

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И НАЗНАЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ЕДИНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. Е. Хартовский, О. И. Урбан

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by, urban@grsu.by

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями получен критерий существования и способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу, обеспечивающий финитную стабилизацию исходной системе и конечный (но не произвольный) спектр замкнутой системе. Отличительной чертой регулятора является отсутствие в структуре распределенного запаздывания, что важно для его практической реализации.

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где x – вектор состояния этой системы, u – управление, y – наблюдаемый выходной сигнал (выход), $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ – единичная матрица, λ_h – оператор сдвига, определяемый для заданного $h = \text{const} > 0$ правилом

$$(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh), \quad k \in \mathbb{N};$$

$D(\lambda) = \sum_{i=1}^m D_i \lambda^i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^m B_i \lambda^i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^m C_i \lambda^i$; $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Решение уравнения (1) однозначно задается начальным условием $x(t) = \varphi(t)$, $u(t) \equiv 0$, $t \in [-mh, 0]$. Считаем, что $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^1([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$ – неизвестная функция, где $\tilde{\mathcal{C}}^k(\cdot)$ – класс функций, $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывную производную порядка k . Управление u – кусочно-непрерывная функция.

Пусть $\mathbb{R}^{n \times m}[p, \lambda]$ ($\mathbb{R}^{n \times m}[\lambda]$) – множество матриц размера $n \times m$, элементы которых суть полиномы переменных p, λ (λ), $p_D = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Определим регулятор с обратной связью по наблюдаемому выходу

$$u(t) = U_{11}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{12}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t),$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = U_{21}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{22}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t > t_0. \quad (3)$$

Здесь $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ – вспомогательная переменная, $t_0 > 0$ – некоторое число ($u(t) \equiv 0$, $t \leq t_0$), $U_{11}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times l}[p, \lambda]$, $U_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times \tilde{n}}[p, \lambda]$, $U_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times l}[p, \lambda]$, $U_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}[p, \lambda]$.

В работе получен критерий существования и предложен способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу вида (3), который обеспечит финитную стабилизацию исходной системе, т.е. выполнение условия $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, и конечный спектр замкнутой системе.

Теорема. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\operatorname{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{rank} [I_n - D(z), B(z)] = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(z) \\ C(z) \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где $W(p, z) = p(I_n - D(z)) - A(z)$.

Библиографические ссылки

1. Метельский А. В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682.

2. Хартовский В. Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 686–706.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л. А. Хвоцинская

Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова БГУ,
Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

По заданной группе монодромии из матриц второго порядка построено дифференциальное уравнение класса Фукса с особыми точками, все параметры которого найдены в явном виде.

Рассматривается проблема Римана [1] определения системы двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точек $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ с группой монодромии $V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1}$ ($V_1, V_2 \cdot \dots \cdot V_n, V_{n+1} = E$).

Обозначим характеристические числа матриц $W_k = (2\pi i)^{-1} \ln V_k$ и $W_{jk} = (2\pi i)^{-1} \times \ln(V_j \cdot \dots \cdot V_k)$ соответственно ρ_k, σ_k и ρ_{jk}, σ_{jk} , $j = 1, \dots, n$, $k = 2, \dots, n+1$, $j < k$ и находим числа $\kappa = -\sum_{k=1}^{n+1} (\rho_k + \sigma_k)$ (индекс задачи). Поведение решений на бесконечности определяют числа $\rho_\infty = \rho_{n+1} + [(\kappa + 2)/2]$, $\sigma_\infty = \sigma_{n+1} + [(\kappa + 1)/2]$. Ветви всех логарифмов согласованы и удовлетворяют соотношению Фукса

$$\sum_{k=1}^n (\rho_k + \sigma_k) + \rho_\infty + \sigma_\infty = 1.$$

Теорема. Решение проблемы Римана для двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$ с $(n+1)$ особой точкой $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ удовлетворяет уравнению класса Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{z - a_k}, \quad (1)$$