Теорема. *Если* $t_1 - t \leqslant \bar{\tau} + \theta_1$, *то множество* $Y(t)$ *ограничено линиями*

$$y_1(l) = C_{11}\exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{21} - C_{11})\exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{21}/\lambda_1,$$

$$y_2(l) = C_{12}\exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{22} - C_{12})\exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{22}/\lambda_2,$$

где параметр $l \in [0; t_1 - t]$;

$$z_1(l) = C_{31}\exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{21} - C_{31})\exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{21}/\lambda_1,$$

$$z_2(l) = C_{32}\exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{22} - C_{32})\exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{22}\lambda_2,$$

где параметр $l \in [0; t_1 - t]$;

$$s_1(l) = C_{31}\exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{41} - C_{31})\exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{41}/\lambda_1,$$

$$s_2(l) = C_{32}\exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{42} - C_{32})\exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{42}/\lambda_2,$$

где параметр $l \in [l_1; t_1 - t]$, $l_1 = \ln(C_{42}\exp(\lambda_2\theta) - C_{32}/(C_{42} - C_{32}))/\lambda_2$;

$$h_1(l) = C_{11}\exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{41} - C_{11})\exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{41}/\lambda_1,$$

$$h_2(l) = C_{12}\exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{42} - C_{12})\exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{42}/\lambda_2,$$

где параметр $l \in [l_2; t_1 - t]$, $l_2 = \ln(C_{42}\exp(\lambda_2\theta) - C_{12}/(C_{42} - C_{12}))/\lambda_2$; *линией* $x_2 = d$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция–2025», задание 1.2.04).

Библиографические ссылки

1. *Гончарова М. Н., Самсонов С. П.* О зависимости множества управляемости от параметров одной задачи оптимального управления // Науч. конф. «Ломоносовские чтения». М., 2024. С. 142.

2. *Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения М., 2007.

ОБ ОТСУТСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ SIRS

А. А. Гринь, А. В. Кузьмич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
grin@grsu.by, kuzmich_av@grsu.by

Для эпидемиологической модели доказывается отсутствие периодических решений в первом октанте, за счет сведения ее к двумерной системе и построения функции Дюлака.

В работе [1] изучались условия отсутствия периодических решений в нескольких системах дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающих эпидемиологическую модель SIRS. Рассмотрим одну из таких систем:

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S+I+R) - \mu S - \beta SI + \gamma R, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu+\nu)I, \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu+\gamma)R, \tag{1}$$

где S – количество восприимчивых к вирусу особей популяции, I – количество инфицированных особей, R – количество выздоровевших особей. Параметр μ представляет собой соотношение между скоростями рождаемости и смертности. Параметр β – скорость распространения инфекции. Параметр ν – скорость потери инфекционности. Модель (1) рассматривается при условии, что общая численность популяции C остается неизменной, т.е.

$$S + I + R = C, \tag{2}$$

а часть выздоровевших особей возвращается в группу восприимчивых к вирусу со скоростью γ. В силу биологического смысла все переменные и параметры системы положительны.

В работе [1] за счет существования первого интеграла (2) каждая система SIRS была сведена к соответствующей системе второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{3}$$

к которым применялся признак Дюлака [2].

Теорема 1. *Если для системы (3) существует непрерывно дифференцируемая в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ функция $B(x,y)$ такая, что выражение*

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$$

не обращается в нуль и не меняет свой знак в области D, то система (3) не имеет периодических решений в области D.

В частности, система (1) сводится к системе вида

$$\frac{dI}{dt} = I(\beta C - \mu - \nu - \beta I - \beta R), \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R. \tag{4}$$

Далее в статье [1] авторы, используя разработанный ими алгоритм, нашли функцию Дюлака вида $B = 1/I$ и таким образом показали, что система (4) не имеет периодических решений.

Мы предлагаем другой способ построения функции Дюлака для системы (4). Учитывая, что $I > 0$ с помощью замены $I = e^U$ систему (4) можно записать в виде

$$\frac{dU}{dt} = \beta C - \mu - \nu - \beta e^U - \beta R, \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R. \tag{5}$$

Тогда для системы (5) проходит признак Дюлака с функцией Дюлака $B = 1:$

$$\frac{\partial(BP)}{\partial U} + \frac{\partial(BQ)}{\partial R} = -\beta e^U - \mu - \gamma < 0$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Система (5) в первой четверти, а значит, и система (1) в первом октанте, не имеют периодических решений.*

В нашем докладе будут представлены и другие способы установления условий для отсутствия периодических решений в нескольких системах SIRS.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований по договору № Ф23У-008.

Библиографические ссылки

1. *Weber A., Sturm Th., Adbel-Rahman E. O.* Algorithmic global criteria for excluding oscillations // Bull. of Math. Biology. 2011. V. 73. № 4. P. 899–916.
2. *Черкас Л. А.* Функция Дюлака полиномальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.

О РЕШЕНИЯХ СТАЦИОНАРНЫХ ИЕРАРХИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

В. И. Громак

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
vgromak@gmail.com

Для стационарных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве для специальных значений параметров установлена вложимость множеств решений.

В работе рассматриваются аналитические свойства решений иерархий первого и второго уравнений Пенлеве, которые являются бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, обладают симметриями, определяемыми преобразованиями Беклунда [1–3]. При специальных значениях параметров эти иерархии имеют классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения. Для второго уравнения Пенлеве и его иерархии это обобщенные полиномы Яблонского–Воробьева, которые позволяют построить рациональные решения уравнений иерархии уравнения Кортевега–де Фриза.

Рассмотрим обобщенную иерархию первого уравнений Пенлеве в виде

$$P_1^{[2n-2]}: \quad \mathcal{L}_n[q(z)] - \gamma_n z - \delta_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и обобщенную иерархию второго уравнения Пенлеве

$$P_2^{[2n]}: \quad (D+2w)\mathcal{L}_n[w'-w^2] - (k_n z + p_n)w - \alpha_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где оператор $\mathcal{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$D\mathcal{L}_{n+1}[u] = (D^3 + (4u+\beta_n)(D+2Du))\mathcal{L}_n[u],$$
$$D = d/dz, \quad \mathcal{L}_1[u] = u, \quad u = u(z), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

а α_n, β_n, γ_n, δ_n, k_n, p_n – параметры.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (1), (2), определяемые оператором $\mathcal{L}_n$ (3), имеют соответственно порядок $2n-2$ и $2n$. Уравнение (1) при $n=2$ и уравнение (2) при $n=1$ определяют соответственно первое и второе уравнение Пенлеве.