

ОБ ОДНОЙ ПРИБЛИЖЕННОЙ ФОРМУЛЕ ТОЧНОЙ, ДЛЯ МОМЕНТОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПУАССОНОВСКОЙ МЕРЫ

А. В. Жерело

*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Беларусь, zherelo@bsu.by*

В данной работе предложена приближенная формула для вычисления математических функционалов по стохастической пуассоновской мере. Построенная формула относится к так называемым слабым аппроксимациям. Формула точна для моментов третьей степени специального вида. Приведен пример использования формулы для вычисления математических ожиданий для нелинейных функций от компенсированного процесса Пуассона.

Ключевые слова: стохастические процессы с разрывами; моменты случайного процесса; приближенная формула; слабые методы аппроксимации.

ON ONE APPROXIMATE FORMULA EXACT TO THIRD-ORDER MOMENTS OF STOCHASTIC POISSON MEASURE

A. V. Zherelo

*Belarusian State University, Nezavisimosti Av., 4,
220030, Minsk, Belarus, zherelo@bsu.by*

In this paper, an approximate formula for calculating mathematical functionals by a stochastic Poisson measure is proposed. The constructed formula is related to the so-called weak approximations. The formula is exact for moments of the third degree of a special form. An example of using the formula for calculating mathematical expectations for nonlinear functions of a compensated Poisson process is given.

Keywords: stochastic processes with discontinuities; moments of a random process; approximate formula; weak approximation methods.

В данной работе рассмотрен вопрос построения приближенной формулы для вычисления математических функционалов по стохастической пуассоновской мере. Построенная формула относится к так называемым слабым аппроксимациям. Это означает, что при построении приближения не рассматривается проблема построения аппроксимации каждой отдельно взятой траектории процесса, а строится формула, приближающая значения некоторых конкретных функционалов, например, моментов, плотности, характеристической функции и т.д. В работе в качестве такого функционала использованы моменты третьей степени.

Прежде, чем перейти к приближенной формуле, приведем некоторые необходимые для последующего изложения материала определения и сведения. При изложении будем опираться на терминологию и определения, введенные в [1].

Прежде всего здесь и далее будем полагать, что задано некоторое вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, на котором задан поток алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ (который также называется фильтрацией), который является семейством σ -алгебр, таких, что $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, s \leq t$ и $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$.

Также будем полагать, что q -мерный процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ согласован с потоком $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, что означает, что $\xi(t)$ является $\mathcal{F}_t$ -измеримым для любого $t \in [0, T]$.

Обозначим $\mathcal{V}^c$ класс случайных процессов $\alpha(t), t \geq 0$ согласованных с потоком $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, которые могут быть представлены в виде разности двух монотонно неубывающих процессов, реализации которых непрерывны с вероятностью 1 для любого $t \geq 0$.

Обозначим также LM класс локально квадратично-интегрируемых мартингалов, а LM^c его подкласс стохастически непрерывных мартингалов; функцию $\langle \mu, \mu \rangle_t = \mathbb{E}[\mu(t)\mu(t)]$, где $\mu(t) \in LM$, будем называть характеристикой мартингала $\mu(t)$.

Семейство мартингалов $\mu(t, A), t \in [0, T], A \in \mathcal{B}(R^m)$ называется ортогональной мартингальной мерой, если $\mu(0, A) = 0$, $\mu(t, A)$ согласована с потоком $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mu(t, A_1) + \mu(t, A_2) = \mu(t, A_1 \cup A_2)$, где $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

2. $\mu(t, A_1)\mu(t, A_2) \in LM$

3. $\langle \mu(\cdot, A), \mu(\cdot, A) \rangle_t = \pi(t, A)$, где $\pi(t, A)$ – случайная функция такая, что для фиксированного t она является мерой на $\mathcal{B}(R^m)$, а для фиксированного A является непрерывной монотонно неубывающей функцией от t ; $\pi(t, A)$ называется характеристикой меры μ .

$\mathcal{L}_0\{[0, T] \times \mathcal{B}(R^m)\}$ обозначает класс простых функций, которые ограничены с вероятностью 1 на полукольце множеств вида $(a, b] \times A$, $A \in \mathcal{B}(R^m)$.

H_2^π – класс случайных функций $\phi(t, u) \equiv \phi(t, u, \omega)$ таких, что существует последовательность $\phi_n \in \mathcal{L}_0\{\mathfrak{T}_0 \times \mathfrak{U}_0\}$ для которых существует

$$P - \lim_{0 \leq t \leq T} \int \int |\phi(t, u) - \phi_n(t, u)|^2 \pi(dt, du) = 0 \text{ для любого } t > 0.$$

Обозначим через E_ξ класс дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых

$$f(t, \xi(t) + \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t)) - (\nabla f(t, \xi(t)), \gamma(t, u)) \\ |f(t, \xi(t) + \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t))|^2$$

с вероятностью 1 интегрируем по мере $\pi(dt, du)$.

$$\text{Также будем обозначать } \nabla f(t, x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_q} \right).$$

Введенные обозначения необходимы для того, чтобы ввести понятие стохастического интеграла для произвольного локального мартингала и сформулировать следующую теорему (см. [1]), которая является обобщением леммы Ито на случай стохастически разрывных процессов.

Теорема. Пусть $\alpha \in \mathcal{V}^c$, $\beta \in l\mathcal{M}^c$, μ – локальная мартингальная мера, $\gamma \in H_2^\pi$, функция $f(t, x)$ $t \in [0, T]$ дважды непрерывно дифференцируема по x , непрерывно дифференцируема по t и $f(t, x) \in E_\xi$. Тогда процесс $\eta(t) = f(t, \xi(t))$, где $\xi(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \zeta(\gamma, t)$ имеет стохастический дифференциал

$$d\eta = d\eta_c + d\eta_d$$

где

$$d\eta_c = f'_t(t, \xi(t))dt + (\nabla f(t, \xi(t)), d\xi_c) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q \nabla^i \nabla^j f(t, \xi(t)) d\langle \beta^i, \beta^j \rangle_t \\ d\eta_d = \int_{R^m} L_d(f, \xi) \pi(dt, du) + \int_{R^m} f(t, \xi(t) + \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t)) \mu(dt, du)$$

и где

$$L_d(f, \xi) = f(t, \xi(t) + \gamma(t, u)) - f(t, \xi(t)) - (\nabla f(t, \xi(t)), \gamma(t, u))$$

Как видно из формулировки теоремы, технический аспект дифференцирования существенно усложняется. В качестве примера можно привести решение линейного стохастического уравнения (см. [1]).

$$d\eta = \eta d\xi,$$

где

$$\xi(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \int_0^t u \mu(t, du),$$

и где $\alpha(t) \in \mathcal{V}^c$, $\beta(t) \in \mathcal{M}^c$, μ ортогональная локальная мартингальная мера ассоциированная со скачками процесса $\xi(t)$.

Решение уравнения имеет вид

$$\eta(t) = \eta(0) \exp \left\{ \xi(t) - \frac{1}{2} \langle \beta, \beta \rangle_t \right\} \prod_{s \leq t} (1 + \delta \xi(s)) e^{-\delta \xi(s)}$$

где $\delta \xi(s) = \xi(s) - \xi(s-)$.

Необходимо отметить, что решение уравнения получается конструктивно и, следовательно, решения в уравнениях более общего вида получить в явном виде, как правило, не представляется возможным.

Особый интерес представляют процессы, которые можно определить как решение стохастического дифференциального уравнения вида (например, в области финансов):

$$dY(t) = f(t, Y(t-))dt + g(t, Y(t-))dW(t) + \int_R h(t, u, Y(t-))\tilde{\nu}(dt, du) \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $W(t)$ – процесс Винера, функции f , g и h удовлетворяют следующим условиям:

1. существует $K_1 > 0$ такое, что для всех $y \in R$

$$|f(t, x) - f(t, y)|^2 + |g(t, x) - g(t, y)|^2 + \int_{\square} |h(t, u, x) - h(t, u, y)|^2 \pi(du) \leq K_2 |x - y|^2$$

2. существует $K_2 > 0$ такое, что для всех $x, y \in R$

$$|f(t, y)|^2 + |g(t, y)|^2 + \int_{\square} |h(t, u, y)|^2 \pi(du) \leq K_2 (1 + |y|^2)$$

K_1 и K_2 зависят от T ; $\tilde{\nu}_t(B) \equiv \tilde{\nu}(t, B)$ – компенсированная стохастическая мера Пуассона, ассоциированная с мерой $\nu(t, B)$ – стохастической мерой Пуассона, которая задается следующим образом (см. [2]):

1 для любого $t > 0$ $\nu(t, \cdot)$ является считающей мерой на $\mathcal{B}(\square - \{0\})$

2 для каждого B ограниченного снизу, $\nu(t, B)$ является процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda = \pi(B) = \mathbb{E}(\nu(1, B))$

3 $\tilde{\nu}$ является мартингальной мерой и $\tilde{\nu}_t(B) \equiv \tilde{\nu}(t, B) = \nu(t, B) - t\pi(B)$, где множество B ограничено снизу.

Отметим, что решение такого уравнения существует в сильном смысле и единственно (например, см. [2])

Для вычисления функционалов от решения такого уравнения достаточно сложно применить и метод Монте-Карло, что связано с возможным существенным влиянием скачков процесса на моделируемые траектории, что приводит к необходимости увеличения количества генерируемых траекторий и, как следствие, приводит к дополнительным требованиям на используемые вычислительных ресурсов.

Частично вопросы приближенного вычисления функционалов от решения уравнения (1) был рассмотрен автором ранее, а точнее были рассмотрены случаи, когда в уравнении присутствует только диффузионная часть (когда f равно нулю, см. [3,4]). Идея используемого подхода заключается в том, что решение уравнения можно рассматривать как функционал от процессов, стоящих в правой части уравнения под знаком дифференциала. В таком случае возможно перейти к некоторому детерминированному уравнению, которое можно решить в явном виде, в случае выбора удобных для решения уравнения функций, приближающих процессы, стоящие под знаком дифференциала, и полученное решение является слабой аппроксимацией решения исходного уравнения в смысле приближенного вычисления моментов третьего порядка решения исходного стохастического уравнения. Как показали дальнейшие исследования, построить решение для случая, когда в уравнении присутствует дрейф, т. е. f не равно нулю, нетривиальная задача, однако ее возможно выполнить если рассматривать время как процесс и использовать аппроксимацию и для него, что и было показано для уравнений со стохастически непрерывной частью (см. [5]). Для применения данного подхода для случая процесса, в котором присутствует дрейф и стохастически разрывная часть, т.е. $g \equiv 0$, необходимо предложить другую формулу. Далее положим $T=1$, т.е. $t \in [0,1]$.

Лемма. Приближенная формула $J(G)$ точна для математических ожиданий вида $\mathbb{E}[\xi_1 \xi_2 \xi_3]$, где $\xi_j \in \{t_1, t_2, t_3, \tilde{v}_{s_1}(C_1), \tilde{v}_{s_2}(C_2), \tilde{v}_{s_3}(C_3)\}$, за исключением $\mathbb{E}[t_1 t_2 t_3] = t_1 t_2 t_3$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}G[\cdot, \tilde{v}_*(B)] &\approx J(G) \equiv J(G, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = \\ &= \sum_{j_1, j_2=1}^2 A_{j_1} B_{j_2} \int_R \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G[\rho_{j_1 1}^{(1)}(\cdot, u_1) + \rho_{j_1 2}^{(1)}(\cdot, u_2), \rho_{j_2}^{(2)}(*, u_3, C, v)] \pi(dv) du_1 du_2 du_3 \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\rho_{j_1 k}^{(1)} = a_{j_1 k} 1_{[u_k, 1]}(s), \quad k=1, 2 \quad \rho_{j_2}^{(2)}(s, u_3, C, v) = b_{j_2} 1_C(v) 1_{[u_3, 1]}(s),$$

$$1_C(v) = \begin{cases} 1, & v \in C \\ 0, & v \notin C \end{cases}, \quad 1_{[u_3, 1]}(s) = \begin{cases} 1, & s \in [u_3, 1] \\ 0, & s \notin [u_3, 1] \end{cases},$$

$$A_1 + A_2 = 1,$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{-\frac{A_2}{A_1}} \right), \quad a_{12} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{-\frac{A_2}{A_1}} \right),$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} \right), \quad a_{22} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} \right), \\
B_1 &= \frac{1}{2\pi(R)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+4\pi(R)}} \right), \quad B_2 = \frac{1}{2\pi(R)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4\pi(R)}} \right), \\
b_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1+4\pi(R)} \right), \quad b_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1+4\pi(R)} \right).
\end{aligned}$$

Моменты $\mathbb{E}[\xi_1 \xi_2 \xi_3]$ могут быть вычислены точно и имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[t_1] &= t_1, \quad \mathbb{E}[\tilde{v}_{s_1}(C_1)] = 0, \\
\mathbb{E}[t_1 t_2] &= t_1 t_2, \quad \mathbb{E}[t_1 \tilde{v}_{s_1}(C_1)] = 0, \\
\mathbb{E}[\tilde{v}_{s_1}(C_1) \tilde{v}_{s_2}(C_2)] &= \pi(C_1 \cap C_2) \min(s_1, s_2), \\
\mathbb{E}[t_1 t_2 \tilde{v}_{s_1}(C_1)] &= 0, \\
\mathbb{E}[t_1 \tilde{v}_{s_1}(C_1) \tilde{v}_{s_2}(C_2)] &= t_1 \pi(C_1 \cap C_2) \min(s_1, s_2), \\
\mathbb{E}[\tilde{v}_{s_1}(C_1) \tilde{v}_{s_2}(C_2) \tilde{v}_{s_3}(C_3)] &= \pi(C_1 \cap C_2 \cap C_3) \min(s_1, s_2, s_3).
\end{aligned}$$

Для доказательства того факта, что формула дает точные значения для указанных выше функционалов, примем во внимание, что верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 A_j (a_{j1} + a_{j2}) &= 1, \quad \sum_{j=1}^2 A_j (a_{j1} + a_{j2})^2 = 1, \\
\sum_{j=1}^2 A_j (a_{j1}^2 + a_{j2}^2) &= 0, \quad 2 \sum_{j=1}^2 A_j a_{j1} a_{j2} = 1, \\
B_1 + B_2 &= \frac{1}{\pi(R)}, \\
\sum_{j=1}^2 B_j b_j &= 0, \quad \sum_{j=1}^2 B_j b_j^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^2 B_j b_j^3 = 1
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbb{E}[t_1] = t_1$, тогда

$$\begin{aligned}
J(G) &= \sum_{j_1, j_2=1}^2 A_{j_1} B_{j_2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [\rho_{j_1 1}^{(1)}(t_1, u_1) + \rho_{j_1 2}^{(1)}(t_1, u_2)] \pi(dv) du_1 du_2 du_3 = \\
&= \sum_{j_1=1}^2 A_{j_1} \int_0^1 \int_0^1 [a_{j_1 1} 1_{[u_1, 1]}(t_1) + a_{j_1 2} 1_{[u_2, 1]}(t_1)] du_1 du_2 = t_1 \sum_{j_1=1}^2 A_{j_1} (a_{j_1 1} + a_{j_1 2}) = t_1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим далее случай $\mathbb{E}[\tilde{v}_{s_1}(C_1)] = 0$:

$$\begin{aligned}
J(G) &= \sum_{j_1, j_2=1}^2 A_{j_1} B_{j_2} \int_R \int_0^1 \int_0^1 [\rho_{j_2}^{(2)}(s_1, u_3, C_1, v)] \pi(dv) du_1 du_2 du_3 = \\
&= \sum_{j_2=1}^2 B_{j_2} \int_R \int_0^1 b_{j_2} 1_{C_1}(v) 1_{[u_3, 1]}(s_1) \pi(dv) du_3 = \pi(C_1) s_1 \sum_{j_2=1}^2 B_{j_2} b_{j_2} = 0.
\end{aligned}$$

Вычислим с использованием приближенной формулы значение момента вида $\mathbb{E}[t_1 t_2] = t_1 t_2$:

$$\begin{aligned}
J(G) &= \\
&= \sum_{j_1, j_2=1}^2 A_{j_1} B_{j_2} \int_{\square} \int_0^1 \int_0^1 [\rho_{j_1}^{(1)}(t_1, u_1) + \rho_{j_2}^{(1)}(t_1, u_2)] [\rho_{j_1}^{(1)}(t_2, u_1) + \rho_{j_2}^{(1)}(t_2, u_2)] \pi(dv) du_1 du_2 du_3 = \\
&= \sum_{j_1=1}^2 A_{j_1} \int_0^1 \int_0^1 [a_{j_1} 1_{[u_1, 1]}(t_1) + a_{j_2} 1_{[u_2, 1]}(t_1)] [a_{j_1} 1_{[u_1, 1]}(t_2) + a_{j_2} 1_{[u_2, 1]}(t_2)] du_1 du_2 = \\
&= \sum_{j_1=1}^2 A_{j_1} (a_{j_1}^2 \min(t_1, t_2) + a_{j_2}^2 \min(t_1, t_2) + 2t_1 t_2 a_{j_2} a_{j_1}) = t_1 t_2 2 \sum_{j_1=1}^2 A_{j_1} a_{j_1} a_{j_2} = t_1 t_2.
\end{aligned}$$

Далее вычислим приближенное значение функционала $\mathbb{E}[\tilde{v}_{s_1}(C_1) \tilde{v}_{s_2}(C_2)]$:

$$\begin{aligned}
J(G) &= \sum_{j_1, j_2=1}^2 A_{j_1} B_{j_2} \int_R \int_0^1 \int_0^1 [\rho_{j_2}^{(2)}(s_1, u_3, C_1, v) \rho_{j_2}^{(2)}(s_2, u_3, C_2, v)] \pi(dv) du_1 du_2 du_3 = \\
&= \sum_{j_2=1}^2 B_{j_2} \int_R \int_0^1 b_{j_2} 1_{C_1}(v) 1_{[u_3, 1]}(s_1) b_{j_2} 1_{C_2}(v) 1_{[u_3, 1]}(s_2) \pi(dv) du_3 = \\
&= \pi(C_1 \cap C_2) \min(s_1, s_2) \sum_{j_2=1}^2 B_{j_2} b_{j_2}^2 = \pi(C_1 \cap C_2) \min(s_1, s_2).
\end{aligned}$$

Приближенные значения остальных функционалов можно вычислить на основе уже полученных результатов.

Приведем примеры использования предложенной формулы.

Положим далее $\pi(R)=1$ и $C=R$, что соответствует случаю компенсированного пуассоновского процесса с параметром $\lambda=1$, который обозначим $\tilde{P}(t)=P(t)-t\pi(R)$, где $P(t)$ – это процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda=\pi(R)$.

Коэффициенты $A_1, A_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, B_1, B_2, b_1, b_2$ в предложенной формуле могут быть вообще говоря и комплексными, но в данном случае, для удобства проведения вычислений, выберем их действительными:

$$A_1 = \frac{4}{3}, A_2 = -\frac{1}{3}, a_{11} = \frac{1}{4}, a_{12} = \frac{3}{4}, a_{21} = -\frac{1}{2}, a_{22} = \frac{3}{2},$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right), B_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right), b_1 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}), b_2 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$$

Положим

$$G[t, \tilde{P}(t)] = \mathbb{E}[\sin(\tilde{P}(t))].$$

После подстановки данной функции и указанных параметров в приближенную формулу получим:

$$J(G) = t \left(\cos\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right] \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\cos \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) = -0.143197t$$

Функционал данного вида можно вычислить точно, а также с применением метода Монте-Карло. Здесь и далее, при вычислении результатов с помощью метода Монте-Карло, будем полагать, что количество траекторий, использованных для приближенного значения функционала, не менее 10000, что связано с тем, что при меньшем количестве траекторий точность метода сильно падает. В таблице также для метода Монте-Карло приводятся по три значения, полученные при различных розыгрышах траекторий с целью обратить внимание читателя на отсутствия стабильности вычисленных значений даже при таком, достаточно большом, количестве розыгрышей. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты вычислений для $\mathbb{E}[\sin(\tilde{P}(t))]$

t	Точное значение	Приближенное значение	
		Формула (2)	Метод Монте-Карло
0.001	-0.000158456	-0.000143197	0.0000103165 0.0000945095 -0.000410649
0.01	-0.00157802	-0.00143197	-0.000101331 -0.00127803 -0.00102422
0.1	-0.01514	-0.0143197	-0.0173112 -0.0129199 -0.0186688

Положим далее

$$G[t, \tilde{P}(t)] = \mathbb{E}[\cos(t + \tilde{P}^2(t))].$$

Приближенная формула в данном случае примет вид:

$$J(G) = 1 - 0.616548t - 0.818281t^2 + 0.325046t^3$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты вычислений для $\mathbb{E}[\cos(t + \tilde{P}^2(t))]$

t	Точное значение	Приближенное значение	
		Формула (2)	Метод Монте-Карло
0.001	0.999540	0.999383	0.999678 0.999632 0.999495
0.01	0.995397	0.993753	0.994804 0.996293 0.994456
0.1	0.950994	0.930487	0.950520 0.948062 0.947834

В представленной работе предложена формула для приближенного вычисления математических ожиданий от функционалов по стохастической мере Пуассона. Показано, что формула точна для моментов третьей степени. Приведены примеры использования полученной формулы. В дальнейших исследованиях данная формула будет применена для оценки математических ожиданий от решения уравнения (1).

Библиографические ссылки

1. Гухман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1975. Т. 3.
2. Applebaum D. Levy processes and stochastic calculus. Cambridge University Press, 2009.
3. Zherelo A.V. Method of Functional Integrals Calculation with Respect to a Measure Generated by Solution of One Stochastic Differential Equation // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2005. Vol. 8, № 1. P. 102 – 105.
4. Zherelo A. On convergence of the method based on approximately exact formulas for functional polynomials for calculation of expectations of functionals to solutions of stochastic differential equations // Monte Carlo Methods and Appl. 2013. Vol. 19. P. 183 – 199.
5. Zherelo A.V. Approximate Calculation of Mathematical Expectations on Processes with a Drifts // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2015. Vol. 18, № 2. P. 207 – 214.