

КОНЦЕПЦИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ)

В. М. Романчак¹⁾, П. М. Лаппо²⁾

¹⁾ *Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь, email: romanchak@bntu.by*

²⁾ *Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, lapporm@bsu.by*

Представлено определение вероятности с точки зрения современной теории измерений. Показано, что вероятность можно интерпретировать как гомоморфизм из эмпирической системы в числовую систему. Новое определение вероятности является конструктивным. Также демонстрируется, что для измерения вероятности можно использовать шкалу интервалов и шкалу отношений, что подтверждает опыт применения модели Раша.

Ключевые слова: теория измерений; модель Раша; аксиоматическое определение вероятности; алгебра относительных событий.

CONCEPT OF RELATIVE PROBABILITY (DEFINITION OF PROBABILITY)

V. M. Romancchak¹⁾, P. M. Lappo²⁾

¹⁾ *Belarusian National Technical University, Nezavisimosti Av., 65, 220013, Minsk, Belarus, romanchak@bntu.by*

²⁾ *Belarusian State University, Nezavisimosti Av., 4, 220030, Minsk, Belarus, lapporm@bsu.by*

The text presents the definition of probability according to modern measurement theory. It explains that probability can be interpreted as a homomorphism from an empirical system to a numerical system. The definition is constructive and demonstrates that probability can be measured using the interval scale and the ratio scale, which confirms the experience of applying the Rasch model.

Keywords: measurement theory; Rasch model; axiomatic definition of probability; algebra of relative events.

Введение

Для сравнения вероятностей наступления различных событий используется количественная характеристика, известная как вероятность. Понятие вероятности является ключевым в теории вероятностей. Существует несколько подходов, объясняющих это понятие.

В современной математике вероятность задаётся аксиоматикой Колмогорова. Предполагается, что существует некоторое множество событий. Множество событий – это система подмножеств F некоторого множества Ω , которая замкнута относительно операций разности и суммы множеств. Множество событий является сигма-алгеброй, которая играет ключевую роль в аксиоматической теории вероятностей [1].

Вероятность не определяется непосредственно, а вводится как отображение P , заданное на множестве событий сигма-алгебры. Важнейшим свойством вероятности является аддитивность. Если события A и B несовместны (не пересекаются), то выполняется равенство.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Отображение P не является гомоморфизмом алгебры событий в алгебру действительных чисел, так как условие (1) может не выполняться для совместных событий.

Для того чтобы переопределить вероятность как гомоморфизм эмпирической системы в числовую, предлагается заменить алгебру событий на алгебру относительных событий. Концепция относительности, которую в начале прошлого века успешно использовали физики, нашла развитие в современной теории измерений [2-3]. В этой теории шкала представляет собой гомоморфизм эмпирической системы с отношениями в числовую систему с такими же отношениями. Изучение шкал измерений играет ключевую роль в математической теории измерений [4-5].

В данной работе предлагается концепция относительной вероятности, согласно которой рассматриваются только относительные события, а вероятность представляет собой шкалу измерения таких событий. В соответствии с принципом относительности, вероятность относительных событий не должна зависеть от способа измерения. Это означает эквивалентность любых двух шкал измерения одних и тех же событий. Концепция относительной вероятности является конструктивной, и, например, с ее помощью получено строгое обоснование модели Раша [6].

Алгебра событий с операцией симметрической разности

Симметрическая разность – это бинарная операция, которую обычно обозначают символом Δ . Если A и B — два множества, то симметрическая разность $A \Delta B$ состоит из элементов, которые находятся в A или в B , но не одновременно в обоих множества. Если считать, что множества A и B определены абстрактно, тогда результат операции $A \Delta B$ существует, но не определен.

Рассматривается произвольное множество Ω и система его подмножеств F , для которой выполняется условие: для любых A, B из F симмет-

ричная разность двух множеств $A \Delta B$ также принадлежит F . Элементы множества F будут называться *событиями*. Множество событий F с операцией симметрической разности образует абелеву группу, которая обозначена как (F, Δ) . Нейтральным элементом группы является пустое множество $\emptyset$: $A \Delta \emptyset = A$. Противоположным элементом к элементу A является он сам: $-A = A$. Таким образом, получена *алгебра событий*, которая является абелевой группой (F, Δ) .

Относительным событием будет называться отображение $v: F^2 \rightarrow F$, где $v(A, B) = A \Delta B$, где $(A, B) \in F^2$. Множество относительными событиями обозначено символом $v(F^2)$. Так как $A = v(A, \emptyset)$, то любое *событие* в аксиоматике Колмогорова можно считать относительным событием.

Отображение h группы (F, Δ) в группу $(R, +)$, которое удовлетворяет условиям гомоморфизм, не является строгим гомоморфизмом, так как группа (F, Δ) является абстрактной, а группа $(R, +)$ – конкретной. Поэтому алгебра событий (F, Δ) не может рассматриваться в качестве модели эмпирической системы. Покажем, что множество относительных событий $v(F^2)$ с операцией Δ является конкретной алгеброй.

Алгебра относительных событий

На множестве относительных событий $v(F^2)$ выполняются следующие условия:

V_1 . Для любой упорядоченной пары $(A, B) \in F^2$ существует единственная упорядоченная пара $(C, D) \in F^2$ с началом в точке $C \in F$, для которой выполняется равенство

$$v(A, B) = v(C, D);$$

V_2 . Для любых трех множеств $A, B, C \in F$ определена операция Δ :

$$v(A, B) \Delta v(B, C) = v(A, C). \quad (2)$$

Условия V_1 и V_2 аналогичны аксиомам аффинного пространства, в котором относительное событие $v(A, B)$ можно интерпретировать как *аффинный вектор*. Выражение (2) означает, что для любых векторов $v(A, B)$ и $v(B, C)$ определен соответствующий вектор $v(A, C)$, то есть операция Δ для векторов $v(A, B)$ и $v(B, C)$ в условии (1) определена конкретно. Из условия V_1 следует, что для произвольной пары (C, D) суще-

ествуется пара (B, D') с первым элементом B , такая что выполняется равенство $v(C, D) = v(B, D')$. В таком случае определена операция Δ для любых векторов: $v(A, B)\Delta v(C, D) = v(A, D)$.

Введенная таким образом операция Δ удовлетворяет требованиям ассоциативности. Кроме того, она обладает коммутативностью, и определен нулевой вектор, обозначаемый как $\emptyset$, который соответствует случаю $v(A, B) = \emptyset$ только при $A = B$. Тогда множество векторов $v(F^2)$ является носителем группы $(v(F^2), \Delta)$ – алгебры относительных событий.

Шкала измерения. Гомоморфизм h группы относительных событий $(v(F^2), \Delta)$ в группу действительных чисел $(R, +)$ можно определить как отображение, которое сохраняет конкретную операцию Δ относительных событий, $h: v(F^2) \rightarrow R$, $h = h(v(A, B))$. С учетом выражения (2) для любых $A, B, C \in F$ должно выполняться следующее равенство:

$$r(A, B) + r(B, C) = r(A, C), \quad (3)$$

где $r(A, B) = h(v(A, B))$, $r(A, B) \geq 0$. Отображение $r: F^2 \rightarrow R$ будет называться *рейтингом* [3].

Если существует строгий гомоморфизм между математической моделью эмпирической системы $(v(F^2), \Delta)$ и числовой системой $(R, +)$, то это решает проблему адекватной интерпретации вероятности; вероятность – это гомоморфное отображение алгебры относительных событий в числовую систему. Равенство (3) в дальнейшем будет называться – *уравнением совместности*.

Уравнение измерения и значения вероятностей

Для характеристики вероятности событий принято использовать *значения вероятности*. Из уравнения совместности (3) следует равенство

$$r(A, B) = r(A, O) - r(B, O), \quad (4)$$

где O – некоторое фиксированное событие множества F , которое будет называться *началом отсчета*. Вводятся обозначения $u(A) = \lambda_1 r(A, O)$, $u(B) = \lambda_1 r(B, O)$, где λ_1 – масштабный множитель, $\lambda_1 > 0$. Тогда любому событию A можно поставить в соответствие *значение вероятности* $u(A)$. В этом случае из равенства (4) следует выражение

$$\lambda_1 r(A, B) = u(A) - u(B). \quad (5)$$

где $A, B \in F$. Равенство (5) называется *уравнением измерения (по шкале интервалов)*. Уравнение измерения связывает значения рейтинга $r(A, B)$ и разность значений вероятностей $u(A)$ и $u(B)$. Предполагается, что значения рейтинга могут быть получены в результате измерения разности значений. Аналогично, из равенства (5) можно получить выражение

$$\lambda_2 r(A, B) = \ln(w(A) / w(B)), \quad (6)$$

которое является уравнением измерения *по шкале отношений*. В этом случае значения рейтинга находят в результате измерения отношения значений $w(A) / w(B)$.

Принцип относительности

Применение принципа относительности подразумевает, что значения рейтинга не зависят от выбранного способа измерения. Тогда из уравнений (5) и (6) следует равенство

$$u(A) - u(B) = \lambda \ln(w(A) / w(B)), \quad (7)$$

λ – произвольная постоянная. Выражение (7) является условием изоморфизма алгебраических структур: множество действительных чисел с операцией деления $(R^+, /)$ и множество действительных чисел с операцией вычитания $(R, -)$. Изоморфизм задает отношением эквивалентности на множестве шкал. Поэтому шкала интервалов и шкалы отношений эквивалентны. Таким образом, следствием принципа относительности является эквивалентность любых двух шкал измерения одних тех же событий.

Пример 1. В урне находятся белые, красные и черные шары, всего n шаров. Извлекается один шар наугад. События обозначены следующим образом: A – шар белого цвета, B – шар красного цвета, C – шар черного цвета, $A + B$ – шар белого или красного.

Тогда уравнение совместности (3) принимает вид

$$r(A + B, \emptyset) = r(A + B, B) + r(B, \emptyset),$$

кроме того выполняется равенство $r(A + B, B) = r(A, \emptyset)$. Пусть $u(\emptyset) = 0$ и $\lambda_1 = n$. В этом случае используя уравнение (5), получим равенство

$$u(A + B) = u(A) + u(B),$$

которое является условием аддитивности вероятностей несовместных событий A и B по Колмогорову.

Пример 2 (модель Раша). Выбирают из множества игроков любых трех шахматистов, которых обозначают как A, B, C . Рассматриваются теперь относительные события $v(A, B), v(A, C), v(C, B)$. Например, выражение $v(A, B)$ означает выигрыш игроком A в партии с игроком B .

Введем обозначение $n(A, B)$ – число побед игрока A над игроком B . Если условия совместности (3) выполняются, то рейтинги событий $r(A, B), r(A, C), r(B, C)$ определены корректно и на основании соотношения (7) должно выполняться равенство

$$\ln(n(B, A) / n(A, B)) = -\lambda(u(B) - u(A)). \quad (8)$$

Тогда с учетом формулы (7) получим $p_{AB} = 1 / (1 + \exp(-\lambda(u(A) - u(B))))$.

Эта модель совпадает моделью Раша [6], которую подтверждает статистика, отраженная в таблице Эло. Система рейтингов Эло используется для определения относительной силы игроков в соревновательных играх, таких как шахматы.

Таким образом, сформулировано определение вероятности. Получено подтверждение существования двух способов измерения вероятности.

Библиографические ссылки

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. МЦНМО, 2007.
2. *Barzilai J.* Notes on utility theory // 2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (IEEE Cat. No. 04CH37583). IEEE, 2004. Vol. 1. P. 1000–1005.
3. *Романчук В. М.* Измерение нефизической величины // Системный анализ и прикладная информатика. 2017. №. 4. С. 39–44.
4. *Boutmans M.* Measurement in economics // Philosophy of Economics. 2012. Vol. 13. P. 395–423.
5. *Пфанцагль И.* Теория измерений. М. : Мир, 1976.
6. *DeMars C.* Item response theory. Oxford University Press, 2010.