

УДК 519.24

**СЕМИИНВАРИАНТНЫЙ ПОДХОД К НАХОЖДЕНИЮ
ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ
СЕМИВАРИОГРАММЫ
ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА**

Т. В. Цеховая

*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Беларусь, Tsekhavaya@bsu.by*

Рассмотрена непараметрическая оценка семивариограммы гауссовского стационарного случайного процесса с дискретным временем. Получены выражения для первых двух моментов и семиинвариантов высших порядков исследуемой статистики. При условии, что ряд из семивариограмм абсолютно сходится, исследовано асимптотическое поведение ковариации, дисперсии и семиинвариантов высших порядков оценки семивариограммы. Найдено предельное распределение изучаемой статистики.

Ключевые слова: случайный процесс; оценка семивариограммы; кумулянт; асимптотическое распределение.

**SEMI-INVARIANT APPROACH TO FINDING
THE LIMITING DISTRIBUTION OF THE SEMIVARIOGRAM
ESTIMATOR OF GAUSSIAN RANDOM PROCESS**

T. V. Tsekhavaya

*Belarusian State University, Nezavisimosti Av., 4,
220030, Minsk, Belarus, Tsekhavaya@bsu.by*

A nonparametric estimator of the semivariogram of a Gaussian stationary random process with discrete time is considered. Expressions for the first two moments and higher order cumulants of the studied statistics are obtained. The asymptotic behavior of the variance, covariance and the higher orders cumulants is investigated. The limiting distribution of the semivariogram estimator is determined.

Keywords: stationary stochastic process; semivariogram estimator; cumulant; asymptotic distribution.

В настоящее время для решения многих прикладных задач прогнозирования применяется геостатистический подход, в частности, метод кригинг. В основе кригинга лежит семивариограмма. В связи с этим актуальны задачи исследования свойств семивариограммы, а также построения и изучения оценок этой функции.

Результаты исследований свойств семивариограммы изложены, например, в работах [1, 2]. Статистические свойства различных оценок

семивариограмм случайных процессов исследовались, например, в [1, 3]. Данная статья является продолжением исследований [4].

Рассмотрим случайный процесс

$$Z(t) = \sum_{i=1}^p \beta_i X_i(t), \quad (1)$$

где $t \in Z$, $p \in N$, β_i – константы, такие что

$$\sum_{i=1}^p \beta_i^2 < \infty,$$

$X_i(t)$ – гауссовские стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием $EX_i(t) = 0$, $t \in Z$, ковариационными функциями $R_i(t)$, $t \in Z$.

Будем полагать, что взаимные ковариационные функции $R_{ij}(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in Z$, случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$, $i, j = \overline{1, p}$, $i \neq j$, удовлетворяют равенству $R_{ij}(t_1, t_2) = E[X_i(t_1)X_j(t_2)] = 0$.

В [4] найдены выражения для ковариационной функции $R_Z(t)$ и семивариограммы $\gamma_Z(t)$ гауссовского стационарного процесса $Z(t)$ вида (1):

$$R_Z(t) = \sum_{i=1}^p \beta_i^2 R_i(t), \quad t \in Z,$$

$$\gamma_Z(t) = \sum_{i=1}^p \beta_i^2 (R_i(0) - R_i(t)), \quad t \in Z.$$

Пусть $Z(1), \dots, Z(n)$ – n последовательных наблюдений за процессом $Z(t)$. В качестве оценки семивариограммы рассмотрим статистику вида

$$\hat{\gamma}_Z(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{t=1}^{n-h} (Z(t+h) - Z(t))^2, \quad (2)$$

$h = 0, \dots, n-1$. Положим $\hat{\gamma}_Z(-h) = \hat{\gamma}_Z(h)$, $h = 0, \dots, n-1$ и $\hat{\gamma}_Z(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Исследуем статистические свойства оценки (2) с использованием единого семиинвариантного подхода [3].

По свойствам смешанных семиинвариантов [5]

$$\text{cum}\{\hat{\gamma}_Z(h)\} = E\{\hat{\gamma}_Z(h)\} = \gamma_Z(h).$$

Отсюда заключаем, что статистика (2) является несмещенной оценкой для семивариограммы $\gamma_Z(h)$.

Далее при исследовании асимптотических свойств семиинвариантов порядка p , $p \geq 2$, оценки $\hat{\gamma}_Z(h)$ и ее предельного распределения будем предполагать, что h выбирается фиксированным, $h = 0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 1. Если имеет место соотношение

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |R_j(t)| < \infty, \quad (3)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - h^-) \text{cov} \{ \hat{\gamma}_Z(h_1), \hat{\gamma}_Z(h_2) \} = \sum_{j=0}^q \sum_{p=0}^q \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_{jpr}(h_1, h_2), \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - h) D \{ \hat{\gamma}_Z(h) \} = \sum_{j=0}^q \sum_{p=0}^q \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_{jpr}^0(h),$$

$$h^- = \min(h_1, h_2), \quad h, h_1, h_2 = 0, \dots, n-1,$$

$$\begin{aligned} J_{jpr}(h_1, h_2) = & \frac{1}{2} \beta_j^2 \beta_p^2 (R_j(r) R_p(r) - 2R_j(r) R_p(r - h_2) + \\ & + R_j(r - h_2) R_p(r - h_2) - 2R_j(r) R_p(r + h_1) + 2R_j(r) R_p(r + h_1 - h_2) + \\ & + 2R_j(r - h_2) R_p(r + h_1) - 2R_j(r - h_2) R_p(r + h_1 - h_2) + \\ & + R_j(r + h_1) R_p(r + h_1) - 2R_j(r + h_1) R_p(r + h_1 - h_2) + \\ & + R_j(r + h_1 - h_2) R_p(r + h_1 - h_2)), \\ J_{jpr}^0(h) = & \frac{1}{2} \beta_j^2 \beta_p^2 (4R_j(r) R_p(r) - 2R_j(r) R_p(r - h) + R_j(r - h) R_p(r - h) - \\ & - 2R_j(r) R_p(r + h) + 2R_j(r - h) R_p(r + h) - 2R_j(r - h) R_p(r) + \\ & + R_j(r + h) R_p(r + h) - 2R_j(r + h) R_p(r)), \end{aligned}$$

$R_j(t)$ – ковариационные функции случайных процессов $X_j(t)$.

Доказательство. Согласно [5]

$$\text{cov} \{ \hat{\gamma}_Z(h_1), \hat{\gamma}_Z(h_2) \} = \text{cum} \{ \hat{\gamma}_Z(h_1), \hat{\gamma}_Z(h_2) \}.$$

Далее рассуждаем аналогично доказательству теоремы 1 [3]. Используя смешанные семиинварианты и неразложимые разбиения [5], учитывая найденные в работе [6] выражения для моментов второго порядка оценки $\hat{\gamma}_Z$, получим требуемый результат.

Следствие. Из теоремы 1 вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\{\hat{\gamma}_Z(h)\} = 0, \quad h = 0, \dots, n-1.$$

В силу несмещенности (2) и вышеуказанного следствия получаем, что $\hat{\gamma}_Z(h)$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для семивариограммы $\gamma_Z(h)$.

Теорема 2. Пусть справедливо (3). Тогда для оценки $\hat{\gamma}_Z(h)$, задаваемой равенством (2), существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cum}\{\hat{\gamma}_Z(h_1), \dots, \hat{\gamma}_Z(h_p)\} = 0, \quad (5)$$

$$h_j = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, p, \quad p > 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство. Используя свойства смешанных семиинвариантов из [5], на основании теоремы 2 [3] получаем (5).

Найдем асимптотическое распределение оценки $\hat{\gamma}_Z(h)$.

Теорема 3. При выполнении условия (3) оценка $\hat{\gamma}_Z(h)$, задаваемая равенством (2), имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием, равным $\gamma_Z(h)$, и предельной ковариационной структурой, удовлетворяющей соотношению (4).

Доказательство. Ранее показано, что $\text{cum}\{\hat{\gamma}_Z(h)\} = \gamma_Z(h)$ и ковариация построенной оценки (2) семивариограммы удовлетворяет предельному равенству (4). Поскольку справедливо соотношение (5), то окончательное доказательство теоремы следует из теоремы 2 [5].

Библиографические ссылки

1. Cressie N. Statistics for Spatial Data. New York: Wiley Classics Library, 2015.
2. Цеховая Т.В. Свойства внутренне стационарных случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика, 2017. № 1. С. 28–33.
3. Цеховая Т.В. Асимптотическое распределение оценки семивариограммы гауссовского случайного процесса // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 89–95.
4. Цеховая Т.В., Мармузевич Д.А. Моменты первых двух порядков оценки семивариограммы случайного процесса // Информационные системы и технологии: материалы междунар. науч. конгресса по информатике. / Белорус. гос. ун-т; редкол.: С. В. Абламейко (гл. ред.) [и др.]. Минск : БГУ, 2022. С. 204–209.
5. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М. : Мир, 1980.
6. Цеховая Т.В., Кисель А.Ю. Асимптотическое поведение моментов второго порядка оценки семивариограммы гнездовой структуры // Актуальные вопросы современной информатики: материалы XI Всероссийской научно-практической конференции / Гос. образоват. учреждение высшего образования Московской области "Государственный социально-гуманитарный университет", Коломна, 2021. С. 175–181.