# О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ РАЗНЫХ ЗНАКОВ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

**М. Н. Гончарова [1], С. П. Самсонов [2]**

[1] *Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь;*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
*m.gonchar@grsu.by*

Рассматривается управляемая система второго порядка, у которой матрица коэффициентов при фазовых переменных имеет собственные значения разных знаков. На поведение объекта наложено линейное фазовое ограничение. Построено множество управляемости в начало координат для некоторых моментов времени.

**Постановка задачи.** Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + v_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + v_2, \tag{1}$$

где управление $(v_1; v_2)$ является векторной кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из четырехугольника $V$. Множество $V$ назовем областью управления. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта $V$ обозначим через $U$. Множество $U$ является множеством допустимых управлений.

Будем считать, что выполняются неравенства $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, множество $V$ является четырехугольником. Вершины четырехугольника $V$ обозначим через $C_i$, $i = \overline{1,4}$, обходя контур четырехугольника против часовой стрелки. Координаты вершины $C_i$ обозначим через $C_{i1}$, $C_{i2}$. Примем, что выполняются следующие неравенства: $C_{11} > 0$, $C_{12} > 0$, $C_{21} < 0$, $C_{22} > C_{12}$, $C_{31} < C_{21}$, $C_{32} < 0$, $C_{41} > 0$, $C_{42} < C_{32}$, $C_{41} < C_{11}$. Фазовое ограничение зададим множеством

$$X = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leqslant d, \quad d > 0\}. \tag{2}$$

Множество всех точек фазового пространства, принадлежащих множеству (2), в которых объект (1) находится в момент времени $t$, в момент времени $t_1$ попадает в начало координат при помощи некоторого допустимого управления и выполнении фазового ограничения в каждый момент времени из отрезка $[t; t_1]$, назовем множеством управляемости в начало координат объекта (1) с ограничением (2). Обозначим это множество через $Y(t)$. Момент времени $t_1$ считаем фиксированным.

**Основной результат.** В [1] показано, что если $t_1 - t \leqslant \bar{\tau} = (-\ln(d\lambda_2 + C_{42})/C_{42})/\lambda_2$, то фазовое ограничение не оказывает влияния на построение множества $Y(t)$. Зададим величину $\theta_1 = \ln((C_{32}\, d\lambda_2 + C_{42}^2)/(C_{42}\, d\lambda_2 + C_{42}^2))/\lambda_2$. С использованием формул [2], определяющих множества управляемости в линейной задаче управления, доказана следующая

**Теорема.** *Если* $t_1 - t \leqslant \bar{\tau} + \theta_1$, *то множество* $Y(t)$ *ограничено линиями*

$$y_1(l) = C_{11}\exp(-\lambda_1(t_1-t))/\lambda_1 + (C_{21}-C_{11})\exp(\lambda_1(l-t_1+t))/\lambda_1 - C_{21}/\lambda_1,$$

$$y_2(l) = C_{12}\exp(-\lambda_2(t_1-t))/\lambda_2 + (C_{22}-C_{12})\exp(\lambda_2(l-t_1+t))/\lambda_2 - C_{22}/\lambda_2,$$

*где параметр* $l \in [0; t_1 - t]$;

$$z_1(l) = C_{31}\exp(-\lambda_1(t_1-t))/\lambda_1 + (C_{21}-C_{31})\exp(\lambda_1(l-t_1+t))/\lambda_1 - C_{21}/\lambda_1,$$

$$z_2(l) = C_{32}\exp(-\lambda_2(t_1-t))/\lambda_2 + (C_{22}-C_{32})\exp(\lambda_2(l-t_1+t))/\lambda_2 - C_{22}\lambda_2,$$

*где параметр* $l \in [0; t_1 - t]$;

$$s_1(l) = C_{31}\exp(-\lambda_1(t_1-t))/\lambda_1 + (C_{41}-C_{31})\exp(\lambda_1(l-t_1+t))/\lambda_1 - C_{41}/\lambda_1,$$

$$s_2(l) = C_{32}\exp(-\lambda_2(t_1-t))/\lambda_2 + (C_{42}-C_{32})\exp(\lambda_2(l-t_1+t))/\lambda_2 - C_{42}/\lambda_2,$$

*где параметр* $l \in [l_1; t_1 - t]$, $l_1 = \ln(C_{42}\exp(\lambda_2\theta) - C_{32}/(C_{42}-C_{32}))/\lambda_2$;

$$h_1(l) = C_{11}\exp(-\lambda_1(t_1-t))/\lambda_1 + (C_{41}-C_{11})\exp(\lambda_1(l-t_1+t))/\lambda_1 - C_{41}/\lambda_1,$$

$$h_2(l) = C_{12}\exp(-\lambda_2(t_1-t))/\lambda_2 + (C_{42}-C_{12})\exp(\lambda_2(l-t_1+t))/\lambda_2 - C_{42}/\lambda_2,$$

*где параметр* $l \in [l_2; t_1 - t]$, $l_2 = \ln(C_{42}\exp(\lambda_2\theta) - C_{12}/(C_{42}-C_{12}))/\lambda_2$; *линией* $x_2 = d$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция–2025», задание 1.2.04).

**Библиографические ссылки**

1. *Гончарова М. Н., Самсонов С. П.* О зависимости множества управляемости от параметров одной задачи оптимального управления // Науч. конф. «Ломоносовские чтения». М., 2024. С. 142.

2. *Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения М., 2007.

# ОБ ОТСУТСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ SIRS

**А. А. Гринь, А. В. Кузьмич**

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь*
*grin@grsu.by, kuzmich_av@grsu.by*

Для эпидемиологической модели доказывается отсутствие периодических решений в первом октанте, за счет сведения ее к двумерной системе и построения функции Дюлака.

В работе [1] изучались условия отсутствия периодических решений в нескольких системах дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающих эпидемиологическую модель SIRS. Рассмотрим одну из таких систем:

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S+I+R) - \mu S - \beta SI + \gamma R, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu+\nu)I, \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu+\gamma)R, \quad (1)$$