_0)}). \quad (6.31)$$

Значения величин k и P в формуле (6.31) определяются свойствами растворенного вещества и растворителя. Из (6.31) видно, что при любых $k > 0$ и P величина $x(t) \rightarrow P$, если $t \rightarrow \infty$. Вид функции $x(t)$ хорошо согласуется с экспериментальными данными, поэтому формулу (6.31) можно рассматривать как закон перехода вещества в раствор.

Задачи

1. Решите следующие дифференциальные уравнения первого порядка (если даны начальные условия, найдите частные решения):

- | | |
|--|--|
| 1) $yy' = x^2$; | 7) $(1 + x^2)dy - 2xydx = 0, y(0) = 1$; |
| 2) $xy' + y = y^2$; | 8) $y' = y^2 \cos x, y(0) = 2$; |
| 3) $(x + 1)y' = xy$; | 9) $x(1 + y^2)dx = y(1 + x^2)dy, y(1) = 0$; |
| 4) $(2x + 5)dy + ydx = 0, y(2) = 0$; | 10) $(1 + y)dx = (1 - x)dy, y(-2) = 3$; |
| 5) $yx - y' = 0, y(0) = 10$; | 11) $x(1 + y^2)dx = ydy, y(0) = 1$; |
| 6) $y' = (2x + 2)\sqrt{1 - y^2}, y(0) = 1$; | 12) $(4 - x^2)y' - 4y = 0, y(0) = 5$. |

Ответ: 1) $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 2C$; 2) $y = \frac{1}{xe^C - 1}$; 3) $y = \frac{Ce^x}{1 + x}$; 4) $y = \frac{C}{\sqrt{2x + 5}}$;

решение задачи Коши: $y = 0$; 5) $y = 10e^{x^2/2}$; 6) $y = 1 - 2\sin^2(x + 1/2x^2)$;
 7) $y = 1 + x^2$; 8) $y = \frac{2}{1 - 2\sin x}$; 9) $y^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$; 10) $y = \frac{x + 11}{x - 1}$; 11) $y = \sqrt{2e^{x^2} - 1}$;
 12) $y = \frac{5x + 10}{x - 2}$.

2. Решите следующие дифференциальные уравнения первого порядка:

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $y' = y/x + e^{y/x}$; | 5) $y' = \frac{x + y}{x - y}$; |
| 2) $(x + 2y)dx + ydy = 0$; | 6) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$; |
| 3) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$; | 7) $xyy' = y^2 + x^2 e^{y^2/x^2}$; |
| 4) $(x + y)dx + y dy = 0$; | 8) $(x^2 + y^2)dy - 2xydy = 0$. |

Ответ: 1) $y = -x \ln|C - \ln x|$; 2) $\ln|x + y| + \frac{x}{x + y} = C, y = -x$; 3) $x^2 + 2yx - y^2 = C$;
 4) $y = Ce^{-x} - x + 1$; 5) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2} - \arctg \frac{y}{x} + \ln|x| = C$; 6) $y^2 = (1 + Cx)x^2$; 7) $e^{-y^2/x^2} + 2\ln|x| = C$; $x \geq 0, y > 0$; $x = 0 (y \geq 0)$; $y = 0 (x \geq 0)$; 8) $x^2 + y^2 = Cy$.

3. Проинтегрируйте следующие линейные дифференциальные уравнения:

- | | |
|--------------------|---------------------------------------|
| 1) $y' + 2y = 1$; | 3) $y' - y \operatorname{tg} x = x$; |
| 2) $y' - xy = x$; | 4) $y' + y = 5x$; |

- 5) $xy' - y = x^3$; 10) $y' + y = e^x \sin x$;
 6) $y' + y - x = 5$; 11) $xy' + y = \sin x$;
 7) $xy' - 4y = 2x^2 - 3x$; 12) $xy' - y = x\sqrt{x}$;
 8) $y' - 4y = e^{2x}$; 13) $xy' + y = \ln x + 1$;
 9) $y' + y = e^x$; 14) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$.

Ответ: 1) $y = Ce^{-2x}$; 2) $y = Ce^{x/2} - 1$; 3) $y = \frac{C}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{2 \cos x}$; 4) $y = Ce^{-x} + 5x - 5$; 5) $y = Cx + x^2$; 6) $y = Ce^{-x} + x + 4$; 7) $y = Cx^4 - x^2 + x$; 8) $y = Ce^{4x} - \frac{e^{2x}}{2}$;
 9) $y = Ce^{-x} - \frac{e^x}{2}$; 10) $y = Ce^{-x} - \frac{e^x}{5}(\cos x - 2 \sin x)$; 11) $y = \frac{C - \cos x}{x}$; 12) $y = Cx + 2x\sqrt{x}$; 13) $y = \frac{C}{x} + \ln|x|$; 14) $y = \frac{x^2 + C}{\cos x}$.

4. Проинтегрируйте следующие дифференциальные уравнения:

- 1) $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$; 5) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$;
 2) $\frac{(y + 2)dx + (x + 1)dy}{(y + 2)^2} = 0$; 6) $(e^x y^2 + 3x^2)dx + (2ye^x + 3y^2)dy = 0$;
 3) $(x + y - 1)dx + (x + e^y)dy = 0$; 7) $(\cos x + x \cos y + e^y)dy +$
 4) $(x^2 - 3y)dx + (y^2 - 3x)dy = 0$; $+ (\sin y - y \sin x)dx = 0$.

Ответ: 1) $x^2 - xy + y^2 = C$; 2) $y(x + 1) + 2x = C$; 3) $\frac{x^2}{2} + xy - x + e^y = C$;
 4) $x^3 - 3xy + y^3 = \tilde{C}$; 5) $x^3 + 3x^2 y - y^3 = \tilde{C}$; 6) $x^3 + y^3 + e^x y^2 = C$; 7) $x \sin y + y \cos x + e^y = C$.

5. Проинтегрируйте следующие дифференциальные уравнения второго порядка:

- 1) $y'' = 5x^2 - 3x + 1$; 8) $y^3 y'' = -1$;
 2) $y'' = 3y'$; 9) $xy'' - y' = 0$;
 3) $y^3 y'' = -1$; 10) $y'' = 2yy'$;
 4) $yy'' + (y')^3 = 0$; 11) $y'' \cos^2 x = 1$;
 5) $(1 + x)y'' + y' = 0$; 12) $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$;
 6) $y'^2 + 1 = 2yy''$; 13) $2y'' = 3y^2$;
 7) $xy'' = 1 + x^2$; 14) $y'' = e^y$.

Ответ: 1) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{12} + C_1 x + C_2$; 2) $y = \frac{1}{3}e^{3x}C_1 + C_2$; 3) $y = C_2 e^{C_1 x}$;
 4) $y \ln|y| + C_1 y = x + C_2$, $y = C$; 5) $y = C_1 \ln|1 + x| + C_2$; 6) $2\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x C_1 + C_2$;

7) $y = x(C_2 - 1) + \frac{x^3}{6} + x \ln|x| + C_1$; 8) $y^2 = x^2 C_1 + 2x C_1 C_2 + C_1 C_2^2 - \frac{1}{C_1}$; 9) $y = \frac{1}{2} x^2 C_1 + C_2$; 10) $y = \sqrt{C_1} \operatorname{tg}(\sqrt{C_1}(x + C_2))$ при $C_1 > 0$; 11) $y = C_1 + x C_2 - \ln|\cos x|$; 12) $C_1 \ln|x| + C_2$; 13) $x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + C_1}} + C_2$; 14) $\ln \left| \frac{t - C}{t + C} \right| = \pm \sqrt{2} x + C_2$ при $C = C_1^2$ или $\frac{2}{C} \operatorname{arctg} \frac{t}{C} = \pm \sqrt{2} x + C_2$ при $C = -C_1^2$, где $t^2 = e^y + C_1$.

6. Проинтегрируйте следующие дифференциальные уравнения второго порядка:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $y'' - y' - 2y = 0$; | 5) $y'' - 2y' + 5y = 0$; |
| 2) $y'' - 2y' + y = 0$; | 6) $y'' - 4y' = 0$; |
| 3) $y'' + 3y' - 4y = 0$; | 7) $y'' + 6y' + 9y = 0$; |
| 4) $y'' - 4y' + 5y = 0$; | 8) $y'' - 6y' + 13y = 0$. |

Ответ: 1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$; 2) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$; 3) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$;
4) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; 5) $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 6) $y = C_1 + \frac{1}{4} C_2 e^{4x}$;
7) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$; 8) $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

7. Составьте линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка, если известны их характеристические уравнения:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $k^2 - 3k + 2 = 0$; | 4) $(k + 3)^2 = 0$; |
| 2) $k^2 - 3k = 0$; | 5) $k^2 - 2k + 10 = 0$. |
| 3) $k^2 - 9 = 0$; | |

Ответ: 1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' - 3y' = 0$; 3) $y'' - 9y = 0$; 4) $y'' + 6y' + 9y = 0$;
5) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

8. Составьте линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка, если известны корни их характеристических уравнений, и запишите общие решения:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------|
| 1) $k_1 = 2, k_2 = 5$; | 4) $k_1 = k_2 = -2$; |
| 2) $k_1 = -2i, k_2 = 2i$; | 5) $k_1 = 0, k_2 = 2$. |
| 3) $k_1 = 1 - 2i, k_2 = 1 + 2i$; | |

Ответ: 1) $y'' - 7y' + 10y = 0$; 2) $y'' + 4y = 0$; 3) $y'' - 2y' + 5y = 0$; 4) $y'' + 4y' + 4y = 0$; 5) $y'' - 2y' = 0$.

9. Определите вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $y'' - 4y = 3$; | 4) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$; |
| 2) $y'' + y = 3x$; | 5) $y'' + 4y = \sin 2x$. |
| 3) $y'' + 2y' + y = e^{4x}$; | |

Ответ: 1) $y_* = A$; 2) $y_* = Ax + B$; 3) $y_* = Ae^{4x}$; 4) $y_* = Ax^2 e^{-x}$; 5) $y_* = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$.

10. Проинтегрируйте следующие дифференциальные уравнения второго порядка:

$$1) y'' - y' - 2y = x^2 - x;$$

$$6) y'' - 4y' = 3;$$

$$2) y'' - 2y' + y = 10e^x;$$

$$7) y'' + 6y' + 9y = \cos x - 3\sin x;$$

$$3) y'' + 3y' - 4y = 6x^2 - 7x + 8;$$

$$8) y'' - 6y' + 5y = 27e^{2x};$$

$$4) y'' - 4y' + 5y = 5e^{5x};$$

$$9) y'' + 100y = \sin 2x;$$

$$5) y'' - 2y' + 5y = 3\sin 2x;$$

$$10) y'' + 2y' = 1 - x.$$

Ответ: 1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{x^2}{2} + x - 1$; 2) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 5x^2 e^x$; 3) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{25}{8}$; 4) $y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2} e^{5x} (\cos^2 x + \sin^2 x)$; 5) $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{12}{17} \cos 2x + \frac{3}{17} \sin 2x$; 6) $y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{3x}{4}$; 7) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{1}{50} (13 \cos x - 9 \sin x)$; 8) $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - 9e^{2x}$; 9) $y = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x + \frac{1}{96} \sin 2x$; 10) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4} (x^2 - 3x)$.

11. Используя дифференциальные уравнения, решите следующие задачи:

1) угловой коэффициент касательной к кривой равен ординате точки касания. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку (0; 3);

2) найдите уравнение кривой, проходящей через точку (2; 4), зная, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющего эту точку с началом координат;

3) найдите кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно оси абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная;

4) найдите кривую, зная, что отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания;

5) найдите уравнение кривой, проходящей через точку (1; 3), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат;

6) найдите кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу вдвое меньше абсциссы точки касания;

7) тело движется со скоростью v , пропорциональной квадрату времени. Установите зависимость между пройденным путем s и временем t , если известно, что при $t = 0$ $s = s_0$;

8) найдите линию, проходящую через точку (1; 4), у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания;

9) определите путь s , пройденный телом за время t , если известно, что скорость в каждый момент времени пропорциональна пройденному пути. Тело проходит 30 м за 1 мин, а 90 м — за 2 мин;

10) определите, за какое время тело, нагретое до 1000°C , охладится до 300°C в комнате с $t = 200^\circ\text{C}$, если до 600°C оно охлаждается за 20 мин. По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой среды;

11) через сосуд емкостью a л, наполненный водным раствором соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени вливается b л чистой воды и вытекает такое же количество раствора. Найдите закон, по которому изменяется содержание соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд;

12) в баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 5 л/мин. Поступающая в бак вода перемешивается с имеющимся раствором, и смесь вытекает с той же скоростью. Определите, сколько соли останется в баке через 1 ч.

Ответ: 1) $y = 3e^x$; 2) $y = 0,5x^3$; 3) $y = -2S/(x + 2S \cdot C)$; 4) $y = C/x$, $C \neq 0$; 5) $y = 3\sqrt{x}$; 6) $y = Cx^2$; 7) $s = s_0 + kt^3/3$; 8) $xy = 4$; 9) $s(t) = 10 \cdot 3^t$; 10) 1 ч; 11) $x_t' = -\frac{b}{a}x$, $x = C_0 e^{-\frac{b}{a}t}$, C_0 — первоначальное количество соли; 12) 0,5 кг.

Задачи для самостоятельного решения

1. Установите тип дифференциального уравнения и найдите его общее решение (общий интеграл):

1) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$;

9) $xy' - 2y = x^3 \cos x$;

2) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$;

10) $y' \ln x - \frac{y}{x} = 1 - \ln x$;

3) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$;

11) $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$;

4) $xdy - \left(y - x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right)dx = 0$;

12) $y'' = \frac{6}{y^3}$;

5) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$;

13) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$;

6) $(4xy + x^2)dy - 2y^2dx = 0$;

14) $y'' - y = (x - 1)e^{2x}$;

7) $xy' - 4y = 2x^2 - 3x$;

15) $y'' + 5y' + 6y = -50 \sin 4x$.

8) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$;

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

1) $(1 + y^2)dx = xudy$; $y = 1$ при $x = 2$;

2) $x^2y' + xy + 1 = 0$; $y = 3$ при $x = 1$;

- 3) $y' - 2y = e^{-x}$; $y = -1$ при $x = 0$;
 4) $xy' - 2y = 2x^4$; $y = 8$ при $x = 1$;
 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y = 6$, $y' = 10$ при $x = 0$;
 6) $y'' + 4y = 2\cos 2x$; $y = 0$, $y' = 4$ при $x = 0$.

3. Решите дифференциальные уравнения (если даны начальные условия, то найдите частные решения):

- 1) $\sqrt{9 - x^2} dy - ydx = 0$, $y(1,5) = 1$; 5) $2xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$;
 2) $y' - y\tg x = \tg x$; 6) $y'' + 3y' + 2y = 5e^{5x}$;
 3) $(x-2)dy + 3ydx = 0$; 7) $y'' = \cos 5x$;
 4) $y'' + 7y' = 0$; 8) $y' = y^2 \cos x$, $y(0) = 2$.

4. Решите дифференциальные уравнения (если даны начальные условия, то найдите частные решения):

- 1) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$, $y(0) = 0$; 5) $y' = e^{x^3} x^2$;
 2) $y' + y = e^x$; 6) $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$;
 3) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 7) $y'' - 4y' + 3y = 2x + 1$;
 4) $y'' = 5y'$; 8) $y'y = \sin x$.

5. Решите дифференциальные уравнения (если даны начальные условия, то найдите частные решения):

- 1) $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$, $y(0) = 0$; 5) $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$;
 2) $y' \cos^2 x + y = \tg x$; 6) $y'' = e^{2x}$;
 3) $y'' - 2y' + 2y = 0$; 7) $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$;
 4) $x\sqrt{25 - y^2} = e^{-x}y'$, $y(0) = 0$; 8) $(y - 5)dx + 4xdy = 0$.

6. Решите дифференциальные уравнения (если даны начальные условия, то найдите частные решения):

- 1) $x\sqrt{25 - y^2} = e^{-x}y'$, $y(0) = 0$; 5) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$;
 2) $y' \sin x - y \cos x = 1$; 6) $y'' = 4y'$;
 3) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 7) $(x^2 + y^2)dx - 2x^2 dy = 0$;
 4) $x(1 + y^2)dx = y(1 + x^2)dy$; 8) $(x-5)dy + 4ydx = 0$.

7. Используя дифференциальные уравнения, решите следующие задачи:

1) согласно опытам в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Определите, через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия;

2) скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найдите закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t = 0$ было m_0 г радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 годам;

3) в куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4,5 \cdot 10^9$ лет и что

при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определите возраст горной породы, считая, что в момент образования горная порода не содержала свинца, а также пренебрегая наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана);

4) модель роста численности населения (модель Мальтуса) описывается дифференциальным уравнением $x'(t) = kx(t)$, где $x = x(t)$ — численность населения в текущий момент времени t ; k — показатель роста. Определите численность населения в момент времени t с показателем $k = k(x)$, где: а) $k(x) = l - x$; б) $k(x) = \ln(l/x)$, и начальным условием $x(0) = x_0$ при $0 < x_0 < l$.

5) в модели демографического взрыва, описываемой дифференциальным уравнением $x'(t) = cx^2(t)$, где $x = x(t)$ — численность населения в текущий момент времени t , $c > 0$, найдите зависимость между начальным значением численности населения x_0 и моментом взрыва T (конечным моментом времени, при котором численность населения достигает бесконечности);

6) планета Адиабата имеет точно такие же форму, размеры и массу, как и Земля, но ее атмосфера состоит из газа, давление и плотность которого связаны по адиабатическому закону $p = Cr^{4/3}$, причем на поверхности планеты $p = p_0 = 10 \text{ Н/см}^2 = 1 \text{ атм}$ и $\rho = \rho_0 = 0,0012 \text{ г/см}^3$ (т. е. как на Земле). Найдите высоту атмосферы этой планеты;

7) найдите семейство линий, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой точке M , принадлежащей каждой из них, в p раз больше абсциссы этой точки. Из полученного семейства линий выделите ту, которая проходит через $M(4; 2)$ при $p = 2$.

Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля

1. Багаж объемом $A_1(t)$ условных чемоданов транспортер перемещает в пункт накопления со скоростью, пропорциональной с коэффициентом 0,6 объему багажа $A_1(t)$. Из пункта накопления второй транспортер перемещает багаж в первоначально пустой багажный отсек авиалайнера со скоростью, пропорциональной с коэффициентом 0,5 объему багажа $A_2(t)$ в пункте накопления. Постройте зависимости от времени t объемов багажа (условных чемоданов) в исходном пункте транспортировки, пункте накопления и багажном отсеке авиалайнера, если $A_1(0) = 1000$, $A_2(0) = 0$.

2. Динамика противостояния двух армий описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \end{cases}$$

($a > 0$, $b > 0$). Определите, при каких начальных данных $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ победит первая армия (т. е. численность y второй армии обратится в 0 при некотором $t > 0$). Определите, при каких условиях победит вторая армия.

3. Функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $yy'' - 2(y')^2 = 0$ и условиям $y(1) = 1$, $y(-1) = 0,5$. Найдите $y(2022)$.

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7.1. Двойные интегралы: определение и свойства

Двойной интеграл представляет собой обобщение определенного интеграла на случай функции двух независимых переменных, определенной в замкнутой ограниченной плоской области.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в замкнутой ограниченной области D координатной плоскости Oxy . Разобьем область D произвольным образом на n частичных областей $D_i, i = \overline{1, n}$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями соответственно $\Delta S_i, i = \overline{1, n}$. В каждой из частичных областей D_i выберем по произвольной точке $M_i(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$, вычислим значения функции $z = f(x, y)$ и составим сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (7.1)$$

Суммы вида (7.1) называются *интегральными суммами* для функции $z = f(x, y)$ по области D . *Диаметром* $d(D)$ области называется наибольшее расстояние между граничными точками этой области. Обозначим через λ наибольший из диаметров частичных областей $D_i, i = \overline{1, n}$, т. е. $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$, и назовем его *диаметром разбиения*.

Конечный предел интегральных сумм (7.1) для любой последовательности разбиений области D при стремлении диаметра разбиения к нулю (при этом неограниченно увеличивается число n), если он существует и не зависит ни от способа разбиения области D на частичные области, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$, в пределах каждой из них, называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint_D f(x, y) ds$. Таким образом, по определению

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (7.2)$$

Функция $z = f(x, y)$ называется в этом случае *интегрируемой по области D* , x и y — переменными интегрирования, ds — элементом площади.

Если разбиение области D проводить прямыми, параллельными осям координат (в дальнейшем всегда будем предполагать это), то частичные

области D_i будут прямоугольниками с измерениями $\Delta x_i, \Delta y_i$ и, следовательно, $\Delta s_i = \Delta x_i \Delta y_i, i = \overline{1, n}$. Тогда $ds = dxdy$ и $\iint_D f(x, y)ds = \iint_D f(x, y)dxdy$.

Замечание 7.1. Если в (7.2) положить $f(x, y) \equiv 1$ при $(x, y) \in D$, то получим выражение площади S области D в виде двойного интеграла: $S = \iint_D dxdy$.

Важнейшие классы интегрируемых функций устанавливают следующие теоремы.

Теорема 7.1. Всякая функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D , интегрируема в этой области.

Теорема 7.2. Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой ограниченной области D и непрерывна в D всюду, кроме некоторого множества точек нулевой площади, то она интегрируема в этой области.

Замечание 7.2. Далее будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования, которые согласно теореме 7.1 и интегрируемы в данной области.

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции привела к геометрической интерпретации определенного интеграла, а задача о вычислении объема цилиндрического тела приводит к геометрической интерпретации двойного интеграла. Двойной интеграл от неотрицательной непрерывной функции численно равен объему соответствующего цилиндрического тела, которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$, снизу — замкнутой областью D плоскости Oxy , с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz , а направляющей служит граница области D (рис. 7.1). Такое тело называется *цилиндрическим*.

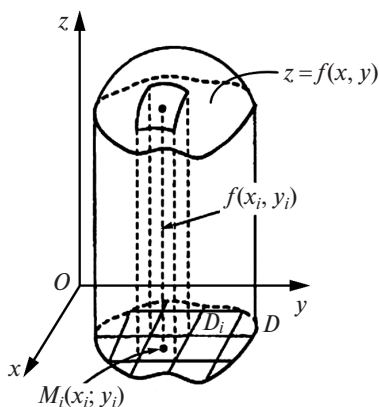


Рис. 7.1

Свойства двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Дадим их ниже.

1°. Если функция $z = f(x, y)$ интегрируема в области D и c — постоянная, то
$$\iint_D c \cdot f(x, y) ds = c \iint_D f(x, y) ds.$$

2°. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D , то
$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) ds = \iint_D f(x, y) ds \pm \iint_D g(x, y) ds.$$
 Совокупность этих двух свойств называется *линейностью* интеграла.

3°. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и область D может быть разбита на две области D_1 и D_2 , не имеющие общих внутренних точек, то
$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds.$$
 Это свойство называется *аддитивностью* интеграла. Оно справедливо для любого конечного числа областей.

4°. Если для интегрируемых в области D функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) \leq g(x, y)$, то
$$\iint_D f(x, y) ds \leq \iint_D g(x, y) ds.$$
 Это свойство называется *монотонностью* интеграла.

5° (оценка интеграла по модулю). Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D , то справедлива оценка
$$\left| \iint_D f(x, y) ds \right| \leq \iint_D |f(x, y)| ds.$$

6° (оценка интеграла). Если интегрируемая в области D функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству $m \leq f(x, y) \leq M$, то
$$mS \leq \iint_D f(x, y) ds \leq MS,$$
 где

S — площадь области D ; m и M — некоторые постоянные.

7° (теорема о среднем). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D , то в этой области найдется такая точка (u, v) , что
$$\iint_D f(x, y) dxdy = f(u, v)S,$$
 где S — площадь области D .

7.1.1. Вычисление двойного интеграла

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D и ограничена слева и справа отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, $a < b$ (эти отрезки прямых могут вырождаться в точки), а снизу и сверху — непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $x \in [a; b]$. Если прямая, проведенная через любую внутреннюю точку отрезка $[a; b]$ параллельно оси Oy , пересекает каждую из кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ только один раз, то область D называется *правильной в направлении оси Oy* (рис. 7.2, 7.3).

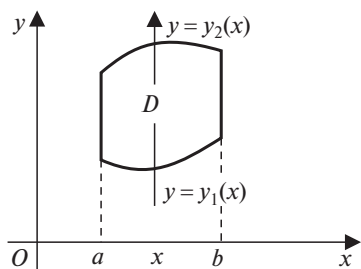


Рис. 7.2

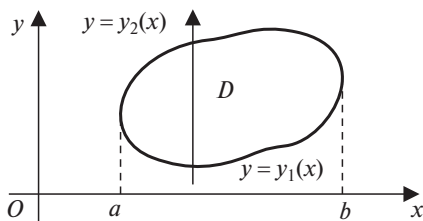


Рис. 7.3

В случае области, правильной в направлении оси Oy , вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла вида (7.3), т. е. к последовательному вычислению двух определенных интегралов по каждой из переменных в отдельности:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (7.3)$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ по пере-

менной y при произвольном фиксированном значении переменной x , а пределы интегрирования внутреннего интеграла есть функции от x . Затем вычисляется внешний интеграл по переменной x , пределы интегрирования внешнего интеграла постоянны.

Пусть область интегрирования D ограничена снизу и сверху отрезками прямых $y = c$ и $y = d$, $c < d$ (эти отрезки прямых могут вырождаться в точки), а слева и справа — непрерывными кривыми $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, $x_1(y) \leq x_2(y)$ для $y \in [c; d]$. Если прямая, проведенная через любую внутреннюю точку отрезка $[c; d]$ параллельно оси Ox , пересекает каждую из кривых только один раз, то область D называется *правильной в направлении оси Ox* (рис. 7.4, 7.5). В этом случае для вычисления двойного интеграла справедливо следующее равенство:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (7.4)$$

Вычисление двойного интеграла в случае (7.4), т. е. в случае области, правильной в направлении оси Ox , сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов по каждой из переменных в отдельности.

Сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ по переменной x при произвольном фиксированном значении переменной $y = y_2(x)$, а пределы интегрирования внутреннего интеграла есть функции от y . Затем вычисляется внешний интеграл по переменной y , пределы интегрирования внешнего интеграла постоянны.

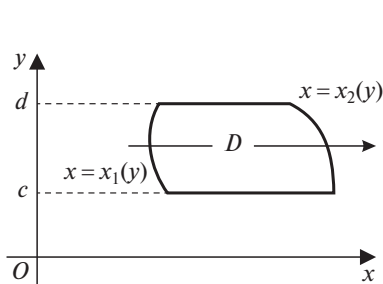


Рис. 7.4

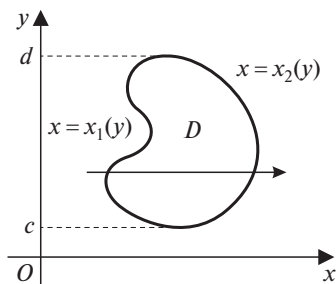


Рис. 7.5

Замечание 7.3. Если область D является правильной в направлении оси Ox и в направлении оси Oy , то область называется *правильной*.

Для вычисления двойного интеграла по правильной области применимы формулы (7.3) и (7.4) и справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Замечание 7.4. В случае более сложных границ (рис. 7.6), чем приведенные на рис. 7.2–7.5, область интегрирования D разбивается прямыми, проведенными параллельно осям координат через характерные точки области D , на конечное число частичных областей рассмотренных типов. Так, область D на рис. 7.6, а разбита на пять частичных областей, а на рис. 7.6, б – на четыре частичные области, и интеграл по области D в силу свойства 3° (см. п. 7.1, с. 274) равен сумме интегралов по указанным частичным областям.

Замечание 7.5. Наиболее простой вид формулы (7.3) и (7.4) принимают в случае, когда D – прямоугольник, ограниченный отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (7.5)$$

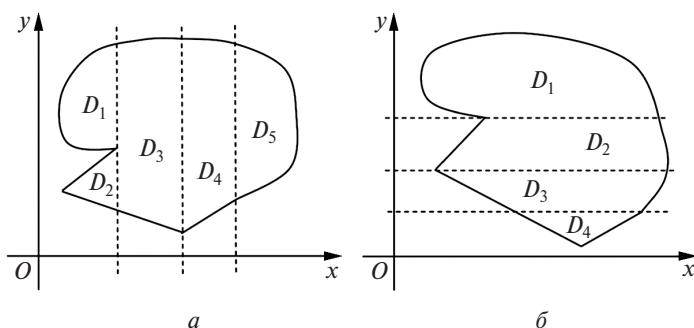


Рис. 7.6

Пример 7.1. Вычислите двойной интеграл $\iint_D (2xy + 6) dx dy$, если область D ограничена прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 3$.

Решение. Область интегрирования D есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (рис. 7.7).

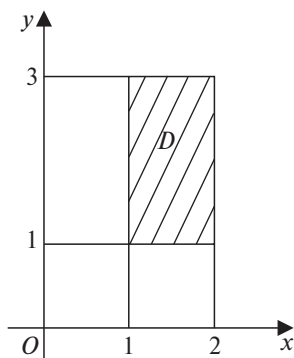


Рис. 7.7

При вычислении заданного интеграла воспользуемся формулой (7.5):

$$\begin{aligned} \iint_D (2xy + 6) dx dy &= \int_1^2 dx \int_1^3 (2xy + 6) dy = \int_1^2 dx \left(2x \cdot \frac{y^2}{2} + 6y \right) \Big|_1^3 = \int_1^2 dx (x \cdot y^2 + 6y) \Big|_1^3 = \\ &= \int_1^2 (9x + 18 - x - 6) dx = 4 \int_1^2 (2x + 3) dx = 4 \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^2 = 4(x^2 + 3x) \Big|_1^2 = 4(4 + 6 - 1 - 3) = 24. \end{aligned}$$

Пример 7.2. Вычислите интеграл $\iint_D (3-5y)dx dy$, если область D ограничена параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = 2x - 1$.

Решение. Область интегрирования D , изображенная на рис. 7.8, является правильной в направлении оси Oy . Найдем координаты точек пересечения A и B параболы и прямой, решая систему уравнений $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$

Из решения системы следует, что $A(-3; -7)$ и $B(1; 1)$ — искомые точки пересечения. Из рис. 7.8 видно, что вычисление интеграла по заданной области D целесообразно вести по формуле (7.3), согласно которой внутренний интеграл берется по переменной y , а внешний — по переменной x . В этом случае получим один повторный интеграл. В свою очередь, вычисление по формуле (7.4) приведет к сумме двух повторных интегралов.

Для вычисления заданного двойного интеграла воспользуемся формулой (7.3), предварительно определив пределы интегрирования.

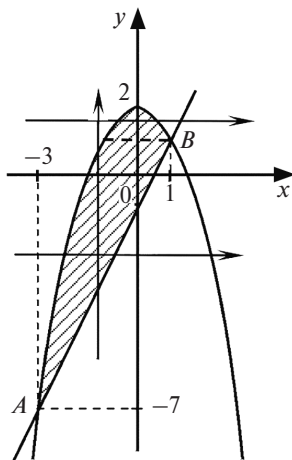


Рис. 7.8

Пределы внешнего интеграла по переменной x определим, проектируя область интегрирования D на ось Ox , — это абсцисса точки A , $x = -3$ (нижний предел интегрирования) и абсцисса точки B , $x = 1$ (верхний предел интегрирования). Пределы интегрирования внутреннего интеграла по переменной y определяют уравнения линий: $y = 2x - 1$ (нижний предел интегрирования) и $y = 2 - x^2$ (верхний предел интегрирования).

Следовательно, согласно формуле (7.3) будем иметь

$$\begin{aligned}
 \iint_D (3-5y) dx dy &= \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (3-5y) dy = \int_{-3}^1 dx \left(3y - \frac{5}{2} y^2 \right) \Big|_{2x-1}^{2-x^2} = \\
 &= \int_{-3}^1 \left(3(2-x^2) - \frac{5}{2}(2-x^2)^2 - 3(2x-1) + \frac{5}{2}(2x-1)^2 \right) dx = \\
 &= \int_{-3}^1 \left(6-3x^2-10+10x^2 - \frac{5}{2}x^4 - 6x + 3 + 10x^2 - 10x + \frac{5}{2} \right) dx = \\
 &= \int_{-3}^1 \left(-\frac{5}{2}x^4 + 17x^2 - 16x + \frac{3}{2} \right) dx = \left(-\frac{1}{2}x^5 + \frac{17}{3}x^3 - 8x^2 + \frac{3}{2}x \right) \Big|_{-3}^1 = \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{17}{3} - 8 + \frac{3}{2} - \frac{243}{2} + 153 + 72 + \frac{9}{2} = \frac{320}{3}.
 \end{aligned}$$

Пример 7.3. Вычислите интеграл $\iint_D (4x-2) dx dy$, если область D ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$ и $y = 3$.

Решение. Область интегрирования изображена на рис. 7.9; она является правильной в направлении оси Ox . Точки пересечения прямых — $A(1; 2)$, $B(1.5; 3)$, $C(3; 3)$, $E(2; 2)$. Из рис. 7.9 видно, что вычисление двойного интеграла целесообразнее производить по формуле (7.4), согласно которой внутренний интеграл берется по переменной x , а внешний — по переменной y .

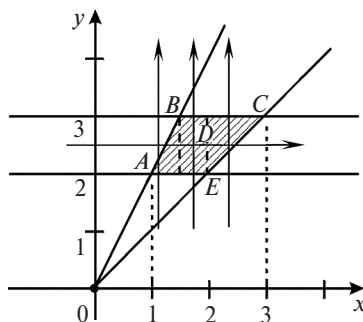


Рис. 7.9

В таком случае получим один повторный интеграл (все прямые, параллельные оси Ox и проходящие через внутренние точки отрезка $[2; 3]$, входят в область интегрирования через прямую $y = 2x$ и выходят из области через

прямую $y = x$); при другом порядке интегрирования мы получили бы сумму трех повторных интегралов.

Итак, для вычисления заданного двойного интеграла воспользуемся формулой (7.4), предварительно определив пределы интегрирования. Пределы внешнего интеграла по переменной y определим, проектируя область интегрирования D на ось Oy : $y = 2$ (нижний предел интегрирования) и $y = 3$ (верхний предел интегрирования). Пределы внутреннего интеграла по переменной x находим из уравнений линии входа $y = 2x$ и линии выхода $y = x$, если их разрешить относительно x : $x = y/2$ (нижний предел интегрирования) и $x = y$ (верхний предел интегрирования).

Следовательно, согласно формуле (7.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_D (4x - 2) dx dy &= \int_2^3 dy \int_{y/2}^y (4x - 2) dx = \int_2^3 dy (2x^2 - 2x) \Big|_{y/2}^y = \\ &= \int_2^3 \left(2y^2 - 2y - \frac{y^2}{2} + y \right) dy = \int_2^3 \left(\frac{3}{2}y^2 - y \right) dy = \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_2^3 = \frac{27}{2} - \frac{9}{2} - 4 + 2 = 7. \end{aligned}$$

Пример 7.4. Вычислите интеграл $\iint_D (14x^2y + 24xy^2 - 4x + 10y + 6) dx dy$, если область D ограничена параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$ и $x = 1$.

Решение. Область интегрирования D изображена на рис. 7.10. Точки пересечения линий, ограничивающих область D , находим из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 0, \end{cases} \quad O(0; 0); \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x = 1, \end{cases} \quad A(1; 1); \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = 1, \end{cases} \quad B(1; 0).$$

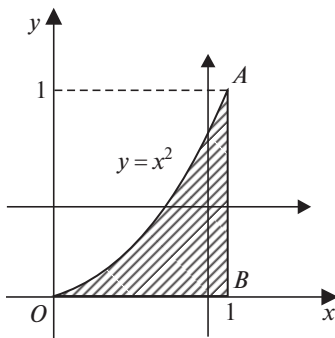


Рис. 7.10

Область интегрирования является правильной, и применение для вычисления заданного двойного интеграла формулы (7.3) или (7.4) приведет к вычислению лишь одного повторного интеграла.

Применяя формулу (7.3), получим

$$\begin{aligned}\iint_D (14x^2y + 24xy^2 - 4x + 10y + 6) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (14x^2y + 24xy^2 - 4x + 10y + 6) dy = \\ &= \int_0^1 (7x^2y^2 + 8xy^3 - 4xy + 5y^2 + 6y) \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 (7x^6 + 8x^7 - 4x^3 + 5x^4 + 6x^2) dx = \\ &= (x^7 + x^8 - x^4 + x^5 + 2x^3) \Big|_0^1 = 4.\end{aligned}$$

Применяя формулу (7.4), получим

$$\begin{aligned}\iint_D (14x^2y + 24xy^2 - 4x + 10y + 6) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (14x^2y + 24xy^2 - 4x + 10y + 6) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{14}{3} x^3 y + 12x^2 y^2 - 2x^2 + 10xy + 6x \right) \Big|_{\sqrt{y}}^1 dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{14}{3} y + 12y^2 - 2 + 10y + 6 - \frac{14}{3} y^{5/2} - 12y^3 + 2y - 10y^{3/2} - 6y^{1/2} \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{50}{3} y + 12y^2 - 12y^3 - \frac{14}{3} y^{5/2} - 10y^{3/2} - 6y^{1/2} + 4 \right) dy = \\ &= \left(\frac{25}{3} y^2 + 4y^3 - 3y^4 - \frac{14}{3} \cdot \frac{2}{7} y^{7/2} - 10 \cdot \frac{2}{5} y^{5/2} - 6 \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} + 4y \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{25}{3} + 4 - 3 - \frac{4}{3} - 4 - 4 + 4 = 4.\end{aligned}$$

Пример 7.5. Вычислите интеграл $\iint_D (4x + 2) dx dy$, если область D ограничена прямыми $y = 2x + 2$, $y = 2 - x$, $y = 0$.

Решение. Областью интегрирования D является треугольник ABC , который изображен на рис. 7.11. Координаты его вершин — $A(-1; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; 0)$ — найдены из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + 2, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 2, \\ y = 2 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - x, \\ y = 0. \end{cases}$$

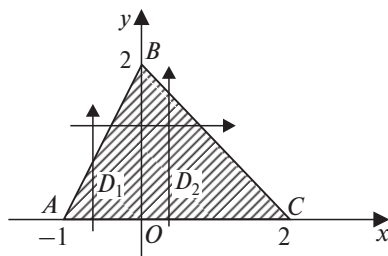


Рис. 7.11

Область D является правильной в направлении оси Ox , поэтому заданный двойной интеграл может быть вычислен с использованием формулы (7.4). Чтобы вычислить интеграл, проходя область D в направлении оси Oy (используя формулу (7.3)), необходимо разбить область D на две части (см. замечание 7.3): D_1 — треугольник ABO (входим в область через прямую $y = 0$, выходим через прямую $y = 2x + 2$); D_2 — треугольник OBC (входим в область через прямую $y = 0$, выходим через прямую $y = 2 - x$). Тогда получим

$$\begin{aligned}
 \iint_D (4xy + 2) dx dy &= \iint_{D_1} (4xy + 2) dx dy + \iint_{D_2} (4xy + 2) dx dy = \\
 &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{2x+2} (4xy + 2) dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4xy + 2) dy = \\
 &= \int_{-1}^0 \left((2xy^2 + 2y) \Big|_0^{2x+2} \right) dx + \int_0^2 \left((2xy^2 + 2y) \Big|_0^{2-x} \right) dx = \\
 &= \int_{-1}^0 \left(2x(2x+2)^2 + 2(2x+2) \right) dx + \int_0^2 \left(2x(2-x)^2 + 2(2-x) \right) dx = \\
 &= \int_{-1}^0 (8x^3 + 16x^2 + 8x + 4x + 4) dx + \int_0^2 (2x^3 - 8x^2 + 8x - 2x + 4) dx = \\
 &= \int_{-1}^0 (8x^3 + 16x^2 + 12x + 4) dx + \int_0^2 (2x^3 - 8x^2 + 6x + 4) dx = \\
 &= \left(2x^4 + \frac{16}{3}x^3 + 6x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 = \\
 &= -2 + \frac{16}{3} - 6 + 4 + 8 - \frac{64}{3} + 12 + 8 = 8.
 \end{aligned}$$

Вычислим интеграл вторым способом, применяя формулу (7.4):

$$\begin{aligned}
 \iint_D (4xy + 2) dx dy &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y-2}{2}}^{2-y} (4xy + 2) dx = \int_0^2 \left((2x^2 y + 2x) \Big|_{\frac{y-2}{2}}^{2-y} \right) dy = \\
 &= \int_0^2 \left(2y(2-y)^2 + 2(2-y) - 2y \left(\frac{y-2}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{y-2}{2} \right) dy = \\
 &= \int_0^2 \left(8y - 8y^2 + 2y^3 + 4 - 2y - \frac{1}{2}(y^3 - 4y^2 + 4y) - y + 2 \right) dy = \\
 &= \int_0^2 \left(\frac{3}{2}y^3 - 6y^2 + 3y + 6 \right) dy = \left(\frac{3}{8}y^4 - 2y^3 + \frac{3}{2}y^2 + 6y \right) \Big|_0^2 = 6 - 16 + 6 + 12 = 8.
 \end{aligned}$$

Пример 7.6. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^x f(x, y) dy.$$

Решение. Пределы интегрирования повторного интеграла определяют уравнения границ области интегрирования D . Внутренний интеграл по переменной y и его пределы определяют уравнения линий, ограничивающих область D снизу и сверху: $y = \sqrt{2x - x^2}$ и $y = x$.

Первое уравнение преобразуется к виду $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $y \geq 0$, или $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, и определяет верхнюю половину окружности с центром в точке $(1; 0)$ и радиусом 1. Второе уравнение определяет биссектрису первого координатного угла, так как $y \geq 0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x - x^2}, \\ y = x, \end{cases}$$

находим, что окружность и биссектриса пересекаются в точках $O(0; 0)$ и $B(1; 1)$.

Пределы интегрирования внешнего интеграла определяют уравнения прямых $x = 1$ и $x = 2$, отрезки которых ограничивают область интегрирования слева и справа соответственно. Область интегрирования D изображена на рис. 7.12 штриховкой.

Изменим порядок интегрирования в интеграле I , пройдя область D в направлении оси Ox . Из рис. 7.12 видно, что область интегрирования D следует разбить на две части: D_1 и D_2 , и интеграл I запишется в виде суммы двух двойных интегралов по указанным областям:

$$I = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

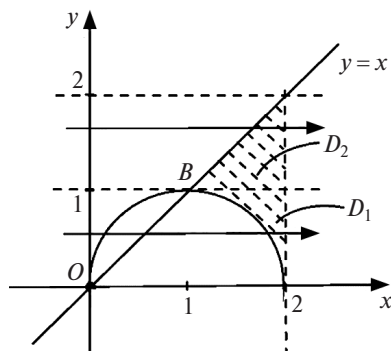


Рис. 7.12

Сведем указанные двойные интегралы к повторным. Для этого определим пределы интегрирования в каждом из них.

1. **Область D_1 .** Для внутреннего интеграла (по переменной x) нижний предел интегрирования получим, разрешив уравнение окружности относительно x ($x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$, $x \geq 1$), верхний предел интегрирования — из уравнения прямой $x = 2$. Для внешнего интеграла (по переменной y) нижний предел интегрирования равен 0, верхний предел интегрирования равен 1. Таким образом,

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx.$$

2. **Область D_2 .** Для внутреннего интеграла (по переменной x) нижний предел интегрирования получим, разрешив уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов относительно переменной x ($x = y$), верхний предел интегрирования — из уравнения прямой $x = 2$. Для внешнего интеграла (по переменной y) нижний предел интегрирования равен 1, верхний предел интегрирования равен 2. Таким образом,

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

Тогда исходный двойной интеграл будет следующим:

$$I = \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

7.1.2. Замена переменных в двойных интегралах

Метод замены переменной, являющийся одним из распространенных приемов вычисления определенных интегралов, широко используется при вычислении двойных интегралов. Однако, прежде чем перейти к вопросу о замене переменных в двойном интеграле, рассмотрим вопросы, связанные с преобразованиями (отображениями) плоских областей. Пусть заданы две плоскости с декартовыми координатами x, y и u, v , соответственно, и в плоскости Oxy выделена некоторая замкнутая ограниченная область D с границей L , а в плоскости Ouv — замкнутая ограниченная область G с границей I (рис. 7.13). Предположим, что в области G определены функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

такие, что, когда точка $(u; v)$ пробегает область G , соответствующая точка $(x; y)$ пробегает всю область D .

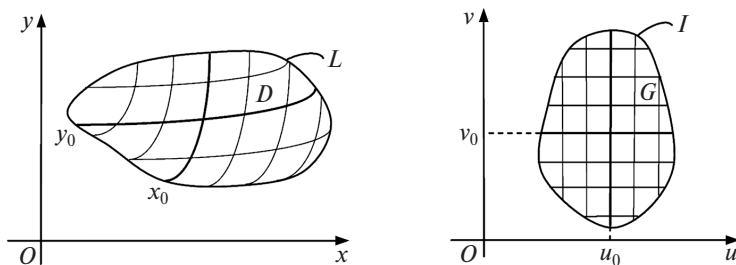


Рис. 7.13

Предположим также, что указанные функции таковы, что различным точкам $(u; v)$ отвечают различные точки $(x; y)$ и каждая точка $(x; y)$ отнесена лишь к одной точке $(u; v)$, тогда уравнения $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ однозначно разрешимы относительно u и v : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Таким образом, между областями D и G устанавливается взаимно однозначное соответствие, при этом точкам границы L соответствуют точки границы I и наоборот. Предположим далее, что функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ и $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в областях G и D соответственно. Тогда функциональный определитель (якобиан) имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (7.6)$$

Будем считать, что якобиан (7.6) во всех точках области G отличен от нуля, следовательно, сохраняет в G постоянный знак.

Рассмотрим интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, где область D ограничена контуром L , а функция $f(x, y)$ непрерывна в этой области, включая границу, или ограничена в ней и непрерывна всюду, кроме точек множества нулевой площади. Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, определяющие соответствие между точками области D и области G , удовлетворяют описанным ранее условиям для формулы (7.6). Тогда имеет место формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (7.7)$$

В частности, в этом случае имеет место формула для вычисления площади области D :

$$S = \iint_G |J| du dv. \quad (7.8)$$

Пример 7.7. Вычислите двойной интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ по области D плоскости Oxy , ограниченной линиями $y = x - 1$, $y = x + 2$, $y = -x - 2$, $y = -x + 3$.

Решение. Выполним замену системы $\begin{cases} u = y - x, \\ v = y + x. \end{cases}$ Тогда прямые $y = x - 1$,

$y = x + 2$ перейдут соответственно в прямые $u = -1$, $u = 2$ плоскости Ouv , а прямые $y = -x - 2$, $y = -x + 3$ — соответственно в прямые $v = -2$, $v = 3$ этой же плоскости. При этом область D отобразится в прямоугольник G плоскости Ouv , для которого $-1 \leq u \leq 2$, $-2 \leq v \leq 3$. Из системы находим

$$\begin{cases} x = -\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \\ y = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}. \end{cases}$$

Далее по формуле (7.6) вычислим якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \text{ тогда } |J| = \frac{1}{2}.$$

Согласно формуле (7.7)

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y) dx dy &= \iint_G v \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 du \int_{-2}^3 v dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \left(\frac{v^2}{2} \Big|_{-2}^3 \right) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \frac{5}{2} du = \frac{5}{4} u \Big|_{-1}^2 = \frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4}.\end{aligned}$$

Пример 7.8. Вычислите двойной интеграл $\iint_D x^2 y dx dy$ по области D

плоскости Oxy , ограниченной частью эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенной в верхней полуплоскости.

Решение. Для вычисления интеграла выполним замену переменных: $x = ar \cos t$, $y = br \sin t$. При этом область интегрирования D переходит в прямоугольник G : $0 \leq t \leq \pi$, $0 \leq r \leq 1$. Якобиан преобразования будет следующим:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = abr, \text{ тогда } |J| = abr.$$

Перейдем к новым переменным по формуле (7.7) и запишем двойной интеграл в виде повторного:

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \iint_G (ar \cos t)^2 br \sin t abr dr dt = a^3 b^2 \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt \cdot \int_0^1 r^4 dr = \\ &= a^3 b^2 \int_0^\pi \cos^2 t d(-\cos t) \cdot \left(\frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 = a^3 b^2 \left(-\frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi \cdot \frac{1}{5} = a^3 b^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2a^3 b^2}{15}.\end{aligned}$$

Пример 7.9. Вычислите площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$.

Решение. Для вычисления площади криволинейного четырехугольника (рис. 7.14, а) воспользуемся заменой $u = xy$, $v = \frac{y}{x^2}$, которая преобразует криволинейный четырехугольник D плоскости Oxy в квадрат плоскости Ouv (см. рис. 7.14, а, б), где $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 2$.

Выразим переменные x, y через u, v : $x = u^{1/3} v^{-1/3}$, $y = u^{2/3} v^{1/3}$.

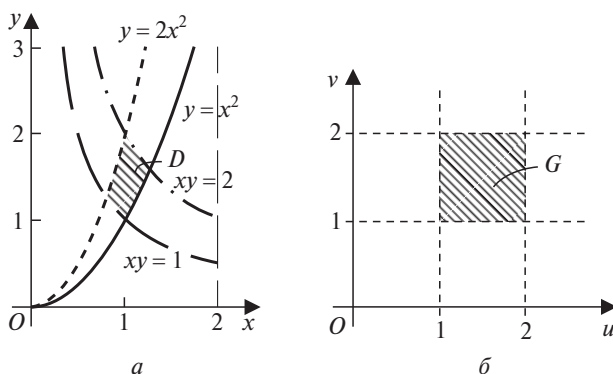


Рис. 7.14

Вычислим якобиан по формуле (7.6):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{1/3}v^{-4/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v}.$$

Площадь криволинейного четырехугольника вычислим по формуле (7.8):

$$\begin{aligned} S &= \iint_G |J| du dv = \iint_G \frac{1}{3v} du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 du (\ln v \Big|_1^2) = \frac{1}{3} \int_1^2 (\ln 2 - \ln 1) du = \frac{1}{3} \ln 2 \cdot u \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2 \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

7.1.3. Двойной интеграл в полярных координатах

Частный случай замены переменных в двойном интеграле — переход к полярным координатам. Полярные координаты ρ и φ связаны с декартовыми координатами x и y следующими соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (7.9)$$

Из (7.9) следует, что $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\operatorname{tg} \varphi = y/x$.

Формула, выражающая правило замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам, имеет вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

где G — соответствующая области D область интегрирования в системе координат ρ, φ . Модуль функционального определителя (якобиана) $|J| = \rho$.

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах осуществляется путем сведения его к повторному интегралу, причем внешний интеграл берется, как правило, по переменной φ , а внутренний — по переменной ρ .

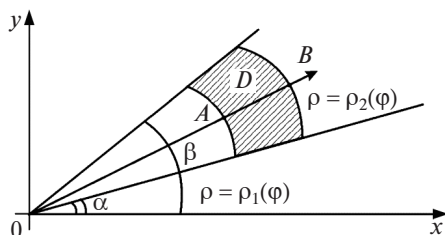


Рис. 7.15

Для области интегрирования D , изображенной на рис. 7.15 (полюс лежит вне области D), α и β являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями угла φ для точек, принадлежащих области D , т. е. нижним и верхним пределами интегрирования внешнего интеграла по переменной φ . Уравнения линий $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ дают соответственно нижний и верхний пределы интегрирования внутреннего интеграла по переменной ρ . С учетом указанных ранее пределов интегрирования повторных интегралов имеет место следующая формула:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (7.10)$$

Здесь сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной ρ , в котором переменная φ считается фиксированной, а затем внешний интеграл по переменной φ . Пределы интегрирования внешнего интеграла постоянны.

Формула (7.10) соответствует случаю, когда полюс лежит вне области интегрирования (см. рис. 7.15). Если полюс расположен внутри области D и любой луч, проведенный из полюса, пересекает границу области не более чем в одной точке, то формула (7.10) упрощается и принимает следующий вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho, \quad (7.11)$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ — уравнение границы области в полярных координатах.

Замечание 7.6. При вычислении двойных интегралов переход от прямоугольных координат к полярным полезен в случаях, когда область интегрирования D есть или круг, или кольцо, или простая часть такой фигуры либо когда подынтегральная функция содержит двучлен вида $x^2 + y^2$, либо когда граница области задана в полярной системе координат.

Пример 7.10. Вычислите интеграл:

1) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 1$;

2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy$.

Решение:

1) поскольку область интегрирования — круг (рис. 7.16), а подынтегральная функция содержит выражение $x^2 + y^2$, то для вычисления интеграла удобно перейти к полярным координатам (см. замечание 7.5).

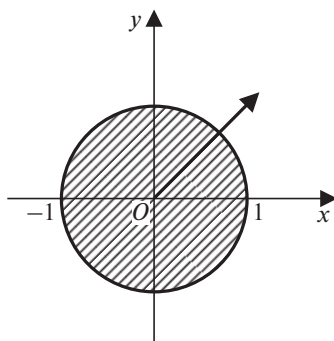


Рис. 7.16

Переход к повторному интегралу выполним по формуле (7.11), так как полюс лежит внутри области D . Уравнение границы области D — окружности $x^2 + y^2 = 1$ — в полярных координатах примет вид $\rho = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и это уравнение определяет верхний предел интегрирования внутреннего интеграла по переменной ρ . Тогда область G — прямоугольник: $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ |J| = \rho \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1-\rho^2) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3};$$

2) область интегрирования — сектор единичного круга, который расположен в первой четверти (см. рис. 7.16), а подынтегральная функция содержит выражение $x^2 + y^2$, поэтому для вычисления интеграла удобно перейти к полярным координатам (см. замечание 7.6):

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \\ |J| = r, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \cdot r dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} d(r^2) = \left| \begin{array}{l} r^2 = t \\ r=0 \Rightarrow t=0 \\ r=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t)^2}{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\arcsin t \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}} \right) d\varphi =$$

$$= \left| \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) (\varphi \Big|_0^{\pi/2})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(\pi-2)}{8}.$$

7.1.4. Приложения двойных интегралов

Площадь области. Как установлено в замечании 7.1, площадь S области D может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле

$$S = \iint_D dx dy.$$

Если область D является правильной в направлении оси Oy и ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $x \in [a; b]$ (см. рис. 7.2, 7.3), то

$$S = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

Если область D является правильной в направлении оси Ox и ограничена линиями $y = c$, $y = d$, $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ и $x_1(y) \leq x_2(y)$ для $y \in [c; d]$ (см. рис. 7.5, 7.6), то

$$S = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx. \quad (7.12)$$

Если область D задана в полярных координатах линиями $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ для $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho. \quad (7.13)$$

Пример 7.11. Вычислите площадь области D , ограниченной параболой $y^2 = 4x + 4$ и прямой $y = 2 - x$.

Решение. Точки пересечения линий, ограничивающих область D , найдем из системы уравнений $\begin{cases} y^2 = 4x + 4, \\ y = 2 - x. \end{cases}$ Это точки $(0; 2)$ и $(8; -6)$. Область D

представлена на рис. 7.17 и является правильной в направлении оси Ox . При интегрировании в направлении оси Oy область D необходимо разбить на две частичные области (см. замечание 7.3). Интегрирование проще вести в направлении оси Ox . В связи с этим воспользуемся формулой (7.12), определив пределы интегрирования по переменной y : -6 (нижний предел), 2 (верхний предел) — и по переменной x : $x = \frac{1}{4}(y^2 - 4)$ (нижний), $x = 2 - y$ (верхний). Тогда

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{2-y} dx = \int_{-6}^2 \left(x \Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{2-y} \right) dy = \int_{-6}^2 \left(2-y-\frac{1}{4}y^2+1 \right) dy \\
 &= \left(3y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3 \right) \Big|_{-6}^2 = 21\frac{1}{3} \text{ кв. ед.}
 \end{aligned}$$

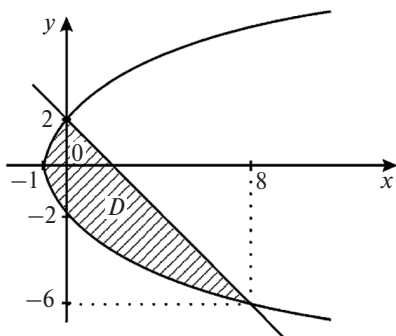


Рис. 7.17

Пример 7.12. Вычислите площадь области D , ограниченной окружностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ и прямыми $x = y$, $y = 0$, $y \geq 0$.

Решение. Область D изображена на рис. 7.18 штриховкой. Поскольку область D — часть кольца, то вычисление ее площади проведем в полярных координатах по формуле (7.13).

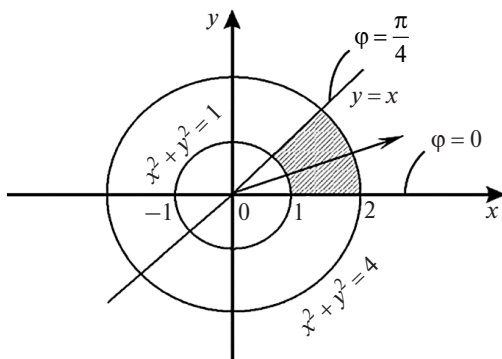


Рис. 7.18

Найдем пределы внешнего интеграла по переменной φ , используя уравнения прямых: $y=0$, тогда $\operatorname{tg}\varphi=0$ и $\varphi=0$ (нижний предел интегрирования); $y=x$, тогда $\operatorname{tg}\varphi=1$ и $\varphi=\pi/4$ (верхний предел интегрирования). Пределы внутреннего интеграла по переменной ρ определим исходя из уравнений окружностей в полярных координатах: $\rho=1$ и $\rho=2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Значит, нижний предел интегрирования по ρ равен 1, верхний предел равен 2, поэтому

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 \rho d\rho = \int_0^{\pi/4} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 3d\varphi = \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{8} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

Объем цилиндрического тела. Объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$, $f(x, y) \geq 0$, причем $f(x, y)$ непрерывна в области D ; с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz ; снизу — областью D плоскости Oxy , определяется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (7.14)$$

Пример 7.13. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z=2-x-y$, $y=x^2$, $y=x$, $z=0$.

Решение. Поверхность $y=x^2$ — это параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz , и направляющей — параболой $y=x^2$ в плоскости Oxy . Плоскость $z=2-x-y$ отсекает на всех осях координат равные отрезки длиной 2 ед. Плоскость $y=x$ проходит через ось Oz и проецируется на плоскость Oxy в биссектрису $y=x$; $z=0$ — координатная плоскость Oxy . Тело, ограниченное этими поверхностями, изображено на рис. 7.19.

Сверху тело ограничено плоскостью $z=2-x-y$, снизу — областью D плоскости Oxy (рис. 7.20). Следовательно, по формуле (7.14)

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D (2-x-y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (2-x-y) dy = \int_0^1 \left(\left(2y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{x^2}^x \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(2x - \frac{7}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \left(x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{60} \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

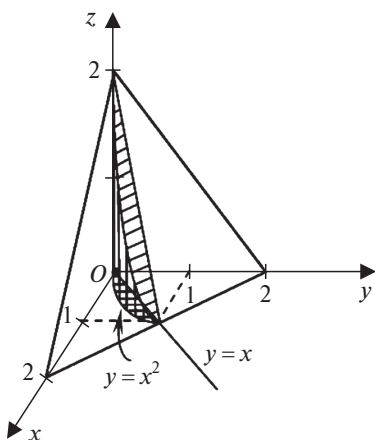


Рис. 7.19

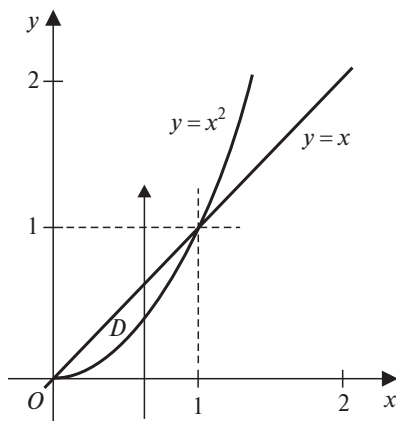


Рис. 7.20

Масса пластины. Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластину, толщиной которой можно пренебречь, т. е. некоторую область D , по которой распределена масса с плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$. Тогда если $\gamma = \gamma(x, y)$ — непрерывная функция на области D , то можно найти массу этой пластины по формуле

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (7.15)$$

Пример 7.14. Определите массу круглой пластины радиусом R , поверхностная плотность которой в каждой точке (x, y) пластины пропорциональна расстоянию от центра круга до данной точки, т. е. $\gamma(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Решение. По формуле (7.15) имеем $m = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$. Далее переходим к полярным координатам и тогда, согласно формуле (7.15), получим

$$m = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = k \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^R d\varphi = \frac{2}{3} k \pi R^3 \text{ ед. массы.}$$

Координаты центра масс пластины. Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластину, т. е. некоторую область D , толщиной которой можно пренебречь, по которой распределена масса с непрерывной плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$. Тогда координаты центра масс пластины определяются следующими формулами:

$$x_c = \frac{\iint_D x\gamma(x, y)ds}{\iint_D \gamma(x, y)ds}, \quad y_c = \frac{\iint_D y\gamma(x, y)ds}{\iint_D \gamma(x, y)ds}.$$

Если пластина однородна, т. е. $\gamma(x, y) = \text{const}$, то формулы для координат центра масс имеют более простой вид:

$$x_c = \frac{\iint_D xds}{\iint_D ds}, \quad y_c = \frac{\iint_D yds}{\iint_D ds}. \quad (7.16)$$

Пример 7.15. Определите координаты центра масс четверти круга радиусом R с центром в начале координат, считая, что плотность пластины постоянна.

Решение. Плотность пластины постоянна, поэтому координаты центра ее масс вычислим по формулам (7.16), где площадь пластины $S = \frac{\pi R^2}{4}$.

Переходя в формулах (7.16) от декартовых координат к полярным, получим

$$x_c = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho}{\pi R^2/4} = \frac{4 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \left(\frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^R \right)}{\pi R^2} = \frac{\frac{4}{3} R^3 (\sin \varphi \Big|_0^{\pi/2})}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{4 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho}{\pi R^2} = \frac{\frac{4}{3} R^3 (-\cos \varphi \Big|_0^{\pi/2})}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Моменты инерции пластины. Известно, что момент инерции материальной точки относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат ее расстояния от этой оси, а момент инерции системы материальных точек относительно одной и той же оси равен сумме моментов инерции, составляющих эту систему масс. Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластину, т. е. некоторую область D , по которой распределена масса с непрерывной плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$. Опираясь на определение момента инерции системы материальных точек относительно некоторой оси, получим следующие формулы для вычисления моментов инерции пластины, выраженные через двойные интегралы:

- относительно оси Ox

$$J_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) ds;$$

- относительно оси Oy

$$J_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) ds.$$

Момент инерции пластины относительно начала координат (полярный момент инерции) вычисляется по формуле

$$J_o = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) ds = J_x + J_y. \quad (7.17)$$

Пример 7.16. Вычислите полярный момент инерции пластины, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = -x$, если плотность пластины постоянна и равна γ_0 .

Решение. Парабола и прямая пересекаются в точках $(-1; 1)$ и $(0; 0)$, что следует из решения системы уравнений
$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = -x. \end{cases}$$

Сделаем чертеж (рис. 7.21).

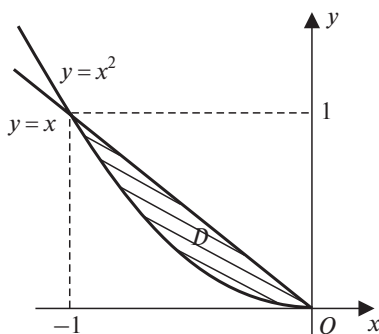


Рис. 7.21

Далее воспользуемся формулой (7.17):

$$\begin{aligned} J_o &= \iint_D (x^2 + y^2) \gamma_0 dx dy = \gamma_0 \int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^{-x} (x^2 + y^2) dy = \gamma_0 \int_{-1}^0 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{x^2}^{-x} dx = \\ &= -\gamma_0 \int_{-1}^0 \left(\frac{4}{3} x^3 + x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx = -\gamma_0 \left(\frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{21} x^7 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{61}{105} \gamma_0. \end{aligned}$$

7.2. Тройные интегралы

Тройной интеграл представляет собой обобщение определенного интеграла на случай функции трех независимых переменных, определенной в замкнутой ограниченной пространственной области.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в замкнутой ограниченной пространственной области Ω . Разобьем область Ω с помощью произвольной сети поверхностей на n частичных областей $V_1, V_2, \dots, V_n$, не имеющих общих внутренних точек, с объемами соответственно $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. В каждой частичной области $V_i, i = \overline{1, n}$, выберем по произвольной точке $M_i(x_i; y_i; z_i)$, вычислим значения функции $f(x, y, z)$ в точках $M_i(x_i; y_i; z_i), i = \overline{1, n}$, и составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i. \quad (7.18)$$

Суммы вида (7.18) называются *интегральными суммами для функции $f(x, y, z)$ по области Ω* . Диаметр $d(\Omega)$ пространственной области Ω называется наибольшее расстояние между граничными точками этой области. Обозначим через λ наибольший из диаметров частичных областей $V_i, i = \overline{1, n}$, т. е. $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(V_i)$, и назовем его *диаметром разбиения*.

Конечный предел интегральных сумм (7.18) для любой последовательности разбиений пространственной области Ω при стремлении λ к нулю (при этом неограниченно увеличивается число n), если он существует и не зависит ни от способа разбиения области Ω на частичные, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ в пределах каждой из них, называется *тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области Ω* и обозначается $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$. Таким образом, по определению

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv. \quad (7.19)$$

Функция $f(x, y, z)$ называется в этом случае *интегрируемой по области Ω* ; Ω — *областью интегрирования*; x, y, z — *переменными интегрирования*; dv — *элементом объема*.

Если разбиение области Ω на частичные области проводить плоскостями, параллельными координатным плоскостям (в дальнейшем всегда будем исходить из этого), то частичные области $V_i, i = \overline{1, n}$, будут прямоугольными параллелепипедами с измерениями $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, и, следовательно, $\Delta v_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i, i = \overline{1, n}$. Тогда $dv = dx dy dz$ и

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Замечание 7.7. Если в (7.19) положить $f(x, y, z) \equiv 1$ при $(x; y; z) \in \Omega$, то получим, что объем V области Ω равен тройному интегралу:

$$V = \iiint_{\Omega} dv.$$

Выделим важнейшие классы интегрируемых функций.

Теорема 7.3. Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной области Ω функция $u = f(x, y, z)$ интегрируема в этой области.

Теорема 7.4. Если функция $f(x, y, z)$ ограничена в замкнутой ограниченной области Ω и непрерывна в Ω всюду, кроме некоторого множества объема нуль, то $f(x, y, z)$ интегрируема в Ω . Множество имеет объем нуль, если его можно поместить в тело сколь угодно малого объема.

Тройные интегралы по свойствам аналогичны двойным интегралам.

7.2.1. Сведение тройного интеграла к повторному

Как и в случае двойных интегралов, основным прием, на котором базируется вычисление тройных интегралов, состоит в сведении интеграла к повторному, т. е. к замене интегрирования по объему интегрированием по каждой из переменных в отдельности.

Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна в пространственной области Ω , а поверхность, ограничивающая тело Ω , проектируется в правильную в направлении оси Ox либо Oy область D плоскости Oxy и пересекается не более чем в двух¹ точках каждой прямой, проходящей через любую внутреннюю точку области D параллельно координатной оси Oz ² (рис. 7.22).

Подобная область Ω называется *правильной трехмерной областью в направлении оси Oz* . Пусть нижняя часть поверхности задана уравнением $z = z_1(x, y)$, тогда будем говорить, что прямая, параллельная оси Oz , входит в область Ω через поверхность $z = z_1(x, y)$, или точка входа в область Ω лежит на поверхности $z = z_1(x, y)$. Верхняя часть поверхности задана уравнением $z = z_2(x, y)$, тогда прямая, параллельная оси Oz , выходит из области Ω через поверхность $z = z_2(x, y)$, или точка выхода из области Ω лежит на поверхности $z = z_2(x, y)$, и $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ — однозначные непрерывные функции, определенные в области D .

В таком случае имеем

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (7.20)$$

¹ Более сложные области Ω часто удается свести к рассматриваемому виду путем разбиения их на конечное число областей $V_1, \dots, V_n$, каждая из которых удовлетворяет условиям, изложенным ранее.

² Аналогично параллельно координатной оси Ox и координатной оси Oy .

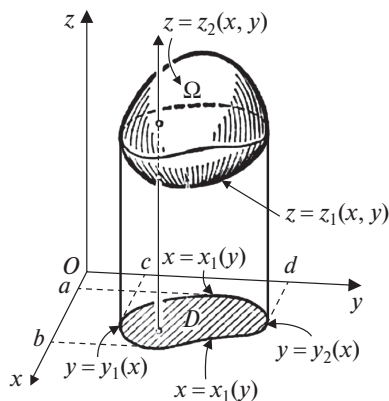


Рис. 7.22

Если область D ограничена двумя непрерывными кривыми (см. рис. 7.22) $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $a \leq x \leq b$, то, заменяя двойной интеграл повторным, получим

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (7.21)$$

Вычисление по формуле (7.21) идет следующим образом: сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при произвольных фиксированных x и y , затем внутренний интеграл по переменной y при произвольной фиксированной переменной x и, наконец, внешний интеграл по переменной x . Пределы интегрирования внешнего интеграла постоянны.

Если область D ограничена двумя непрерывными кривыми $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, $c \leq y \leq d$, то, заменяя двойной интеграл повторным, получим

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Заметим, что в зависимости от вида пространственной области Ω иногда целесообразно проектировать эту область не на плоскость Oxy , а на другие координатные плоскости с сохранением основных изложенных ранее принципов перехода от тройных интегралов к повторным.

Наиболее простой вид формула вычисления тройного интеграла принимает в случае, когда Ω — прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = e$, $z = h$:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x, y, z) dz. \quad (7.22)$$

Пример 7.17. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} (x+z) dx dy dz$. Область Ω ограничена плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

Решение. Область интегрирования Ω — прямоугольный параллелепипед. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (7.22):

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (x+z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(xz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 dx \left(x + \frac{1}{2} \right) y \Big|_0^1 = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Пример 7.18. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$. Область Ω ограничена плоскостями $z=0$, $x=0$, $y=0$, $x+y+z-2=0$.

Решение. Область интегрирования Ω — треугольная пирамида, расположенная в первом октанте (рис. 7.23).

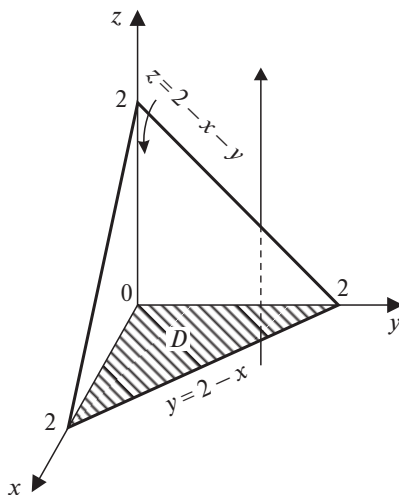


Рис. 7.23

Поскольку область Ω является правильной в направлении любой оси, в том числе Oz , то для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (7.20).

Определим пределы внутреннего интеграла по переменной z . Поскольку любая прямая, параллельная оси Oz , входит в область Ω через плоскость, уравнение которой $z = 0$ (нижний предел интегрирования), а выходит из области через плоскость, уравнение которой $z = 2 - x - y$ (верхний предел интегрирования), то

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{2-x-y} x^2 dz,$$

где D — проекция области Ω на плоскость Oxy . Область D — треугольник, образованный прямыми $x = 0$, $y = 0$ и $y = 2 - x$. Далее воспользуемся формулой (7.21):

$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx dy \int_0^{2-x-y} x^2 dz = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz = \\ &= \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2-x} dy \left. z \right|_0^{2-x-y} = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2-x} (2-x-y) dy = \\ &= \int_0^2 x^2 dx \left((2-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-x} = \int_0^2 \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \\ &= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} - 8 + \frac{16}{5} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

7.2.2. Тройной интеграл в цилиндрических, сферических и обобщенных сферических координатах

Идея замены переменных в двойном интеграле переносится и на тройной интеграл. Рассмотрим частный случай замены переменных в тройном интеграле — преобразование к цилиндрическим координатам. Положение произвольной точки M в пространстве в цилиндрической системе координат определяется полярными координатами φ и ρ проекции M' точки M на плоскость Oxy и аппликатой z самой точки M (рис. 7.24). Величины ρ , φ , z называют *цилиндрическими координатами точки M* , причем

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

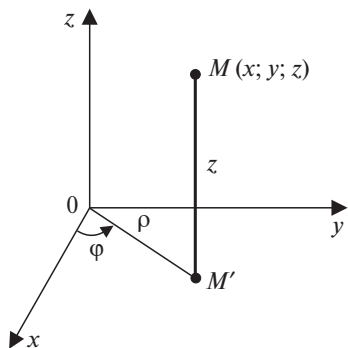


Рис. 7.24

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (7.23)$$

Из соотношений (7.23) следует, что $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\operatorname{tg} \varphi = y/x$.

Преобразование тройного интеграла от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z осуществляется по следующей формуле:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_W f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz, \quad (7.24)$$

где $dv = \rho d\rho d\varphi dz$ — элемент объема в цилиндрических координатах; W — соответствующая область интегрирования в прямоугольной цилиндрической системе координат ρ, φ, z .

Выразим в цилиндрических координатах уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающей данную область Ω ($z = z_1(\rho, \varphi)$, $z = z_2(\rho, \varphi)$ соответственно), и запишем формулу для вычисления интеграла в цилиндрических координатах, аналогичную (7.20):

$$\begin{aligned} & \iiint_W f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \\ & = \iint_G \rho d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz, \end{aligned}$$

где G — проекция области W на плоскость Oxy . Если область G ограничена кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то, заменяя двойной интеграл повторным, получим

$$\begin{aligned}
 & \iint_G \rho d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz = \\
 & = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz. \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

Переход к цилиндрическим координатам полезен в случаях, когда область Ω проектируется в круг, круговое кольцо или их простую часть либо когда подынтегральная функция содержит двучлен вида $x^2 + y^2$.

Замечание 7.8. Положим, в формуле (7.24) $f(x, y, z) \equiv 1$, в таком случае получим формулу вычисления объема V области Ω в цилиндрических координатах:

$$V = \iiint_W \rho d\rho d\varphi dz, \quad (7.26)$$

где W — соответствующая область интегрирования в прямоугольной системе координат ρ, φ, z .

Пример 7.19. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$. Область Ω ограничена плоскостью $z = 2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$.

Решение. Область Ω (рис. 7.25) снизу ограничена параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$, сверху — плоскостью $z = 2$ и проектируется на плоскость Oxy в область D , ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 4$, уравнение которой получено подстановкой $z = 2$ в уравнение $x^2 + y^2 = 2z$ вместо переменной z .

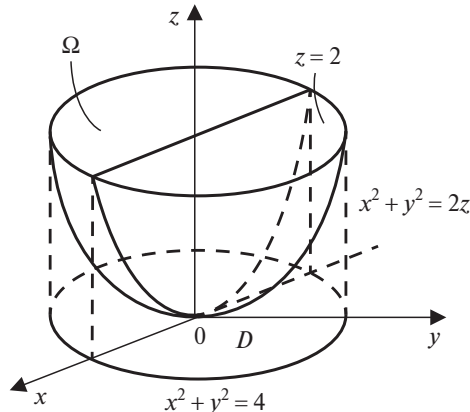


Рис. 7.25

Введем цилиндрические координаты. Поскольку $x^2 + y^2 = \rho^2$, то уравнение параболоида примет вид $z = \rho^2/2$; уравнение плоскости $z = 2$ при переходе к цилиндрическим координатам не изменится, $\rho^2/2 \leq z \leq 2$; далее $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $0 \leq \rho \leq 2$. Тогда, следуя формуле (7.25), имеем

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\rho^2/2}^2 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho z \Big|_{\rho^2/2}^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12} \right) \Big|_0^2 = \int_0^{2\pi} \left(2^3 - \frac{2^4}{3} \right) d\varphi = \frac{8\varphi}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}.$$

В сферических координатах (r — радиус-вектор; φ — долгота; θ — широта) (рис. 7.26) получаем

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, & y = r \sin \theta \sin \varphi, & z = r \cos \theta, \\ 0 \leq r < \infty, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ J = r^2 \sin \theta, & dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{cases} \quad (7.27)$$

В обобщенных сферических координатах

$$\begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi, & y = br \sin \theta \sin \varphi, & z = cr \cos \theta, \\ J = abcr^2 \sin \theta, & dx dy dz = abcr^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta, \end{cases}$$

где $a, b, c > 0$ — постоянные числа.

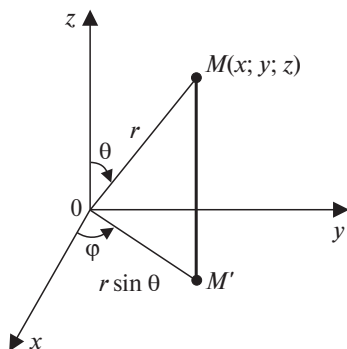


Рис. 7.26

Соотношения (7.23), (7.26), (7.27) позволяют осуществлять в тройных интегралах переход от декартовых координат к цилиндрическим, сферическим или обобщенным сферическим.

7.2.3. Приложения тройных интегралов

Объем тела. Объем V тела (пространственной области) Ω может быть вычислен по следующим формулам:

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz \text{ в декартовых координатах,}$$

$$V = \iiint_W \rho d\rho d\varphi dz \text{ в цилиндрических координатах,}$$

где W — соответствующая Ω область интегрирования в новой системе координат.

Масса тела. Масса m пространственного тела Ω с непрерывной плотностью распределения масс $\gamma(x, y, z)$ в каждой точке этой области Ω вычисляется по формуле

$$m = \iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Координаты центра масс тела. Координаты x_c , y_c и z_c центра масс пространственного тела Ω , имеющего непрерывную плотность $\gamma(x, y, z)$, выражаются формулами

$$x_c = \frac{\iiint_{\Omega} x\gamma(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dv}, \quad y_c = \frac{\iiint_{\Omega} y\gamma(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dv}, \quad z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z\gamma(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dv},$$

которые получаются с помощью тех же рассуждений, что и в случае двух измерений.

Моменты инерции тела. Для моментов инерции относительно координатных осей пространственного тела Ω с непрерывной плотностью $\gamma(x, y, z)$ по аналогии со случаем двух переменных можно получить следующие выражения:

$$J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dv, \quad J_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dv,$$

$$J_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dv.$$

Момент инерции относительно начала координат выражается формулой

$$J_o = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dv.$$

Задачи

1. Вычислите повторные интегралы:

1) $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y) dy;$

2) $\int_{-3}^8 dy \int_{y^2-4}^5 (x + 2y) dx;$

3) $\int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy.$

Ответ: 1) $\frac{14}{3}$; 2) 50,4; 3) 2,25.

2. Вычислите интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$, если область D ограничена прямыми $x = 2$, $x = 6$, $y = 1$, $y = 4$.

Ответ: 78.

3. Вычислите интеграл $\iint_D x^2 dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

Ответ: 2,25.

4. Вычислите интеграл $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $y^2 = x$.

Ответ: $\frac{33}{40}$.

5. Вычислите интеграл $\iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

Ответ: $\frac{244}{21}$.

6. Вычислите интеграл $\iint_D (x - y) dx dy$, если область D ограничена линиями $x + y = 2$, $y = x$, $y = 0$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

7. Вычислите интеграл $\iint_D x \cos(x + y) dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x$, $y = 0$, $x = \pi$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$.

8. Вычислите интеграл $\iint_D (x+y) dx dy$, если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$.

Ответ: $\frac{14}{3}$.

9. Вычислите интеграл $\iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$, если область D — круг радиусом R с центром в начале координат.

Ответ: $2\pi \frac{R^5}{5}$.

10. Вычислите интеграл $\iint_D (12 - x - y) dx dy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 9$.

Ответ: 108π .

11. Вычислите интеграл $\iint_D (6 - 2x - 3y) dx dy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

Ответ: 24π .

12. Вычислите интеграл $\iint_D (4 - x - y) dx dy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2x$.

Ответ: 3π .

13. Вычислите двойной интеграл $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$, используя полярные координаты.

Ответ: $\frac{\pi}{2}(2\ln 2 - 1)$.

14. Вычислите двойной интеграл $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) e^{x^2 + y^2} dy$, используя полярные координаты.

Ответ: $\frac{\pi}{2}(3e^4 + 1)$.

15. Вычислите двойной интеграл $\iint_D (x+y) dx dy$, если область D ограничена линиями $2x + y = 1$, $2x + y = 3$, $x - y = -1$, $x - y = 2$.

Ответ: $\frac{7}{3}$.

16. Вычислите двойной интеграл $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$, где область D — часть кольца, ограниченная линиями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = \sqrt{3}x$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{6}$.

17. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{-x^2+2} f(x, y) dy.$$

$$\text{Ответ: } I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$$

18. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле $I =$

$$= \int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x, y) dy.$$

$$\text{Ответ: } I = \int_0^3 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx.$$

19. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле $I =$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-\sqrt{2}/2}^0 dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$\text{Ответ: } I = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \int_{-x}^x f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}/2}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

20. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле $I =$

$$= \int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x, y) dx.$$

$$\text{Ответ: } I = \int_0^3 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y) dy.$$

21. Вычислите площадь области D , ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = x + 6$.

$$\text{Ответ: } 20\frac{5}{6} \text{ кв. ед.}$$

22. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

$$\text{Ответ: } a^2 \text{ кв. ед.}$$

23. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6} \text{ куб. ед.}$$

24. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 3 - x - y$, $x^2 + y^2 = 1$ и $z = 0$.

$$\text{Ответ: } 3\pi \text{ куб. ед.}$$

25. Вычислите массу материальной пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $x = (y-1)^2$, $y = x-1$, ее поверхностная плотность $\gamma = y$.

Ответ: 6,75 ед. массы.

26. Вычислите массу материальной пластинки, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна a . Поверхностная плотность этой пластинки в каждой ее точке пропорциональна сумме расстояний до катетов. Коэффициент пропорциональности равен k .

Ответ: $\frac{ka^3\sqrt{2}}{12}$ ед. массы.

27. Вычислите момент инерции относительно начала координат пластины, ограниченной линиями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, если плотность пластины постоянна и равна 1.

Ответ: $\frac{ab(a^2 + b^2)}{12}$.

28. Вычислите моменты инерции относительно начала координат и осей координат пластины плотностью $\gamma(x, y) = x^2y$, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1$.

Ответ: $I_0 = \frac{1}{5}$, $I_x = \frac{1}{9}$, $I_y = \frac{4}{45}$.

29. Определите координаты центра тяжести пластины, лежащей в первой четверти и ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и координатными осями. Поверхностная плотность в каждой точке пластины пропорциональна произведению координат точки.

Ответ: $x_c = \frac{16}{15}$, $y_c = \frac{8}{15}$.

30. Определите координаты центра тяжести пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$, если плотность пластины в каждой точке $\gamma(x, y) = xy$.

Ответ: $x_c = y_c = \frac{9}{14}$.

31. Расставьте пределы интегрирования в тройном интеграле $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $x = 1$, $y = x$, $z = 0$, $z = y^2$.

Ответ: $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{y^2} f(x, y, z) dz$.

32. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz$. Область Ω ограничена

плоскостями $x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Ответ: 1.

33. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} (3x + 2y - z^3) dx dy dz$. Область Ω ограничена

плоскостями $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$.

Ответ: -26.

34. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$. Область Ω ограничена

плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

35. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} (2x + y) dx dy dz$. Область Ω ограничена

поверхностями $y = x, y = 0, x = 1, z = 1, z = 1 + x^2 + y^2$.

Ответ: $\frac{41}{60}$.

36. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^2}$. Область Ω ограничена

плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Ответ: $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$.

37. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$. Область Ω ограничена

цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y = 0, z = 0, z = a$.

Ответ: $\frac{8}{9} a^2$.

38. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$. Область Ω ограничена поверх-

ностями $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = a$ ($a > 0$).

Ответ: $\frac{\pi}{2} a^2$.

39. Вычислите интеграл $I = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$. Область Ω — шар: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Ответ: $\frac{4}{15} \pi R^5$.

40. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ куб. ед.

41. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$ куб. ед.

42. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 + x + y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $\frac{5}{6}$ куб. ед.

43. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $\frac{1}{3}$ куб. ед.

44. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z \geq 0$, $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y = 7$.

Ответ: 32.

45. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ куб. ед.

46. Вычислите массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$, если плотность в каждой точке шара обратно пропорциональна расстоянию от нее до начала координат. Коэффициент пропорциональности равен k .

Ответ: $\frac{4}{3}\pi k R^2$ ед. массы.

47. Найдите массу куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, если плотность $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.

Ответ: $\frac{3}{2}a^4$ ед. массы.

48. Найдите координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y = 1$, $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{7}{30}\right)$.

49. Найдите момент инерции относительно начала координат тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$, если плотность $\gamma(x, y, z) = 1$.

Ответ: $74\frac{2}{3}\pi$ ед. массы.

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

8.1. Определение числового ряда. Сходимость

Определение. Пусть задана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (8.1)$$

называется *числовым рядом*. Здесь числа $a_1, a_2, \dots$ — члены ряда, а a_n — формула общего члена ряда.

Определение. Суммы вида

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

называются *частичными суммами* ряда (8.1). Последовательность

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (8.2)$$

называется *последовательностью частичных сумм*.

Определение. Ряд (8.1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм (8.2), т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. При этом число S называется *суммой* ряда (8.1). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (8.1) называется *расходящимся*.

Рассмотрим некоторые примеры числовых рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$. Несложно увидеть, что этот ряд расходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots$. Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q .

Последовательность частичных сумм имеет вид $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$. Она сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1-q}$, т. е. сумма в этом случае выражается формулой $S = \frac{b}{1-q}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Докажем сходимость этого ряда и найдем сумму. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Общий член ряда — $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Преобразуем выражение для общего члена ряда, разлагая его на элементарные дроби: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (см. метод неопределенных коэффициентов). Запишем исходный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

для которого ряд частичных сумм будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Тогда $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$, $S = 1$, ряд сходится.

Определение. Пусть задан числовой ряд (8.1). Если в нем отбросить первые n членов, то получится следующий ряд:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n+m}, \quad (8.3)$$

который называется *остатком ряда* (8.1).

Теорема 8.1. Ряд (8.1) и его остаток (8.3) оба сходятся или оба расходятся.

Теорема 8.2 (необходимый признак сходимости числового ряда). Если ряд (8.1) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Следствие. Если общий член ряда a_n не стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности, то ряд расходится, т. е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд (8.1) расходится.

Замечание 8.1. Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нем отбросить любое конечное число членов. При этом его сумма, если она существует, изменится на сумму отбрасываемых членов.

Пример 8.1. Установите сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n - 3}{10n^2 - 2n + 5}$.

Решение. Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n - 3}{10n^2 - 2n + 5} = \frac{1}{10} \neq 0$. Тогда в силу следствия 8.1 ряд расходится.

8.2. Достаточные условия сходимости рядов с положительными членами

Теорема 8.3 (первый признак сравнения). Пусть заданы два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \quad (8.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad (8.5)$$

с положительными членами и для всех n (или начиная с некоторого n) выполняется неравенство $0 < a_n \leq b_n$. Тогда:

- 1) из сходимости ряда (8.5) следует сходимость ряда (8.4);
- 2) из расходимости ряда (8.4) следует расходимость ряда (8.5).

Пример 8.2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^n}$.

Решение. В качестве эталонного выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, который сходится как ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(q = \frac{1}{5} < 1\right)$.

Очевидно, что $\frac{1}{(n+4)^n} \leq \frac{1}{5^n}$ для всех $n \geq 1$. Следовательно, исходный ряд сходится.

Замечание 8.2. Ряд Дирихле (обобщенный гармонический) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится при $\alpha \leq 1$.

Теорема 8.4 (второй (предельный) признак сравнения). Пусть заданы два ряда (8.4) и (8.5) с положительными членами для всех n или начиная с некоторого конечного n . Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q > 0$, $q \neq \infty$, то оба ряда сходятся или оба расходятся.

Пример 8.3. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 2}$.

Решение. В качестве эталонного выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится, как простой ряд Дирихле. Согласно второму признаку сравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/(3n^2 + 2)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 2} = \frac{1}{3} > 0.$$

Следовательно, исходный ряд расходится.

Замечание 8.3. Специфика признаков сравнения состоит в том, что требуются эталонные ряды, о сходимости или расходимости которых известно заранее. К таким, в частности, относятся: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (сходится, см. ранее); ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot q^{n-1}$ (сходится, если $|q| < 1$); ряд Дирихле (обобщенный гармонический) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (сходится, если $\alpha > 1$, и расходится при $\alpha \leq 1$) и др.

Теорема 8.5 (признак Д'Аламбера). Пусть задан ряд (8.4) с положительными членами для всех n или начиная с некоторого конечного n . Тогда если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то: 1) при $q < 1$ ряд сходится; 2) при $q > 1$ ряд расходится; 3) при $q = 1$ признак Д'Аламбера ответа не дает, ряд исследуют с помощью других признаков.

Пример 8.4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{5^n}{4 \cdot n!}$, $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{4 \cdot (n+1)!}$. Применяем признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot 4 \cdot n!}{5^n \cdot 4 \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится.

Теорема 8.6 (радикальный признак Коши). Пусть задан ряд (8.4) с положительными членами для всех n или начиная с некоторого конечного n . Тогда если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то: 1) при $q < 1$ ряд сходится; 2) при

$q > 1$ ряд расходится; 3) при $q = 1$ признак Коши ответа не дает, ряд исследуют с помощью других признаков.

Пример 8.5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^n$.

Решение. Здесь $a_n = \left(\frac{5n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^n$. Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right) = \frac{5}{2} > 1.$$

Следовательно, исходный ряд расходится.

Теорема 8.7 (интегральный признак (критерий) Коши). Пусть задан ряд (8.4), члены которого положительны и монотонно убывают, а функция $f(x)$ непрерывна, положительна и убывает на $[a; +\infty)$, причем $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$. Тогда ряд (8.4) и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ оба сходятся или оба расходятся.

Пример 8.6. Исследуйте на сходимость с помощью интегрального признака ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Решение. Очевидно, что для $n \geq 2$ члены ряда положительны и убывают. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ непрерывная, убывающая на $[2; +\infty)$, так как $f'(x) = -\frac{2 + \ln x}{x^2 \ln^3 x} < 0$, причем $f(2) = \frac{1}{2 \ln^2 2}, f(3) = \frac{1}{3 \ln^2 3}, \dots, f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Применим интегральный признак Коши, вычислим несобственный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_2^b \frac{dx}{x \ln^2 x} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \Big|_2^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Получили число. Следовательно, несобственный интеграл сходится, а значит, и заданный ряд сходится.

Далее рассмотрим извлечение вещества из пульпы. Пульпой называют смесь мелкоизмельченного полезного ископаемого с водой. Для извлечения полезного вещества измельченное ископаемое заливают водой и интенсивно

перемешивают или подвергают иной технологической обработке. Затем раствор отстаивают и сливают. Этот процесс можно повторять множество раз.

Пусть a — объем измельченного ископаемого; c_0 — его начальная концентрация; b — объем воды, необходимой для приготовления пульпы.

Запишем уравнение материального баланса для k -й промывки, когда концентрация ископаемого стала равной c_{k-1} : $ac_{k-1} = ac_k + bc_k$, $k = 1, 2, \dots$

Из последнего получаем рекуррентную формулу $c_k = \frac{a}{a+b} c_{k-1}$, из которой

$$c_k = \left(\frac{a}{a+b} \right)^k c_0. \quad (8.6)$$

Общее количество вещества, извлеченного из пульпы после последовательных промывок, будет следующим:

$$bc_1 + bc_2 + \dots + bc_n = b \sum_{k=1}^n c_k. \quad (8.7)$$

Если процесс извлечения повторять бесконечное число раз, то формулу для подсчета количества извлеченного вещества можно записать в виде

числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} bc_k = bc_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+b} \right)^k$, который сходится как ряд геометрической прогрессии (см. п. 8.1, второй пример числового ряда) со знаменателем (частным) $q = \frac{a}{a+b} < 1$. Сумма ряда $S = bc_0 \frac{a/(a+b)}{1-a/(a+b)} = ac_0$ — максимально возможное количество вещества, которое содержится в пульпе.

Пример 8.7. Сколько раз необходимо осуществить промывку пульпы, чтобы количество извлеченного вещества было равно m ?

Решение. Из формул (8.6) и (8.7) и формулы для нахождения частичной суммы ряда геометрической прогрессии (см. п. 8.1, с. 313, второй пример

числового ряда) с учетом условия задачи имеем $m = \frac{bc_0 q(1-q^n)}{1-q}$, где $q = \frac{a}{a+b}$ или после упрощений $m = ac_0(1-q^n)$. Из последнего равенства получаем $q^n = 1 - \frac{m}{ac_0}$, $m < ac_0$. Далее решаем полученное показательное уравнение относительно n , используя натуральные логарифмы.

В результате получим

$$n = \left\lceil \frac{\ln(1 - m/(ac_0))}{\ln q} \right\rceil,$$

где $q = \frac{a}{a+b}$; $[x]$ — целая часть числа x .

8.3. Знакопередающие ряды. Абсолютная и условная сходимости

Определение. Знакопередающим рядом называется знакопеременный ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (8.8)$$

где $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$). Для исследования сходимости таких рядов используется *достаточный признак Лейбница*: если абсолютные величины членов ряда (8.8) убывают ($a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$) и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд (8.8) сходится, а его сумма S удовлетворяет условию $0 < S < a_1$.

Следствие. Если ряд (8.8) сходится по признаку Лейбница, то его остаток $|r_n| < a_{n+1}$ или $|S - S_n| < a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Если ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |(-1)^{n-1} a_n| + \dots$,

т. е. составленный из абсолютных величин ряда (8.8), сходится, то знакопередающий ряд (8.8) называется *абсолютно* сходящимся. Если ряд (8.8) сходится, а ряд из абсолютных величин при этом расходится, то ряд (8.8) называется *неабсолютно* сходящимся или *условно* сходящимся.

Теорема 8.8. Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Пример 8.8. Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n-1}.$$

Решение:

1) воспользуемся достаточным признаком Лейбница. Составим ряд из абсолютных величин: $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{1}{n}| = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$. Это простой гармонический ряд, который расходится (см. ранее), однако его члены удовлетворяют условиям признака Лейбница и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Следовательно, ряд сходится условно;

2) ряд из абсолютных величин имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Он сходится по признаку Даламбера. Действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно;

3) ряд из абсолютных величин имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$. Он расходится в силу необходимого признака сходимости (см. следствие 8.1), так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$. Следовательно, исходный ряд расходится.

Пример 8.9. Вычислите приближенно с точностью до 0,1 сумму условно сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$.

Решение. В качестве приближенного значения S возьмем частичную сумму S_n , для которой $|r_n| < 0,1$. Согласно следствию из признака Лейбница $|r_n| < \frac{1}{n+1}$ или $|S - S_n| < \frac{1}{n+1}$. Следовательно, достаточно положить, что

$n+1=10$, т. е. $n=9$. Тогда $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0,74$. Отсюда $S \approx 0,7$ с точностью до 0,1.

8.4. Функциональные ряды.

Основные понятия

Определение. Пусть функции $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) определены на некотором множестве точек $x \in \mathbf{R}$. Тогда выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (8.9)$$

называется *функциональным рядом*.

Определение. Функциональный ряд (8.9) называется *сходящимся* в точке $x = x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Множество значений x , при которых ряд (8.9) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда. Обозначим ее через D .

Пример 8.10. Найдите область сходимости функционального ряда $\ln x + \ln^2 x + \dots + \ln^n x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение. Ряд представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = \ln x$. Ряд сходится, если прогрессия бесконечно убывающая, т. е. $|q| = |\ln x| < 1$ или $-1 < \ln x < 1$, что равносильно $\frac{1}{e} < x < e$. Исходя из этого, область сходимости ряда $D: x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$.

Пример 8.11. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{1}{1+x^{2n}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}.$$

Решение. Если $|x| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1 \neq 0$, значит, ряд расходится. Если $|x| = 1$, то также получаем расходящийся ряд: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$. Если $|x| > 1$, то члены заданного ряда меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots$, т. е. ряд сходится. Итак, область сходимости ряда определяется неравенством $|x| > 1$. Отсюда следует, что ряд сходится на множестве $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Частичная сумма функционального ряда (8.9)

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

является функцией переменной x . Если функциональный ряд (8.9) сходится, то его сумма $S(x)$ также является функцией переменной x в области D . Если $S(x)$ — сумма ряда (8.9), а $S_n(x)$ — его частичная сумма, то n -й остаток определяется равенством $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$. В области сходимости ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$.

Определение. Функциональный ряд (8.9) называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a; b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, не зависящее от x , что для $n > N$ неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех x из отрезка $[a; b]$.

Определение. Функциональный ряд (8.9) называется *мажорируемым* в некоторой области D , если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ такой, что для всех $x \in D$ справедливы неравенства

$|u_k(x)| \leq a_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Такой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) называется *мажорантным* (*мажорирующим*) рядом.

Признак Вейерштрасса. Если для функционального ряда (8.9) существует мажорантный ряд на промежутке D , то ряд (8.9) сходится абсолютно и равномерно на этом промежутке.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (см. ряд Дирихле), так как $|\cos nx| \leq 1$, значит, данный функциональный ряд равномерно сходится на всей числовой прямой.

Пример 8.12. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 3^n}$ сходится равномерно на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Поскольку $\left| \frac{1}{x^2 + 3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится, то данный ряд сходится равномерно на всей числовой прямой.

8.5. Степенные ряды. Основные понятия

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots, \quad (8.10)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — постоянные числа, называемые коэффициентами ряда; x_0 — фиксированное число (центр степенного ряда). При $x_0 = 0$ получается ряд по степеням x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (8.11)$$

Если в рядах (8.10) и (8.11) переменной x придать числовое значение, то получим числовой ряд. В дальнейшем будем рассматривать в основном ряды вида (8.11), так как с помощью подстановки $x' = x - x_0$, $x' = x$ из (8.10) получим ряд (8.11).

Определение. Множество всех значений переменной x , при которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости ряда*.

Определение. Число $R > 0$ такое, что при всех $|x| < R$ ряд (8.11) сходится, а при всех $|x| > R$ — расходится, называется *радиусом сходимости*. Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости*.

Теорема 8.9 (Абеля). Если степенной ряд (8.11) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится для любого x , удовлетворяющего условию $|x| < |x_0|$. Если при $x = x_1$ ряд (8.11) расходится, то он расходится при любых x , для которых $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля устанавливает *структуру области сходимости* степенного ряда (8.11). Областью сходимости степенного ряда (8.11) является интервал $(-R; R)$, дополненный одним или двумя его концами, если в этих точках ряд сходится, что зависит от конкретного исследуемого ряда.

Радиус сходимости ряда (8.11) определяют по одной из формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ или } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Замечание 8.4. Для нахождения области сходимости ряда (8.10) можно поступить следующим образом. Заменой $x' = x - x_0$, $x' = x$ сведем ряд (8.10) к ряду (8.11), найдем R и далее, решив неравенство $|x - x_0| < R$, получим $x_0 - R < x < x_0 + R$. Этот интервал может быть дополнен граничными точками, как и в случае ряда (8.11).

Пример 8.13. Найдите область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$.

Решение. Чтобы найти область сходимости ряда, достаточно определить его интервал сходимости и выяснить, сходится ли ряд на концах этого интервала.

Найдем радиус сходимости. Имеем

$$a_n = \frac{2^n}{n^2 + 1}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + 1},$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n ((n+1)^2 + 1)}{2^{n+1} (n^2 + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, степенной ряд сходится в интервале $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Исследуем, сходится ли ряд на концах интервала $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. При $x = -\frac{1}{2}$ ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ и сходится абсолютно. Действительно, ряд из абсолютных величин имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$, который сходится по первому признаку сравнения, так как $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$ всех для n . При $x = \frac{1}{2}$ ряд

принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ и сходится. Следовательно, область сходимости степенного ряда имеет вид $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Пример 8.14. Найдите область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1) \cdot 4^n}$.

Решение. Найдём сначала радиус сходимости ряда. Имеем $a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 4^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 4^{n+1}}$, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)4^{n+1}}{(2n-1) \cdot 4^n} = 4$. Тогда ряд сходится в интервале $-4 < x + 2 < 4$ или $-6 < x < 2$.

На границах интервала при $x = -6$ ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$. Ряд из абсолютных величин имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и расходится (по сравнению с гармоническим), т. е. рассматриваемый числовой ряд не сходится абсолютно. Для исследования на условную сходимость используем признак Лейбница: так как члены ряда, взятые по модулю, убывают, а $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, то в точке $x = -6$ ряд сходится условно. При $x = 2$ ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и расходится (как знакоположительный), например по второму признаку сравнения. Следовательно, область сходимости степенного ряда имеет вид $[-6; 2)$.

Приведем свойства степенных рядов:

1) степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a; b]$, лежащем внутри интервала сходимости, поэтому его сумма является непрерывной функцией;

2) степенной ряд с суммой $S(x)$ можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости; радиус сходимости при этом не изменится.

Простейшим примером степенного ряда является ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots,$$

члены которого образуют геометрическую прогрессию. Он сходится при $|q| = |x| < 1$. Следовательно, данный ряд имеет радиус сходимости $R = 1$ и интервал сходимости $(-1; 1)$. Сумма этого ряда $S(x) = \frac{1}{1-x}$ (в соответствии

с формулой $S = \frac{a}{1-q}$ при $a=1, q=x$), поэтому для функции $f(x) = \frac{1}{1-x}$ получаем разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1). \quad (8.12)$$

Интегрируя ряд (8.10) по отрезку $[0; x]$, где $|x| < 1$, получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (|x| < 1).$$

Этот ряд сходится при $|x| < 1$. При $x=1$ ряд также сходится, при $x=-1$ — расходится (получен из гармонического ряда умножением на -1). Следовательно, этот ряд сходится при $-1 < x \leq 1$.

Пример 8.15. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{1+2x}$.

Решение. Воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (8.12), считая, что $q = -2x$. Записывая в этой формуле $(-2x)$ вместо x , получаем искомый степенной ряд:

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - (2x)^3 + \dots + (-1)^n (2x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n.$$

Этот ряд сходится, если $|2x| < 1$, т. е. при $|x| < \frac{1}{2}$; $R = \frac{1}{2}$ — радиус сходимости.

8.6. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Ряд Тейлора и ряд Маклорена

Если в интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ имеет производные в окрестности точки x_0 до $(n+1)$ -го порядка включительно, то для всякого x из этого интервала существует точка $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, такая, что

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots + R_n(x), \end{aligned} \quad (8.13)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ — остаточный член формулы (8.13) в форме Лагранжа.

Формула (8.13) называется *формулой Тейлора*.

Частный случай формулы (8.13) при $x_0 = 0$ называется *формулой Маклорена*, которая имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

Если функция $y = f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

то коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (8.14)$$

Ряд в правой части формулы (8.14) называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$ (независимо от того, сходится ли он и имеет ли своей суммой $f(x)$).

Если в ряде Тейлора положим, что $x_0 = 0$, то получим его частный случай, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Следует отметить, что рассуждения относительно рядов Тейлора и Маклорена сделаны в предположении, что функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд. Если заранее этого не предполагать, а просто считать функцию $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируемой и составить для нее ряд Тейлора (Маклорена), то открытым остается вопрос сходимости для всех x , отличных от x_0 . Возможны даже случаи, когда ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$, сходится, а его сумма не равна $f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то она может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора (8.14). Условие

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд сходиллся к функции $f(x)$. Здесь $R_n(x)$ – остаточный член в формуле Тейлора (8.13).

В каждом конкретном случае следует находить область сходимости ряда к функции $f(x)$.

Приведем разложение в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (8.15)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (8.16)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (8.17)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1), \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1). \end{aligned} \quad (8.19)$$

В скобках указана область сходимости ряда. Ряд (8.19) называется *биномиальным*, на концах интервала ведет себя в зависимости от $\alpha \in \mathbf{R}$: при $\alpha \geq 0$ абсолютно сходится в точках $x = \pm 1$; при $-1 < \alpha < 0$ расходится в точке $x = -1$ и условно сходится в точке $x = 1$; при $\alpha \leq -1$ расходится в точках $x = \pm 1$.

В общем случае разложение в степенные ряды основано на использовании рядов Тейлора и Маклорена. Степенные ряды многих функций можно найти с помощью рядов (8.15)–(8.19). Во многих случаях полезно использовать дифференцирование и интегрирование степенных рядов, а также ряд суммы геометрической прогрессии.

Пример 8.16. Разложите в степенной ряд следующие функции:

- 1) $y = 1/x$ в точке $x = 1$;
- 2) $y = e^{-x^2}$ в точке $x = 0$;
- 3) $y = \arctg x$ в точке $x = 0$.

Решение:

1) воспользуемся рядом Тейлора (8.14). Найдем производные данной функции и их значения в точке $x = 1$:

$$y(1)=1, \quad y^{(1)}(1)=-\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=1}=-1,$$

$$y^{(2)}(1)=\frac{2}{x^3}\bigg|_{x=1}=2=2!, \quad y^{(3)}(1)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\bigg|_{x=1}=-6=-3!,$$

$$y^{(4)}(1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}\bigg|_{x=1}=24=4!, \quad \dots, \quad y^{(n)}(1)=(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\bigg|_{x=1}=(-1)^n n!$$

После подстановки в (8.13) и упрощений получим

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\dots+(-1)^n(x-1)^n+\dots;$$

2) воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции e^x (формула (8.14)) и запишем ее в виде

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\dots+\frac{u^n}{n!}+\dots \quad (-\infty < u < +\infty).$$

Положим, $u=-x^2$, тогда получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\dots+(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}+\dots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

3) воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (8.12). Если $q=-x^2$, получим

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+\dots$$

Это ряд, который сходится внутри отрезка $|x|\leq 1$, поэтому его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0; x] \subset (-1; 1)$.

Следовательно,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2(n-1)} dt,$$

откуда получаем $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Область сходимости полученного

ряда $x \in (-1; 1)$. Можно показать, что этот ряд сходится условно и при $x=1$, и при $x=-1$.

8.7. Приложения степенных рядов

Степенные ряды в приближенных вычислениях. Степенные ряды используются в приближенных вычислениях значений различных функций при определенных значениях x .

Пример 8.17. Вычислите приближенно $\sin 1$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

Решение. Воспользуемся формулой (8.16):

$$\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots,$$

так как для знакопередающегося ряда $|S - S_n| < a_{n+1}$ (см. признак Лейбница), то достаточно найти a_{n+1} , для которого $a_{n+1} < \delta$. Тогда частичная сумма S_n дает значение функции требуемой точности. Очевидно, что четвертый член равен $\frac{1}{5040} < 10^{-3}$, поэтому с точностью $\delta = 10^{-3}$ $\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0,841$.

Пример 8.18. С помощью степенного ряда вычислите приближенно $\sqrt[3]{70}$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

Решение. Преобразуем $\sqrt[3]{70}$ следующим образом: $\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64+6} = 4\left(1 + \frac{3}{32}\right)^{1/3}$. Воспользуемся биномиальным рядом (8.19), в нашем случае $\alpha = \frac{1}{3}$, $x = \frac{3}{32}$. Вычислим выражение по формуле

$$\begin{aligned} 4\left(1 + \frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}} &= 4\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{32} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{32}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{3}{32}\right)^3 + \dots\right) = \\ &= 4\left(1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{1024} + \frac{5}{3 \cdot 32^3} + \dots\right) = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{256} + \frac{5}{3 \cdot 2^{13}} + \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что четвертый член равен $\frac{5}{3 \cdot 2^{13}}$ и его можно отбросить, так как $\frac{5}{3 \cdot 2^{13}} < \delta = 10^{-3}$. Тогда $\sqrt[3]{70} \approx 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{256} = 4,121$.

Замечание 8.5. В приближенных вычислениях для малых значений x ($x \rightarrow 0$) можно использовать формулы

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1 \pm x) \approx \pm x.$$

Вычисление интегралов. С помощью разложений функций в степенные ряды можно находить неопределенные интегралы в виде степенных рядов и приближенно вычислять соответствующие определенные интегралы, так как внутри области сходимости допустимо почленное интегрирование ряда.

Пример 8.19. Найдите $\int \frac{\sin x}{x} dx$ в виде степенного ряда и укажите область сходимости.

Решение. Воспользуемся формулой (8.16). Получим ряд для подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sin x &= \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

Полученный ряд сходится на всей числовой прямой. Следовательно, его можно почленно интегрировать. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{x} dx &= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

или

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + C.$$

Ряд сходится на всей числовой прямой.

Пример 8.20. С помощью степенного ряда вычислите приближенно $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^{-x^2} в степенной ряд (см. пример 8.16):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Данный ряд сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно почленно интегрировать по любому промежутку. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx &= \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx = \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} + \dots \right) \Bigg|_0^{1/4} = \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3 \cdot 1!} + \frac{1}{4^5 \cdot 5 \cdot 2!} - \dots \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = \frac{47}{192} \approx 0,244,
\end{aligned}$$

так как число $\frac{1}{4^5 \cdot 5 \cdot 2!} < \delta = 10^{-3}$ и его можно было отбросить. Таким обра-

зом, значение данного определенного интеграла приближенно равно 0,244.

Приближенное решение дифференциальных уравнений. Если дифференциальное уравнение точно проинтегрировать с помощью элементарных функций не удастся, то его решение удобно искать в виде степенного ряда Тейлора или Маклорена. При решении задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

используется ряд Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

где $y(x_0) = y_0$, $y^{(1)}(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ ($n = 2, 3, \dots$) находят последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой начальных данных в выражения для этих производных.

Пример 8.21. Методом последовательного дифференцирования найдите первые три члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $4x^2 y' + y = 0$ при заданном начальном условии $y(1) = 1$.

Решение. Используем ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$. Из дифференциального уравнения находим первую производную $y' = -\frac{y}{4x^2}$. Тогда ее значение в точке 1 будет $y'(1) = -\frac{1}{4 \cdot 1^2} = -\frac{1}{4}$. Далее находим $y''(1)$. Для этого

дифференцируем обе части исходного уравнения по x : $8xy' + 4x^2 y'' + y' = 0$,

откуда $y'' = -\frac{2y'}{x} - \frac{y'}{4x^2}$, $y''(1) = -\frac{2\left(-\frac{1}{4}\right)}{1} - \frac{-\frac{1}{4}}{4 \cdot 1^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$. Затем подстав-

ляем полученные значения в ряд Тейлора. В результате получим три слагаемых ряда Тейлора функции:

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{-1/4}{1!}(x-1) + \frac{9/16}{2!}(x-1)^2 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{9}{32}(x-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

8.8. Ряды Фурье

Определение. *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (8.20)$$

где a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$) — постоянные числа, называемые коэффициентами тригонометрического ряда. Свободный член ряда записан в виде $a_0/2$ для удобства.

Поскольку члены ряда (8.20) имеют общий период $T = 2\pi$, то и сумма ряда, если он сходится, также является периодической функцией с периодом 2π . Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является суммой ряда (8.20), то она разлагается в тригонометрический ряд. Если при этом ряд сходится равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$, то коэффициенты a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$) этого ряда определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

и называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а ряд (8.20) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Комплексная форма ряда Фурье имеет вид $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, где коэффициенты c_n и c_{-n} определяются по формулам

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на отрезке $[a; b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов $(a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_{n-1}; b)$ таким образом, чтобы в каждом из них функция была монотонной.

Достаточными условиями для сходимости ряда Фурье к заданной 2π периодической функции являются *условия Дирихле*: $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ должна быть непрерывной, кусочно-непрерывной (имеет конечное число точек разрыва первого рода) и монотонной или кусочно-монотонной (отрезок можно разделить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна).

Теорема 8.10.1 (Дирихле). Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке $[-\pi; \pi]$ и сумма этого ряда $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции, $S(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$ в точках x_0 разрыва функции, $S(x) = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2}$ на концах отрезка $[-\pi; \pi]$. Здесь $f(x - 0)$ – левосторонний предел, $f(x + 0)$ – правосторонний предел функции $f(x)$ в ее точках разрыва первого рода.

Замечание 8.6. Если ряд Фурье сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, то он сходится в любой точке $x \in \mathbf{R}$ и сумма ряда периодически повторяет с периодом 2π значения, которые она принимала на отрезке $[-\pi; \pi]$. Таким образом, если мы пользуемся рядом Фурье вне отрезка $[-\pi; \pi]$, то должны считать, что функция $f(x)$ продолжена вовне этого отрезка с периодом 2π (рис. 8.1). С этой точки зрения концы отрезка $x = -\pi, x = \pi$ могут являться точками разрыва для продолженной таким образом функции $f(x)$, если $f(-\pi + 0) \neq f(\pi - 0)$.

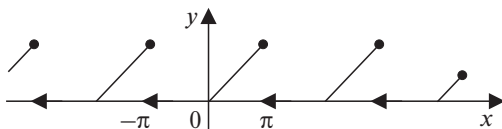


Рис. 8.1

Если функция $f(x)$ имеет период $2l$ и на отрезке $[-l; l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ее ряд Фурье записывается в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Кроме того, имеет место аналогичная теорема.

Теорема 8.10.2 (Дирихле). Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-l; l]$, то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке $[-l; l]$ и сумма этого ряда $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции, $S(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$ в точках x_0 разрыва функции, $S(x) = \frac{f(l - 0) + f(l + 0)}{2}$ на концах отрезка $[-l; l]$.

Замечание 8.7. Если периодическая функция $f(x)$ четная, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам, при этом $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$. Если периодическая функция $f(x)$ нечетная, то она разлагается в ряд Фурье только по синусам, при этом $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$.

Пример 8.22. Разложите 2π -периодическую функцию $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi; \pi]$ в ряд Фурье (рис. 8.2).

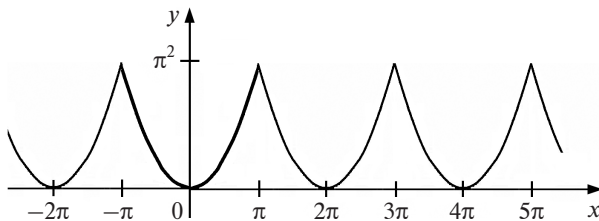


Рис. 8.2

Решение. Заданная функция четная, всюду непрерывная, поэтому она разлагается по косинусам.

Вычисляем коэффициенты:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = | \text{формула интегрирования по частям дважды} | = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{1}{n} \sin nx dx \right) = \frac{4}{\pi n} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) = \\
 &= \frac{4}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2} (\cos n\pi - \cos 0) = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ где } n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

В результате получим ряд Фурье для функции

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}. \quad (8.21)$$

Замечание 8.8. Поскольку ряд Фурье сходится к заданной функции во всех точках непрерывности, то ряды Фурье часто используют для нахождения суммы числовых рядов.

Пример 8.23. Найдите суммы следующих рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2};$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$

Решение:

1) используя полученный ряд (8.21), при $x = \pi$ получим $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2};$
выражая отсюда сумму ряда, получаем $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

2) из (8.21) при $x = 0$ получим $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

Задачи

1. Дан общий член ряда $a_n = \frac{n}{10^n + 1}$. Напишите первые пять членов ряда.

Ответ: $1/11 + 2/101 + 3/1001 + 4/10\,001 + 5/10\,001$.

2. Запишите формулу для общего члена ряда $3 + \frac{9}{8} + \frac{27}{27} + \frac{81}{64} + \dots$.

Ответ: $a_n = \frac{3^n}{n^3}.$

3. Исследуйте ряд на сходимость. Если ряд сходится, то найдите его сумму S :

$$1) \frac{7}{6} + \frac{25}{36} + \frac{91}{216} + \dots + \frac{3^n + 4^n}{6^n} + \dots;$$

$$2) \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{4 \cdot 2^n} + \dots;$$

$$3) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots;$$

$$4) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots.$$

Ответ: 1) $S = 3$; 2) $S = 1/4$; 3) $S = 2$; 4) $S = 3/4$.

4. Докажите сходимость ряда и найдите его сумму:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{21}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n};$$

$$3) 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{2n}} + \dots;$$

$$4) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 17} + \dots;$$

$$5) \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \dots.$$

Ответ: 1) $S = 7$; 2) $S = 5/6$; 3) $S = 9/8$; 4) $S = 1/2$; 5) $S = 1/4$.

5. Исследуйте сходимость ряда:

$$1) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{2n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n.$$

Ответ: 1) расходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) расходится.

6. С помощью признаков сравнения исследуйте сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 + 3};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}.$$

Ответ: 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) сходится.

7. С помощью признака Даламбера исследуйте сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n(3n+1)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}.$$

Ответ: 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится.

8. С помощью признака Коши исследуйте сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 3n + 9}{3n^2 + 2} \right)^n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^n.$$

Ответ: 1) сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) расходится.

9. Исследуйте сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 + 3n - 2};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 5}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}.$$

Ответ: 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится.

10. Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{5n^2 - n + 1}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

Ответ: 1) сходится абсолютно; 2) расходится; 3) сходится абсолютно;

4) сходится абсолютно.

11. Исследуйте, абсолютно или условно сходится ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{5^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + 2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 + 3}.$$

Ответ: 1) сходится условно; 2) сходится абсолютно; 3) сходится абсолютно; 4) сходится абсолютно.

12. С точностью до 0,1 вычислите сумму ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}.$$

Ответ: 1) $\frac{\pi^2}{12} \approx 0,82$; 2) 0,25.

13. Исследуйте, равномерно ли сходится ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2 + n^2};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^4}.$$

Ответ: 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится.

14. Найдите область сходимости степенного ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^4};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}.$$

Ответ: 1) $[-1; 1)$; 2) $(-5; 5)$; 3) $(-1; 1)$; 4) $[-1/2; 1/2)$; 5) $[-2; 8)$; 6) $[-6; -4]$; 7) $[-1; 3)$; 8) $(-2; 2)$.

15. Разложите функцию в ряд по степеням x :

$$1) f(x) = x \sin 2x;$$

$$4) f(x) = \cos^2 x;$$

$$2) f(x) = \ln(1+2x);$$

$$5) f(x) = \frac{1}{1-5x};$$

$$3) f(x) = 5^x;$$

$$6) f(x) = \frac{x}{1-x^4}.$$

Ответ: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{n+1}}{n+1}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n(5)}{n!}$;

4) $1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + \frac{x^8}{315} + O[x]^9$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1}$.

16. Разложите функцию в ряд по степеням x , найдите области сходимости полученных рядов:

$$1) y = \frac{\sin 3x}{x};$$

$$3) y = \frac{3}{(1+x)(1-2x)};$$

$$2) y = x \cos \sqrt{x};$$

$$4) y = xe^{-x}.$$

Ответ: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!}, |x| < \infty$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!}, 0 \leq x < +\infty$;

3) $3 + 3x + 9x^2 + 15x^3 + 33x^4 + O(x^5), |x| < \frac{1}{2}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}, |x| < \infty$.

17. Разложите в ряд Тейлора функцию в окрестности указанной точки:

$$1) f(x) = \frac{1}{x+5}, x=2;$$

$$3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, x=2;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}, x=-2;$$

$$4) f(x) = \frac{1}{x}, x=-2.$$

Ответ: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+2)^n, -3 < x < -1$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 3^n} - \frac{1}{10 \cdot 5^n} \right) (x+2)^n, -5 < x < 1$;

3) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^n n!} (x+3)^n, -4 < x \leq -2$; 4) $-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}, -4 < x < 0$.

18. Вычислите значение функции с точностью до $\delta = 10^{-3}$:

$$1) \sin 10^\circ;$$

$$4) \ln 2;$$

$$2) \arctg \frac{1}{2};$$

$$5) \sqrt[10]{1027}.$$

$$3) \cos 2^\circ;$$

Ответ: 1) 0,174; 2) 0,464; 3) 0,999; 4) 0,693; 5) 2,000.

19. Вычислите определенный интеграл с точностью до $\delta = 10^{-3}$:

$$1) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$3) \int_1^4 e^{-1/x} dx;$$

$$2) \int_0^{1/3} \sqrt{1+x^4} dx;$$

$$4) \int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

Ответ: 1) 0,905; 2) 0,334; 3) 1,922; 4) -0,659.

20. Найдите интеграл в виде степенного ряда и укажите область сходимости:

$$1) \int \frac{\sin x^2}{x} dx;$$

$$3) \int \frac{e^x}{x} dx;$$

$$2) \int \frac{\cos x}{x} dx;$$

$$4) \int e^{-x^2} dx.$$

Ответ: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{4n-1}}{(2n-1)!}$, $|x| < \infty$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!}$, $|x| < \infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$, $|x| < \infty$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $|x| < \infty$.

21. Методом последовательного дифференцирования найдите три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии:

$$1) y' = xy + e^y, y(0) = 0; \quad 3) y' = x^2 y^2 + 1, y(0) = 1;$$

$$2) y' = x^2 + y^2, y(-1) = 2; \quad 4) y' = 2x^2 + y^3, y(1) = 1.$$

Ответ: 1) $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \dots$; 2) $y = 1 + x + x^2 + \dots$; 3) $y = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$; 4) $y = 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \dots$.

22. Разложите 2π -периодическую функцию $f(x) = 2x + 3$, $x \in (-\pi; \pi]$ в ряд Фурье.

Ответ: $f(x) = \frac{3-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{2(\pi-3)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k}$.

23. Разложите 4-периодическую функцию $f(x) = |x|$ ($-2 < x \leq 2$) в ряд Фурье. Используя полученное разложение, найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Ответ: $\pi^2/8$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан общий член ряда $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n^2}$. Напишите первые пять членов ряда.

2. Запишите формулу общего члена ряда $\frac{1}{4} + \frac{2}{10} + \frac{3}{28} + \dots$.

3. Исследуйте ряд на сходимость. Если ряд сходится, то найдите его сумму (S):

$$1) 1 + \frac{45}{81} + \frac{243}{729} + \dots + \frac{3^n + 6^n}{9^n} + \dots;$$

$$2) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

4. Докажите сходимость ряда и найдите его сумму:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \quad 3) 1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \dots;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

5. Исследуйте сходимость знакоположительного ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right);$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}.$$

6. Исследуйте сходимость знакопеременного ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n \sin n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}.$$

7. Найдите радиус и область сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^n}{n3^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n x^n$.

8. Вычислите с точностью до 0,001:

1) $\sqrt{e}$;

4) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$;

2) $\sin \frac{1}{2}$;

5) $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}$.

3) $\sqrt[5]{34}$;

9. Вычислите с точностью до 0,001:

1) $\int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx$;

3) $\int_0^{0.2} \sqrt{x} e^{-x} dx$;

2) $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3} dx$;

4) $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Основные правила дифференцирования

Пусть C — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные, тогда возможны следующие формулы:

1) $C' = 0$;

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(Cu)' = Cu'$;

4) $(uv)' = u'v + uv'$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

6) если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f(u(x))$, где функции $f(u)$, $u(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u u'_x$ — формула дифференцирования сложной функции.

2. Таблица производных основных элементарных функций

№ п/п	Вид функции	Производная	Сложная функция	Производная сложной функции
1	$y = x^\alpha$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = u^\alpha$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
2	$y = \sqrt{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3	$y = \frac{1}{x}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
4	$y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$y = a^u$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
5	$y = e^x$	$(e^x)' = e^x$	$y = e^u$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
6	$y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a u$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
7	$y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

№ п/п	Вид функции	Производная	Сложная функция	Производная сложной функции
8	$y = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$y = \sin u$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9	$y = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$y = \cos u$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10	$y = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} u$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11	$y = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} u$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12	$y = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin u$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13	$y = \arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos u$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14	$y = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} u$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15	$y = \operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arcctg} u$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

3. Свойства неопределенных интегралов

$$1^\circ. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2^\circ. d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$3^\circ. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$4^\circ. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$5^\circ. \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx, \text{ где } c = \text{const.}$$

$$6^\circ. \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

$$7^\circ. \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

$$8^\circ. \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

$$9^\circ. \int u dv = uv - \int v du, \quad u = u(x), \quad v = v(x).$$

4. Таблица основных неопределенных интегралов¹

$$1. \int 0 \cdot dx = C.$$

$$2. \int 1 \cdot dx = x + C.$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$6. \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C, \quad k \neq 0.$$

$$7. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, \quad a \neq 0.$$

$$8. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, \quad a \neq 0.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C, \quad a \neq 0.$$

$$10. \int \frac{du}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C, \quad a \neq 0.$$

¹Подразумевается, что формулы, содержащие под знаком интеграла дроби и квадратные корни, рассматриваются лишь на промежутках, на которых дроби и квадратные корни определены.

$$11. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$12^*. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

$$15. \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C \quad \text{или} \quad \int \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)} + C.$$

$$16. \int -\frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + C \quad \text{или} \quad \int -\frac{df(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{f(x)} + C.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Астровский, А. И. Высшая математика. Часть 2 : учеб. пособие / А. И. Астровский, М. П. Дымков. — Минск, 2011. — 413 с.

Баврин, И. И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М., 2019. — 397 с.

Батунер, Л. М. Математические методы в химической технике / Л. М. Батунер, М. Е. Позин. — Л., 1971. — 823 с.

Высшая математика. Практикум : учеб. пособие : в 2 ч. / О. М. Матейко [и др.] ; под ред. С. А. Самаля. — Минск, 2020. — 2 ч.

Высшая математика: общий курс : учебник / А. И. Яблонский [и др.] ; под ред. С. А. Самаля. — Минск, 2000. — 351 с.

Гусак, А. А. Высшая математика : учебник : в 2 т. / А. А. Гусак. — 2-е изд., испр. — Минск, 2000. — Т. 1. — 544 с.

Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике : в 2 ч. / А. А. Гусак. — 2-е изд., перераб. — Минск, 1988. — Ч. 2. — 229 с.

Коваленко, Н. С. Практикум по высшей математике для студентов химических специальностей : учеб.-метод. пособие / Н. С. Коваленко, М. Н. Василевич, В. И. Яшкин. — Минск, 2021. — 279 с.

Высшая математика : практикум : в 2 ч. / В. В. Косьянчук [и др.]. — Минск, 2011. — Ч. 2. — 235 с.

Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М., 2003—2006. — Т. 1. — 2003. — 704 с. ; Т. 2. — 2004. — 720 с.

Майсеня, Л. И. Справочник по математике: основные понятия и формулы : справочник / Л. И. Майсеня. — Минск, 2013. — 400 с.

Матейко, О. М. Высшая математика для географов : учеб. пособие : в 2 ч. / О. М. Матейко, А. Н. Таныгина. — Минск, 2012. — Ч. 1. — 271 с.

Петрякова, Е. А. Кратные и криволинейные интегралы : учеб. пособие / Е. А. Петрякова, Т. Л. Алексеева. — Иркутск, 2008. — 104 с.

Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. — Минск, 2013—2014. — Ч. 2. — 2013. — 396 с. ; Ч. 3. — 2013. — 367 с.

Скатецкий, В. Г. Математические методы в химии / В. Г. Скатецкий, Д. В. Свиридов, В. И. Яшкин. — Минск, 2006. — 368 с.

Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. — Минск, 1993. — Ч. 1. — 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ	4
1.1. Числовые функции одной действительной переменной	4
1.1.1. Понятие числовой функции. Способы задания числовых функций....	4
1.1.2. Некоторые характеристики функций.....	6
1.1.3. Обратная, сложная и элементарные функции	6
1.2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности.....	7
1.3. Основные свойства пределов числовых последовательностей	12
1.4. Число ε . Примеры нахождения пределов последовательностей при помощи основных свойств	16
1.5. Предел функции в точке. Односторонние пределы функции в точке	21
1.6. Конечный предел функции при аргументе, стремящемся к бесконечности. Бесконечно большие функции	25
1.6.1. Конечный предел функции при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty; \infty$).....	25
1.6.2. Бесконечно большие функции при $x \rightarrow x_0$	27
1.7. Основные свойства пределов функций.....	31
1.8. Замечательные пределы. Примеры нахождения пределов функций	35
1.9. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции	39
1.10. Непрерывность и разрывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.....	43
1.10.1. Непрерывность функции в точке	43
1.10.2. Разрывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.....	46
1.11. Основные свойства непрерывных функций	48
Задачи.....	51
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля	60
2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	63
2.1. Приращение функции и аргумента.....	63
2.2. Определение производной, ее геометрический и физический смысл	63
2.3. Правила дифференцирования функций.....	65
2.4. Производная сложной функции	66
2.5. Производные высших порядков. Неявное, логарифмическое и параметрическое дифференцирование.....	67
2.6. Дифференциал функции и его приложения	71
2.6.1. Правила нахождения дифференциала функции.....	71
2.6.2. Связь непрерывности и дифференцируемости.....	73

2.7. Формулы Тейлора и Маклорена	73
2.8. Приложения производных	76
2.8.1. Правило Лопиталю – Бернулли.....	76
2.8.2. Раскрытие неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0	76
2.8.3. Возрастание и убывание функций. Локальные максимумы и минимумы	78
2.8.4. Локальные максимумы и минимумы	79
2.8.5. Алгоритм исследования функции на экстремум и интервалы монотонности	80
2.8.6. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной (второе достаточное условие экстремума)	82
2.8.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	82
2.8.8. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба	83
2.8.9. Асимптоты	88
2.8.10. Схема исследования и построения графиков функций	89
Задачи для самостоятельного решения	93
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля	97
3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	100
3.1. Первообразная и неопределенный интеграл	100
3.2. Свойства неопределенного интеграла	101
3.3. Метод непосредственного интегрирования	102
3.4. Метод подстановки или замены переменной интегрирования	102
3.5. Интегрирование по частям.....	106
3.6. Методы интегрирования специальных классов функций	107
3.6.1. Интегрирование дробно-рациональных функций	107
3.6.2. Интегрирование простейших рациональных дробей	108
3.6.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие	110
3.6.4. Метод неопределенных коэффициентов	111
3.6.5. Интегрирование правильных рациональных дробей.....	112
3.7. Интегрирование некоторых видов тригонометрических выражений	113
3.7.1. Интегралы, содержащие произведения тригонометрических функций.....	113
3.7.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{N}$	114
3.7.3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, $R(u, v)$ – рациональная функция	114
3.8. Интегрирование некоторых иррациональных функций.....	115
3.8.1. Интегралы с линейной иррациональностью.....	115
3.8.2. Интегралы с квадратичной иррациональностью	116
3.8.3. Интегралы с квадратичной иррациональностью в знаменателе дроби	118
Задачи для самостоятельного решения	119
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля	132

4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	136
4.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла	136
4.2. Свойства определенного интеграла	140
4.3. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница	142
4.4. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле	145
4.5. Вычисление площадей плоских фигур.....	148
4.6. Вычисление объемов геометрических тел	152
4.7. Длина дуги плоской кривой. Площадь поверхности вращения	155
4.8. Приложения определенного интеграла к задачам физики и химии	158
4.9. Несобственные интегралы.....	162
4.9.1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования	162
4.9.2. Интегралы от неограниченных функций	167
4.10. Приближенное вычисление определенного интеграла	171
Задачи.....	177
Задачи для самостоятельного решения	180
5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	183
5.1. Основные понятия	183
5.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных	188
5.3. Частные производные функции нескольких переменных	192
5.4. Полный дифференциал функции нескольких переменных	197
5.5. Дифференцирование сложных и неявных функций	200
5.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	204
5.7. Экстремумы функции нескольких переменных.....	205
5.8. Условный экстремум.....	208
5.9. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области	211
5.10. Производная в данном направлении. Градиент функции	214
5.11. Метод наименьших квадратов	216
Задачи.....	220
Задачи для самостоятельного решения	226
6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	228
6.1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Дифференциальные уравнения первого порядка	228
6.2. Простейшие дифференциальные уравнения и уравнения с разделенными и разделяющимися переменными	231
6.3. Однородные дифференциальные уравнения.....	235
6.4. Линейные дифференциальные уравнения	239
6.5. Уравнения в полных дифференциалах.....	241
6.6. Дифференциальные уравнения второго порядка	243
6.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	248

6.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	250
6.9. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.....	256
Задачи.....	264
Задачи для самостоятельного решения	268
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля	270
7. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	272
7.1. Двойные интегралы: определение и свойства	272
7.1.1. Вычисление двойного интеграла	274
7.1.2. Замена переменных в двойных интегралах	285
7.1.3. Двойной интеграл в полярных координатах	288
7.1.4. Приложения двойных интегралов	292
7.2. Тройные интегралы	298
7.2.1. Сведение тройного интеграла к повторному.....	299
7.2.2. Тройной интеграл в цилиндрических, сферических и обобщенных сферических координатах.....	302
7.2.3. Приложения тройных интегралов	306
Задачи.....	307
8. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.....	313
8.1. Определение числового ряда. Сходимость	313
8.2. Достаточные условия сходимости рядов с положительными членами	315
8.3. Знакопередающие ряды. Абсолютная и условная сходимости.....	319
8.4. Функциональные ряды. Основные понятия	320
8.5. Степенные ряды. Основные понятия	322
8.6. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Ряд Тейлора и ряд Маклорена	325
8.7. Приложения степенных рядов	329
8.8. Ряды Фурье.....	332
Задачи.....	335
Задачи для самостоятельного решения	340
ПРИЛОЖЕНИЯ	343
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	347

Учебное издание

Коваленко Николай Семенович
Дегтяренко Наталья Александровна
Василевич Михаил Николаевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРАКТИКУМ**

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *Д. В. Мацур*
Художник обложки *А. А. Рабкевич*
Технический редактор *В. П. Явуз*
Компьютерная верстка *О. Ю. Шантарович*
Корректор *Н. А. Ракуть*

Подписано в печать 27.12.2023. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 20,46. Уч.-изд. л. 24,29.
Тираж 140 экз. Заказ 430.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.