Если условие нейтральности (2) выполняется при всех индексах $i = 1, \ldots, k,\ k \leqslant \leqslant n,$ то скажем, что НТП является *обобщенно нейтральным по Харроду относительно факторов производства* $x_1, \ldots, x_k,$ а при $k = n$ – просто *обобщенно нейтральным по Харроду.*

Основной результат работы выражает следующее утверждение.

Теорема (аналитический вид ПФ, учитывающий обобщенно нейтральный по Харроду НТП). *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает обобщенно нейтральный по Харроду относительно факторов производства* $x_1, \ldots, x_k,\ k \leqslant n,$ *НТП тогда и только тогда, когда многофакторную ПФ* (1) *можно представить в аналитической форме*

$$f(x,t) = \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \Psi(x_{k+1}, \ldots, x_n, t)\right) \quad \forall (x,t) \in G \times T,$$

где Φ *– неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, а* Ψ *есть некоторая непрерывно дифференцируемая функция.*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (НИР «Экономико-математическое моделирование научно-технического прогресса в контексте производственных функций для прогнозирования экономического роста Республики Беларусь», № ГР 20221093).

Библиографические ссылки

1. *Harrod R. F.* Towards a dynamic economics. London, 1948.

2. *Проневич А. Ф., Хацкевич Г. А.* Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение // Белорус. экономич. журн. 2020. № 3. С. 87–105.

О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ НЕГРУБОГО ФОКУСА

А. Е. Руденок, М. Н. Василевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
roudenok@bsu.by, vasilmn@bsu.by

Построена нормализующая замена сильно изохронного негрубого фокуса. Найдены изохроны сильно изохронного негрубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями. Строятся фазовые портреты полученных изохронных фокусов и их изохрон.

Изохронной [1] называется автономная система на плоскости, особая точка $O(0,0)$ которой является центром или фокусом, и для которой существует гладкая кривая $\gamma,$ исходящая из особой точки и трансверсальная к векторному полю системы, такая, что в некоторой достаточно малой окрестности $O(0,0)$ любая точка, движущаяся по траектории системы (изображающая точка), совершает обороты от γ к γ за одно и то же время $T.$

Период T равен 2π для систем с линейной частью $(-y+\lambda x, x+\lambda y)$. Кривая γ названа t-кривой в [2] или изохронным сечением в [3]. Если обе полупрямые некоторой прямой, проходящей через начало координат, являются одновременно изохронными сечениями системы, то система называется сильно изохронной относительно этой прямой [1]. Система называется равномерно изохронной, если угловая скорость всех изображающих точек постоянна. Для систем с линейной частью $(-y+\lambda x, x+\lambda y)$ она равна 1.

В работах [3–5] негрубый фокус называется изохронным, если существует замена координат переводящая систему в систему с равномерной изохронностью. Существует, однако, разногласие в вопросе, каким считать это преобразование, аналитическим [4, 5] или формальным [3]. Если считать нормализующее преобразование аналитическим, то любые два изохронных сечения с одним и тем же угловым коэффициентом k в начале координат являются аналитическим продолжением друг друга. В этом случае это одна аналитическая кривая, походящая через начало координат. Она в [6] называется изохроной.

В работе [7] с использованием полярных координат r, φ доказана

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$, будучи негрубым фокусом системы, была изохронной относительно луча $\varphi=\varphi_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало формальное преобразование*

$$\omega=\varphi+\sum_{i=1}^{\infty} r^i v_i(\varphi), v_i(\varphi+2\pi)=v_i(\varphi), \quad v_i(\varphi_0)=0, \quad \forall i\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

такое, что производная $d\omega/dt$ в силу системы равна единице.

На основании этой теоремы можно дать следующее

Определение. Негрубым изохронным относительно луча $\varphi=\varphi_0$ фокусом называется фокус, удовлетворяющий условиям теоремы 1.

Рассмотрим систему с квадратичными нелинейностями и негрубым фокусом в особой точке $O(0,0)$, которую можно записать в виде

$$\dot{x}=-y+ax^2+bxy+cy^2, \quad \dot{y}=x+kx^2+mxy+ny^2. \tag{2}$$

Замечание. Ниже мы исключим из рассмотрения случай равномерной изохронности системы (2):

$$\dot{x}=-y+bxy, \quad \dot{y}=x+by^2.$$

С использованием теоремы 1 доказана

Теорема 2. *Для того чтобы система (2) с фокусом в начале координат была сильно изохронной относительно оси Ox, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до преобразований гомотетии и поворота она представлялась в одном из видов:*

1) $\dot{x}=-y-\dfrac{4dx^2}{3}+8cxy, \ \dot{y}=x-4cx^2-\dfrac{16dxy}{3}+16cy^2;$

2) $\dot{x}=-y+8dy\left(-\left(1+2s^2\right)x+sy\right), \ \dot{y}=x-4d\left(-x^2-4sxy+\left(4+s^2\right)y^2\right),$

где c, d, s – параметры системы. Соответствующие замены (1), представленные в декартовых координатах:

1) $u=x+4\left(3cx-dy\right)^2, \ v=y;$

2) $u=x+4d\left(x+sy\right)^2, \ v=y.$

На рис. 1 и 2 представлены траектории систем 1), 2) и их изохроны.

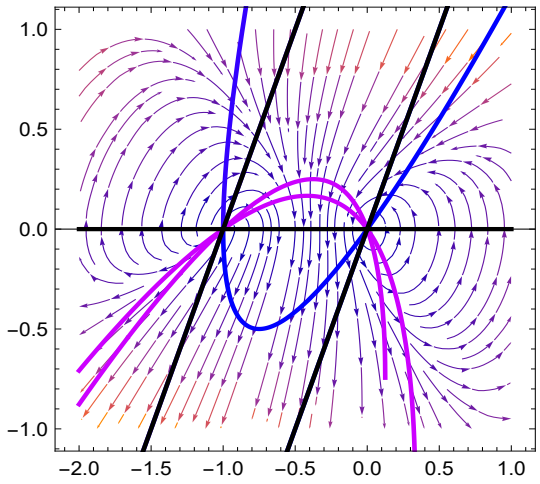

Рис. 1. Траектории и изохроны системы 1)

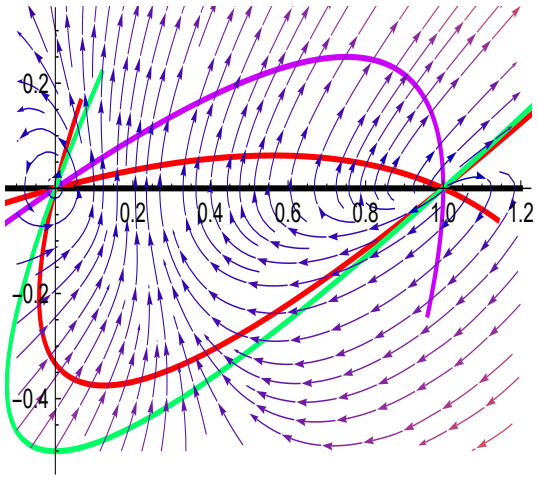

Рис. 2. Траектории и изохроны системы 2).

Библиографические ссылки

1. *Куклес И. С., Пискунов Н. С.* Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем // Докл. АН СССР. 1937. № 17. С. 467–470.

2. *Руденок А. Е.* Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.

3. *Algaba A., Reyes M.* Characterizing isochronous points and computing isochronous sections // J. of Math. Anal. and Appl. 2009. V. 355. P. 564–576.

4. *Giné J.* Isochronous foci for analytic differential systems // Int. J. Bifurcation Chaos. 2003. V. 13. № 6. P. 1617–1623.

5. *Giné J., Grau M.* Characterizing of isochronous foci for planar analytic differential systems // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. Sect. A: Mathematics. 2005. V. 135. № 5. P. 985–998.

6. *Руденок А.Е., Василевич М.Н.* О сильной изохронности грубого фокуса // XIV Белорус. мат. конф., посвящ. 65-летию Ин-та математики НАН Беларуси. Мн., 2024. Ч 2. С. 70–71.

7. *Руденок А.Е.* Условия изохронности центра и фокуса в полярных координатах // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. Р. 1360–1372.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Д. Н. Санцевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
denis.santsevich@mail.ru

Описан алгоритм и программные инструменты системы компьютерной математики Wolfram Mathematica, пригодные для анализа и решения асимптотическими методами матричного уравнения Риккати специального вида.

Рассмотрим матричное уравнение Риккати вида

$$A_4L(\mu,e^{-ph})-A_3-\mu L(\mu,e^{-ph})(A_1(e^{-ph})-A_2(e^{-ph})L(\mu,e^{-ph}))=0, \qquad (1)$$