УДК 336.76

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHCAD ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР ПО МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

В. Г. Галкина[1], И. В. Зайцева[2]

[1] Военно-морская академия им. Адмирала Флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова, набережная лейтенанта Шмидта, д. 17
199162, г. Санкт-Петербург, Россия
[2] Российский государственный гидрометеорологический университет, ул. Воронежская, д. 79, лит. А
192007, г. Санкт-Петербург, Россия, i.zaitseva@rshu.ru

Предлагается описание применения системы MathCAD для приближенного вычисления площадей фигур, заданных в декартовой и полярной системах координат с помощью метода Монте-Карло в рамках изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Целью работы является разработка алгоритма вычисления площадей фигур и методических рекомендаций для выполнения заданий по применению метода Монте-Карло в системе MathCAD. В статье приведены примеры решения задач вычисления площади фигуры, ограниченной замкнутой линией, в декартовой и полярной системах координат и решения в системе MathCAD с использованием приближенных вычислений по методу Монте-Карло.

Ключевые слова: метод Монте-Карло; приближенные вычисления; площади фигур; система MathCAD.

USING MATHCAD TO CALCULATE THE AREAS OF SHAPES USING THE MONTE CARLO METHOD

V. G. Galkina[1], I. V. Zaitseva[2]

[1]Naval Academy named after Admiral of the Fleet of the Soviet Union N.G. Kuznetsov, Lieutenant Schmidt Embankment, 17
199162, St. Petersburg, Russia
[2]Russian State Hydrometeorological University, Voronezhskaya str., 79, lit. A
192007, St. Petersburg, Russia, i.zaitseva@rshu.ru

A description of the use of the MathCAD system for approximate calculation of the areas of figures specified in Cartesian and polar coordinate systems using the Monte Carlo method is proposed as part of the study of the discipline “Probability Theory and Mathematical Statistics”. The purpose of the work is to develop an algorithm for calculating the areas of figures and methodological recommendations for performing tasks on the application of the Monte Carlo method in the MathCAD system. The article provides examples of solving the problems of calculating the area of a figure bounded by a closed line in the Cartesian and polar coordinate systems and solving in the MathCAD system using approximate Monte Carlo calculations.

Keywords: Monte Carlo method; approximate calculations; the area of the figures; MathCAD system.

Пакет математических вычислений MathCAD можно использовать для изучения и освоения метода Монте-Карло в рамках изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» [9,10]. Вначале, следует отметить теоретические сведения необходимые для решения задач. При выполнении работ будет использован датчик случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0,x]$. Будем учитывать, что функция плотности равномерного распределения имеет вид $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & \text{если} \quad x\in[c,d] \\ 0, & \text{если} \quad x\notin[c,d]\end{cases}$, и график которой представлен на рис. 1.

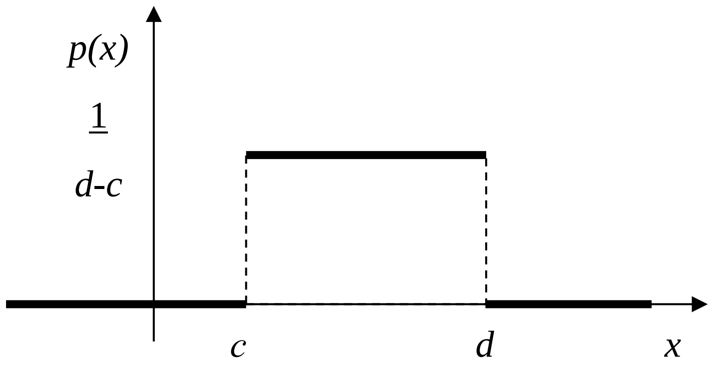


Рис. 1. График функции плотности равномерного распределения

Математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия $D(x)$ равномерного распределения вычисляются по формулам $M(x)=\dfrac{c+d}{2}$, $D(x)=\dfrac{(c-d)^2}{12}$. Если случайная величина равномерно распределена на отрезке $[0,a]$ (рис. 2), то она имеет плотность распределения:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & \text{если} \quad x\in[0,a] \\ 0, & \text{если} \quad x\notin[0,a]\end{cases}.$$

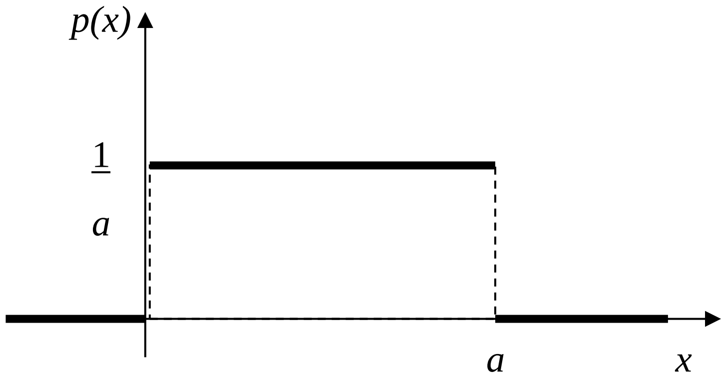


Рис. 2. График функции плотности равномерного распределения на отрезке $[0,a]$

Математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия $D(x)$ вычисляется по формулам [4] $M(x)=\frac{a}{2}$, $D(x)=\frac{a^2}{12}$.

Рассмотрим пример приближенного вычисления значения числа π, исходя из вычисления площади круга.

Учитывая, что площадь круга радиуса R лежащего целиком в квадрате со стороной $2R$ и площадью $S=4R^2$ равна $S_R=\pi R^2$, то $S_R \approx \frac{M}{N}S$, $\pi \approx 4\frac{M}{N}$, где N – общее число случайных точек квадрата $[-R,R]\times[-R,R]$, M – число случайных точек, попавших в круг радиуса R.

Для вычисления площади круга радиуса необходимо выполнить следующие действия [1-3].

1. Выбрать количество случайных точек, например, $N=100$.

2. С помощью генератора случайных, равномерно распределенных на отрезке $[0,x]$ чисел $\mathrm{rnd}(x)$, получить N равномерно распределенных случайных точек на отрезке длиной $2R\left(x_i := \mathrm{rnd}(2R), i=1,2,\ldots,N\right)$, оценить среднее значение и дисперсию выбранной части последовательности x_i.

В качестве значений случайных ординат y_i выбрать следующие N значений последовательности случайных чисел $j:=1\ldots N$, $y_j := x_{j+N}$.

3. Вычислить количество M случайных точек с координатами (x_i, y_i), лежащих внутри круга S_R, для чего проверить выполнение условия

$$(x_i+R)^2+(y_i-R)^2<R^2,$$

$$(x_i+R)^2+(y_i-R)^2<R^2.$$

Если это условие выполняется, то точка попадает в круг S_R.

4. Построить окружность радиуса R, вписанную в квадрат $[-R,R]\times[-R,R]$, нанести на этот квадрат выбранные случайные точки с координатами (x_i, y_i).

Использовать параметрическое задание окружности

$$\begin{cases} x = R + R\cos\varphi, \\ y = R + R\sin\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Результат вычисления приближенного значения числа π, исходя из вычисления площади круга радиуса $R = 33$ R=33 в системе MathCAD представлен на рис. 3.

$$\mathbf{R := 33} \qquad \mathbf{N := 200} \qquad \mathbf{i := 1..2\cdot N}$$

$$\mathbf{z_i := rnd(R\cdot 2)} \qquad \mathbf{mean(z) = 31.482} \qquad \mathbf{var(z) = 363.79}$$

$$\mathbf{4\cdot R\cdot \frac{R}{12} = 363}$$

$$\mathbf{j := 1..N} \qquad \mathbf{x_j := z_j} \qquad \mathbf{y_j := z_{j+N}}$$

$$\mathbf{m_j := if\left[(x_j - R)^2 + (y_j - R)^2 < R^2, 1, 0\right]}$$

$$\mathbf{M := \sum_j m_j} \qquad \mathbf{M = 155}$$

$$\mathbf{S := \frac{M}{N}\cdot(2\cdot R)^2} \qquad \mathbf{S = 3.376\cdot 10^3} \qquad \mathbf{pi := \frac{S}{R^2}} \qquad \mathbf{pi = 3.1}$$

$$\mathbf{\pi = 3.142}$$

$$\mathbf{\phi := 0, .1..2\cdot\pi}$$

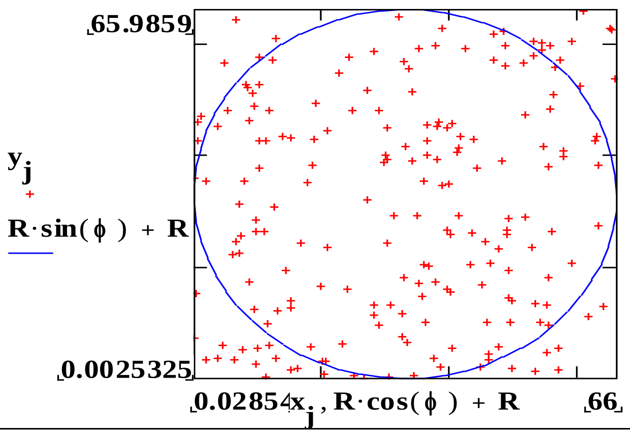


Рис. 3. Вычисление приближенного значения числа π

Рассмотрим вычисление приближенно по методу Монте-Карло площади фигуры, ограниченной замкнутой линией, заданной в полярных координатах: $\rho^2 = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi$. Для решения необходимо выполнить следующую последовательность действий [5-8]:

1. Построить график кривой, заданной в полярных координатах, используя формулы перехода от полярных координат к декартовым $x=\rho(\varphi)\cos\varphi, y=\rho(\varphi)\sin\varphi, \varphi\in\left[0,2\pi\right]$. Определить размеры $\left[-a,a\right]\times\left[-b,b\right]$ прямоугольника, в котором лежит фигура S, ограниченная заданной замкнутой линией.

Пункты 2 и 3 выполнить по аналогии с предыдущим примером.

5. Вычислить количество M случайных точек, лежащих внутри фигуры S. Для этого нужно проверить выполнение условия $r_i < \rho(\varphi_i)$, где (r_i, φ_i) – полярные координаты случайной точки $\left(x_i, y_i\right)$;

$$r_i = \sqrt{x_i^{\,2} + y_i^{\,2}};$$

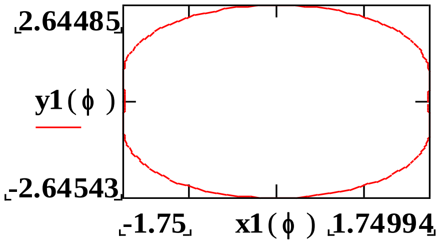
$$\varphi_i = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y_i}{x_i}, & \text{если} \quad x_i > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y_i}{x_i}, & \text{если} \quad x_i < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x_i = 0 \quad \text{и} \quad y_i > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x_i = 0 \quad \text{и} \quad y_i < 0 \\ 0, & \text{если} \quad x_i = 0 \quad \text{и} \quad y_i = 0 \end{cases}.$$

Результат вычисления приближенного значения площади фигуры, ограниченной замкнутой линией, заданной в полярных координатах $\rho^2 = 3\cos^2\varphi + 7\sin^2\varphi$ в системе MathCAD представлен на рис. 4.

$$\rho(\phi) := \sqrt{3\cdot\cos(\phi)^2 + 7\cdot\sin(\phi)^2} \qquad N := 179 \qquad i := 1..N$$

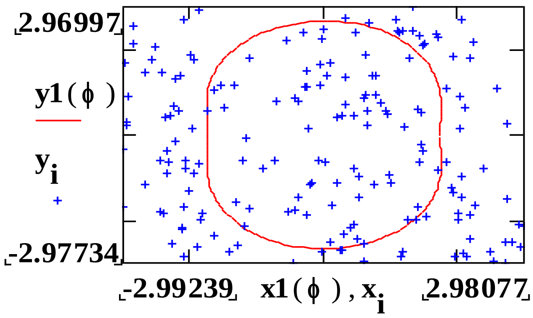
$$x1(\phi) := \rho(\phi)\cdot\cos(\phi) \qquad y1(\phi) := \rho(\phi)\cdot\sin(\phi)$$

$$\phi := 0, .05 .. 2\cdot\pi \qquad a := 3 \qquad b := 3$$



$$x_i := rnd(2\cdot a) \qquad y_i := rnd(2\cdot b)$$

$$x_i := x_i - a \qquad y_i := y_i - b$$



$$\phi\phi_i := if\left(x_i>0, atan\left(\frac{y_i}{x_i}\right), if\left(x_i<0, atan\left(\frac{y_i}{x_i}\right)+\pi, if\left(y_i>0, \frac{\pi}{2}, \pi\cdot\frac{3}{2}\right)\right)\right)$$

$$\rho\rho_i := \sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2} \qquad m_i := if(\rho\rho_i<\rho(\phi\phi_i), 1, 0) \qquad M := \sum_i m_i \qquad M = 77$$

Проверка

$$S := \frac{M}{N}\cdot(a\cdot b\cdot 4) \qquad ss := \frac{\pi}{2}\cdot(3+7) \qquad ss = 15.708$$

$$S = 15.486 \qquad s := \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi\cdot 2} \rho(\phi)^2\, d\phi \qquad s = 15.708$$

Рис. 4. Вычисление приближенного значения площади фигуры, ограниченной замкнутой линией, заданной в полярных координатах

Таким образом, приведенные примеры решения заданий с помощью метода Монте-Карло и полученные результаты вычислений показывают, что в процессе изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» сложные математические вычисления можно выполнить в пакете MathCAD.

Библиографические ссылки

1. *Halton J.H.* A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo Method. SIAM Rev., (1970) 12, № 1. P. 1–63.

2. *Бинер К.* Методы Монте-Карло в статистической физике. М. : Мир, 1982.

3. *Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А.* Метод статистических испытаний и его реализация на цифровых вычислительных машинах. М. : 196.

4. *Гмурман В. Е.* Т еория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студентов вузов. 9. изд., стер. М. : Высш. шк., 2003.

5. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М. : Наука, 1975.

6. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. – М. : Наука, 1982.

7. *Соболь И.М.* Метод Монте-Карло. М. : Наука, 1968.

8. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. – М .: Наука, 1973.

9. *Тарасенко Е. О., Зайцева И. В., Корнеев П. В., Гладков А. В.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие (курс лекций). Ставрополь : СКФУ, 2018.

10. *Фадеев С.Н., Зайцева И.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Санкт-Петербург : РГГМУ, 2021.