

Теорема. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\operatorname{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{rank} [I_n - D(z), B(z)] = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(z) \\ C(z) \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где $W(p, z) = p(I_n - D(z)) - A(z)$.

Библиографические ссылки

1. Метельский А. В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682.

2. Хартовский В. Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 686–706.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л. А. Хвоцинская

Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова БГУ,
Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

По заданной группе монодромии из матриц второго порядка построено дифференциальное уравнение класса Фукса с особыми точками, все параметры которого найдены в явном виде.

Рассматривается проблема Римана [1] определения системы двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точек $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ с группой монодромии $V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1}$ ($V_1, V_2 \cdot \dots \cdot V_n, V_{n+1} = E$).

Обозначим характеристические числа матриц $W_k = (2\pi i)^{-1} \ln V_k$ и $W_{jk} = (2\pi i)^{-1} \times \ln(V_j \cdot \dots \cdot V_k)$ соответственно ρ_k, σ_k и ρ_{jk}, σ_{jk} , $j = 1, \dots, n$, $k = 2, \dots, n+1$, $j < k$ и находим числа $\kappa = -\sum_{k=1}^{n+1} (\rho_k + \sigma_k)$ (индекс задачи). Поведение решений на бесконечности определяют числа $\rho_\infty = \rho_{n+1} + [(\kappa + 2)/2]$, $\sigma_\infty = \sigma_{n+1} + [(\kappa + 1)/2]$. Ветви всех логарифмов согласованы и удовлетворяют соотношению Фукса

$$\sum_{k=1}^n (\rho_k + \sigma_k) + \rho_\infty + \sigma_\infty = 1.$$

Теорема. Решение проблемы Римана для двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$ с $(n+1)$ особой точкой $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ удовлетворяет уравнению класса Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{z - a_k}, \quad (1)$$

элементы матриц-вычетов

$$S_k = \begin{pmatrix} s_k & \gamma_k/c_k \\ c_k & s'_k \end{pmatrix}$$

которые находятся по формулам

$$s_k = (d_{1,k} - d_{1,k-1} - \rho(\rho_k + \sigma_k) + d_{k,n} - d_{k+1,n})/(\sigma - \rho),$$

$$s'_k = (d_{1,k-1} - d_{1,k} + \sigma(\rho_k + \sigma_k) + d_{k+1,n} - d_{k,n})/(\sigma - \rho),$$

$$c_1 = c, \quad c_2 = c(\tau_1 - 1), \quad c_j = c\tau_1 \cdots \tau_{j-2}(\tau_{j-1} - 1), \quad j = 3, \dots, n-1,$$

$$c_n = -c\tau_1\tau_2 \cdots \tau_{n-2},$$

$$\tau_k^2 \gamma_{1,k} + \tau_k(\gamma_{1,k+1} + \gamma_{1,k} - \gamma_k) + \gamma_{1,k+1} = 0, \quad \gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k),$$

$$\gamma_{1,k} = -(s_{1,k} - \rho_{1,k})(s_{1,k} - \sigma_{1,k}),$$

в которых $s_{1,k} = (d_{1,k} + \rho\sigma - \rho(\rho_{1,k} + \sigma_{1,k}) - d_{k+1,n})/(\sigma - \rho)$, $\rho = -\rho_\infty$, $\sigma = 1 - \sigma_\infty$, $k = 1, \dots, n-2$, c – произвольная постоянная.

Уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению класса Фукса с $(2n-1)$ особой точкой

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\rho_k \sigma_k}{(z - a_k)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{d_{j,k} + d_{j+1,k-1} - d_{j,k-1} - d_{j+1,k} - s_j - s_k}{(z - a_j)(z - a_k)} + \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} \right) y = 0,$$

где b_j , $j = 1, \dots, n-2$, – корни многочлена

$$P_{n-2}(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tau_1 \cdots \tau_{k-2}(a_k - a_{k+1})}{(z - a_k)(z - a_{k+1})}, \quad \frac{d}{dz}(P_{n-2}(z)) = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j}.$$

Фундаментальная система решений уравнения (2) окрестности каждой особой точки a_k , $k = 1, \dots, n+1$, найдена в виде рядов, коэффициенты которых определены из рекуррентных соотношений.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ «Конвергенция–2025», подпрограмма «Математические модели и методы».

Библиографические ссылки

1. Еругин Н. П. Проблема Римана. Мн., 1982.