ЗАДАЧИ ГУРСА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Корзюк [1,2], О. А. Ковнацкая [2]

[1] *Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
[2] *Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
Korzyuk@bsu.by, Kovnatskaya@bsu.by

Постановка задач. В некоторой неограниченной области Q плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассматривается строго гиперболическое полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$a^{(1,1)}(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2 u(\boldsymbol{x}) + 2a^{(1,2)}(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2} u(\boldsymbol{x}) + a^{(2,2)}(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2 u(\boldsymbol{x}) +$$

$$+ a^{(1)}(\boldsymbol{x})\partial_{x_1} u(\boldsymbol{x}) + a^{(2)}(\boldsymbol{x})\partial_{x_2} u(\boldsymbol{x})) + a^{(0)}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

относительно искомой функции $u\colon \mathbb{R}^2 \supset Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, где $a^{(1,1)}$, $a^{(1,2)}$, $a^{(2,2)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(0)}$, f – заданные функции на $\overline{Q}$, $\overline{Q}$ – замыкание области Q, ∂_{x_j} – дифференциальные операторы частных производных первого порядка по переменным x_j, $\partial_{x_j} = \partial/\partial_{x_j}$, $j = 1, 2$, $\partial_{x_j}^2 = \partial_{x_j}\partial_{x_j}$.

С учетом представленных на рисунках 1, 2 (и некоторых других) областей Q рассмотрим четыре вида условий Гурса

$$u|_{\psi^{(1)}(\boldsymbol{x})=C^{(1)}} = \mu^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad u|_{\psi^{(2)}(\boldsymbol{x})=C^{(2)}} = \mu^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q}, \tag{2}$$

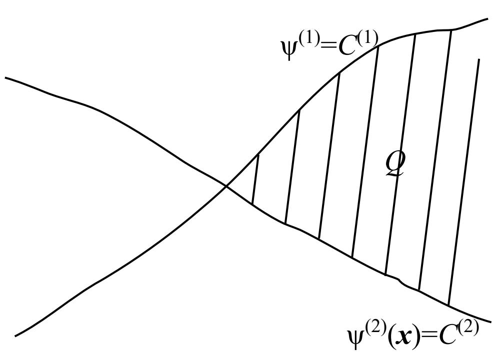

Рис. 1

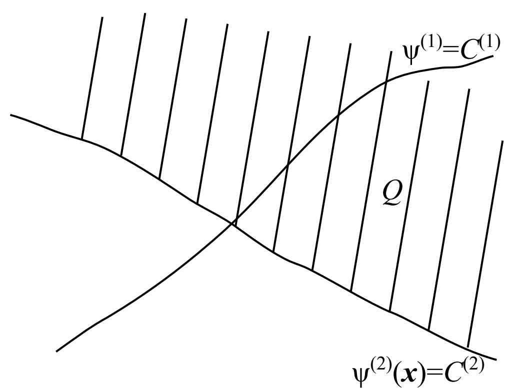

Рис. 2

Условие. *Заданные функции* $\mu^{(j)}$, $j = 1, 2$, *таковы, что их значения в общей точке совпадают, т. е.*

$$\mu^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \mu^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{3}$$

Теорема. *Пусть функции* $a^{(1,1)}$, $a^{(1,2)}$, $a^{(2,2)}$ *уравнения (1) принадлежат множеству* $C^2(\overline{Q})$; $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(0)}$, $f \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2(\mathcal{D}(\mu^{(j)}))$, $j = 1, 2$. *Тогда классическое решение* u *задачи (1), (2) из класса* $C^2(\overline{Q})$ *функций, определенных и дважды непрерывно дифференцируемых на замыкании* $\overline{Q}$ *области* Q, *существует и единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования (3).*

Для доказательства теоремы задача (1), (2) сводится к системе уравнений с вполне непрерывным оператором и решение u строится методом последовательных приближений. Проводятся все необходимые обоснования. Похожая задача во всей области Q подробно рассмотрена в статье [1].

Библиографические ссылки

1. *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Севастюк В. А.* Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66. № 4. С. 391–396.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В. И. Корзюк, И. С. Козловская

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by

Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,\infty)$ области $Q = (0,\infty) \times \times (0,\infty)$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ найти решение уравнения

$$\left(\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u\right)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0, x_2) = \varphi(x_2), \quad \partial_{x_1} u(0, x_2) = \psi(x_2), \quad x_2 \in [0, \infty), \tag{2}$$

и интегральному условию

$$\int\limits_0^{ax_1} u(x_1, x_2)\, dx_2 = \mu(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty) \tag{3}$$

где $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$ $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $\mu \in C^{k-1}([0,\infty))$, $\varphi \in C^k([0,\infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0,\infty))$.

Таким образом, рассматриваем задачу (1)–(3) с целью построения ее классического решения из класса $C^k(\bar{Q})$, $k \geqslant 2$.

Решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p(\boldsymbol{x}),$$

где произвольные функции $g^{(j)}$, $j = 1, 2$, из класса C^k и области определения $D\left(g^{(1)}\right) = C^k(\mathbb{R})$, $D\left(g^{(2)}\right) = C^k\left([0,\infty)\right)$ для любого $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$, V_p – частное решение