ного поля коллинеарен температурному градиенту, возможно состояние механического равновесия [1]. Основная цель работы: численное исследование конвективной неустойчивости цилиндрического слоя магнитной жидкости. Построены две двумерные математические модели термомагнитной конвекции в цилиндрическом слое магнитной жидкости, покрывающем проводник с током, в магнитном поле проводника при его однородном нагреве. В одной из моделей пренебрегается зависимость от азимутальной координаты (осесимметричная задача), в другой – от аппликаты вдоль оси цилиндра (плоская задача).

Магнитная жидкость находится в кольцевом зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами: внутренний из которых представляет собой бесконечно длинный проводник с током и имеет радиус R_1, а внешний – радиус R_2. Температура проводника $T_1 = \text{const}$ превышает температуру внешней оболочки $T_0 = \text{const}$.

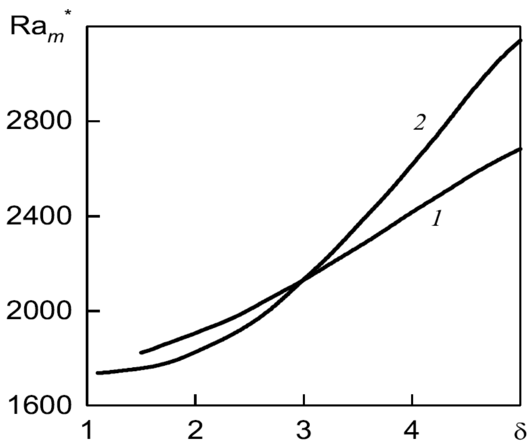

Рис. 1. Критические значения магнитного числа Рэлея $\mathrm{Ra}_{\mathrm{m}}^*$ в зависимости от отношения радиусов цилиндров $\delta = R_2/R_1$: *1* – плоская задача, *2* – осесимметричная задача.

Построен вычислительный алгоритм, основанный на монотонной аппроксимации второго порядка [2]. Полученые предварительные результаты показаны на рисунке.

Решение задачи представляет значительный интерес для приложений магнитной жидкости, позволяя определять перепады температур, при которых конвекция не наступает, при которых она становится определяющей в гидродинамическом процессе, а также геометрические параметры слоя, при которых наиболее опасными являются плоские возмущения, и при которых – осесимметричные (см. рис.).

Работа выполнена в рамках ГПНИ Конвергенция–2025 (проект 1.4.01.4).

Библиографические ссылки

1. *Берковский Б. М., Полевиков В. К.* Вычислительный эксперимент в конвекции. Мн., 1988.

2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., Наука, 1977.

О ПОДХОДЕ К КЛАССИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В. М. Локтевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
vlad_loktevich@mail.ru

Описана постановка одной задачи классификации, которая может быть интерпретирована в форме модели специального вида для оптимизации движения товарно-транспортных пакетов. Указаны подходы к решению задачи на основе этой модели.

Рассмотрим постановку задачи классификации. Имеется некоторое множество S пар (T, K) объект-класс: $S = \{(T, K) \in \mathcal{T} \times \mathcal{K}\}$. Требуется по имеющимся примерам из S построить классификатор $(\mathrm{Cls} : \mathcal{T} \to \mathcal{K})$ [1]. Декомпозируем процесс классификации объекта на два этапа: извлечение *описания* (набора значимых признаков) $P \in \mathcal{P}$ для *объекта* $T \in \mathcal{T}$ $(\mathrm{Parse} : \mathcal{T} \to \mathcal{P})$ и сопоставление *описания* $P \in \mathcal{P}$ *классу* $K \in \mathcal{K}$ $(\mathrm{Rule} : \mathcal{P} \to \mathcal{K})$. Предположим, что также определена функция

$$\mathrm{Variants} : \mathcal{T} \to \{A : A \subseteq \mathcal{P}\},$$

которая любому объекту $T \in \mathcal{T}$ сопоставляет множество A *вариантов* описаний объекта такое, что $\mathrm{Parse}(T) \in \mathrm{Variants}(T), \ \forall T \in \mathcal{T}$.

Интерпретируем ее в терминах модели оптимизации движения товарно-транспортных пакетов в многослойной (поставщики, склады, потребители) логистической сети [2], которая имеет вид задачи целочисленного линейного программирования по переменным, характеризующим как перевозимые неделимые единицы товара, так и используемые для перевозки транспортные средства.

Построим «логистическую» сеть G «доставки объектов в классы», состоящую из трех слоев: объекты $(\mathcal{T})$, описания $(\mathcal{P})$, классы $(\mathcal{K})$. Соединим ребрами пары вершин (T, P) и (P, K), $T \in \mathcal{T}$, $P \in \mathcal{P}$, $K \in \mathcal{K}$ если $(T, K) \in S$ и $P \in \mathrm{Variants}(T)$. Для каждого примера $(T, K) \in S$ будем искать такие маршруты в G, что объект T сопоставится некоторому единственному описанию $P \in \mathrm{Variants}(T)$, а это описание P будет участвовать только в маршрутах к классу K. Утверждается, что данные условия формируют полиэдр с условиями целочисленности переменных. В качестве целевой функции выберем минимизацию количества используемых вершин P или, что эквивалентно, минимизацию количества используемых ребер из P в K.

Для *решения задачи* по построенной модели используются два подхода [2]. Первый состоит в рассмотрении модели как задачи частично целочисленного линейного программирования, при этом основная проблема для эффективного решения – дискретность переменных. Решение выполнялось с использованием вариации метода ветвей и границ, применялись пакеты `GLPK`, `SCIP`, `GLOP`, объединенные в едином интерфейсе библиотеки `OR-Tools` [3]. Второй подход основан на сведении к задаче о максимальном потоке минимальной стоимости. Однако в силу наличия несвойственных классической потоковой задаче ограничений (в частности, поток по ребру в данном случае помечается двумя взаимосвязанными переменными), используемый алгоритм поиска крайтчайших путей был преобразован в приближенный, который позволил на тестовых данных получить решение, близкое к оптимальному за меньшее количество времени по сравнению с предыдущим подходом.

После нахождения оптимального/субоптимального решения для приближенного решения $\mathrm{Cls} = \mathrm{Parse} * \mathrm{Rule}$ отображение Rule строим по помеченным ребрам найденного решения из P в K, а отображение Parse – из T в P. Для всех примеров из S такой классификатор работает верно. Однако, для восстановления *точного* отображения Parse *недостаточно* найденного оптимального решения, так как именно это отображение является обобщающим для всего множества $\mathcal{T}$.

Такой подход к классификации позволяет *получить дополнительную информацию* о способе извлечения описаний объектов: оптимальное решение произвело *кластеризацию* исходных данных, пометив ребра между объектами и описаниями, что также обеспечиват *интерпретируемость результатов*. Кроме того можно определить инструментарий *нахождения противоречий и «дыр»* в разметке исходных данных. Например, определять совместность исходных данных; определять единственность оптимального решения, т. е. *определять «направление»* дальнейшей разметки, указывая на объекты, которые могли бы *повысить обобщаемость* классификатора для всего $\mathcal{T}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»)

Библиографические ссылки

1. *Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: классификация и снижение размерности. М., 1989.

2. *Локтевич В. М., Степин Ю. Г., Цехан О. Б.* О подходах к решению задач объемного планирования для одной транспортно-логистической системы // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2023. Вып. 15. С. 120–131.

3. *Perron L., Furnon V.* OR-Tools v9.11. https://developers.google.com/optimization/.

О МНОЖЕСТВЕ ТРЕХМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ ОДУ, ОБЛАДАЮЩИХ СКРЫТЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Э. В. Мусафиров

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
musafirov@bk.ru

Получено множество трехмерных неавтономных систем ОДУ, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко и обладающих скрытыми колебаниями (при определенных значениях параметров, имеющих предельный цикл, но не имеющих равновесных решений).

В статье [1] Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым была предложена классификация аттракторов динамических систем, согласно которой «аттрактор называется скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся». В частности, аттрактор является скрытым у системы, не имеющей состояний равновесия или имеющей только устойчивые состояния равновесия.

Известно (см. [2, с. 124]), что вещественная автономная двумерная система имеет замкнутую траекторию только если у нее существует хотя бы одно состояние равновесия. В отличии от двумерных трехмерные системы не обладают указанным свойством. В.И. Булгаков привел (см. [3]) пример такой системы:

$$\dot{x} = 2xz + ay, \quad \dot{y} = 2yz - ax, \quad \dot{z} = z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – параметры системы. Вэтой системе при $-2 < b < 0$ имеется предельный цикл, но отсутствуют состояния равновесия (в этом случае предельный цикл является скрытым аттрактором и система демонстрирует скрытые колебания).

С помощью теории отражающей функции Мироненко (ОФМ) [4,5] и подхода, изложенного в [6–9], получено множество неавтономных систем ОДУ, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко и обладающих скрытыми колебаниями. В частности, доказано следующее утверждение.