ИНТЕГРАЛЫ ИТО С УСТОЙЧИВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Н. Н. Труш

*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Беларусь, TroushNN@bsu.by*

Определяются устойчивые случайные величины, приводится их явное представление и алгоритм моделирования. Рассматривается процесс устойчивого движения Леви и его моделирование. Определяется и исследуется интеграл Ито для процесса устойчивого движения Леви.

Ключевые слова: случайные процессы; интеграл Ито; устойчивое распределение; процесс Леви.

ITO INTEGRALS WITH STABLE PROCESSES

N. N. Troush

*Belarusian State University, Nezavisimosti, Av. 4,
220083, Minsk, Belarus, TroushNN@bsu.by*

Stable random variables are determined, their explicit representation and modeling algorithm are given. The process of stable Levy motion and its modeling are considered. The Ito integral for the process of stable Lévy motion is defined and studied.

Keywords: random processes; Ito integral; stable distribution; Levy process.

До недавнего времени основные концепции теории финансов основывались на предположении, что доходы от активов подчиняются нормальному распределению. Однако известно, что характерные для распределения доходов эмпирические наблюдения имеют тяжелые хвосты, асимметрию и куртозис отличный от нормального распределения. Французский математик Б. Мандельброт в 1963 г. и американский экономист Ю. Фама в 1965 г. предложили в качестве альтернативных использовать устойчивые распределения. Теория таких распределений была основана в 1920 г. французским математиком П. Леви. В настоящее время, хотя и существуют другие альтернативные распределения для гаусовского, достаточно подходящим для исследования финансовых активов все же являются устойчивые распределения. Это подтверждается и обобщенной центральной предельной теоремой, согласно которой, если существуют предельные распределения нормированных и центрированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, то они обязательно являются устойчивыми.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Определение 1. Случайная величина $X = X(\omega), \omega \in \Omega$, называется устойчивой, если существуют действительные последовательности $c_n, n \in N$ и $d_n, n \in N$, $c_n > 0$, такие что

$$X_1 + \ldots + X_n \overset{D}{=} c_n X + d_n, \tag{1}$$

где $X_1, \ldots, X_n$ являются независимыми в совокупности копиями X.

Преобразование интегралов в формуле Леви-Хинчина дает различные формы для характеристической функции устойчивой случайной величины.

Теорема 1. Действительная случайная величина X является устойчивой тогда и только тогда, когда существуют $\sigma > 0, -1 \le \beta \le 1, 0 < \alpha \le 2$ и $\mu \in R$ такие, что для любых $t \in R$ ее характеристическая функция имеет вид:

1. $\varphi_X(t) = \exp\left[i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right]$, для $\alpha = 2$;
2. $\varphi_X(t) = \exp\left[i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right]$, для $\alpha \ne 1, 2$;
3. $\varphi_X(t) = \exp\left[i\mu t - \sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \lg(|t|) \right) \right]$, для $\alpha = 1$.

Данная параметризация для характеристической функции $\varphi_X(t)$, называемая канонической, является наиболее употребляемой. То, что случайная величина X является устойчивой, обозначают $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Заметим, что если $\sigma = 1, \mu = 0$, то обозначаем $X \sim S_{\alpha,\beta}$.

Следствие 1. Для независимых копий X_1, X_2 случайной величины $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ и неотрицательных постоянных a, b имеем соотношение

$$a^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + b^{\frac{1}{\alpha}} X_2 \overset{D}{=} (a+b)^{\frac{1}{\alpha}} X,$$

которое позволяет строить аддитивные случайные меры и стохастические интегралы подобно как для винеровского процесса.

Теорема 2. Если $\alpha \in (0,1)$ или $\alpha \in (1,2)$ и $\beta \in [-1,1]$, $V \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. V имеет равномерное распределение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $W \sim E(1)$, где W имеет экспонциальное распределение с параметром 1, причем случайные величины V и W независимы, то случайная величина

$$X = D_{\alpha,\beta} \frac{\sin(\alpha(V + C_{\alpha,\beta}))}{(\cos(V))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha,\beta}))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha},$$

$$D_{\alpha,\beta} = \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \right) \right) \right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

имеет α -устойчивое распределение, т. е. $X \sim S_{\alpha,\beta}$.

Таким образом, случайная величина $S_{\alpha,\beta}$ имеет явное представление.

Используем эту теорему для моделирования устойчивой случайной величины $S_{\alpha,\beta}$.

Алгоритм 1. Процедура генерирования реализации $\bar{X}$ случайной величины X с распределением $S_{\alpha,\beta}$ состоит в следующем:

$$k_1 = \mathrm{rand}(\ );$$

$$k_2 = \mathrm{rand}(\ );$$

$$\bar{V} = -\frac{\pi}{2} + \pi(0{,}5 + k_1) / 2^{15};$$

$$\bar{W} = -\lg\left((0{,}5 + k_2) / 2^{15}\right);$$

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha};$$

$$D_{\alpha,\beta} = \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right) \right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

а далее принимаем

$$\bar{X} = D_{\alpha,\beta} \frac{\sin\left(\alpha\left(\bar{V} + C_{\alpha,\beta}\right)\right)}{\left(\cos\left(\bar{V}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos\left(\bar{V} - \alpha\left(\bar{V} + C_{\alpha,\beta}\right)\right)}{\bar{W}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Замечание 1. Если $\bar{X}$ является реализацией случайной величины $X \sim S_{\alpha,\beta}$, то

$$\bar{Y} = \sigma\bar{X} + \mu$$

является реализацией случайной величины

$$Y = \sigma X + \mu \sim S_{\alpha}(\sigma,\beta,\mu).$$

Определение 2. Действительный случайный процесс $L_{\alpha,\beta}(t), t \geq 0$ называется $\alpha -$устойчивым движением Леви, если выполнены следующие условия:

1. $L_{\alpha,\beta}(0) \overset{\text{п.н.}}{=} 0$;

2. $L_{\alpha,\beta}(t)$ – процесс со стационарными независимыми приращениями;

3. Приращения $L_{\alpha,\beta}(t) - L_{\alpha,\beta}(s)$ имеет устойчивое распределение, т. е.

$$L_{\alpha,\beta}(t) - L_{\alpha,\beta}(s) \sim S_{\alpha}\left((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0 \right)$$

для всех $s, t,\ 0 \leq \mathrm{s} < \mathrm{t} < \infty$.

Замечание 2. Процесс броуновского движения $B(t), t \geq 0$ является частным случаем α-устойчивого движения Леви, т. е. $L_{2,0}(t) \overset{D}{=} \sqrt{2}B(t), t \geq 0.$

Алгоритм 2. Определим сетку $t_i = i\tau, i = 0, I$ на отрезке $[0,T]$, где I – фиксированное натуральное число, а $\tau = \dfrac{T}{I}$. Моделирование траектории

$\overline{L^{\tau}_{\alpha,\beta}}(\omega_0, t), t \in [0,T]$ α-устойчивого движения Леви для фиксированного $\omega_0 \in \Omega$ можно реализовать следующим образом

$$\overline{L^{\tau}_{\alpha,\beta}}(\omega_0, t_i) = \overline{L^{\tau}_{\alpha,\beta}}(t_{i-1}) + \tau^{\frac{1}{\alpha}} \overline{X}_i,$$

где $\overline{X}_i$ является реализацией случайной величины $X_i \sim S_{\alpha,\beta}$, $i = \overline{1, I}$.

Рассмотрим стохастический интеграл

$$I_{\alpha,\beta}(X) = \int_0^T X(t) dL_{\alpha,\beta}(t), \qquad (2)$$

где $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ означает случайный кадлаг процесс. В этом случае интеграл нужно вычислять для процесса $\{X(t-)\}$, т. е. процесса с непрерывными траекториями.

С прикладной точки зрения интересно также рассмотреть процесс

$$Y_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^t X(s) dL_{\alpha,\beta}(s), \; t \geq 0. \qquad (3)$$

Аналогично, как и в случае броуновского движения, основным является определение конечных интегральных сумм и их сходимость к соответствующему интегралу.

Рассмотрим конструкции соответствующих интегральных сумм для α-устойчивых аддитивных случайных мер.

Действительный случайный процесс $X(t), t \geq 0$ называется простым, если существует разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$$

полуоси $[0, \infty)$ и такое, что $X(t) = X(t_i), t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \ldots$.

Также будем предполагать, что $X(t)$ $\mathcal{F}_t$ – измерим, при любом t и

$$E \int_0^{\infty} |X(t)|^2 dt < \infty.$$

Для простого процесса $X(t)$ положим

$$\int_0^{\infty} X(t) dL_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X(t_i) \left(L_{\alpha,\beta}(t_{i+1}) - L_{\alpha,\beta}(t_i) \right).$$

Это выражение для винеровского процесса Ито взято за основу построения стохастического интеграла.

Будем предполагать, что случайный процесс $X(t),\, t\in\left[0,T\right]$ является измеримым и

$$E\left(\int_0^T X^2(\omega,t)dt\right)=\int_\Omega\left(\int_0^T X^2(\omega,t)dt\right)d\omega<\infty.$$

Для построения интеграла Ито $L_{\alpha,\beta}(X)$ для заданного процесса $X(t),\, t\in\left[0,T\right]$ достаточно выбрать произвольную последовательность простых процессов $X_n(t),\, n=1,2,...$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\int_0^T\left(X(t)-X_n(t)\right)^2dt\right]=0$$

и принять по определению

$$I_{\alpha,\beta}(X)=\lim_{n\to\infty}I(X_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^T X_n(t)dL_{\alpha,\beta}(t).$$

Замечание 2. Для кадлаг процессов интеграл Ито существует.

Для процессов, заданных на $\left[0,\infty\right)$, определение стохастического интеграла основывается на введении случайной меры $M_{\alpha,\beta}$ отрезка $[t_1,t_2]\in R$ с помощью следующей зависимости:

$$M_{\alpha,\beta}\left([t_1,t_2]\right)\overset{\text{опр}}{=}\left(t_2-t_1\right)^{\frac{1}{\alpha}}X,$$

где $X\sim S_{\alpha,\beta}$. Обратим внимание, что

$$M_{\alpha,\beta}\left([t_1,t_2]\right)\overset{D}{=}L_{\alpha,\beta}\left(t_2\right)-L_{\alpha,\beta}\left(t_1\right).$$

Получаем, что если имеем два произвольных непересекающихся интервала $[t_1,t_2]$, $[t_3,t_4]$ на R и две произвольные независимые копии X_1,X_2 случайной величины $X\sim S_{\alpha,\beta}$, тогда из следствия 1 имеем, что

$$M_{\alpha,\beta}\left([t_1,t_2]\bigcup[t_3,t_4]\right)=\left(\left(t_2-t_1\right)+\left(t_4-t_3\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}X\overset{D}{=}$$
$$\overset{D}{=}\left(t_2-t_1\right)^{\frac{1}{\alpha}}X_1+\left(t_4-t_3\right)^{\frac{1}{\alpha}}X_2=M_{\alpha,\beta}\left([t_1,t_2]\right)+M_{\alpha,\beta}\left([t_3,t_4]\right).$$

Отсюда вытекает аддитивность случайной меры на борелевских множествах.

Введем множество точек $t_i = i\tau;\ i = \overline{0,I}$ на отрезке $[0,T]$ с заданным I и $\tau = \frac{T}{I}$, а также последовательность независимых случайных величин X_i, причем $X_i \sim S_{\alpha,\beta};\ i = \overline{1,I}$.

Алгоритм 3. Апроксимацию интеграла (3) определим следующей интегральной суммой

$$\int_0^T X(t)dL_{\alpha,\beta}(t) \approx \sum_{i=0}^{I-1} X(t_i) M_{\alpha,\beta}\left([t_i, t_{i+1}\rangle\right) \overset{D}{=}$$

$$\overset{D}{=} \sum_{i=0}^{I-1} X(t_i)\left(L_{\alpha,\beta}(t_{i+1}) - L_{\alpha,\beta}(t_i)\right) \overset{\text{опр}}{=} \sum_{i=0}^{I-1} X(t_i)\tau^{\frac{1}{\alpha}} X_i.$$

Реализацию дискретизации стохастического процесса $Y_{\alpha,\beta} = \left\{Y_{\alpha,\beta}(\mathrm{t});\ t \in \left[\overline{0,T}\right]\right\}$ определим через интеграл (4).

Алгоритм 4. Дискретизацию процесса $Y_{\alpha,\beta}$ можно получить техникой суммирования приращений, т. е. применяя итерационный алгоритм

$$\overline{Y}^{\tau}_{\alpha,\beta;i+1} = \overline{Y}^{\tau}_{\alpha,\beta;i} + \tau^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \overline{X}_i$$

для $i = \overline{0,I}$, учитывая, что $\overline{Y}^{\tau}_{\alpha,\beta;0} = 0.$

При написании статьи использованы источники [1-6].

Библиографические ссылки

1. *Труш Н.Н.* Безгранично делимые и устойчивые случайные величины. Минск, 2022.

2. *Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Стохастические исчисления. ВИНИТИ, 1989.

3. *Klebanet F.C.* Introduction to Stochastic calculus with applications. London. ICP, 2005.

4. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М. : Наука, 1983.

5. *Janicki A., Izydorchyk A.* Komputerowe metody w modelowaniu stochastychnym. WNT, Warszawa, 2001.

6. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М. : Физматлит, 2005.