

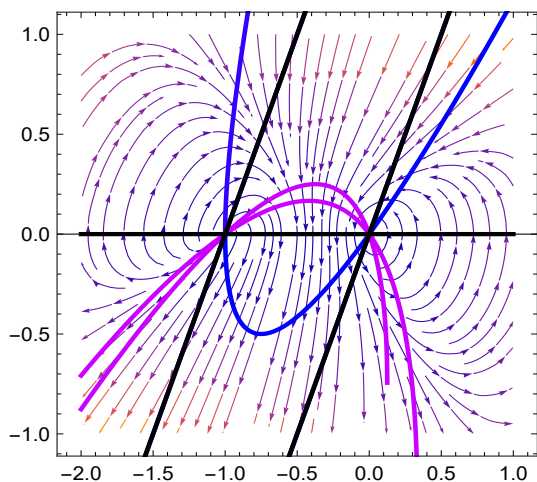


Рис. 1. Траектории и изохроны системы 1)

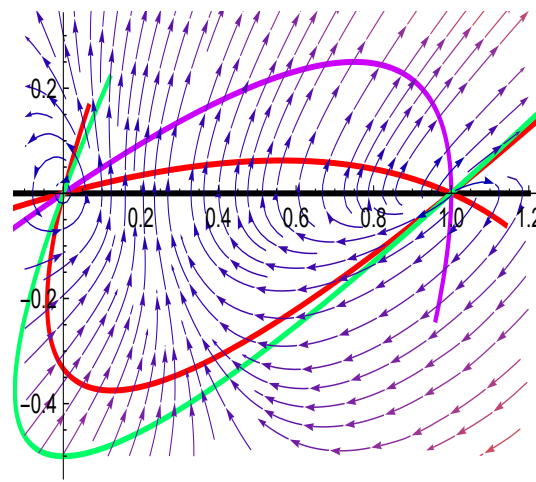


Рис. 2. Траектории и изохроны системы 2).

Библиографические ссылки

1. Куклес И. С., Пискунов Н. С. Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем // Докл. АН СССР. 1937. № 17. С. 467–470.
2. Руденок А. Е. Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Лъенара // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.
3. Algaba A., Reyes M. Characterizing isochronous points and computing isochronous sections // J. of Math. Anal. and Appl. 2009. V. 355. P. 564–576.
4. Giné J. Isochronous foci for analytic differential systems // Int. J. Bifurcation Chaos. 2003. V. 13. № 6. P. 1617–1623.
5. Giné J., Grau M. Characterizing of isochronous foci for planar analytic differential systems // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. Sect. A: Mathematics. 2005. V. 135. № 5. P. 985–998.
6. Руденок А. Е., Василевич М. Н. О сильной изохронности грубого фокуса // XIV Белорус. мат. конф., посвящ. 65-летию Ин-та математики НАН Беларуси. Мн., 2024. Ч 2. С. 70–71.
7. Руденок А. Е. Условия изохронности центра и фокуса в полярных координатах // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. P. 1360–1372.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Д. Н. Санцевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
denis.santsevich@mail.ru

Описан алгоритм и программные инструменты системы компьютерной математики Wolfram Mathematica, пригодные для анализа и решения асимптотическими методами матричного уравнения Риккати специального вида.

Рассмотрим матричное уравнение Риккати вида

$$A_4 L(\mu, e^{-ph}) - A_3 - \mu L(\mu, e^{-ph})(A_1(e^{-ph}) - A_2(e^{-ph})L(\mu, e^{-ph})) = 0, \quad (1)$$

где e^{-ph} – оператор запаздывания, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$ – параметр, $A_i(e^{-ph}) = A_{i0} + A_{i1}e^{-ph}$, $A_{i0}, A_{i1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_i}$, $i = 1, 2$, $A_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ – заданные постоянные матрицы.

Аналогично [2] можно доказать, что если $\text{Re}(\lambda(A_4)) < 0$, то для достаточно малых $\mu > 0$ решение уравнения Риккати (1) можно представить в виде асимптотического ряда по параметру μ с коэффициентами – полиномами по оператору запаздывания в виде

$$\mathbf{L} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m \mathbf{L}_j^m e^{-jph}, \quad (2)$$

где L_j^m вычисляются по рекуррентным формулам

$$L_j^m = A_4^{-1} \left(\sum_{s=j-1}^j L_s^{m-1} A_{1,j-s} - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^1 L_s^k A_{2r} L_{j-s-r}^{m-k-1} \right), \quad (3)$$

с начальными условиями $L_0^0 = A_4^{-1} A_3$, $L_j^m = 0$, $j < 0$ или $m < 0$, или $j > m$.

Средствами СКМ Wolfram Mathematica реализован алгоритм [3] построения уравнений (3) и нахождения асимптотической аппроксимации

$$\mathbf{L}^M(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^M \mu^m \sum_{j=0}^m L_j^m e^{-jph}$$

порядка M решения (2) уравнения (1).

Для построения уравнений матричные параметры уравнения (1) и искомую асимптотическую аппроксимацию $\mathbf{L}^M(e^{-ph})$ задаем в форме пользовательских функций, используя которые формируем уравнение UrL (1). Уравнения $UrLjm$ для нахождения L_j^m , $m = \overline{0, M}$, $j = \overline{0, m}$, получаем, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ и e^{-ph} в уравнении UrL слева и справа.

Для выделения коэффициентов используем встроенную функцию `CoefficientList`, применяя которую к левой части уравнения UrL для списка переменных `var = {μ, e}`, получим двумерный список, упорядоченный сначала по степеням μ , потом – по степеням e . Элементами этого списка являются выражения для левой части искомых уравнений, приравнявая которые к нулю, получаем уравнения $UrLjm$ для нахождения L_j^m .

Для решения полученных уравнений используем функцию `Solve[expr, vars]`, которая решает выражение `expr` относительно переменных `vars`.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»).

Библиографические ссылки

1. Санцевич Д. Н. К решению одного операторного уравнения Риккати средствами Wolfram Mathematica // Экономика и управление XXI века: сб. науч. статей по матер. XIX Междунар. науч. конф. студентов, магистрантов, аспирантов НИРС ФЭУ–2024 / Гродн. гос. ун-т им. Янки Купалы; редкол.: М. Е. Карпицкая (гл. ред.) [и др.]. Гродно: ГрГУ им. Янки Купалы, 2024. С. 398–401.

2. Naligama C. A., Tsekhan O. B. Asymptotic approximations of a decoupling transformation for three-time scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2022. Т. 12. № 1. С. 25–36.

3. Санцевич Д. Н. О решении одного алгебраического операторного уравнения Риккати // Экономика и управление XXI века: сб. науч. статей по матер. XIX Междунар. науч. конф. студентов, магистрантов, аспирантов НИРС ФЭУ–2023. Гродно: ГрГУ им. Янки Купалы, 2023. С. 902–906.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДСТВАМИ R ПОТРЕБЛЕНИЯ ПРИРОДНОГО ГАЗА В ГРОДНЕНСКОЙ ОБЛАСТИ

А. В. Станкевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
Prestigioalexandr@gmail.com

С использованием технологии анализа временных рядов в R на основе помесечных данных. Выявлено наличие тренда и сезонных колебаний, построены модели скользящего среднего, экспоненциального сглаживания, ARIMA, краткосрочный прогноз по моделям. Построена адекватная модель динамики потребления для анализа и прогнозирования динамики потребления природного газа в Гродненской области.

Исходные данные — потребление природного газа в Гродненской области сохранены в R как помесечный временной ряд, имеющий 144 наблюдения.

Первичный анализ данных с целью выяснения свойств временного ряда (стационарность) и его структуры (наличие и тип тренда, сезонной составляющей, аддитивный или мультипликативный характер вхождения в модель) на основе визуализации ряда по графику динамики выявил наличие явной сезонной составляющей и тренда, что указывает на нестационарность ряда и необходимость использования сезонного компонента в модели. Для выявления и анализа сезонности построены также дополнительные графики: графики частичных рядов исходного динамического ряда (по годам (`seasonplot()`)), график сезонной динамики по каждому из месяцев (функция `monthplot()`), сезонная декомпозиция по Лозессу (STL). По результатам предварительного анализа можно отметить, что динамика рассматриваемого показателя потребления является нестационарным процессом, характеризуется аддитивным трендом и сезонными колебаниями, что подтверждает выбор сезонной модели Бокса–Дженкинса (SARIMA) [1, стр. 289]. Заметим, что для исследуемого ряда потребления выполнено требование для построения адекватной модели ARIMA: не менее 40 наблюдений, а для сезонной ARIMA – порядка 6-10 сезонов [2].

При идентификации порядка модели для определения порядка интегрированности ряда применялся оператор взятия последовательных разностей.

Для выбора порядка авторегрессии и порядка скользящего среднего, значений параметров сезонной авторегрессии SAR и сезонного скользящего среднего SMA использовались автокорреляционные функции ACF и частная автокорреляционная функция PACF.

Обосновано, что адекватно рассматривать *ARIMA-модели-кандидаты* с параметрами $d = D = 1$, $p, q, P, Q \leq 2$.

Оценки параметров модели в предположении различных порядков получены с использованием функции `arima()`. Построен портфель моделей-кандидатов. Наиболее