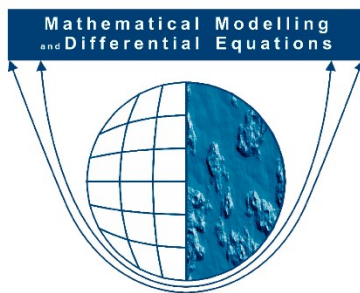


БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Материалы
V Международной научной конференции,
посвященной 100-летию со дня рождения
члена-корреспондента АН БССР Е. А. Иванова
и доцента Н. И. Бриша**

Минск, 17–19 декабря 2024 г.

Научное электронное издание

Минск, БГУ, 2025

УДК 519.8(06)+517.9(06)
ББК 22.18я431+22.161.6я431

Редакционная коллегия:
академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук,
профессор *В. И. Корзюк* (гл. ред.);
кандидат физико-математических наук, доцент *О. А. Ковнацкая*;
кандидат физико-математических наук, доцент *И. С. Козловская*

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент *С. Г. Красовский*

Математическое моделирование и дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : материалы V Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН БССР Е. А. Иванова и доц. Н. И. Бриша, Минск, 17–19 дек. 2024 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.), О. А. Ковнацкая, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2025. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-985-881-738-1.

Рассмотрены вопросы математического моделирования, теории уравнений с частными производными и математической физики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложений, информационных технологий в моделировании и управлении, преподавания математического моделирования в высших учебных заведениях.

Минимальные системные требования:
PC, Pentium 4 или выше; RAM 1 Гб; Windows XP/7/10/11;
Adobe Acrobat.

Оригинал-макет подготовлен в программе LaTeX

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *С. Г. Ковнацкая*

Подписано к использованию 30.01.2025. Объем 4,92 МБ

Белорусский государственный университет.
Управление редакционно-издательской работы.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.
Телефон: (017) 259-70-70
e-mail: urir@bsu.by
<http://elib.bsu.by>

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Абрашина-Жадаева Н.Г.</i> Продуктивная модель преподавания математического моделирования	5
<i>Андрюшкевич И.Е.</i> Построение аналитических решений уравнений Максвелла в пространственно-временном представлении	6
<i>Бровка Н.В.</i> Моделирование при обучении студентов математическому анализу.....	7
<i>Вувуникян Ю.М., Зайкова С.А.</i> Математическое моделирование вейвлет-нейронных сетей для обработки изображений	9
<i>Гладков А.Л.</i> О глобальном существовании решений начально-краевой задачи для параболического уравнения с нелинейной памятью и поглощением	10
<i>Гнездовский Ю.Ю., Павлючик П.Б., Проневич А.Ф.</i> Об интегрируемости неавтономных полиномиальных многомерных и обыкновенных дифференциальных систем с кратным комплекснозначным частным интегралом	11
<i>Гончарова М.Н., Самсонов С.П.</i> О множестве управляемости для системы второго порядка с собственными значениями разных знаков при наличии фазового ограничения	12
<i>Гринь А.А., Кузьмич А.В.</i> Об отсутствии периодических решений в эпидемиологической модели SIRS	14
<i>Громак В.И.</i> О решениях стационарных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве	16
<i>Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.</i> Условие устойчивости в целом режима равномерного вращения асинхронного электромотора	17
<i>Корзюк В.И., Ковнацкая О.А.</i> Задачи Гурса на плоскости для полулинейного гиперболического уравнения	18
<i>Корзюк В.И., Козловская И.С.</i> Классическое решение произвольной гладкости в четверти плоскости для волнового уравнения с интегральным условием	20
<i>Лаврова О.А., Полевиков В.К.</i> Численное моделирование термомагнитной конвекции в цилиндрическом слое магнитной жидкости вокруг проводника с током	21
<i>Локтевич В.М.</i> О подходе к классификации на основе транспортной задачи	22
<i>Мусафиров Э.В.</i> О множестве трехмерных квадратичных систем ОДУ, обладающих скрытыми колебаниями	24
<i>Нуржанова А.О.</i> О приближенном решении краевой задачи для интегродифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной	25
<i>Орлов В.Н., Гасанов М.В.</i> Об одном методе верификации математических моделей	26
<i>Орлов В.Н., Чичурин А.В.</i> Построение аналитических приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго-четвертого порядков	28
<i>Папкович М.В., Скоромник О.В.</i> Многомерные интегральные преобразования с G-функцией Мейера и функцией Гаусса в пространствах измеримых по Лебегу функций	29

<i>Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.</i> Динамические многофакторные производственные функции для моделирования обобщенно нейтрального по Харроду научно-технического прогресса	30
<i>Руденок А.Е., Василевич М.Н.</i> О сильной изохронности негрубого фокуса	32
<i>Санцевич Д.Н.</i> Применение системы Wolfram Mathematica для решения матричных уравнений Риккати специального вида	34
<i>Станкевич А.В.</i> Моделирование средствами R потребления природного газа в Гродненской области	36
<i>Столярчук И.И.</i> Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с дифференциальными полиномами в граничных условиях	37
<i>Таныгина А.Н.</i> Метод описания решений модели Леонтьева–Форда в конечномерных пространствах и его бесконечномерные аналоги	38
<i>Трифопова И.В., Вузуникян Ю.М., Ваньли Чэнь</i> Математическое моделирование импульсных нейронных сетей третьего поколения	40
<i>Хартовский В.Е., Урбан О.И.</i> Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором для линейных систем нейтрального типа	41
<i>Хвоцинская Л.А.</i> Решение проблемы Римана для двух функций с произвольным числом особых точек	43
<i>Цехан О.Б.</i> К аппроксимативной управляемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем	45
<i>Шушкевич Г.Ч.</i> Экранирование электромагнитного поля тонкостенным сферическим экраном	46
<i>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</i> Classical solution of an initial-boundary value problem with a mixed boundary condition and conjugation conditions for a mildly quasilinear wave equation	48
<i>Korzyuk V.I., Zhalukevich D.S.</i> Analytical solutions of some second-order quasilinear equations with two independent variables in homogeneous isotropic media without perturbations	49
<i>Rogosin S.V., Dubatovskaya M.V.</i> On fractional derivative of the Mittag-Leffler type functions	50
<i>Zhalukevich D.S.</i> Group classification of Newton's polynomial equations with one degree of freedom	51

ПРОДУКТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Н. Г. Абрашина-Жадаева

Минск, Беларусь
zhadaeva282@gmail.com

В образовательной модели [1] предлагается в дополнение к работам [1–3] применить принцип лотереи конвертов с заданиями, которые разработаны каждым из студентов самостоятельно.

Введение. Многолетняя работа автора на физическом факультете Белгосуниверситета после анализа практики обучения и анализа результатов после экзаменов показали, что умение решать практические задачи оставляют желать намного лучшего. В особенности это касается задач на построение математической модели, вызывающих у студентов наибольшие затруднения. Поэтому на кафедре высшей математики и математической физики и был внедрен в процесс обучения курс «Методы математического моделирования» [1], читаемый студентам на пятом курсе.

Обучение. При решении практической задачи на лабораторных работах (см. [1–4] и библиографию в них), как правило, удается, изучив условие задачи, построить ее математическую модель, далее предложить численную реализацию этой модели, осуществить решение, а затем перевести результат решения на язык исходной ситуации, т.е. сделать практический вывод. В этом и есть один из главных достижений математического метода познания природы, широкая прикладная направленность математики в образовании.

Образовательная модель [1] включает в себя и электронный онлайн ресурс, дополняющий лекционный конспект и практические занятия. Такой ресурс, разработанный преподавателем, дает возможность студенту быстро получать нужную информацию в комфортной для студента среде. Одна из важных форм электронного ресурса – тестирование, например [4], широко внедрена в образование по всем математическим дисциплинам. С возрастанием доли информационных технологий [5] и появляются новые возможности доступа к информации, что требует совершенствования и поиска новых методов и форм организации обучения. В этой связи студент уже должен понимать, что никакую задачу нельзя исчерпать до конца и он должен уметь расписать новую ситуацию любого явления, представить в конверте (в электронном виде) преподавателю, который позже предложит для исследования одноклассникам. Причем целесообразно использовать такой подход вкупе с КОТ [3], а также использовать эти задания для Чат бота и далее обосновать или опровергнуть, полученные варианты решений.

Библиографические ссылки

1. *Абрашина-Жадаева Н. Г.* Киберфизическая модель в образовании // Матер. 6-й Международ. науч.-практ. конф. Минск, 15–16 мая 2024 г. Белорус. гос. ун-т; редкол.: И. М. Галкин (гл. ред.) [и др.]. Мн.: БГУ, 2024. С. 106–108.
2. *Абрашина-Жадаева Н. Г., Зеленков В. И., Тимощенко И. А.* Математическое моделирование физических процессов // Издательская система. РИВШ, 2022. С. 176.

3. *Абрашина-Жадаева Н. Г.* Интеграция предметных дисциплин через математическое моделирование // Матер. Междунар. научно-практич. конф. «Проблемы преподавания высшей математики и информатики в условиях новой образовательной парадигмы». Мн., БГУ, 2024. С. 39–40.

4. *Глецевич М. А. и др.* Дифференциальные уравнения: тесты для студентов учреждений высшего образования // БГУ, физ. фак., каф. высшей математики и мат. физики. Издательская система. Мн.: БГУ, 2023.

5. *Артамонова Е. В., Артамонов В. А.* Проблемы образования в постиндустриальную эпоху // Социальные новации и социальные науки. М., 2021. № 1. С. 65–79.

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

И. Е. Андрушкевич

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
racursj@yandex.ru*

Уравнения Максвелла в современном представлении являются наиболее полной математической моделью явлений макроскопической электродинамики и имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1)$$

Нами предложен вариант матричной формулировки уравнений Максвелла в материальных средах в произвольной ортогональной криволинейной системе координат [1]:

$$\left\{ \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} R_x + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} R_y + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z} R_z + \xi^4 \frac{\partial}{\partial t} R_t + \xi^4 R_\sigma \right\} R_0 \Psi = P_\rho \tilde{I}, \quad (2)$$

где R_i определяются физическими свойствами среды, ξ^i – элементарные квадратные матрицы размерности 8, удовлетворяющие соотношениям (алгебра Клиффорда):

$$\xi^i \xi^j + \xi^j \xi^i = 2g^{ij} I, \quad g^{ij} = \begin{cases} \delta_{i,j}, & i = 1, 2, 3, 6, \\ -\delta_{i,j}, & i = 4, 5, 7, \end{cases}$$

$$I = \|\delta_{m,n}\|_{8 \times 8}, \quad \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (3)$$

Формулировка(2) позволяет строить решения уравнений Максвелла в пространственно-временном представлении электромагнитного поля [2]. Так, для модельной нестационарной среды, в которой $\varepsilon = \varepsilon_z \varepsilon_t$, $\mu = \mu_z \mu_t$, $\sigma = 0$, $\rho = 0$, показано, что (1) на классе функций $\Psi = X(x, y, z, t) \tilde{I}$, $X(x, y, z, t) = \|\kappa_i f_i(x) g_i(y) \varsigma_i(z) \tau_i(t) \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}$ эквивалентны следующей системе ОДУ:

$$f'_2 = \lambda_{x,2} f_4, \quad f'_4 = \lambda_{x,4} f_2; \quad f_7 = f_3 = f_4, \quad f_5 = f_6 = f_2; \quad g'_2 = \lambda_{y,2} g_3, \quad g'_3 = \lambda_{y,3} g_2;$$

$$\begin{aligned}
&g_7 = g_5 = g_3; \quad g_4 = g_6 = g_2; \\
&(\varepsilon_t \tau_2)' = \lambda_{t,2} \tau_5, \quad (\mu_t \tau_5)' = \lambda_{t,5} \tau_2, \quad \tau_7 = \tau_6 = \tau_5; \quad \tau_3 = \tau_4 = \tau_2; \\
&\kappa_7 \lambda_{y,3} \varsigma_5 + \kappa_7 \varsigma_6' + \kappa_2 \lambda_{t,2} \varepsilon_z \varsigma_2 = 0, \quad \lambda_{x,4} \mu_z \varsigma_7 + \lambda_{y,2} \mu_z \varsigma_6 - (\mu_z \varsigma_5)' = 0, \\
&-\kappa_7 \lambda_{x,2} \varsigma_6 + \kappa_7 \lambda_{y,3} \varsigma_7 - \kappa_2 \lambda_{t,2} \varepsilon_z \varsigma_4 = 0, \quad -\kappa_7 \lambda_{x,2} \varsigma_5 - \kappa_7 (\varsigma_7)' + \kappa_2 \lambda_{t,2} \varepsilon_z \varsigma_3 = 0, \\
&\kappa_2 \lambda_{x,4} \varsigma_4 + \kappa_2 (\varsigma_2)' + \kappa_7 \lambda_{t,5} \mu_z \varsigma_6 = 0, \quad -\kappa_2 \lambda_{x,4} \varsigma_3 + \kappa_2 \lambda_{y,2} \varsigma_2 + \kappa_7 \lambda_{t,5} \mu_z \varsigma_5 = 0, \\
&\lambda_{x,2} \varepsilon_z \varsigma_2 + \lambda_{y,3} \varepsilon_z \varsigma_3 - (\varepsilon_z \varsigma_4)' = 0, \quad -\kappa_2 \lambda_{y,2} \varsigma_4 - \kappa_2 (\varsigma_3)' + \kappa_7 \lambda_{t,5} \mu_z(z) \varsigma_7(z) = 0.
\end{aligned}$$

В случае рассмотрения среды $\mu_z(z) = \mu_t(t) = 1$, $\varepsilon_z(z) = 1$, $\varepsilon_t(t) = \sin(\Omega_t t)$ зависимость компонент поля от времени будет определяться функциями вида

$$\begin{aligned}
\tau_5(t) = &c_{11} \operatorname{Heun} G \left(2, -\delta_t \Omega_t^2, 0, 1, 1/2, 1, \sqrt{\sin^2(\Omega_t t) + 1} \right) + \\
&+ c_{12} i \left(\sqrt{\sin^2(\Omega_t t) - 1} \right)^{3/4} \left(\sqrt{\sin^2(\Omega_t t) + 1} \right)^{1/4} \times \\
&\times \left(\sqrt{\cos(\Omega_t t)} \operatorname{Heun} G \left(2, \frac{-4\delta_t + 5\Omega_t^2}{4\Omega_t^2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \sqrt{\sin^2(\Omega_t t) + 1} \right) \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Приведенное решение получено впервые.

Библиографические ссылки

1. Андрушкевич И. Е. О матричной формулировке уравнений Максвелла в неоднородных изотропных средах // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 1. С. 60–66.
2. Андрушкевич И. Е., Шиенок Ю. В. Сведение системы уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 44–53.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Н. В. Бровка

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
n_br@mail.ru

Описаны способы организации содержания обучения математическому анализу с использованием элементов семантического и аналитико-процедурного моделирования, которое отражает смысловые и аналитико-вычислительные особенности изучаемых понятий, свойств и методов.

Программа подготовки студентов математических специальностей в классических университетах включает представительный перечень фундаментальных математических дисциплин, которые, как правило, изучаются на первом-втором курсах. Содержание таких дисциплин, как математический анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия и др. составляет ядро математической науки и является базисом университетской образовательной подготовки.

Соотнесение инвариантного математического ядра с методами, подходами инженерии знаний как методологией развития информационных технологий и программного обеспечения является одним из путей трансформации образовательной подготовки студентов математических специальностей в классическом университете [1]. Получившая начало еще в 1970-х гг. благодаря усилиям Эдварда Фейгенбаума область, связанная с поиском, анализом, способами представления и методами организации и обработки сведений в некоторой предметной области, стала методологией, теорией и сферой деятельности, называемой «инженерией знаний» [2]. Речь идет о деятельности, выполняемой человеком либо компьютером, которая касается организации специального экспертного знания из некоторой проблемной области. В инженерии знаний база знаний трактуется как семантическая модель, описывающая предметную область и позволяющая отвечать на такие вопросы из этой предметной области, ответы на которые в явном виде не присутствуют в базе.

В образовании знания представляют собой результат мыслительной деятельности человека, направленной на актуализацию знаний (как освоенной информации и методов работы с ней), на развитие навыков и компетенций, обогащение и обобщение опыта. В практике обучения студентов математическому анализу мы используем элементы моделирования содержания, связанные с выявлением ключевых, повторяющихся применительно к разным математическим объектам свойств или отношений и с разработкой шаблонов (фреймов) типовых заданий и их комбинаций с рандомной генерацией входящих параметров [3].

Семантическое моделирование применяется в отношении символьных записей формулировок свойств критериев или признаков (непрерывности, сходимости, дифференцируемости и др.), которые в курсе математического анализа повторяются применительно к различным математическим объектам-функциям одной и многих переменных, рядам, интегралам, зависящим от параметра.

Аналитико-процедурное моделирование состоит в разработке шаблонов (фреймов) заданий, которые включают ряд параметров, в зависимости от которых для выполнения задания необходимо применить тот или иной метод, критерий или признак и реализуются средствами Wolfram Mathematica. Выполнение таких заданий направлено на развитие умения анализировать представленную задачу с целью установления того, какой метод решения или исследования будет оптимальным, а далее выбора подходящей ориентировочной основы действий для его решения. Количество параметров в заданиях увеличивается по мере усложнения заданий. Такая организация содержания обучения состоит в комплексном использовании символьно-семантической и графической наглядности в сочетании с аналитико-алгоритмической деятельностью, включает выявление характеристик, которые отражают существенные связи и свойства математических объектов, переключает студентов с созерцательно-репродуктивной на активно-деятельностную позицию.

Библиографические ссылки

1. Kallia M., van Borkulo S. P., Drijvers P., Barendsen E., Tolboom J. Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study // Research in Mathematics Education. 2020. № 3. P. 159–187.
2. Баррат Д. Последнее изобретение человечества: искусственный интеллект и конец эры Homo sapiens. М., 2015.
3. Бровка Н. В. Об инженерии знаний и обучении студентов механико-математических специальностей // Университетский педагогический журнал. 2022. № 1. С. 3–8.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. М. Вувуникян, С. А. Зайкова

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
vuv64@mail.ru, sunny@mf.grsu.by

В работе предложен новый подход на основе математического моделирования вейвлет-нейронных сетей для решения интеллектуальных задач ускоренной обработки изображений. Разработанные методы имеют потенциал для дальнейшего развития и внедрения в различные практические приложения, включая медицинскую диагностику.

Разработка новых программных инструментов на основе математического моделирования, с привлечением лучших возможностей ИИ, способно стимулировать развитие всех направлений в Республике Беларусь, включая: диагностическую медицину, агросектор, образование и, конечно, современные системы безопасности с использованием обработки визуальных данных и объектов. Для решения задачи ускоренной обработки визуальных данных был исследован один из вариантов применения вейвлет-нейронных сетей. Вейвлет-нейронные сети предоставляют собой сборник лучших инструментов для обработки визуальной информации. Они позволяют улучшить качество и расширение файлов, их информативность и многие иные преобразования. Это важно для их использования в тех случаях, где требуется детальная информация об изображении и требуется отличное качество и высокое расширение.

Вейвлеты подразумевают под собой функции, которые имеют свойства локализации по временным показателям и по частотам, что отличает их от классических синусоидных функций. Вейвлет-функции активно используются во многих видах обработки изображений. Главной особенностью вейвлетов является возможность адаптации к любым заданным масштабам и затратам по времени. Это все позволяет быстро и корректно анализировать те сигналы, которые содержат низкочастотные и высокочастотные потоки. Таким образом, вейвлеты являются весьма эффективным методом для обнаружения и анализа неких явлений в изображениях, а это невозможно было бы реализовать классическим методом Фурье-преобразований [1, 2].

Вейвлет-преобразование было использовано для первоначального выделения признаков, чтобы улучшить способность модели фиксировать многомасштабную информацию. Установлено, что эти методы поддерживают отличную производительность в области устранения помех на изображениях, сжатия, анализа текстур и т.д. Следует отметить, что пороговая обработка нужна для определения вейвлет-коэффициентов и балансировки восстановления сигнала, его качества и скорость сжатия данных. Кроме того, в сочетании с ускорением на графическом процессоре и технологией параллельных вычислений возможно реализовать высокую вычислительную мощность вейвлет-преобразования в режиме реального времени, для удовлетворения потребностей обработки больших данных.

В работе изучены свойства вейвлет-функций для решения интеллектуальных задач ускоренной обработки изображений, медицинских данных пациентов. Разработанные методы и новое программное обеспечение имеют потенциал для дальнейшего

развития и внедрения в различные практические приложения, способствуя развитию визуализации не только в медицинской, но и в других областях науки и техники, например, в обработке звуковых сигналов, в финансовой аналитике, что является важным инструментом для принятия обоснованных инвестиционных решений. Внедрение методов вейвлет-преобразований в технологию разработки новых нейронных сетей позволит расширить рамки возможностей для работы с изображениями.

Библиографические ссылки

1. Best Programming Language for Machine Learning [Электронный ресурс], 2020. <https://clck.ru/34MecV>.
2. Deep Learning by Goodfellow, Bengio, and Courville [Электронный ресурс], 2016. <https://clck.ru/3B54EG>.

О ГЛОБАЛЬНОМ СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПАМЯТЬЮ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

А. Л. Гладков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
gladkova@bsy.by

Рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения с нелинейной памятью и поглощением и с нелинейным нелокальным граничным условием. Найдены условия при которых решение существует глобально и обращается в бесконечность за конечное время.

Рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения с нелинейной памятью

$$u_t = \Delta u + a \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где a, b, q, m, l – положительные числа, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 1$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Предполагается, что $k(x, y, t)$ и $u_0(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \text{ on } \partial\Omega.$$

Начально-краевая задача (1)–(3) с $a = 0$ рассматривалась в [1, 2].

Найдены условия при которых решение задачи (1)–(3) существует глобально при любых начальных данных и обращается в бесконечность за конечное время при достаточно больших начальных данных.

Результаты опубликованы в [3].

Библиографические ссылки

1. Gladkov A. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal Neumann boundary condition // Commun. Pure Appl. Anal. 2017. V. 16. № 6. P. 2053–2068.
2. Gladkov A. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition // Lith. Math. J. 2017. V. 57. № 4. P. 468–478.
3. Gladkov A. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition // Lobachevskii J. Math. 2024. V. 45. № 4. P. 1703–1712.

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ И ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КРАТНЫМ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Ю. Ю. Гнездовский, П. Б. Павлючик, А. Ф. Проневич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
gnezdovsky@grsu.by, p.pavlyuchik@grsu.by, pranevich@grsu.by

Для неавтономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах получены достаточные признаки построения первых интегралов по кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам. Выделены классы неавтономных полиномиальных многомерных и обыкновенных дифференциальных систем, у которых первые интегралы аналитически выражаются через кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы.

Рассмотрим неавтономную полиномиальную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^m P_{ij}(t, x) dt_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \leq n, \quad (1)$$

где $P_{ij}: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, суть полиномы по зависимым переменным $x_1, \dots, x_n$ с голоморфными по независимым переменным $t_1, \dots, t_m$ на области $T \subset \mathbb{R}^m$ коэффициентами. При $m = 1$ система (1) является обыкновенной дифференциальной системой n -го порядка.

В работе выделены классы неавтономных многомерных и обыкновенных дифференциальных систем (1), у которых первые интегралы находятся по кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам. При этом, следуя [1, с. 173], под кратным (с кратностью $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_{\zeta}$) комплекснозначным полиномиальным частным интегралом системы (1) будем понимать функцию $\mathfrak{w}$ такую, что существуют функции $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}}$ и $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}j}$, $\mathfrak{h}_{\zeta} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta} = 1, \dots, \mathfrak{f}_{\zeta}$, $\zeta = 1, \dots, \mathfrak{e}$, $j = 1, \dots, m$, являющиеся полиномами по $x_1, \dots, x_n$ с комплекснозначными голоморфными по $t_1, \dots, t_m$ на области T коэффициентами, такие, что имеют место тождества

$$\mathfrak{A}_j \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}j}(t, x) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}j}(t, x), \quad \mathfrak{h}_{\zeta} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta} = 1, \dots, \mathfrak{f}_{\zeta}, \quad \zeta = 1, \dots, \mathfrak{e}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где функции

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}}(t, x) = \frac{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}}(t, x)}{\mathfrak{w}^{\mathfrak{h}_{\zeta}}(t, x)},$$

а операторы

$$\mathfrak{A}_j(t, x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^n P_{ij}(t, x) \partial_{x_i}.$$

Так, например, для системы (1) имеет место следующее утверждение, доказанное в работе [2].

Теорема. Пусть система (1) имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}$ на области $\Theta' = T' \times \mathbb{R}^n$, $T' \subset T$, кратности $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_{\zeta}$ и существует такое $\zeta \in \{1, \dots, \mathfrak{e}\}$, что в тождествах (2) при фиксированном $\mathfrak{g}_{\zeta} \in \{1, \dots, \mathfrak{f}_{\zeta}\}$ у функций $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}j}$, $j = 1, \dots, m$, вещественные части $\operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}j}(t, x) = \lambda_j(t_j) \quad \forall (t, x) \in \Theta'$, $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$F: (t, x) \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta}\mathfrak{g}_{\zeta}}(t, x) - \sum_{j=1}^m \int_{t_j^0}^{t_j} \lambda_j(t_j) dt_j \quad \forall (t, x) \in \Theta'_0 = T'_0 \times X \subset \Theta',$$

где t_j^0 – произвольная фиксированная точка из естественной проекции области T'_0 на координатную прямую Ot_j , $j = 1, \dots, m$, будет первым интегралом на области Θ'_0 системы (1).

Библиографические ссылки

1. Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. Гродно, 2006.
2. Горбузов В. Н., Павлючик П. Б., Проневич А. Ф. Кратность комплекснозначных полиномиальных частных интегралов неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2023. Т. 13. № 3. С. 33–48.

О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ РАЗНЫХ ЗНАКОВ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

М. Н. Гончарова¹⁾, С. П. Самсонов²⁾

¹⁾ Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь;

²⁾ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
m.gonchar@grsu.by

Рассматривается управляемая система второго порядка, у которой матрица коэффициентов при фазовых переменных имеет собственные значения разных знаков. На поведение объекта наложено линейное фазовое ограничение. Построено множество управляемости в начало координат для некоторых моментов времени.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + v_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + v_2, \quad (1)$$

где управление $(v_1; v_2)$ является векторной кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из четырехугольника V . Множество V назовем областью управления. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта V обозначим через U . Множество U является множеством допустимых управлений.

Будем считать, что выполняются неравенства $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, множество V является четырехугольником. Вершины четырехугольника V обозначим через C_i , $i = \overline{1, 4}$, обходя контур четырехугольника против часовой стрелки. Координаты вершины C_i обозначим через C_{i1} , C_{i2} . Примем, что выполняются следующие неравенства: $C_{11} > 0$, $C_{12} > 0$, $C_{21} < 0$, $C_{22} > C_{12}$, $C_{31} < C_{21}$, $C_{32} < 0$, $C_{41} > 0$, $C_{42} < C_{32}$, $C_{41} < C_{11}$. Фазовое ограничение зададим множеством

$$X = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq d, \quad d > 0\}. \quad (2)$$

Множество всех точек фазового пространства, принадлежащих множеству (2), в которых объект (1) находится в момент времени t , в момент времени t_1 попадает в начало координат при помощи некоторого допустимого управления и выполнении фазового ограничения в каждый момент времени из отрезка $[t; t_1]$, назовем множеством управляемости в начало координат объекта (1) с ограничением (2). Обозначим это множество через $Y(t)$. Момент времени t_1 считаем фиксированным.

Основной результат. В [1] показано, что если $t_1 - t \leq \bar{\tau} = (-\ln(d\lambda_2 + C_{42})/C_{42})/\lambda_2$, то фазовое ограничение не оказывает влияния на построение множества $Y(t)$. Зададим величину $\theta_1 = \ln((C_{32}d\lambda_2 + C_{42}^2)/(C_{42}d\lambda_2 + C_{42}^2))/\lambda_2$. С использованием формул [2], определяющих множества управляемости в линейной задаче управления, доказана следующая

Теорема. Если $t_1 - t \leq \bar{\tau} + \theta_1$, то множество $Y(t)$ ограничено линиями

$$y_1(l) = C_{11} \exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{21} - C_{11}) \exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{21}/\lambda_1,$$

$$y_2(l) = C_{12} \exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{22} - C_{12}) \exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{22}/\lambda_2,$$

где параметр $l \in [0; t_1 - t]$;

$$z_1(l) = C_{31} \exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{21} - C_{31}) \exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{21}/\lambda_1,$$

$$z_2(l) = C_{32} \exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{22} - C_{32}) \exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{22}/\lambda_2,$$

где параметр $l \in [0; t_1 - t]$;

$$s_1(l) = C_{31} \exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{41} - C_{31}) \exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{41}/\lambda_1,$$

$$s_2(l) = C_{32} \exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{42} - C_{32}) \exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{42}/\lambda_2,$$

где параметр $l \in [l_1; t_1 - t]$, $l_1 = \ln(C_{42} \exp(\lambda_2 \theta) - C_{32}/(C_{42} - C_{32}))/\lambda_2$;

$$h_1(l) = C_{11} \exp(-\lambda_1(t_1 - t))/\lambda_1 + (C_{41} - C_{11}) \exp(\lambda_1(l - t_1 + t))/\lambda_1 - C_{41}/\lambda_1,$$

$$h_2(l) = C_{12} \exp(-\lambda_2(t_1 - t))/\lambda_2 + (C_{42} - C_{12}) \exp(\lambda_2(l - t_1 + t))/\lambda_2 - C_{42}/\lambda_2,$$

где параметр $l \in [l_2; t_1 - t]$, $l_2 = \ln(C_{42} \exp(\lambda_2 \theta) - C_{12}/(C_{42} - C_{12}))/\lambda_2$; линией $x_2 = d$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», задание 1.2.04).

Библиографические ссылки

1. Гончарова М. Н., Самсонов С. П. О зависимости множества управляемости от параметров одной задачи оптимального управления // Науч. конф. «Ломоносовские чтения». М., 2024. С. 142.
2. Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения М., 2007.

ОБ ОТСУТСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ SIRS

А. А. Гринь, А. В. Кузьмич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
grin@grsu.by, kuzmich_av@grsu.by

Для эпидемиологической модели доказывается отсутствие периодических решений в первом октанте, за счет сведения ее к двумерной системе и построения функции Дюлака.

В работе [1] изучались условия отсутствия периодических решений в нескольких системах дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающих эпидемиологическую модель SIRS. Рассмотрим одну из таких систем:

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S + I + R) - \mu S - \beta SI + \gamma R, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \nu)I, \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R, \quad (1)$$

где S – количество восприимчивых к вирусу особей популяции, I – количество инфицированных особей, R – количество выздоровевших особей. Параметр μ представляет собой соотношение между скоростями рождаемости и смертности. Параметр β – скорость распространения инфекции. Параметр ν – скорость потери инфекционности. Модель (1) рассматривается при условии, что общая численность популяции C остается неизменной, т.е.

$$S + I + R = C, \quad (2)$$

а часть выздоровевших особей возвращается в группу восприимчивых к вирусу со скоростью γ . В силу биологического смысла все переменные и параметры системы положительны.

В работе [1] за счет существования первого интеграла (2) каждая система SIRS была сведена к соответствующей системе второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (3)$$

к которым применялся признак Дюлака [2].

Теорема 1. *Если для системы (3) существует непрерывно дифференцируемая в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ функция $B(x, y)$ такая, что выражение*

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$$

не обращается в нуль и не меняет свой знак в области D , то система (3) не имеет периодических решений в области D .

В частности, система (1) сводится к системе вида

$$\frac{dI}{dt} = I(\beta C - \mu - \nu - \beta I - \beta R), \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R. \quad (4)$$

Далее в статье [1] авторы, используя разработанный ими алгоритм, нашли функцию Дюлака вида $B = 1/I$ и таким образом показали, что система (4) не имеет периодических решений.

Мы предлагаем другой способ построения функции Дюлака для системы (4). Учитывая, что $I > 0$ с помощью замены $I = e^U$ систему (4) можно записать в виде

$$\frac{dU}{dt} = \beta C - \mu - \nu - \beta e^U - \beta R, \quad \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R. \quad (5)$$

Тогда для системы (5) проходит признак Дюлака с функцией Дюлака $B = 1$:

$$\frac{\partial(BP)}{\partial U} + \frac{\partial(BQ)}{\partial R} = -\beta e^U - \mu - \gamma < 0$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Система (5) в первой четверти, а значит, и система (1) в первом октанте, не имеют периодических решений.*

В нашем докладе будут представлены и другие способы установления условий для отсутствия периодических решений в нескольких системах SIRS.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований по договору № Ф23У-008.

Библиографические ссылки

1. Weber A., Sturm Th., Abdel-Rahman E. O. Algorithmic global criteria for excluding oscillations // Bull. of Math. Biology. 2011. V. 73. № 4. P. 899–916.
2. Черкас Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.

О РЕШЕНИЯХ СТАЦИОНАРНЫХ ИЕРАРХИЙ
ПЕРВОГО И ВТОРОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

В. И. Громак

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
 vgromak@gmail.com

Для стационарных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве для специальных значений параметров установлена вложимость множеств решений.

В работе рассматриваются аналитические свойства решений иерархий первого и второго уравнений Пенлеве, которые являются бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, обладают симметриями, определяемыми преобразованиями Беклунда [1–3]. При специальных значениях параметров эти иерархии имеют классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения. Для второго уравнения Пенлеве и его иерархии это обобщенные полиномы Яблонского–Воробьева, которые позволяют построить рациональные решения уравнений иерархии уравнения Кортевега–де Фриза.

Рассмотрим обобщенную иерархию первого уравнений Пенлеве в виде

$$P_1^{[2n-2]} : \quad \mathcal{L}_n[q(z)] - \gamma_n z - \delta_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и обобщенную иерархию второго уравнения Пенлеве

$$P_2^{[2n]} : \quad (D + 2w)\mathcal{L}_n[w' - w^2] - (k_n z + p_n)w - \alpha_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где оператор $\mathcal{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$D\mathcal{L}_{n+1}[u] = (D^3 + (4u + \beta_n)(D + 2Du))\mathcal{L}_n[u],$$

$$D = d/dz, \quad \mathcal{L}_1[u] = u, \quad u = u(z), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

а $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n, k_n, p_n$ – параметры.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (1), (2), определяемые оператором $\mathcal{L}_n$ (3), имеют соответственно порядок $2n - 2$ и $2n$. Уравнение (1) при $n = 2$ и уравнение (2) при $n = 1$ определяют соответственно первое и второе уравнение Пенлеве.

Обозначим через G_{2n-2} и H_{2n} множество решений соответственно уравнения (1) и (2) при фиксированных значениях параметров.

Теорема. Пусть $q(z)$ – решение уравнения (1) при фиксированных значениях параметров γ_n, δ_n . Тогда функция $w(z)$, определяемая как решение уравнения Риккати $w'(z) = w(z)^2 + q(z)$, является решением уравнения (2) при значениях параметров

$$k_n = 2\gamma_n, \quad p_n = 2\delta_n, \quad \alpha_n = k_n/2. \quad (3)$$

Сформулированное утверждение условно определяет вложение множеств решений уравнений (1) и (2) при некоторых соотношениях между параметрами (4), которое справедливо и в стационарном случае уравнений (1) и (2), т.е. в случае $k_n = \gamma_n = 0$. Заметим, что в стационарном случае $k_n = \gamma_n = 0$, при некоторых дополнительных условиях на остальные параметры, которые мы здесь не приводим в силу громоздкости, также справедливы включения

$$G_0 \subset G_2 \subset G_4 \subset G_6, \quad H_2 \subset H_4 \subset H_6 \subset H_8. \quad (4)$$

Заметим, что свойство вложимости множеств решений (5) для первых стационарных уравнений иерархий (1), (2) частично получено в [4].

Библиографические ссылки

1. *Airault H.* Rational solutions of Painlevé equations // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53.
2. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plane. De Gruyter. Studies in Mathematics V. 28. Berlin; New York, 2002.
3. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений, М.; Ижевск, 2004.
4. *Громак В. И.* О преобразовании Беклунда стационарных уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2024. Т. 60. № 3. С. 195–202.

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ РЕЖИМА РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА

Б. И. Коносевич, Ю. Б. Коносевич

Институт прикладной математики и механики, Донецк, Россия
konos.donetsk@yandex.ru

На основе двухтоковой модели асинхронного электромотора установлено достаточное условие устойчивости в целом режима его равномерного вращения.

Простейшая адекватная модель асинхронного электромотора получена в [1] из двухтоковой модели синхронного электромотора. После введения вместо токов переменных x, y она приведена к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C\ddot{\gamma} = -ay + M_d(\omega + \dot{\gamma}), \quad \dot{x} = -bx - \dot{\gamma}y, \quad \dot{y} = -by + \dot{\gamma}(x + 1) \quad (1)$$

с фазовым вектором $(\dot{\gamma}, x, y)$. Здесь $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$, $\dot{\varphi}$ – угловая скорость ротора относительно статора, $\omega > 0$ – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре, C – осевой момент инерции ротора, a и $b > 0$ – постоянные, $M_d(\omega + \dot{\gamma}) = M_d(\dot{\varphi})$ – момент диссипативных сил относительно оси ротора, предполагаемый непрерывной нечетной монотонно убывающей функцией переменной $\dot{\varphi}$. Система (1) не содержит переменной $\gamma = \varphi - \omega t$. Функция $M_a(\dot{\gamma}) = (ab\dot{\gamma})/(b^2 + \dot{\gamma}^2)$ называется статической характеристикой асинхронной машины.

Теорема 1. Пусть в случае $\omega - b > 0$ диссипативный момент $M_d(\dot{\varphi})$, отрицательный для значений $\dot{\varphi}$ из промежутка $(0, \omega - b]$, удовлетворяет на нем условию малости $M_d(\dot{\varphi}) > M_a(\dot{\varphi} - \omega)$, где $M_a(\dot{\varphi} - \omega) = M_a(\dot{\gamma})$ – статическая характеристика. Тогда система уравнений (1) имеет единственное стационарное решение

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0, \quad x = x^0, \quad y = y^0, \quad (2)$$

где тройка постоянных $\dot{\gamma}^0, x^0, y^0$ является единственным решением системы уравнений

$$-ay^0 + M_d(\omega + \dot{\gamma}^0) = 0, \quad bx^0 + \dot{\gamma}^0 y^0 = 0, \quad -by^0 + \dot{\gamma}^0(x^0 + 1) = 0.$$

В этом решении постоянная $\dot{\gamma}^0$ выражается по формуле $\dot{\gamma}^0 = \omega^0 - \omega$, где $\omega^0 \in (0, \omega)$ – единственное решение уравнения $M_d(\dot{\varphi}) = M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ относительно $\dot{\varphi}$, а постоянные x^0, y^0 определены формулами $x^0 = (\omega - \omega^0)M_d(\omega^0)/ab$, $y^0 = M_d(\omega^0)/a$.

Воспользовавшись определением 12.1 устойчивости в целом и теоремой 12.1 из [2], приходим к следующему результату.

Теорема 2. Пусть выполнено условие теоремы 1 и существует постоянная $k > 0$ такая, что:

1) выполняются неравенства $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) < -k\dot{\gamma}_1$ ($\dot{\gamma}_1 > 0$) и $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) > -k\dot{\gamma}_1$ ($\dot{\gamma}_1 < 0$), где $\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}^0$, а $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) = M_d(\omega^0 + \dot{\gamma}_1) - M_d(\omega^0)$ – возмущение диссипативного момента;

2) выполнено неравенство $abk - \frac{1}{4}[M_d(\omega^0)]^2[1 + (\omega - \omega^0)^2/b^2] > 0$.

Тогда стационарное решение (2) уравнений (1) двухтоковой модели асинхронного электромотора асимптотически устойчиво в целом.

Здесь два неравенства для $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1)$ в условии 1) означают, что прямая $-k\dot{\gamma}_1$ при $\dot{\gamma}_1 \neq 0$ отделяет график функции $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1)$ от горизонтальной оси $O_1\dot{\gamma}_1$, где O_1 – точка пересечения графиков диссипативного момента $M_d(\dot{\varphi})$ и статической характеристики $M_a(\dot{\varphi} - \omega)$.

Для многотоковой модели синхронного электромотора условие глобальной устойчивости получено в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы регионального Азово-Черноморского математического центра по соглашению № 075-02-2024-1380.

Библиографические ссылки

1. Леонов Г. А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 47–85.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
3. Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5. Вып. 1. № 63. С. 74–85.

ЗАДАЧИ ГУРСА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Корзюк^{1,2)}, О. А. Ковнацкая²⁾

¹⁾ Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

²⁾ Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Korzyuk@bsu.by, Kovnatskaya@bsu.by

Постановка задач. В некоторой неограниченной области Q плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ рассматривается строго гиперболическое полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$a^{(1,1)}(\mathbf{x})\partial_{x_1}^2 u(\mathbf{x}) + 2a^{(1,2)}(\mathbf{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2}u(\mathbf{x}) + a^{(2,2)}(\mathbf{x})\partial_{x_2}^2 u(\mathbf{x}) + a^{(1)}(\mathbf{x})\partial_{x_1}u(\mathbf{x}) + a^{(2)}(\mathbf{x})\partial_{x_2}u(\mathbf{x}) + a^{(0)}(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (1)$$

относительно искомой функции $u: \mathbb{R}^2 \supset Q \ni \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, где $a^{(1,1)}$, $a^{(1,2)}$, $a^{(2,2)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(0)}$, f – заданные функции на $\overline{Q}$, $\overline{Q}$ – замыкание области Q , ∂_{x_j} – дифференциальные операторы частных производных первого порядка по переменным x_j , $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2$, $\partial_{x_j}^2 = \partial_{x_j}\partial_{x_j}$.

С учетом представленных на рисунках 1, 2 (и некоторых других) областей Q рассмотрим четыре вида условий Гурса

$$u|_{\psi^{(1)}(\mathbf{x})=C^{(1)}} = \mu^{(1)}(\mathbf{x}), \quad u|_{\psi^{(2)}(\mathbf{x})=C^{(2)}} = \mu^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q}, \quad (2)$$

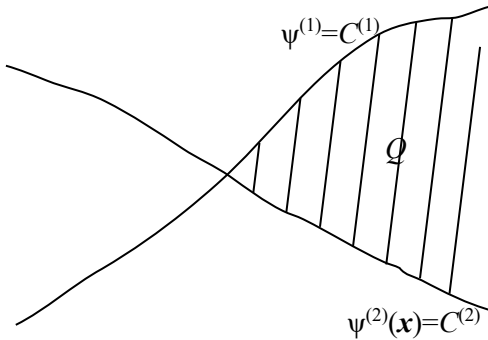


Рис. 1

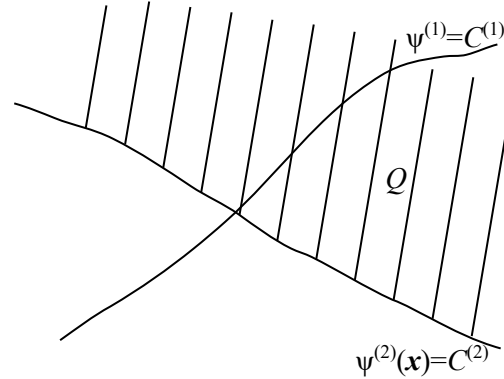


Рис. 2

Условие. Заданные функции $\mu^{(j)}$, $j = 1, 2$, таковы, что их значения в общей точке совпадают, т. е.

$$\mu^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mu^{(2)}(\mathbf{x}^{(0)}). \quad (3)$$

Теорема. Пусть функции $a^{(1,1)}$, $a^{(1,2)}$, $a^{(2,2)}$ уравнения (1) принадлежат множеству $C^2(\overline{Q})$; $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(0)}$, $f \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2(\mathcal{D}(\mu^{(j)}))$, $j = 1, 2$. Тогда классическое решение и задачи (1), (2) из класса $C^2(\overline{Q})$ функций, определенных и дважды непрерывно дифференцируемых на замыкании $\overline{Q}$ области Q , существует и единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования (3).

Для доказательства теоремы задача (1), (2) сводится к системе уравнений с вполне непрерывным оператором и решение u строится методом последовательных приближений. Проводятся все необходимые обоснования. Похожая задача во всей области Q подробно рассмотрена в статье [1].

Библиографические ссылки

1. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Севастюк В. А. Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66. № 4. С. 391–396.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В. И. Корзюк, И. С. Козловская

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by

Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty)$ области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ найти решение уравнения

$$(\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0, x_2) = \varphi(x_2), \quad \partial_{x_1} u(0, x_2) = \psi(x_2), \quad x_2 \in [0, \infty), \quad (2)$$

и интегральному условию

$$\int_0^{ax_1} u(x_1, x_2) dx_2 = \mu(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty) \quad (3)$$

где $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\mu \in C^{k-1}([0, \infty))$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$.

Таким образом, рассматриваем задачу (1)–(3) с целью построения ее классического решения из класса $C^k(\bar{Q})$, $k \geq 2$.

Решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p(\mathbf{x}),$$

где произвольные функции $g^{(j)}$, $j = 1, 2$, из класса C^k и области определения $D(g^{(1)}) = C^k(\mathbb{R})$, $D(g^{(2)}) = C^k([0, \infty))$ для любого $\mathbf{x} \in \bar{Q}$, V_p – частное решение

уравнения (1) из класса $C^k(\bar{Q})$. Для определения V_p характеристикой $x_2 - ax_1 = 0$ область Q разбивается на две подобласти $Q^{(1)} = \{x \in Q : x_2 - ax_1 > 0\}$, $Q^{(2)} = \{x \in Q : x_2 - ax_1 < 0\}$. Тогда частное решение определяется в виде

$$V_p(x) = \begin{cases} v_p^{(1)}(x), & x \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(x), & x \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть заданная функция f уравнения (1) принадлежит множеству $C^{k-1}(\bar{Q})$. Тогда функции V_p принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются определенные условия согласования, удовлетворяет однородным условиям Коши (2), является решением уравнения (1). Кроме этого функция $V_p^{(2)}$ удовлетворяет однородному интегральному условию (3).

Теорема 2. Пусть заданные функции задачи (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям гладкости: $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$, $\mu \in C^{k+1}([0, \infty))$. Функция u принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\varphi(0) - \frac{1}{a}d\mu(0), \quad m = 0,$$

$$d^m\varphi(0) - 2^m d^m\varphi(0) - \left(\frac{1}{2a} - 2^m\right) d^{m-1}\psi(0) + \frac{1}{a^{m+1}}d^{m+1}\mu(0) + b^{(m)} = 0, \quad m = 1, 3, \dots, k,$$

$$2^m d^m\varphi(0) + 2^m d^{m-1}\varphi(0) - \frac{1}{a^{m+1}}d^{m+1}\mu(0) + b^{(m)} = 0, \quad m = 2, \dots, k,$$

является решением на Q уравнения (1), удовлетворяет условиям Коши (2) и интегральному условию (3). Такое классическое решение задачи (1)–(3) из класса $C^k(\bar{Q})$ является единственным.

Числа $b^{(m)}$ определены через значения функции f и ее производных.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ НАГРЕТОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

О. А. Лаврова, В. К. Полевиков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь lavrovaolga@mail.ru,
viktor.polevnikov@gmail.com

В работе построены две двумерные математические модели термомангнитной конвекции в цилиндрическом слое магнитной жидкости, покрывающем проводник с током, в магнитном поле проводника при его однородном нагреве. Конвективная неустойчивость слоя магнитной жидкости исследуется с помощью вычислительного алгоритма, основанного на монотонной аппроксимации второго порядка.

В неизотермической магнитной жидкости в условиях невесомости при наложении неоднородного магнитного поля возбуждается конвективное движение, обусловленное зависимостью намагниченности жидкости от температуры. Но если градиент магнит-

ного поля коллинеарен температурному градиенту, возможно состояние механического равновесия [1]. Основная цель работы: численное исследование конвективной неустойчивости цилиндрического слоя магнитной жидкости. Построены две двумерные математические модели термомагнитной конвекции в цилиндрическом слое магнитной жидкости, покрывающем проводник с током, в магнитном поле проводника при его однородном нагреве. В одной из моделей пренебрегается зависимость от азимутальной координаты (осесимметричная задача), в другой – от аппликаты вдоль оси цилиндра (плоская задача).

Магнитная жидкость находится в кольцевом зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами: внутренний из которых представляет собой бесконечно длинный проводник с током и имеет радиус R_1 , а внешний – радиус R_2 . Температура проводника $T_1 = \text{const}$ превышает температуру внешней оболочки $T_0 = \text{const}$.

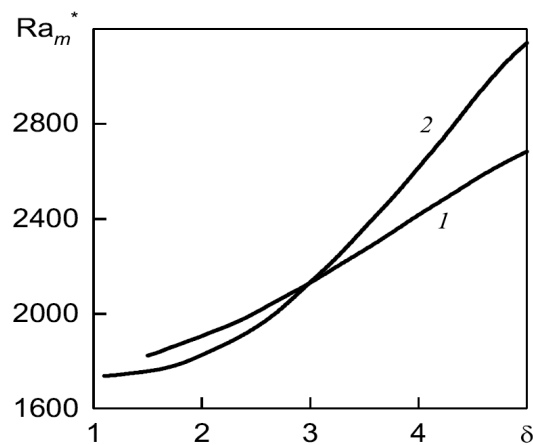


Рис. 1. Критические значения магнитного числа Рэлея Ra_m^* в зависимости от отношения радиусов цилиндров $\delta = R_2/R_1$: 1 – плоская задача, 2 – осесимметричная задача.

Построен вычислительный алгоритм, основанный на монотонной аппроксимации второго порядка [2]. Полученные предварительные результаты показаны на рисунке.

Решение задачи представляет значительный интерес для приложений магнитной жидкости, позволяя определять перепады температур, при которых конвекция не наступает, при которых она становится определяющей в гидродинамическом процессе, а также геометрические параметры слоя, при которых наиболее опасными являются плоские возмущения, и при которых – осесимметричные (см. рис.).

Работа выполнена в рамках ГПНИ Конвергенция-2025 (проект 1.4.01.4).

Библиографические ссылки

1. Берковский Б. М., Полевиков В. К. Вычислительный эксперимент в конвекции. Мн., 1988.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977.

О ПОДХОДЕ К КЛАССИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В. М. Локтевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
vlad_loktevich@mail.ru

Описана постановка одной задачи классификации, которая может быть интерпретирована в форме модели специального вида для оптимизации движения товарно-транспортных пакетов. Указаны подходы к решению задачи на основе этой модели.

Рассмотрим постановку задачи классификации. Имеется некоторое множество S пар (T, K) объект-класс: $S = \{(T, K) \in \mathcal{T} \times \mathcal{K}\}$. Требуется по имеющимся примерам

из S построить классификатор $(\text{Cls} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{K})$ [1]. Декомпозируем процесс классификации объекта на два этапа: извлечение *описания* (набора значимых признаков) $P \in \mathcal{P}$ для объекта $T \in \mathcal{T}$ ($\text{Parse} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$) и сопоставление *описания* $P \in \mathcal{P}$ *классу* $K \in \mathcal{K}$ ($\text{Rule} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$). Предположим, что также определена функция

$$\text{Variants} : \mathcal{T} \rightarrow \{A : A \subseteq \mathcal{P}\},$$

которая любому объекту $T \in \mathcal{T}$ сопоставляет множество A *вариантов* описаний объекта такое, что $\text{Parse}(T) \in \text{Variants}(T)$, $\forall T \in \mathcal{T}$.

Интерпретируем ее в терминах модели оптимизации движения товарно-транспортных пакетов в многослойной (поставщики, склады, потребители) логистической сети [2], которая имеет вид задачи целочисленного линейного программирования по переменным, характеризующим как перевозимые неделимые единицы товара, так и используемые для перевозки транспортные средства.

Построим «логистическую» сеть G «доставки объектов в классы», состоящую из трех слоев: объекты ($\mathcal{T}$), описания ($\mathcal{P}$), классы ($\mathcal{K}$). Соединим ребрами пары вершин (T, P) и (P, K) , $T \in \mathcal{T}$, $P \in \mathcal{P}$, $K \in \mathcal{K}$ если $(T, K) \in S$ и $P \in \text{Variants}(T)$. Для каждого примера $(T, K) \in S$ будем искать такие маршруты в G , что объект T сопоставится некоторому единственному описанию $P \in \text{Variants}(T)$, а это описание P будет участвовать только в маршрутах к классу K . Утверждается, что данные условия формируют полиэдр с условиями целочисленности переменных. В качестве целевой функции выберем минимизацию количества используемых вершин P или, что эквивалентно, минимизацию количества используемых ребер из P в K .

Для *решения задачи* по построенной модели используются два подхода [2]. Первый состоит в рассмотрении модели как задачи частично целочисленного линейного программирования, при этом основная проблема для эффективного решения – дискретность переменных. Решение выполнялось с использованием вариации метода ветвей и границ, применялись пакеты GLPK, SCIP, GLOP, объединенные в едином интерфейсе библиотеки OR-Tools [3]. Второй подход основан на сведении к задаче о максимальном потоке минимальной стоимости. Однако в силу наличия несвойственных классической потоковой задаче ограничений (в частности, поток по ребру в данном случае помечается двумя взаимосвязанными переменными), используемый алгоритм поиска крайчайших путей был преобразован в приближенный, который позволил на тестовых данных получить решение, близкое к оптимальному за меньшее количество времени по сравнению с предыдущим подходом.

После нахождения оптимального/субоптимального решения для приближенного решения $\text{Cls} = \text{Parse} * \text{Rule}$ отображение Rule строим по помеченным ребрам найденного решения из P в K , а отображение Parse – из T в P . Для всех примеров из S такой классификатор работает верно. Однако, для восстановления *точного* отображения Parse *недостаточно* найденного оптимального решения, так как именно это отображение является обобщающим для всего множества $\mathcal{T}$.

Такой подход к классификации позволяет *получить дополнительную информацию* о способе извлечения описаний объектов: оптимальное решение произвело *кластеризацию* исходных данных, пометив ребра между объектами и описаниями, что также обеспечивает *интерпретируемость результатов*. Кроме того можно определить инструментарий *нахождения противоречий и «дыр»* в разметке исходных данных. Например, определять совместность исходных данных; определять единственность опти-

мального решения, т. е. *определять «направление»* дальнейшей разметки, указывая на объекты, которые могли бы *повысить обобщаемость* классификатора для всего $\mathcal{T}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»)

Библиографические ссылки

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности. М., 1989.
2. Локтевич В. М., Степин Ю. Г., Цехан О. Б. О подходах к решению задач объемного планирования для одной транспортно-логистической системы // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2023. Вып. 15. С. 120–131.
3. Perron L., Furnon V. OR-Tools v9.11. <https://developers.google.com/optimization/>.

О МНОЖЕСТВЕ ТРЕХМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ ОДУ, ОБЛАДАЮЩИХ СКРЫТЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Э. В. Мусафиров

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
musafirov@bk.ru

Получено множество трехмерных неавтономных систем ОДУ, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко и обладающих скрытыми колебаниями (при определенных значениях параметров, имеющих предельный цикл, но не имеющих равновесных решений).

В статье [1] Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым была предложена классификация аттракторов динамических систем, согласно которой «аттрактор называется скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся». В частности, аттрактор является скрытым у системы, не имеющей состояний равновесия или имеющей только устойчивые состояния равновесия.

Известно (см. [2, с. 124]), что вещественная автономная двумерная система имеет замкнутую траекторию только если у нее существует хотя бы одно состояние равновесия. В отличие от двумерных трехмерные системы не обладают указанным свойством. В.И. Булгаков привел (см. [3]) пример такой системы:

$$\dot{x} = 2xz + ay, \quad \dot{y} = 2yz - ax, \quad \dot{z} = z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – параметры системы. В этой системе при $-2 < b < 0$ имеется предельный цикл, но отсутствуют состояния равновесия (в этом случае предельный цикл является скрытым аттрактором и система демонстрирует скрытые колебания).

С помощью теории отражающей функции Мироненко (ОФМ) [4,5] и подхода, изложенного в [6–9], получено множество неавтономных систем ОДУ, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко и обладающих скрытыми колебаниями. В частности, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\alpha_i(t)$ ($i = \overline{1, 2}$) – произвольные скалярные непрерывные нечетные функции, тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (2xz + ay)(1 + \alpha_1(t)) + y\alpha_2(t), & \dot{y} &= (2yz - ax)(1 + \alpha_1(t)) - x\alpha_2(t), \\ \dot{z} &= (z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2)(1 + \alpha_1(t)).\end{aligned}\quad (2)$$

Если $\alpha_1(t) > -1 \quad \forall t \geq 0$, то при $b \in (-2; 2) \setminus \{0\}$ система (2) имеет предельный цикл, но не имеет равновесных решений.

Доказано существование периодических решений у системы (2), а также изучен характер их устойчивости по Ляпунову.

Библиографические ссылки

1. Кузнецов Н. В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 5. С. 5–27.
2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем. М., 1976.
3. Булгаков В. И. О фазовом портрете автономной системы третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 10. С. 1821–1822.
4. Мироненко В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
5. Мироненко В. В. Возмущения дифференциальных систем, не изменяющие временных симметрий // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1325–1332.
6. Musafirov E. V. Admissible perturbations of the Lorenz-84 climate model // Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 2019. V. 29. № 6. Art. 1950080.
7. Musafirov E., Grin A., Pranevich A. Admissible perturbations of a generalized Langford system // Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 2022. V. 32. № 03. Art. 2250038.
8. Musafirov E. Admissible perturbations of the three-dimensional Hindmarsh – Rose neuron model // J. Appl. Anal. Comput. 2023. V. 13. № 4. P. 1668–1678.
9. Мусафиров Э. В. Допустимые возмущения системы Лэнгфорда // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 47–51.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

А. О. Нуржанова

Нукусский государственный педагогический институт им. Ажинияза, Нукус, Узбекистан
arzayimnurjanova@gmail.com

В данной работе численно-аналитическим методом последовательных приближений изучается нелинейная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Обосновывается алгоритм построения решений данной краевой задачи.

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма вида

$$\dot{x} = f\left(t, x, \dot{x}, \int_0^T \varphi(t, s, x(s), \dot{x}(s)) ds\right) \quad (1)$$

с нелинейными краевыми условиями

$$g(x(0)) = x(T), \quad (2)$$

где $f(t, x, y, z)$ и $\varphi(t, s, x, y)$ – n -мерные вектор-функции, определенные и непрерывные в области $(t, s, x, y, z) \in [0, T] \times [0, T] \times D \times \dot{D} \times D_1$. Здесь D , $\dot{D}$, D_1 – замкнутые ограниченные области в E_n . Функция $g(x)$ определена и непрерывна в области D .

Для приближенного решения краевой задачи (1), (2) применим численно-аналитический метод последовательных приближений [1]. Этот метод позволяет находить решения в виде равномерно сходящихся последовательностей вида

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t, x_0) &= x_0 + \int_0^t \{f(\tau, x_m(\tau, x_0), y_m(\tau, x_0), z_m(\tau, x_0)) - \\ &- \frac{1}{T} \left[\int_0^T f(t, x_m(t, x_0), y_m(t, x_0), z_m(t, x_0)) dt + g(x_0) - x_0 \right] \} d\tau, \quad x_0(t, x_0) = x_0, \\ y_{m+1}(t, x_0) &= f(t, x_m(t, x_0), y_m(t, x_0), z_m(t, x_0)) - \\ &- \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x_m(t, x_0), y_m(t, x_0), z_m(t, x_0)) dt + \frac{1}{T} (g(x_0) - x_0), \quad y_0(t, x_0) = 0, \end{aligned}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ и $z_m(t, x_0) = \int_0^T \varphi(t, s, x_m(s, x_0), \dot{x}_m(s, x_0)) ds$.

В работе получены условия применимости метода и обоснован алгоритм построения решений поставленной краевой задачи (1), (2).

Библиографические ссылки

1. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев, 1992.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЕРИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В. Н. Орлов, М. В. Гасанов

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия
orlowvn@rambler.ru, vonasag6991@mail.ru

Для экспериментальных данных, полученных путем гидродинамических исследований в окрестности скважины, составляются две математические модели, основанные на численном показателе качества.

Введение. Во многих отечественных и зарубежных публикациях рассматривают дифференциальные уравнения в качестве математической модели тех или иных

процессов. Чаще всего такие модели возникают естественным путем, но иногда применяются математические модели, которые не имеют обоснования принадлежности к рассматриваемому процессу. В этой ситуации предлагаемая нами технология верификации, позволяет восполнить этот пробел и практически позволяет проводить исследования процессов с помощью математических моделей, основанных на нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнениях и уравнениях с дробными производными. Адекватность математической модели к исследуемому процессу связана с численным показателем качества модели, основанного на дисперсионном анализе, что было впервые показано в работе [1]. Идея подхода заключается в следующем: имея исходные данные некоторого рассматриваемого процесса и интерпретируя этот процесс с помощью дифференциального уравнения можно для набора исходных данных получить численную величину, характеризующую качество данного уравнения для описания исследуемого процесса.

Постановка задачи и основные результаты. Рассматривается распределение давления в нефте-газовом пласте на основе экспериментальных данных, полученные путем гидродинамических исследований в окрестности скважины [2]. В качестве математической модели для описания данного процесса рассматривается класс уравнений вида:

$$y''' = y^n + r(x) \quad \text{при } n = 2, 7, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y^{(i)}(x_0) = y_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2)$$

Данный класс уравнений был полностью исследован авторами в предыдущих работах. Для решения поставленной задачи необходимы результаты, полученные в работах [3, 4]. Решая обратную задачу, на основе имеющихся экспериментальных данных [2], задача (1), (2) принимает соответствующий вид:

$$y''' = y^2 - 0.218 - 0.657x + 0.122x^2 + 0.134x^3 - 0.098x^4 + 0.023x^5 - 0.003x^6, \quad (3)$$

для случая $n = 2$ и

$$y''' = y^7 - 0.201 - 0.451x + 0.627x^2 + 0.092x^3 - 0.376x^4 + 0.039x^5 - 0.208x^6, \quad (4)$$

для случая $n = 7$ с начальными условиями

$$y(1/5) = 0.731, \quad y'(1/5) = 0.446, \quad y''(1/5) = -0.449. \quad (5)$$

Для задачи Коши (3), (4) численный показатель качества модели равен $R^2 = 0.995436$, для задачи Коши (3)–(5) получаем $R^2 = 0.995437$. Данные численные показатели свидетельствуют о высоком качестве предложенных моделей в качестве описания рассматриваемого процесса.

Библиографические ссылки

1. Orlov V., Ivanova T., Brenchagova S., Rumbayeva N. Mathematical modeling of economic factors impact: reproduction of personnel potential in agriculture sector of Russia // IOP Conference Ser. Earth and Environmental Science. 2020. V. 433.

2. Алероев Т. С., Хворова А. Н. Математическая модель идентификации параметра дробной производной и прогнозирования результатов для уравнения движения жидкости в скважине // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2021. № 2 (48). С. 72–79.

3. Orlov V., Gasanov M. Existence and Uniqueness Theorem for a Solution to a Class of a Third-Order Nonlinear Differential Equation in the Domain of Analyticity // Axioms. 2022. V. 11. No. 5.

4. Орлов В. Н., Ковальчук О. А., Линник Е. П., Линник И. И. Исследование одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // Вестн. Московского гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2018. № 4 (79). С. 24–35.

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО–ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

В. Н. Орлов¹⁾, А. В. Чичурин²⁾

¹⁾ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия;*

²⁾ *КУЛ, Люблин, Польша;*

*²⁾ Брестский государственный технический университет, Брест, РБ
OrlovVN@mgsu.ru, achichurin@gmail.com*

Рассматривается метод построения аналитических приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго–четвертого порядков. Действие метода продемонстрировано на примере построения решений уравнений Ван-дер-Поля и стационарных решений расширенного уравнения Фишера–Колмогорова.

Предлагается метод построения аналитических приближенных решений (АПР) нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками алгебраического типа (простые и кратные критические полюса). Этот метод основывается на решении следующих задач [1]:

1) доказательство теоремы существования и единственности решения как в области аналитичности, так и в окрестности подвижной особой точки (ПОТ) для вещественной и комплексной областей (здесь применяется модификация метода мажорант Коши и результаты теории обобщенных степенных рядов);

2) построение АПР как в области аналитичности, так и в окрестности ПОТ в вещественной и комплексной областях;

3) получение необходимых и достаточных условий существования ПОТ в вещественной и комплексной областях;

4) разработка алгоритмов и программного обеспечения для определения координат ПОТ;

5) исследование влияния возмущений координат ПОТ на структуру аналитического приближенного решения в вещественной и комплексной областях;

6) исследование влияния возмущения начальных данных на структуру АПР в области аналитичности.

Метод реализован для нелинейных дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля [2, 3]

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - a(1 - w^2) \frac{dw}{dt} + w = 0 \quad (1)$$

и расширенного уравнения Фишера–Колмогорова, которое в случае поиска стационарных АПР может быть записано в виде

$$-\gamma \frac{d^4 w}{dt^4} + \frac{d^2 w}{dt^2} - w^3 + w = 0, \quad (2)$$

где a и γ – постоянные. Уравнения (1), (2) имеют широкие приложения [4, 5].

Доказаны теоремы, которые обосновывают применение классических численных методов для нахождения АПР уравнения (1) и стационарных АПР уравнения (2) в вещественной области. Определение координат ПОТ осуществлялось с помощью разработанного программного обеспечения в вещественной и комплексной областях [6]. С помощью численного эксперимента продемонстрировано действие метода для нахождения АПР уравнения (1) и стационарных АПР уравнения (2) в комплексной области. Точность полученных решений подтверждается с помощью апостериорных оценок погрешности.

Библиографические ссылки

1. Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнения Пенлеве и Абеля. М., 2013.
2. Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Fractal Fract. 2023. V. 7. № 3. Art. 228.
3. Orlov V., Chichurin A. The Influence of the Perturbation of the Initial Data on the Analytic Approximate Solution of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Symmetry. 2023. V. 15. № 6. Art. 1200.
4. Kuznetsov A.P., Seliverstova E.S., Trubetskov D.I., Turukina L.V. Phenomenon of the Van der Pol Equation // Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014. V. 22. № 4. Art. 3-42.
5. Van den Berg G.B.J., Peletier L., Troy W. Global branches of multi-bump periodic solutions of the Swift–Hohenberg equation // Arch. Ration. Mech. Anal. 2001. V. 158. № 2. P. 91–153.
6. Орлов В.Н., Гасанов М.В. NODE, O3, R7 (авторское право на алгоритмы и программы) печ. ФСИС (Роспатент). Свид. о гос. рег. программы для ЭВМ № 2024661354 от 17.05.2024.

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ПО ЛЕБЕГУ ФУНКЦИЙ

М. В. Папкович, О. В. Скоромник

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк,
Беларусь

m.papkovich@psu.by, o.skoromnik@psu.by

Доклад посвящен обзору полученных результатов и основных исследований по изучению многомерных интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах, проводимых авторами в настоящее время.

Рассматривается многомерное интегральное преобразование [1]

$$({}_1I_{\sigma, \omega; \zeta} f)(x) = x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\zeta - t^\zeta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\zeta}{t^\zeta}\right) t^\omega f(t) dt \quad (x > 0)$$

и три его модификации ${}_j I_{\sigma, \omega; \zeta} f$ ($j = 2, 3, 4$). Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ – Евклидово n -мерное пространство; $\mathbf{x} \geq \mathbf{t}$ означает $x_1 \geq t_1, \dots, x_n \geq t_n$; $\int_0^{\mathbf{x}} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n}$; $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$; $\mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) – n -мерное пространство комплексных чисел $z = (z_1, \dots, z_n)$ ($z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$); $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$; $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$; $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$; $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$; $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{C}^n$; $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}_+^n$; $\mathbf{x}^\zeta - \mathbf{t}^\zeta = (x_1^{\zeta_1} - t_1^{\zeta_1}) \dots (x_n^{\zeta_n} - t_n^{\zeta_n})$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, \dots, t_n)$; ${}_2F_1(a, b; c; \mathbf{z}) = \prod_{k=1}^n {}_2F_1(a_k, b_k; c_k; z_k)$ – гипергеометрические функции Гаусса [1, 2]. В докладе представлены свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ -суммируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}_+^n$ [1, 3].

С помощью техники преобразования Меллина мы устанавливаем, что преобразования ${}_j I_{\sigma, \omega; \zeta} f$ ($j = 1, 2, 3, 4$) являются специальными случаями многомерных обобщенных G-преобразований вида [3]:

$$({}_1 G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^{\mathbf{x}} G_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{m, n} \left[\frac{\mathbf{x}^\delta}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \frac{(a_i)_{1,p}}{(b_j)_{1,q}} \right] \mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} (\mathbf{x} > 0);$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $m_1 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\bar{n}_1 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0$, $p_1 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $q_1 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$); $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{C}^n$; функция

$$G_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{m, n} \left[\mathbf{z} \middle| \frac{(a_i)_{1,p}}{(b_j)_{1,q}} \right] = \prod_{k=1}^n G_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[z_k \middle| \frac{(a_{i_k})_{1,p_k}}{(b_{j_k})_{1,q_k}} \right]$$

– произведение G-функций $G_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k}[z_k]$ ($k = 1, \dots, n$) [4]. В работе даются условия ограниченности рассматриваемых операторов преобразований, описание их образов, аналоги формулы интегрирования по частям, устанавливаются различные интегральные представления и формулы обращения. Результаты обобщают соответствующие одномерные случаи в [2] и [4].

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

Библиографические ссылки

1. Папкович М. В., Скоромник О. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. 2022. № 1 (114). С. 11–25.
2. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода. Новополоцк, 2019.
3. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Papkovich M. V. Some Multi-dimensional Modified G- and H- Integral Transforms on $\mathcal{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ - Spaces // in: Vasilyev V. (Ed.) Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms. DEMMCA 2021. Springer Proc. in Mathematics and Statistics. V. 423. Cham, 2023. P. 193–214.
4. Kilbas A. A., Saigo M. H-Transforms. Theory and Applications. Boca Raton, 2010.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МНОГОФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБОБЩЕННО НЕЙТРАЛЬНОГО ПО ХАРРОДУ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

А. Ф. Проневич¹⁾, Г. А. Хацкевич²⁾

¹⁾ Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь;

²⁾ Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск,
Беларусь

pranevich@grsu.by, g.a.khatskevich@gmail.com

Предложена концепция обобщенной нейтральности научно-технического прогресса по Харроду. Получены аналитические формы динамических многофакторных производственных функций, которые учитывают обобщенно нейтральный по Харроду научно-технический прогресс. Для однородных динамических производственных функций результаты конкретизированы.

Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t), \quad (1)$$

где y – выпуск продукции, $x = (x_1, \dots, x_n)$ есть вектор затрат производственных ресурсов, t – параметр времени из полуоткрытого числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n: x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$.

Цель данной работы – предложить концепцию обобщенной нейтральности по Харроду в многофакторном случае (для случая $n = 2$ см., например, [1, с. 22–272; 2]) и установить аналитические виды динамических многофакторных ПФ, учитывающих обобщенно нейтральный по Харроду НТП. Способ построения динамических многофакторных ПФ основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик.

Будем говорить, что НТП является *обобщенно нейтральным по Харроду относительно фактора производства* x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, если предельная производительность i -го фактора не изменится с течением времени при фиксированной средней отдаче обобщенного ресурса, т.е.

$$MP_i(f) = \partial_{x_i} f(x, t) = \text{const} \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^n \frac{y}{\alpha_j x_j} = \text{const} \quad (\alpha_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Из определения обобщенной нейтральности НТП по Харроду (2) при $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, $\alpha_i = 1$, следует определение нейтральности НТП по Харроду относительно i -го фактора.

Если условие нейтральности (2) выполняется при всех индексах $i = 1, \dots, k$, $k \leq n$, то скажем, что НТП является *обобщенно нейтральным по Харроду относительно факторов производства* $x_1, \dots, x_k$, а при $k = n$ – просто *обобщенно нейтральным по Харроду*.

Основной результат работы выражает следующее утверждение.

Теорема (аналитический вид ПФ, учитывающий обобщенно нейтральный по Харроду НТП). *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает обобщенно нейтральный по Харроду относительно факторов производства $x_1, \dots, x_k$, $k \leq n$, НТП тогда и только тогда, когда многофакторную ПФ (1) можно представить в аналитической форме*

$$f(x, t) = \Phi \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \Psi(x_{k+1}, \dots, x_n, t) \right) \quad \forall (x, t) \in G \times T,$$

где Φ – неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, а Ψ есть некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (НИР «Экономико-математическое моделирование научно-технического прогресса в контексте производственных функций для прогнозирования экономического роста Республики Беларусь», № ГР 20221093).

Библиографические ссылки

1. Harrod R. F. Towards a dynamic economics. London, 1948.
2. Проневич А. Ф., Хацкевич Г. А. Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение // Белорус. экономич. журн. 2020. № 3. С. 87–105.

О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ НЕГРУБОГО ФОКУСА

А. Е. Руденок, М. Н. Василевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
roudenok@bsu.by, vasilmn@bsu.by

Построена нормализующая замена сильно изохронного негрубого фокуса. Найдены изохроны сильно изохронного негрубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями. Строятся фазовые портреты полученных изохронных фокусов и их изохрон.

Изохронной [1] называется автономная система на плоскости, особая точка $O(0, 0)$ которой является центром или фокусом, и для которой существует гладкая кривая γ , исходящая из особой точки и трансверсальная к векторному полю системы, такая, что в некоторой достаточно малой окрестности $O(0, 0)$ любая точка, движущаяся по траектории системы (изображающая точка), совершает обороты от γ к γ за одно и то же время T .

Период T равен 2π для систем с линейной частью $(-y + \lambda x, x + \lambda y)$. Кривая γ названа t -кривой в [2] или изохронным сечением в [3]. Если обе полупрямые некоторой прямой, проходящей через начало координат, являются одновременно изохронными сечениями системы, то система называется сильно изохронной относительно этой прямой [1]. Система называется равномерно изохронной, если угловая скорость всех изображающих точек постоянна. Для систем с линейной частью $(-y + \lambda x, x + \lambda y)$ она равна 1.

В работах [3–5] негрубый фокус называется изохронным, если существует замена координат переводящая систему в систему с равномерной изохронностью. Существует, однако, разногласие в вопросе, каким считать это преобразование, аналитическим [4, 5] или формальным [3]. Если считать нормализующее преобразование аналитическим, то любые два изохронных сечения с одним и тем же угловым коэффициентом k в начале координат являются аналитическим продолжением друг друга. В этом случае это одна аналитическая кривая, проходящая через начало координат. Она в [6] называется изохроной.

В работе [7] с использованием полярных координат r, φ доказана

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$, будучи негрубым фокусом системы, была изохронной относительно луча $\varphi = \varphi_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало формальное преобразование*

$$\omega = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} r^i v_i(\varphi), v_i(\varphi + 2\pi) = v_i(\varphi), \quad v_i(\varphi_0) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

такое, что производная $d\omega/dt$ в силу системы равна единице.

На основании этой теоремы можно дать следующее

Определение. Негрубым изохронным относительно луча $\varphi = \varphi_0$ фокусом называется фокус, удовлетворяющий условиям теоремы 1.

Рассмотрим систему с квадратичными нелинейностями и негрубым фокусом в особой точке $O(0,0)$, которую можно записать в виде

$$\dot{x} = -y + ax^2 + bxy + cy^2, \quad \dot{y} = x + kx^2 + mxy + ny^2. \quad (2)$$

Замечание. Ниже мы исключим из рассмотрения случай равномерной изохронности системы (2):

$$\dot{x} = -y + bxy, \quad \dot{y} = x + by^2.$$

С использованием теоремы 1 доказана

Теорема 2. *Для того чтобы система (2) с фокусом в начале координат была сильно изохронной относительно оси Ox , необходимо и достаточно, чтобы с точностью до преобразований гомотетии и поворота она представлялась в одном из видов:*

$$1) \dot{x} = -y - \frac{4dx^2}{3} + 8cxy, \quad \dot{y} = x - 4cx^2 - \frac{16dxy}{3} + 16cy^2;$$

$$2) \dot{x} = -y + 8dy(- (1 + 2s^2)x + sy), \quad \dot{y} = x - 4d(-x^2 - 4sxy + (4 + s^2)y^2),$$

где c, d, s – параметры системы. Соответствующие замены (1), представленные в декартовых координатах:

$$1) u = x + 4(3cx - dy)^2, \quad v = y;$$

$$2) u = x + 4d(x + sy)^2, \quad v = y.$$

На рис. 1 и 2 представлены траектории систем 1), 2) и их изохроны.

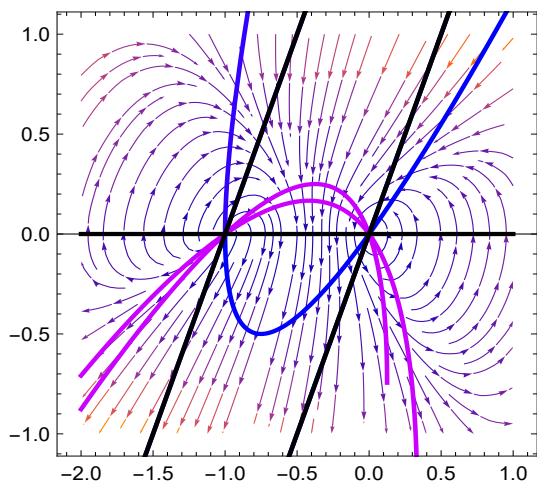


Рис. 1. Траектории и изохроны системы 1)

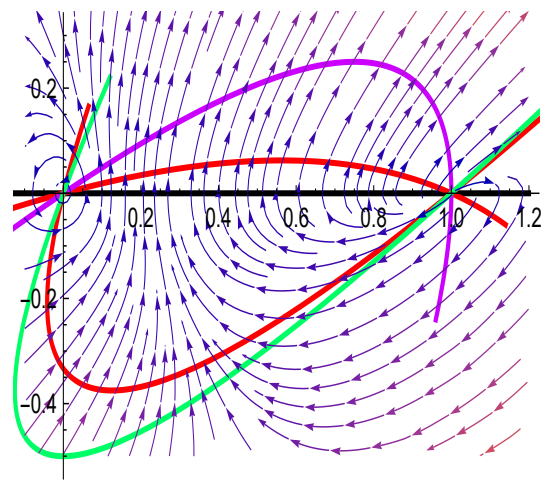


Рис. 2. Траектории и изохроны системы 2).

Библиографические ссылки

1. Куклес И. С., Пискунов Н. С. Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем // Докл. АН СССР. 1937. № 17. С. 467–470.
2. Руденок А. Е. Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Лъенара // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.
3. Algaba A., Reyes M. Characterizing isochronous points and computing isochronous sections // J. of Math. Anal. and Appl. 2009. V. 355. P. 564–576.
4. Giné J. Isochronous foci for analytic differential systems // Int. J. Bifurcation Chaos. 2003. V. 13. № 6. P. 1617–1623.
5. Giné J., Grau M. Characterizing of isochronous foci for planar analytic differential systems // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. Sect. A: Mathematics. 2005. V. 135. № 5. P. 985–998.
6. Руденок А.Е., Василевич М.Н. О сильной изохронности грубого фокуса // XIV Белорус. мат. конф., посвящ. 65-летию Ин-та математики НАН Беларуси. Мн., 2024. Ч 2. С. 70–71.
7. Руденок А.Е. Условия изохронности центра и фокуса в полярных координатах // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. P. 1360–1372.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Д. Н. Санцевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
denis.santsevich@mail.ru

Описан алгоритм и программные инструменты системы компьютерной математики Wolfram Mathematica, пригодные для анализа и решения асимптотическими методами матричного уравнения Риккати специального вида.

Рассмотрим матричное уравнение Риккати вида

$$A_4 L(\mu, e^{-ph}) - A_3 - \mu L(\mu, e^{-ph})(A_1(e^{-ph}) - A_2(e^{-ph})L(\mu, e^{-ph})) = 0, \quad (1)$$

где e^{-ph} – оператор запаздывания, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$ – параметр, $A_i(e^{-ph}) = A_{i0} + A_{i1}e^{-ph}$, $A_{i0}, A_{i1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_i}$, $i = 1, 2$, $A_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ – заданные постоянные матрицы.

Аналогично [2] можно доказать, что если $\text{Re}(\lambda(A_4)) < 0$, то для достаточно малых $\mu > 0$ решение уравнения Риккати (1) можно представить в виде асимптотического ряда по параметру μ с коэффициентами – полиномами по оператору запаздывания в виде

$$\mathbf{L} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m \mathbf{L}_j^m e^{-jph}, \quad (2)$$

где L_j^m вычисляются по рекуррентным формулам

$$L_j^m = A_4^{-1} \left(\sum_{s=j-1}^j L_s^{m-1} A_{1,j-s} - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^1 L_s^k A_{2r} L_{j-s-r}^{m-k-1} \right), \quad (3)$$

с начальными условиями $L_0^0 = A_4^{-1} A_3$, $L_j^m = 0$, $j < 0$ или $m < 0$, или $j > m$.

Средствами СКМ Wolfram Mathematica реализован алгоритм [3] построения уравнений (3) и нахождения асимптотической аппроксимации

$$\mathbf{L}^M(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^M \mu^m \sum_{j=0}^m L_j^m e^{-jph}$$

порядка M решения (2) уравнения (1).

Для построения уравнений матричные параметры уравнения (1) и искомую асимптотическую аппроксимацию $\mathbf{L}^M(e^{-ph})$ задаем в форме пользовательских функций, используя которые формируем уравнение UrL (1). Уравнения $UrLjm$ для нахождения L_j^m , $m = \overline{0, M}$, $j = \overline{0, m}$, получаем, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ и e^{-ph} в уравнении UrL слева и справа.

Для выделения коэффициентов используем встроенную функцию `CoefficientList`, применяя которую к левой части уравнения UrL для списка переменных `var = {μ, e}`, получим двумерный список, упорядоченный сначала по степеням μ , потом – по степеням e . Элементами этого списка являются выражения для левой части искомых уравнений, приравнявая которые к нулю, получаем уравнения $UrLjm$ для нахождения L_j^m .

Для решения полученных уравнений используем функцию `Solve[expr, vars]`, которая решает выражение `expr` относительно переменных `vars`.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»).

Библиографические ссылки

1. Санцевич Д. Н. К решению одного операторного уравнения Риккати средствами Wolfram Mathematica // Экономика и управление XXI века: сб. науч. статей по матер. XIX Междунар. науч. конф. студентов, магистрантов, аспирантов НИРС ФЭУ–2024 / Гродн. гос. ун-т им. Янки Купалы; редкол.: М. Е. Карпицкая (гл. ред.) [и др.]. Гродно: ГрГУ им. Янки Купалы, 2024. С. 398–401.

2. Naligama C. A., Tsekhan O. B. Asymptotic approximations of a decoupling transformation for three-time scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2022. Т. 12. № 1. С. 25–36.

3. Санцевич Д. Н. О решении одного алгебраического операторного уравнения Риккати // Экономика и управление XXI века: сб. науч. статей по матер. XIX Междунар. науч. конф. студентов, магистрантов, аспирантов НИРС ФЭУ–2023. Гродно: ГрГУ им. Янки Купалы, 2023. С. 902–906.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДСТВАМИ R ПОТРЕБЛЕНИЯ ПРИРОДНОГО ГАЗА В ГРОДНЕНСКОЙ ОБЛАСТИ

А. В. Станкевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
Prestigioalexandr@gmail.com

С использованием технологии анализа временных рядов в R на основе помесечных данных. Выявлено наличие тренда и сезонных колебаний, построены модели скользящего среднего, экспоненциального сглаживания, ARIMA, краткосрочный прогноз по моделям. Построена адекватная модель динамики потребления для анализа и прогнозирования динамики потребления природного газа в Гродненской области.

Исходные данные — потребление природного газа в Гродненской области сохранены в R как помесечный временной ряд, имеющий 144 наблюдения.

Первичный анализ данных с целью выяснения свойств временного ряда (стационарность) и его структуры (наличие и тип тренда, сезонной составляющей, аддитивный или мультипликативный характер вхождения в модель) на основе визуализации ряда по графику динамики выявил наличие явной сезонной составляющей и тренда, что указывает на нестационарность ряда и необходимость использования сезонного компонента в модели. Для выявления и анализа сезонности построены также дополнительные графики: графики частичных рядов исходного динамического ряда (по годам (`seasonplot()`)), график сезонной динамики по каждому из месяцев (функция `monthplot()`), сезонная декомпозиция по Лозессу (STL). По результатам предварительного анализа можно отметить, что динамика рассматриваемого показателя потребления является нестационарным процессом, характеризуется аддитивным трендом и сезонными колебаниями, что подтверждает выбор сезонной модели Бокса–Дженкинса (SARIMA) [1, стр. 289]. Заметим, что для исследуемого ряда потребления выполнено требование для построения адекватной модели ARIMA: не менее 40 наблюдений, а для сезонной ARIMA – порядка 6-10 сезонов [2].

При идентификации порядка модели для определения порядка интегрированности ряда применялся оператор взятия последовательных разностей.

Для выбора порядка авторегрессии и порядка скользящего среднего, значений параметров сезонной авторегрессии SAR и сезонного скользящего среднего SMA использовались автокорреляционные функции ACF и частная автокорреляционная функция PACF.

Обосновано, что адекватно рассматривать *ARIMA-модели-кандидаты* с параметрами $d = D = 1$, $p, q, P, Q \leq 2$.

Оценки параметров модели в предположении различных порядков получены с использованием функции `arima()`. Построен портфель моделей-кандидатов. Наиболее

адекватная из построенных моделей выбиралась на основе минимизации информационных критериев Акайка AIC, и BIC (функции AIC() BIC()). Наилучшей признана модель с наименьшими значениями параметров ARIMA (0, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂. t -статистики всех коэффициентов модели по абсолютной величине больше критического значения t -критерия Стьюдента (равного 1.98 при уровне $p = 0.05$ и числе степеней свободы 142), поэтому коэффициенты модели являются значимыми на уровне значимости 5 %.

Модель ARIMA (0, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂ в операторном виде (в скобках указаны стандартные ошибки оценок коэффициентов) имеет вид

$$(1 - B_{12})(1 - B)x_t = \underset{(0.10358)}{(1 - 0.81352B_{12})} \underset{(0.08252)}{(1 - 0.41995B)} \varepsilon_t. \quad (1)$$

Проверка адекватности модели (анализ остатков) выполнялась по критериям отсутствия автокорреляции остатков, нормальности распределения остатков и постоянства дисперсии. Все критерии были выполнены. Оценку точности модели выполнялась на основании ретропрогноза. Относительная погрешность ретропрогноза по модели (1) не превышает 7%.

Заключение. Проведенный анализ показал, что потребление природного газа в Гродненской области демонстрирует явную сезонную составляющую и тренд. Модель ARIMA (0, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂ оказалась адекватной и значимой для описания временного ряда. Ретропрогноз модели показал относительную погрешность, не превышающую 7%, что подтверждает ее высокую точность. Данный подход к моделированию может быть применен для прогнозирования потребления газа и планирования ресурсоснабжения в регионе.

Библиографические ссылки

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. Т. 2. М., 2001.
2. Ханк Д. Э., Уичери У., Райте А. Дж. Бизнес-прогнозирование. М., 2003.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

И. И. Столярчук

ООО «Нэксстсофт», Минск, Беларусь
stolyarchuk.ivan.i@gmail.com

Для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока, заданным в полуполосе, рассматриваются смешанная задача с дифференциальными полиномами в граничных условиях, для которой исследуются вопросы, связанные с существованием и единственностью классического решения.

Постановка задачи. Рассмотрим на множестве $\bar{Q} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, x_0 \in [0, +\infty), x_1 \in [0, l]\}$ смешанную задачу для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u - \lambda u = f, \quad (1)$$

где $\lambda : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \rightarrow \lambda(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ некоторые заданные функции. К уравнению (1) присоединяются начальные условия типа Коши

$$u|_{x_0} = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u|_{x_0} = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l] \quad (2)$$

и граничные условия

$$\sum_{|\alpha| \leq n_j} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1}}(x_0, j) = \mu^{(j)}(x_0), \quad j \in \{0, l\}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad n_j \geq 2. \quad (3)$$

Теорема. Пусть функции λ , $f \in C^{2n_m+k\zeta_j}$, $\mu^{(j)}, r_j^{(\alpha)} \in C^{n_j+k\zeta_j}([0, +\infty))$, $\varphi \in C^{2n_m+k\zeta_j}$, $\psi \in C^{2n_m-1+k\zeta_j}$, $j \in \{0, l\}$ где $n_m = \max(n_0, n_l)$, ζ_j определяет скорость ухудшения гладкости решения и зависит от оператора граничных условий (3). Тогда классическое решение и задачи (1)–(3) существует и единственно в классе $C^{n_m}([0, kl/a] \times [0, l])$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^i \beta_{\nu_j}^{(j)}(j) C_{\nu_j}^{(0)} + \sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^{i+n_0} \left(\beta_{\nu_j}^{(j)}(z) \int_{\xi_j}^z \frac{W_{\nu_j+1}^{(j)}(\tau)}{r_j^{n_j}(\tau) W^{(j)}(\tau)} d\tau \right), \quad i = \overline{0, k\zeta_j},$$

где $\beta_{\nu_j}^{(j)}$ – функции фундаментальной системы решений уравнения (3), $W^{(j)}$ – определитель Вронского данной системы.

Доказательство. Данная теорема доказывается с использованием метода характеристик, описанного в [1, с. 134], метода последовательных приближений, который применяется для доказательства разрешимости интегральных уравнений типа Вольтерры второго рода [2] и сведений о разрешимости линейных дифференциальных уравнений [3, с. 92].

Замечание. Если $\zeta_j = 0$, $j \in \{0, l\}$, то существование и единственность классического решения и задачи (1)–(3) можно доказать для $x_0 \in [0, +\infty)$.

Библиографические ссылки

1. Корзюк В. И. Уравнения математической физики. М., 2021.
2. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб, 2023.

МЕТОД ОПИСАНИЯ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА–ФОРДА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕГО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ

А. Н. Таныгина

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
anastminsk@gmail.com

Рассматриваются методы описания решений модели Леонтьева–Форда в конечномерных пространствах и идеальных пространствах.

В докладе приводится неявный метод описания всех неотрицательных решений открытой модели Леонтьева–Форда [1], в которой изучаются одновременно два про-

цесса: процесс производства благ для потребителей и процесс уничтожения ущербов в окружающей среде, возникающих в процессе производства благ. Основные уравнения этой модели образуют следующую систему:

$$\begin{aligned}x &= A_{11}x + A_{12}y + c, \\y &= A_{21}x + A_{22}y - d,\end{aligned}\tag{1}$$

где вектор $x \in \mathbb{R}_+^m$ описывает объемы производимых в системе благ, вектор $y \in \mathbb{R}_+^n$ – объемы ущербов, возникающих в процессе производства и уничтожаемых в системе, вектор $c \in \mathbb{R}_+^m$ – объемы потребляемых благ, вектор $d \in \mathbb{R}_+^n$ – объемы ущербов, остающихся в природе в результате производства; A_{ij} ($i, j = 1, 2$) – неотрицательные матрицы. Модель является открытой в том смысле, что на производимые блага существует спрос, т. е. $c \neq 0$.

Необходимость разработки способа, позволяющего описать множество всех решений открытой модели Леонтьева–Форда, возникает вследствие того, что система линейных уравнений, соответствующая рассматриваемой модели, оказывается недоопределенной: неизвестными в системе (1) являются не только векторы x и y , но и вектор d . Такой подход к изучению конечномерной модели Леонтьева–Форда был предложен в [2].

Способ описания решений состоит в следующем: к имеющимся двум уравнениям системы (1) добавляется третье, представляющее собой выражение вектора d через x и y :

$$d = \Lambda(A_{21}x + A_{22}y),$$

где Λ – диагональная матрица, удовлетворяющая свойству $0 \leq \Lambda \leq I$. При этом неотрицательное решение (x, y, d) системы (1), являющееся также решением новой системы с фиксированной матрицей Λ , называется Λ -решением системы (1).

Полученные результаты распространяются на случай открытой модели Леонтьева–Форда в идеальных пространствах. Обозначим множество всех благ через Ω_+ , а множество всех ущербов через Ω_- . Основные уравнения модели Леонтьева–Форда в идеальных пространствах образуют систему

$$\begin{aligned}x(\omega) &= A_{11}x(\omega) + A_{12}y(\omega) + c(\omega), \\y(\omega) &= A_{21}x(\omega) + A_{22}y(\omega) - d(\omega),\end{aligned}\tag{2}$$

где $x, c \in X$, $y, d \in Y$ – неотрицательные функции, имеющие такой же экономический смысл, как и соответствующие векторы в конечномерном случае (X – идеальное пространство функций на Ω_+ , Y – идеальное пространство функций на Ω_-); A_{ij} ($i, j = 1, 2$) – линейные положительные операторы; $A_{11} : X \rightarrow X$, $A_{12} : Y \rightarrow X$, $A_{21} : X \rightarrow Y$, $A_{22} : Y \rightarrow Y$. Функция c предполагается заданной, а функции x , y и d – неизвестными, в силу чего система (2) оказывается недоопределенной.

В работе [3] показывается, что исследование существования неотрицательных решений для модели Леонтьева–Форда в идеальных пространствах сводится к исследованию неотрицательной разрешимости операторного уравнения

$$h(\omega) = A_\Lambda h(\omega) + w(\omega),$$

где $h(\omega) = x(\omega)$ для $\omega \in \Omega_+$, $h(\omega) = y(\omega)$ для $\omega \in \Omega_-$, $w(\omega) = c(\omega)$ для $\omega \in \Omega_+$, $w(\omega) = 0$ для $\omega \in \Omega_-$,

$$A_\Lambda h(\omega) = \begin{cases} A_{11}x(\omega) + A_{12}y(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega_+, \\ (I - \Lambda)A_{21}x(\omega) + (I - \Lambda)A_{22}y(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega_-. \end{cases}$$

Приводится критерий того, что неравенство $\rho(A_\Lambda) < 1$ является необходимым условием существования Λ -решения системы (2).

Библиографические ссылки

1. Леонтьев В. В., Форд Д. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. 1972. Т. 8. № 3. С. 370–399.
2. Забрейко П. П. Открытая модель Леонтьева–Форда // Тр. Института математики НАН Беларуси. 2007. Т. 15. № 2. С. 25–36.
3. Забрейко П. П., Таныгина А. Н. Описание решений открытой модели Леонтьева–Форда в идеальных пространствах // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16. № 2. С. 37–48.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ

И. В. Трифонова, Ю. М. Вувуникян, Ваньли Чэнь

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
irinat@grsu.by, vuv64@mail.ru, chen_v1_21@student.grsu.by

В представленной работе рассматривается вопрос математического моделирования импульсных нейронных сетей на основе нелинейных эволюционных операторов с обобщенными импульсными характеристиками.

Импульсные нейронные сети, моделируемые нейроны которой ближе к реальности, также учитывают влияние информации о времени. Идея такова: нейрон в динамической нейронной сети активируется не при каждой итерации распространения, а только тогда, когда его мембранный потенциал достигает определенного значения. Когда нейрон активируется, он подает сигнал другим нейронам, повышая или понижая их мембранный потенциал.

В импульсной нейронной сети текущий уровень активации нейрона обычно считается текущим состоянием, а входной выброс будет повышать текущее значение на определенный период времени, а затем постепенно снижаться.

С помощью исследований в области нейробиологии создается модель нейронной сети на основе времени генерации импульсов. Этот новый тип нейронной сети использует пиковое кодирование. Получив точную синхронизацию импульсов, этот новый тип нейронной сети может получить больше информации и большую вычислительную мощность.

Нейронные сети имеют как динамику генерации потенциала действия, так и сетевую динамику. Активность пресинаптических нейронов модулирует мембранный потенциал постсинаптических нейронов, генерируя потенциалы действия или импульсы, когда мембранный потенциал превышает пороговое значение. Последовательности импульсов в импульсных нейронных сетях распространяются через синаптические соединения. Синапсы могут быть как возбуждающими, повышающими мембранный потенциал нейрона при получении входного сигнала, так и тормозными, снижающими мембранный потенциал нейрона. Результат обучения изменяет вес адаптивного синапса. Глубокие сверточные нейронные сети в основном используются в приложениях, связанных с изображениями, и они состоят из ряда слоев свертки и объединения, за которыми следует классификатор с прямой связью. Этот тип сети показал отличные результаты в распознавании изображений, речи, биоинформатике, обнаружении объектов и сегментации. Первый слой свертки интерпретируется как извлечение основных визуальных признаков. Последующие слои извлекают все более сложные функции для целей классификации.

Производительность, о которой сообщают современные методы, предполагает, что методы глубокого обучения на основе импульсов работают наравне с традиционными нейронными сетями. Кроме того, импульсные нейронные сети основаны на функциях человеческого мозга, и, как и человеческий мозг в будущем, их производительность будет намного лучше, чем у традиционных.

Для математического моделирования импульсных нейронных сетей мы применяем использовать теорию эволюционных операторов с импульсными характеристиками, которые являются свертками импульсных функций с прямыми степенями входящих импульсных воздействий.

Системный оператор второй кратности имеет вид

$$A(x, y) = \sum_{n_1, n_2} S_{n_1+n_2} (a_{n_1, n_2} * (x^{\otimes n_1} \otimes y^{\otimes n_2})), \quad (x, y) \in X^2,$$

где X – индуктивный предел семейства пространств X_a бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси, носители которых содержатся на $[a, \infty)$, a_{n_1, n_2} – обобщенная функция с носителем $[0, \infty)^n$, $S_{n_1+n_2}$ – оператор сокращения переменных n -го порядка ($n = n_1 + n_2$), $x^{\otimes n_1}$ – тензорная степень n_1 -го порядка, $*$ – n -мерная свертка обобщенных функций. Численное описание состояния модели строится на комплексных коэффициентах передачи в виде спектральных характеристик нелинейного оператора. Система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\int_0^t K_1(t-s)x(s)ds + x'(t) + x(t) + y(t) + x^2(t) + x(t)y(t) + y^2(t) = f_1(t),$$

$$\int_0^t K_2(t-s)y(s)ds + y'(t) + x(t) + y(t) + x^2(t) + x(t)y(t) + y^2(t) = f_2(t),$$

где f_1, f_2 – обобщенные функции с носителем на замкнутой положительной полуоси, позволяет описать состояние модели.

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И НАЗНАЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ЕДИНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. Е. Хартовский, О. И. Урбан

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by, urban@grsu.by

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями получен критерий существования и способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу, обеспечивающий финитную стабилизацию исходной системе и конечный (но не произвольный) спектр замкнутой системе. Отличительной чертой регулятора является отсутствие в структуре распределенного запаздывания, что важно для его практической реализации.

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где x – вектор состояния этой системы, u – управление, y – наблюдаемый выходной сигнал (выход), $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ – единичная матрица, λ_h – оператор сдвига, определяемый для заданного $h = \text{const} > 0$ правилом

$$(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh), \quad k \in \mathbb{N};$$

$D(\lambda) = \sum_{i=1}^m D_i \lambda^i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^m B_i \lambda^i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^m C_i \lambda^i$; $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Решение уравнения (1) однозначно задается начальным условием $x(t) = \varphi(t)$, $u(t) \equiv 0$, $t \in [-mh, 0]$. Считаем, что $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^1([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$ – неизвестная функция, где $\tilde{\mathcal{C}}^k(\cdot)$ – класс функций, $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывную производную порядка k . Управление u – кусочно-непрерывная функция.

Пусть $\mathbb{R}^{n \times m}[p, \lambda]$ ($\mathbb{R}^{n \times m}[\lambda]$) – множество матриц размера $n \times m$, элементы которых суть полиномы переменных p, λ (λ), $p_D = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Определим регулятор с обратной связью по наблюдаемому выходу

$$u(t) = U_{11}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{12}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t),$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = U_{21}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{22}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t > t_0. \quad (3)$$

Здесь $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ – вспомогательная переменная, $t_0 > 0$ – некоторое число ($u(t) \equiv 0$, $t \leq t_0$), $U_{11}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times l}[p, \lambda]$, $U_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times \tilde{n}}[p, \lambda]$, $U_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times l}[p, \lambda]$, $U_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}[p, \lambda]$.

В работе получен критерий существования и предложен способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу вида (3), который обеспечит финитную стабилизацию исходной системе, т.е. выполнение условия $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, и конечный спектр замкнутой системе.

Теорема. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\operatorname{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{rank} [I_n - D(z), B(z)] = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(z) \\ C(z) \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где $W(p, z) = p(I_n - D(z)) - A(z)$.

Библиографические ссылки

1. Метельский А. В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682.

2. Хартовский В. Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 686–706.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л. А. Хвоцинская

Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова БГУ,
Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

По заданной группе монодромии из матриц второго порядка построено дифференциальное уравнение класса Фукса с особыми точками, все параметры которого найдены в явном виде.

Рассматривается проблема Римана [1] определения системы двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точек $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ с группой монодромии $V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1}$ ($V_1, V_2 \cdot \dots \cdot V_n, V_{n+1} = E$).

Обозначим характеристические числа матриц $W_k = (2\pi i)^{-1} \ln V_k$ и $W_{jk} = (2\pi i)^{-1} \times \ln(V_j \cdot \dots \cdot V_k)$ соответственно ρ_k, σ_k и ρ_{jk}, σ_{jk} , $j = 1, \dots, n$, $k = 2, \dots, n+1$, $j < k$ и находим числа $\kappa = -\sum_{k=1}^{n+1} (\rho_k + \sigma_k)$ (индекс задачи). Поведение решений на бесконечности определяют числа $\rho_\infty = \rho_{n+1} + [(\kappa + 2)/2]$, $\sigma_\infty = \sigma_{n+1} + [(\kappa + 1)/2]$. Ветви всех логарифмов согласованы и удовлетворяют соотношению Фукса

$$\sum_{k=1}^n (\rho_k + \sigma_k) + \rho_\infty + \sigma_\infty = 1.$$

Теорема. Решение проблемы Римана для двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$ с $(n+1)$ особой точкой $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ удовлетворяет уравнению класса Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{z - a_k}, \quad (1)$$

элементы матриц-вычетов

$$S_k = \begin{pmatrix} s_k & \gamma_k/c_k \\ c_k & s'_k \end{pmatrix}$$

которых находятся по формулам

$$s_k = (d_{1,k} - d_{1,k-1} - \rho(\rho_k + \sigma_k) + d_{k,n} - d_{k+1,n})/(\sigma - \rho),$$

$$s'_k = (d_{1,k-1} - d_{1,k} + \sigma(\rho_k + \sigma_k) + d_{k+1,n} - d_{k,n})/(\sigma - \rho),$$

$$c_1 = c, \quad c_2 = c(\tau_1 - 1), \quad c_j = c\tau_1 \cdots \tau_{j-2}(\tau_{j-1} - 1), \quad j = 3, \dots, n-1,$$

$$c_n = -c\tau_1\tau_2 \cdots \tau_{n-2},$$

$$\tau_k^2 \gamma_{1,k} + \tau_k(\gamma_{1,k+1} + \gamma_{1,k} - \gamma_k) + \gamma_{1,k+1} = 0, \quad \gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k),$$

$$\gamma_{1,k} = -(s_{1,k} - \rho_{1,k})(s_{1,k} - \sigma_{1,k}),$$

в которых $s_{1,k} = (d_{1,k} + \rho\sigma - \rho(\rho_{1,k} + \sigma_{1,k}) - d_{k+1,n})/(\sigma - \rho)$, $\rho = -\rho_\infty$, $\sigma = 1 - \sigma_\infty$, $k = 1, \dots, n-2$, c – произвольная постоянная.

Уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению класса Фукса с $(2n-1)$ особой точкой

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\rho_k \sigma_k}{(z - a_k)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{d_{j,k} + d_{j+1,k-1} - d_{j,k-1} - d_{j+1,k} - s_j - s_k}{(z - a_j)(z - a_k)} + \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} \right) y = 0,$$

где b_j , $j = 1, \dots, n-2$, – корни многочлена

$$P_{n-2}(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tau_1 \cdots \tau_{k-2}(a_k - a_{k+1})}{(z - a_k)(z - a_{k+1})}, \quad \frac{d}{dz}(P_{n-2}(z)) = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j}.$$

Фундаментальная система решений уравнения (2) окрестности каждой особой точки a_k , $k = 1, \dots, n+1$, найдена в виде рядов, коэффициенты которых определены из рекуррентных соотношений.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы».

Библиографические ссылки

1. Еругин Н. П. Проблема Римана. Мн., 1982.

К АППРОКСИМАТИВНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

О. Б. Цехан

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
tsekhan@grsu.by

Для двухтемповых систем, моделями которых являются линейные системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных, исследуется задача управляемости в классе δ -последовательностей – аппроксимативная управляемость. Установлены независимые от малого параметра условия аппроксимативной управляемости.

Дана линейная нестационарная сингулярно возмущенная система управления (ЛНСВС)

$$\dot{z}(t) = A(t, \mu) z(t) + B(t, \mu) u(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \quad z(t_0) = z_0. \quad (1)$$

Здесь μ – параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $n = n_1 + n_2$, $z^T(t) = (x^T(t), y^T(t))$, T – символ транспонирования, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ – вектор медленных переменных, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ – вектор быстрых переменных, $z_0^T = (x_0^T, y_0^T)$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u(t)$, $t \in T$, – скалярная функция управления,

$$A(t, \mu) = [A^0(t) + \mu^{-1} A^1(t)], \quad B(t, \mu) = [B^0(t) + \mu^{-1} B^1(t)],$$

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix},$$

$$B^0(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

$A_i(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_i}$, $A_{i+2}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_i}$, $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, – непрерывные на T матричные функции.

Пусть $F(t, \mu)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы $\dot{z}(t) = A(t, \mu) z(t)$, нормированная при $t = t_0$.

Определение 1. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ ЛНСВС (1) имеет класс $n - 1$, если n -вектор-функция $H(t, \mu) = F^{-1}(t, \mu) B(t, \mu)$ $n - 1$ раз непрерывно дифференцируема на T .

Пусть зафиксирована некоторая δ -последовательность [1, с. 84] функций. Определим последовательность $\{u_{i\sigma}(t, \mu)\}$ управлений вида («быстрые» управления [2]) $u_{i\sigma}(t, \mu) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\mu) \delta_i^{(j)}(t - \sigma)$, $t \in T$, где $a_j(\mu)$ – полиномы по μ . При фиксированных $\mu \in (0, \mu^0]$ и управлении $u_{i\sigma}(t, \mu)$, $t \in T$ обозначим $z(t; \mu, z_0, u_{i\sigma}(\cdot, \mu))$ решение ЛНСВС (1) с начальным условием z_0 .

Определение 2. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ ЛНСВС (1) аппроксимативно управляема если она имеет класс $n - 1$ и для любого $\sigma \in T$, любого $z_0 \in \mathbb{R}^n$, для любого $\varepsilon > 0$, найдется номер $i_0(z_0, \varepsilon)$, такой что $\|z(\sigma; \mu, z_0, u_{i\sigma}(\cdot, \mu))\| \leq \varepsilon$ для любого $i > i_0$.

Аппроксимативно управляемую ЛНСВС можно с помощью гладких управлений из последовательности $\{u_{i\sigma}(t, \mu)\}$ из любого начального состояния z_0 перевести в сколь угодно малую ε -окрестность нулевого состояния за сколь угодно малое время, предшествующее моменту σ .

Определим матрицы

$$A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad B_s(t) \triangleq B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t);$$

n -вектор функции $q_i^j(t)$, $j = \overline{0, i}$, $i = \overline{0, n-1}$ по рекуррентным формулам $q_i^j(t) = (A^0(t)q_{i-1}^j(t) + A^1(t)q_{i-1}^{j-1}(t) - \dot{q}_{i-1}^j(t))$, $q_0^0(t) = B^0(t)$, $q_0^1(t) = B^1(t)$, $q_i^j(t) = 0$ при $j < 0$ или $j > i + 1$; n_1 -вектор функции $q_{si}(t)$, $i = \overline{0, n_1-1}$, и n_2 -вектор функции, $q_{fi}(t)$, $i = \overline{0, n_2-1}$, по рекуррентным формулам $q_{si}(t) = A_s(t)q_{s,i-1}(t) - \dot{q}_{s,i-1}(t)$, $q_{s0}(t) = B_s(t)$, $q_{si}(t) = 0$ при $i < 0$, $q_{fi}(t) = A_4(t)q_{f,i-1}(t)$, $q_{f0}(t) = B_2(t)$, $q_{fi}(t) = 0$ при $i < 0$.

Составим матрицы $Q_s(t) = \{q_{si}(t), i = \overline{0, n_1-1}\}$, $Q_f(t) = \{q_{fi}(t), i = \overline{0, n_2-1}\}$.

Теорема. Если функции $q_i^j(t)$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, i}$, непрерывно-дифференцируемы на T , то ЛНСВС (1) имеет класс $n-1$ для любого $\mu > 0$. Если к тому же $\text{rank } Q_s(t) = n_1$, $\text{rank } Q_f(t) = n_2$, для любого $t \in T$, то ЛНСВС (1) аппроксимативно управляема на T при всех достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»).

Библиографические ссылки

1. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М., 1976.
2. Куржанский А. Б. О синтезе импульсных управлений и теории быстрых управлений // Тр. МИАН. 2010. Т. 268. С. 215–230.

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОНКОСТЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ

Г. Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
gsys@grsu.by

Рассматривается аналитическое решение задачи экранирования высокочастотного электромагнитного поля тонкостенным сферическим экраном. Для аналитического решения поставленной задачи используются векторные сферические волновые функции.

Электромагнитная обстановка представляет собой совокупность электромагнитных полей в заданной области пространства, которая может влиять как на биологические объекты, так и на функционирование конкретных электронных устройств. Для

создания благоприятной электромагнитной обстановки производится электромагнитное экранирование [1]. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ находится тонкостенный сферический экран толщиной Δ , ограниченный сферическими поверхностями $S_2(r = a_2)$ и $S_1(r = a_1)$, $a_2 > a_1$. Обозначим внешнюю часть пространства по отношению к экрану через $D_2(r > a_2)$, внутреннюю – через $D_1(r < a_1)$. Тонкостенный экран выполнен из материала с электромагнитными параметрами ε , μ , γ : ε – диэлектрическая проницаемость, μ – абсолютная магнитная проницаемость, γ – удельная электрическая проводимость. Область D_m , $m = 1, 2$, заполнена средой с электромагнитными параметрами ε_m , μ_m , γ_m . В области D_2 расположен источник электромагнитного поля – магнитный диполь Герца, колеблющийся с круговой частотой ω .

Будем полагать, что на поверхностях S_1 и S_2 отсутствуют поверхностные токи и заряды. Для тонкостенных оболочек электромагнитное поле внутри оболочки не исследуется. Граничные условия рассматривают на срединной поверхности S_c [2, 3].

Обозначим через $\vec{E}_e$, $\vec{H}_e$ векторы напряженности электрического и магнитного полей диполя соответственно. В результате взаимодействия электромагнитного поля диполя с тонкостенным экраном образуются вторичные поля. Пусть $\vec{E}_m$, $\vec{H}_m$ – вторичные поля в области D_m , $m = 1, 2$.

Постановка задачи. Требуется определить вторичные электромагнитные поля $\vec{E}_2, \vec{H}_2 \in C^1(D_2) \cap C(\bar{D}_2)$, $\vec{E}_1, \vec{H}_1 \in C(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$, которые удовлетворяют:

– уравнениям Максвелла [2]

$$\text{rot} \vec{E}_m = i\omega\mu_m \vec{H}_m, \quad \text{rot} \vec{H}_m = -i\omega\varepsilon_m \vec{E}_m, \quad m = 1, 2;$$

– граничным условиям на поверхности сферы S_c

$$[\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_2 - \vec{E}_1]_{S_c} = Z[\vec{n}, [\vec{H}_e + \vec{H}_2 + \vec{H}_1, \vec{n}]]_{S_c},$$

$$[\vec{n}, \vec{H}_e + \vec{H}_2 - \vec{H}_1]_{S_c} = G[\vec{n}, [\vec{E}_e + \vec{E}_2 + \vec{E}_1, \vec{n}]]_{S_c},$$

$$Z = ik \operatorname{tg}(0.5k\Delta)/\omega\varepsilon, \quad G = ik \operatorname{tg}(0.5k\Delta)/\omega\mu, \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu},$$

где $\vec{n}$ – единичная нормаль к поверхности S_c ;

– условию на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial r} - ik_2 \vec{E}_2 \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{H}_2}{\partial r} - ik_2 \vec{H}_2 \right) = 0.$$

Для решения задачи вторичные электромагнитные поля представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций [4]. После выполнения граничных условий получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, входящих в представление вторичного поля.

Библиографические ссылки

1. Кечиев Л. Н. Экранирование радиоэлектронной аппаратуры. М., 2019.
2. Аполлонский С. М. Моделирование и расчет электромагнитных полей в технических устройствах. Т. III. Расчеты электромагнитных полей в научных и инженерно-технических задачах. М., 2024.
3. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. Аналитическое моделирование в электродинамике. Мн., 2010.
4. Шушкевич Г. Ч. Рассеяние поля электрического диполя на многослойном биизотропном шаре // Всерос. конф. с междунар. участием (Теория управления и математическое моделирование). Ижевск, 2020. С. 347–348.

CLASSICAL SOLUTION OF AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A MIXED BOUNDARY CONDITION AND CONJUGATION CONDITIONS FOR A MILDLY QUASILINEAR WAVE EQUATION

V. I. Korzyuk^{1,2)}, J. V. Rudzko¹⁾

¹⁾*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus;*

²⁾*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com

We consider an initial-boundary value problem for a mildly quasilinear wave equation in the first quadrant in which we pose the Cauchy conditions on the spatial half-line, a mixed boundary condition on the time half-line, and conjugation conditions on some characteristics. We prove the uniqueness of the solution and establish the conditions under which a classical solution exists.

In this report, we consider the following mixed problem

$$\begin{cases} \square_a u(t, x) = f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)), & (t, x) \in Q, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), & x \in [0, \infty), \\ u(t, 0) = \mu_1(t), & t \in [0, t_*), \\ \partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), & t \in [t_*, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

where $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$, $\square_a = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ is the d'Alembert operator ($a > 0$ for definiteness), t_* is a positive real number, f is a function given on the set $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3$, φ and ψ are functions given on the half-line $[0, \infty)$, μ_1 is a function given on the segment $[0, t_*)$, and μ_2 is a function given on the half-line $[t_*, \infty)$.

Previously, we have announced the existence and uniqueness theorem of a classical solution of the problem (1) under some smoothness and compatibility conditions [1, 2]. But in the present work we won't assume that these compatibility conditions hold.

We present the main results of this report in the following theorem.

Theorem. *Let the conditions $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^2([0, t_*])$, $\mu_2 \in C^1([t_*, \infty))$ be fulfilled, and let the function f satisfy the Lipschitz condition*

$$|f(t, x, u, u_t, u_x) - f(t, x, z, z_t, z_x)| \leq L(t, x)(|u - z| + |u_t - z_t| + |u_x - z_x|)$$

with a continuous function $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. The mixed problem (1) with conjugation conditions

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)), \quad [(u)^+ - (u)^-](t, x = at - at_*) = 0,$$

where $\gamma : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)) \in \mathbb{R}$ is a function with one parameter $\varphi(0) - \mu_1(0)$ that satisfies the natural comparability condition

$$\gamma(t; 0) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad \gamma(0; s) = s, \quad s \in \mathbb{R},$$

has a unique solution u in the class $C^2(\tilde{Q}) \cap C(\tilde{Q}_0)$, where $\tilde{Q} = \overline{Q} \setminus \{(t, x) : x - at = 0 \vee x - at = -at_*\}$ and $\tilde{Q}_0 = \overline{Q} \setminus \{(t, x) : x - at = 0\}$. This solution depends continuously on the functions $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2$, and γ .

The talk is based on a recent preprint [1]. The obtained results expand the previously known ones [3, 4].

The report was financially supported by the National Academy of Sciences of Belarus in the framework of implementing the scientific research program “Solutions of problems with non-smooth boundary conditions for hyperbolic equations” (agreement No 2024-25-141) and Ministry of Education of the Republic of Belarus & the National Academy of Sciences of Belarus in the framework of implementing the state scientific research program “Convergence-2025” (state reg. No 20212281).

References

1. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solutions of an initial-boundary value problem with a mixed boundary condition for a mildly quasilinear wave equation // Materials of the 11th International Workshop “Analytical Methods of Analysis and Differential Equations” (AMADE-2024). Minsk, 2024. P. 34–35.
2. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solutions of a mixed problem with the Zaremba boundary condition for a mildly quasilinear wave equation // Research Square [Preprint].
3. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential // Differ. Equat. 2022. V. 58. № 2. P. 175–186.
4. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical and mild solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential // Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat. 2023. V. 43. P. 48–63.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF SOME SECOND-ORDER QUASI-LINEAR EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES IN HOMOGENEOUS ISOTROPIC MEDIA WITHOUT PERTURBATIONS

V. I. Korzyuk^{1,2)}, D.S. Zhalukevich¹⁾

¹⁾*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus;*

²⁾*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

korzyuk@bsu.by, den.zhal@yandex.by

Consider second-order quasi-linear equations with two independent variables in homogeneous isotropic media without perturbations [1]:

$$A_{11}u_{tt} + 2A_{12}u_{tx} + A_{22}u_{xx} + A_1u_t + A_2u_x + \lambda f(u) = 0, \quad (1)$$

where $A_i, A_{ij}, \lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$, $f(u)$ is a function by u .

This quasi-linear equation has the following classification:

- 1) $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} > 0$ – hyperbolic type;
- 2) $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} < 0$ – elliptical type;
- 3) $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = 0$ – parabolic type.

By some transformations, equation (1) is reduced to the following four types of equations:

$$u_{tx} + A_1 u_t + A_2 u_x + \lambda f(u) = 0, \quad (2)$$

$$u_{tt} - u_{xx} + A_1 u_t + A_2 u_x + \lambda f(u) = 0, \quad (3)$$

$$u_{tt} + u_{xx} + A_1 u_t + A_2 u_x + \lambda f(u) = 0, \quad (4)$$

$$u_t + A_{22} u_{xx} + A_2 u_x + \lambda f(u) = 0. \quad (5)$$

Equation (2) is a hyperbolic nonlinear Klein–Gordon equation in the first form. Equation (3) is a hyperbolic nonlinear Klein–Gordon equation in the second form. Equation (4) is an elliptic nonlinear Klein–Gordon equation. The equation (5) is a nonlinear convection–diffusion equation.

The reduction for equation (1) will be carried out using symmetries and substitution of variables $u = y(z(t, x))$.

We will look for infinitesimal transformations for equation (1) in the form [2–5]

$$\tilde{t} = t + \varepsilon \tau(t, x, u) + \dots, \quad \tilde{x} = x + \varepsilon \xi(t, x, u) + \dots, \quad \tilde{u} = u + \varepsilon \eta(t, x, u) + \dots,$$

and $\tilde{f}(\tilde{u}) = f(u) + \varepsilon f^{(1)}(u)\eta + \dots$

Then the group generator for equation (1) has the form

$$X = \tau(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

References

1. *Korzyuk V. I.* Equations of Mathematical Physics. Moscow, 2021.
2. *Hydon P. E.* Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide. Cambridge, 2000.
3. *Ibragimov N. H.* Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. Dordrecht, 1985.
4. *Ovsianikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations. New York, 1982.
5. *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. Graduate Texts Math. V. 107. New York, 1993.

ON FRACTIONAL DERIVATIVE OF THE MITTAG-LEFFLER TYPE FUNCTIONS

S. V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya

Belarusian State University, Minsk, Belarus
rogosinsv@gmail.com, dubatovska@bsu.by

The report is devoted to the calculation of the fractional derivatives of the Mittag-Leffler function with respect to parameters.

We calculate the fractional derivative of the Mittag-Leffler function. We use both main types of fractional derivatives, namely, the Riemann–Liouville fractional derivative

$$\left({}^{RL}D^\mu f(\tau)\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\mu - n + 1}}, \quad n = [\mu] + 1,$$

and the Dzherbashian–Caputo fractional derivative

$$\left({}^{DC}D^\mu f(\tau)\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\mu-n+1}}, \quad n = [\mu] + 1.$$

It is motivated by the recent approaches to the calculation of the derivatives of special functions with respect to parameters (see, e.g., [1]) and by the study of evolution equations in the form proposed in [2].

The Mittag-Leffler function is an entire function of the complex variable z defined by the following power series (see, e.g. [3]):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

for every $z, \beta \in \mathbb{C}$ and $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Calculation are based on a complex integral representation of the function $1/\Gamma(z)$ valid for *unrestricted* z (see, e.g., [3, Appendix A]):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_-} \frac{e^t}{t^z} dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

with integration along so called Hankel path Ha_- .

$$\left({}^{RL}D_{0+,\alpha}^\mu \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right)(\alpha) = k^\mu \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_-} e^s s^{-\alpha k - \beta} (-\ln s)^{\mu-1} ds =: k^\mu c_k(\alpha, \beta),$$

$$\left({}^{RL}D_{0+,\beta}^\mu \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right)(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_-} e^s s^{-\alpha k - \beta} (-\ln s)^{\mu-1} ds = c_k(\alpha, \beta).$$

Final results is presented in the form of series:

$$\left({}^{RL}D_{0+,\alpha}^\mu E_{\alpha,\beta}\right)(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} k^\mu c_k(\alpha, \beta) z^k,$$

$$\left({}^{RL}D_{0+,\beta}^\mu E_{\alpha,\beta}\right)(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha, \beta) z^k.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2025», грант № 1.7.01.4.

References

1. Rogosin S. V., Giralaldi F., Mainardi F. On differentiation with respect to parameters of the functions of the Mittag-Leffler type // arXiv: 2408.05225.
2. Gal C. G., Gal S. G., Goldstein J. A. Evolution Equations With A Complex Spatial Variable. Singapore, 2014.
3. Gorenflo R., Kilbas A., Mainardi F., Rogosin S. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Berlin, 2020.

GROUP CLASSIFICATION OF NEWTON'S POLYNOMIAL EQUATIONS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

D.S. Zhalukevich

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus;
den.zhal@yandex.by*

Consider Newton's polynomial equations with one degree of freedom, which are often found in science and technology:

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^n F_k(t, x) \dot{x}^k = 0, \quad (1)$$

where $n \in \mathbb{N}$, $F_k(t, x)$ -analytical functions based on their arguments.

We will look for infinitesimal transformations for equation (1) in the form [1-4]

$$\tilde{t} = t + \varepsilon \tau(t, x) + \dots, \quad \tilde{x} = x + \varepsilon \xi(t, x) + \dots, \quad (2)$$

and

$$\tilde{F}_k = F_k + \varepsilon f_k + \dots \quad (3)$$

Then the group generator for equation (1) has the form

$$X = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^n f_k \frac{\partial}{\partial F_k}. \quad (4)$$

Based on the speed of movement, the following types are distinguished for equation (1):

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^1 F_k(t, x) \dot{x}^k = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^2 F_k(t, x) \dot{x}^k = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^n F_k(t, x) \dot{x}^k = 0, \quad n > 2. \quad (7)$$

Equation (5) is used at low speeds-the Stokes resistance force acts. Equation (6) is used at high speeds of motion-the Euler resistance force acts. Equation (7) is used at very high speeds-the Euler-Bernoulli resistance force acts.

References

1. *Hydon P. E.* Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide. Cambridge, 2000.
2. *Ibragimov N. H.* Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. Dordrecht, 1985.
3. *Ovsianikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations. New York, 1982.
4. *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. Graduate Texts Math. V. 107. New York, 1993.

Научное издание

**ПЯТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ
НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»,
посвященная столетию со дня рождения
Иванова Е. А. и Бриша Н. И.**

**Материалы
международной научной конференции**

Материалы публикуются в авторской редакции

Редколлегия: *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А.* (составитель), *Козловская И. С.*
Компьютерная верстка *Красовский С. Г.*

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.