К АППРОКСИМАТИВНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

О. Б. Цехан

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
tsekhan@grsu.by

Для двухтемповых систем, моделями которых являются линейные системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных, исследуется задача управляемости в классе δ-последовательностей – аппроксимативная управляемость. Установлены независящие от малого параметра условия аппроксимативной управляемости.

Дана линейная нестационарная сингулярно возмущенная система управления (ЛНСВС)

$$\dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\,z(t) + B\,(t,\mu)\,u(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \quad z(t_0) = z_0. \qquad (1)$$

Здесь μ – параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $n = n_1 + n_2$, $z^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(t) = \big(x^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(t), y^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(t)\big)$, ${}^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}$ – символ транспонирования, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ – вектор медленных переменных, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ – вектор быстрых переменных, $z_0^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}} = (x_0^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}, y_0^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u(t)$, $t \in T$, – скалярная функция управления,

$$A(t,\mu) = \left[A^0(t) + \mu^{-1}A^1(t)\right], \quad B(t,\mu) = \left[B^0(t) + \mu^{-1}B^1(t)\right],$$

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix},$$

$$B^0(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

$A_i(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_i}$, $A_{i+2}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_i}$, $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, – непрерывные на T матричные функции.

Пусть $F(t,\mu)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы $\dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\,z(t)$, нормированная при $t = t_0$.

Определение 1. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ *ЛНСВС (1) имеет класс* $n-1$, если n-вектор-функция $H(t,\mu) = F^{-1}(t,\mu)B(t,\mu)$ $n-1$ раз непрерывно дифференцируема на T.

Пусть зафиксирована некоторая δ-последовательность [1, с. 84] функций. Определим последовательность $\{u_{i\sigma}(t,\mu)\}$ управлений вида («быстрые» управления [2]) $u_{i\sigma}(t,\mu) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\mu)\delta_i^{(j)}(t-\sigma)$, $t \in T$, где $a_j(\mu)$ – полиномы по μ. При фиксированных $\mu \in (0, \mu^0]$ и управлении $u_{i\sigma}(t,\mu), t \in T$ обозначим $z(t; \mu, z_0, u_{i\sigma}(\,\cdot, \mu))$ решение ЛНСВС (1) с начальным условием z_0.

Определение 2. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ *ЛНСВС (1) аппроксимативно управляема* если она имеет класс $n-1$ и для любого $\sigma \in T$, любого $z_0 \in \mathbb{R}^n$, для любого $\varepsilon > 0$, найдется номер $i_0(z_0, \varepsilon)$, такой что $||z(\sigma; \mu, z_0, u_{i\sigma}(\,\cdot, \mu))|| \leqslant \varepsilon$ для любого $i > i_0$.

Аппроксимативно управляемую ЛНСВС можно с помощью гладких управлений из последовательности $\{u_{i\sigma}(t,\mu)\}$ из любого начального состояния z_0 перевести в сколь угодно малую ε-окрестность нулевого состояния за сколь угодно малое время, предшествующее моменту σ.

Определим матрицы

$$A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad B_s(t) \triangleq B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t);$$

n-вектор функции $q_i^j(t)$, $j=\overline{0,i}$, $i=\overline{0,n-1}$ по рекуррентным формулам $q_i^j(t) = \left(A^0(t)q_{i-1}^j(t) + A^1(t)q_{i-1}^{j-1}(t) - \dot{q}_{i-1}^j(t)\right)$, $q_0^0(t) = B^0(t)$, $q_0^1(t) = B^1(t)$, $q_i^j(t) = 0$ при $j<0$ или $j > i+1$; n_1-вектор функции $q_{si}(t)$, $i=\overline{0,n_1-1}$, и n_2-вектор функции, $q_{fi}(t)$, $i=\overline{0,n_2-1}$, по рекуррентным формулам $q_{si}(t) = A_s(t)q_{s,i-1}(t) - \dot{q}_{s,i-1}(t)$, $q_{s0}(t) = B_s(t)$, $q_{si}(t)=0$ при $i<0$, $q_{fi}(t) = A_4(t)q_{f,i-1}(t)$, $q_{f0}(t) = B_2(t)$, $q_{fi}(t) = 0$ при $i<0$.

Составим матрицы $Q_s(t) = \{q_{si}(t),\ i=\overline{0,n_1-1}\}$, $Q_f(t) = \{q_{fi}(t),\ i=\overline{0,n_2-1}\}$.

Теорема. *Если функции $q_i^j(t)$, $i=\overline{0,n-1}$, $j=\overline{0,i}$, непрерывно-дифференцируемы на T, то ЛНСВС (1) имеет класс $n-1$ для любого $\mu>0$. Если к тому же $\operatorname{rank} Q_s(t) = n_1$, $\operatorname{rank} Q_f(t) = n_2$, для любого $t\in T$, то ЛНСВС (1) аппроксимативно управляема на T при всех достаточно малых $\mu \in (0,\mu^0]$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»).

Библиографические ссылки

1. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М., 1976.

2. *Куржанский А. Б.* О синтезе импульсных управлений и теории быстрых управлений // Тр. МИАН. 2010. Т. 268. С. 215–230.

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОНКОСТЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ

Г. Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
gsys@grsu.by

Рассматривается аналитическое решение задачи экранирования высокочастотного электромагнитного поля тонкостенным сферическим экраном. Для аналитического решение поставленной задачи используются векторные сферические волновые функции.

Электромагнитная обстановка представляет собой совокупность электромагнитных полей в заданной области пространства, которая может влиять как на биологические объекты, так и на функционирование конкретных электронных устройств. Для