УДК 330.4

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ МНОГОФАКТОРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ПО ХИКСУ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

А. Ф. Проневич[1], Г. А. Хацкевич[2]

[1] *Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Ожешко 22, 230023, г. Гродно, Беларусь, pranevich@grsu.by*
[2] *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, ул. П.Бровки 6, 220013, г. Минск, Беларусь, g.a.khatskevich@gmail.com*

Получен общий вид динамических многофакторных производственных функций, которые учитывают нейтральный (расширенно нейтральный, полностью нейтральный) по Хиксу научно-технический прогресс. Установлены аналитические формы динамических многофакторных производственных функций, которые учитывают одновременно нейтральный и полностью нейтральным по Хиксу научно-технический прогресс. Полученные теоретические результаты могут быть использованы при моделировании и прогнозировании реальных производственных процессов.

Ключевые слова: многофакторная производственная функция; научно-технический прогресс; нейтральность по Хиксу; расширенная нейтральность по Хиксу; полная нейтральность по Хиксу.

ANALYTICAL FORMS OF MULTIFACTOR DYNAMIC PRODUCTION FUNCTIONS FOR MODELING HICKS-NEUTRAL TECHNOLOGICAL PROGRESS

A. F. Pranevich[1], G.A. Khatskevich[2]

[1] *Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ozheshko str., 230023, Grodno, Belarus, pranevich@grsu.by*
[2] *Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 Brovki str., 220013, Minsk, Belarus, g.a.khatskevich@gmail.com*

The article presents the concept of the Hicks neutrality (extended Hicks neutrality, complete Hicks neutrality) of technological progress for dynamic multifactorial production functions. General forms of dynamic multifactorial production functions with Hicks-neutral (extended Hicks-neutral, complete Hicks-neutral) technological progress are obtained. Analytical forms of dynamic multifactorial production functions are obtained, which take into account both Hicks neutral and complete Hicks neutral technological progress. The obtained theoretical results can be used in modeling and forecasting real production processes.

Keywords: multifactorial production function; technological progress; Hicks neutrality; extended Hicks neutrality; complete Hicks neutrality.

Введение. Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x,t), \tag{0.1}$$

где y – выпуск продукции, $x = (x_1,\ldots,x_n)$ есть вектор затрат производственных ресурсов, t – параметр времени из полуоткрытого числового луча $T = [0;+\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times T$, экономическая область $G \subset \mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n : x_i \geq 0, i = 1,\ldots,n\}$.

НТП занимает одно из важнейших мест среди факторов, определяющих экономическое и социальное развитие общества. При анализе экономического роста важную роль играет понятие *нейтральности НТП* (см., например, монографию [1]): неизменность (инвариантность) во времени некоторой взаимосвязи между экономическими показателями (средние и предельные производительности факторов производства, эластичности по факторам производства, предельная норма технического замещения, эластичность замещения).

В двухфакторном случае (капитал, труд) на основании понятия нейтральности были построены различные классификации НТП относительно заданных инвариантных соотношений между экономическими показателями (см., например, работы [2, 3, 4 – 6]). При этом основной задачей при использовании той или иной концепции нейтральности НТП на практике (моделировании процессов) является определение соответствующей этой концепции аналитический вид ПФ.

Одна из первых классификаций НТП была предложена профессором Дж.Р. Хиксом в 1932 году в книге «*Теория заработной платы*» [2] на основе связи между фондовооруженностью и предельной нормой замещения труда капиталом: «*Если рассматривать два фактора, «труд» и «капитал», то изобретения можно классифицировать в соответствии с тем увеличивают ли они, оставляют неизменным, либо уменьшают отношение предельной производительности капитала к предельной производительности труда по сравнению с ее первоначальным состоянием. Такие изобретения будем называть «трудосберегающими», «нейтральными» и «капиталосберегающими», соответственно*». Концепция нейтральности по Хиксу для динамических двухфакторных (n=2) ПФ получила применение для моделирования экономического роста и лежит в основе теории реального делового цикла (real business cycle), за разработку которой экономисты Ф.Э. Кидланд и Э. Прескотт были удостоены в 2004 году премии по экономике памяти Альфреда Нобеля.

Цель данной работы – предложить концепцию нейтральности по Хиксу в многофакторном случае $(n > 2)$ и установить аналитические виды динамических многофакторных ПФ, учитывающих нейтральный по Хиксу НТП. Статья продолжает и обобщает исследования авторов [6 – 10] по изучению аналитических форм динамических ПФ, обладающих заданными экономико-математическими характеристиками.

1. Нейтральный по Хиксу НТП. Будем говорить, что НТП является *нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* x_i *и* x_j, $i, j \in \{1,...,k\}$, $i \neq j$, $k \leq n$, если предельная норма технического замещения фактора производства x_i фактором x_j не изменяется с течением времени при фиксированном отношении рассматриваемых факторов, т.е.

$$MRTS_{x_i x_j}(f) = \text{const} \quad \text{при} \quad \frac{x_j}{x_i} = \text{const}. \tag{1}$$

Если условие нейтральности (1) выполняется при всех индексах $i, j = 1,\ldots,k$, $i \neq j$, $k \leq n$, то скажем, что НТП является *нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* $x_1,\ldots,x_k$, а при $k = n$ – просто *нейтральным по Хиксу*.

Основываясь на определении (1) заключаем, что при нейтральном по Хиксу относительно факторов производства x_i и x_j НТП функция $MRTS_{x_i x_j}$ не зависит от остальных факторов производства и от параметра t НТП, а является некоторой непрерывно дифференцируемой функцией h_{ij} от частного x_j / x_i, т.е. имеет место тождество

$$\frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{\partial_{x_j} f(x,t)} = h_{ij}\left(\frac{x_j}{x_i}\right). \tag{2}$$

Для нейтрального по Хиксу относительно факторов $x_1,\ldots,x_k$ НТП тождество (2) имеет место при каждом $i, j = 1,\ldots,k$, $i \neq j$, $k \leq n$.

Множество динамических ПФ, учитывающих нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства x_i и x_j, обозначим через $HN(i, j)$, а нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k$, будем обозначать через $HN(1,\ldots,k)$. При этом для нейтрального по Хиксу НТП будем использовать запись HN. Очевидно следующее включение $HN(i, j) \subset HN(1,\ldots,k) \subset HN$ при любом наборе $i, j \in \{1,\ldots,k\}$, $i \neq j$, $k \leq n$.

Для определения структуры многомерных динамических ПФ (0.1), учитывающих нейтральный по Хиксу НТП относительно части факторов производства, рассмотрим следующие логические случаи.

Случай $k = 2, n \geq 2.$ Без ограничения общности рассуждений будем считать, что индексы $i = 1,$ $j = 2$ и $n \geq 2.$ Тогда для определения аналитического вида динамической многофакторной ПФ (0.1), на основании тождества (2), получаем линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\partial_{x_1} f - h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \cdot \partial_{x_2} f = 0 \tag{3}$$

с характеристической системой

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-h(x_2 / x_1)} = \frac{dx_3}{0} = \ldots = \frac{dx_n}{0} = \frac{dt}{0}, \tag{4}$$

где h – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dx_2}{dx_1} = -h\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$ введя новую переменную $\xi = x_2 / x_1$ и разделяя переменные, перепишем в виде $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{d\xi}{h(\xi) + \xi} = 0.$ Откуда, получаем $\ln x_1 + \int \frac{d\xi}{h(\xi) + \xi} = \tilde{C}_1$ или $x_1 \psi(\xi) = C_1,$

где положено $\psi(\xi) = \exp \int \frac{d\xi}{h(\xi) + \xi}$ (по теореме Барроу ψ есть непрерывно дифференцируемая функция), $C_1 = \exp \tilde{C}_1,$ а $\tilde{C}_1$ – произвольная вещественная постоянная. Следовательно, характеристическая система (4) для дифференциального уравнения (3) имеет первый интеграл $x_1 \cdot \psi(x_2 / x_1) = C_1$ или $\Psi(x_1, x_2) = C_1,$ где Ψ есть линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция.

Из дифференциальных уравнений $\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_\tau}{0},$ $\tau = 3, \ldots, n,$ и $\frac{dx_1}{1} = \frac{dt}{0}$ находим функционально независимые первые интегралы $x_\tau = C_\tau,$ $\tau = 3, \ldots, n,$ и $t = C_2$ системы (4), где $C_\tau,$ $\tau = 2, \ldots, n,$ – произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Тогда общее решение уравнения в частных производных первого порядка (3) имеет вид

$$f(x, t) = \Phi(\Psi(x_1, x_2), x_3, \ldots, x_n, t), \tag{5}$$

где Φ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, а Ψ – линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция.

Верно и обратное утверждение: если динамическая многофакторная ПФ (0.1) представима в виде (5), то она учитывает НТП, нейтральный по Хиксу относительно факторов x_1 и x_2. Действительно, предельная норма технического замещения

$$MRTS_{x_1x_2}(f) = \frac{\partial_{x_1} f(x,t)}{\partial_{x_2} f(x,t)} = \frac{\partial_{x_1}\Phi(\Psi(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_n,t)}{\partial_{x_1}\Phi(\Psi(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_n,t)} =$$

$$= \frac{\partial_\zeta \Phi(\zeta,x_3,\ldots,x_n,t)_{|\zeta=\Psi(x_1,x_2)} \cdot \partial_{x_1}\Psi(x_1,x_2)}{\partial_\zeta \Phi(\zeta,x_3,\ldots,x_n,t)_{|\zeta=\Psi(x_1,x_2)} \cdot \partial_{x_2}\Psi(x_1,x_2)} =$$

$$= \frac{\partial_{x_1}\Psi(x_1,x_2)}{\partial_{x_2}\Psi(x_1,x_2)} = \frac{\partial_{x_1}(x_1\cdot\psi(x_2/x_1))}{\partial_{x_2}(x_1\cdot\psi(x_2/x_1))} = \frac{\psi(x_2/x_1)}{\psi'(x_2/x_1)} - \frac{x_2}{x_1},$$

а значит, верно тождество (2) при $h(\xi) = \psi(\xi)/\psi'(\xi) - \xi,$ где $\xi = x_2/x_1.$

Следовательно, динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает НТП, нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1 и x_2. Таким образом, верна следующая

Теорема 1. Динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1 и x_2 НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде (5).

Из теоремы 1 при $n = 2$ получаем представление динамической двухфакторной ПФ, учитывающей нейтральный по Хиксу НТП, полученное в работе [11].

Следствие 1. Динамическая двухфакторная ПФ $y = f(x_1,x_2,t)$ учитывает нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она представима в аналитическом виде $f(x_1,x_2,t) = \Phi(\Psi(x_1,x_2),t),$ где Φ – некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, а Ψ – линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция от x_1 и x_2.

Для однородной динамической двухфакторной ПФ верно [6]

Следствие 2. Однородная степени $q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ динамическая ПФ $y = f(x_1,x_2,t)$ учитывает нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она может быть представлена в форме $f(x_1,x_2) = A(t)\Theta(x_1,x_2),$ где Θ – некоторая неотрицательная однородная степени q непрерывно дифференцируемая функция, а строго возрастающая функция A такая, что $A(0) = 1,$ есть индекс НТП.

Отметим, что случай $q = 1$ рассмотрен, например, в работе [12].

Случай $k=3,\, n\geq 3.$ Если динамическая ПФ (0.1) учитывает НТП, нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1, x_2 и x_3, то по определению (1.1), существуют непрерывно дифференцируемые функции h_1, h_2 и h_3 такие, что имеют место тождества

$$\frac{\partial_{x_1} f(x,t)}{\partial_{x_2} f(x,t)} = h_1\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \qquad \frac{\partial_{x_1} f(x,t)}{\partial_{x_3} f(x,t)} = h_2\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial_{x_2} f(x,t)}{\partial_{x_3} f(x,t)} = h_3\left(\frac{x_3}{x_2}\right). \tag{6}$$

Из системы дифференциальных тождеств (6) следует, что функции h_1, h_2 и h_3 связаны функциональным уравнением

$$h_2(\xi) = h_1\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\cdot h_3(\zeta), \tag{7}$$

где введены переменные $\xi = x_3 / x_1$ и $\zeta = x_3 / x_2$.

Функциональное уравнение (7) есть обобщенное уравнение Коши относительно трех неизвестных функций, которое имеет единственное решение [13; 14]

$$h_1\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) = c_1\cdot\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^{\gamma}, \qquad h_2(\xi) = c_2\cdot\xi^{\gamma}, \qquad h_3(\zeta) = c_3\cdot\zeta^{\gamma}, \tag{8}$$

где c_1, c_3 и $c_2 = c_1\cdot c_3$ – произвольные вещественные числа, а число $\gamma\in\mathbf{R}$.

На основании тождеств (6) при условии (8) запишем и исследуем систему линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$Z_1(f) \equiv x_1^{\gamma}\cdot\partial_{x_1} f - c_1 x_2^{\gamma}\cdot\partial_{x_2} f = 0, \qquad Z_2(f) \equiv x_1^{\gamma}\cdot\partial_{x_1} f - c_2 x_3^{\gamma}\cdot\partial_{x_3} f = 0,$$

$$Z_3(f) \equiv x_2^{\gamma}\cdot\partial_{x_2} f - c_3 x_3^{\gamma}\cdot\partial_{x_3} f = 0.$$

Отметим, что линейный дифференциальный оператор первого порядка $Z_3 = (Z_2 - Z_1)/c_1$ является линейной комбинацией операторов Z_1 и Z_2. Поэтому данная дифференциальная система интегрально равносильна системе из двух уравнений в частных производных первого порядка

$$Z_1(f) = 0, \qquad Z_2(f) = 0, \tag{9}$$

которая задана посредством не являющихся линейно связанными [15] дифференциальных операторов первого порядка Z_1 и Z_2. При этом система в частных производных первого порядка (9) является якобиевой [16] ибо скобки Пуассона

$$[Z_1, Z_2] = (Z_1 x_1^{\gamma} - Z_2 x_1^{\gamma}) \cdot \partial_{x_1} + (Z_1 0 - Z_2(-c_1 \cdot x_2^{\gamma})) \cdot \partial_{x_2} + (Z_1(-c_2 \cdot x_3^{\gamma}) - Z_2 0) \cdot \partial_{x_3} + \\ + \sum_{i=4}^{n} (Z_1 0 - Z_2 0) \cdot \partial_{x_i} + (Z_1 0 - Z_2 0) \cdot \partial_t = \mathrm{O} \quad \forall (x,t) \in G \times T$$

симметричны на области $G \times T,$ где O есть линейный дифференциальный нуль-оператор.

Следовательно, базис первых интегралов системы уравнений в частных производных первого порядка (9) имеет размерность [17]: $(n+1) - m = n+1-2 = n-1,$ где $n+1$ есть количество факторов производства $x_1, \ldots, x_n$ и параметр t НТП, а $m = 2$ есть число дифференциальных уравнений в задании системы в частных производных (9).

Решим систему линейных однородных уравнений в частных производных (9) используя подход последовательного решения дифференциальных уравнений [16], входящих в задание системы. Для этого найдем общее решение первого линейного однородного уравнения в частных производных (9) методом характеристик [18], подставим его во второе уравнение дифференциальной системы (9) и исследуем полученное уравнение.

Случай $\gamma = 1.$ При $\gamma = 1$ первое уравнение системы в частных производных (9)

$$x_1 \cdot \partial_{x_1} f - c_1 x_2 \cdot \partial_{x_2} f = 0 \tag{10}$$

имеет характеристическую дифференциальную систему

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-c_1 \cdot x_2} = \frac{dx_3}{0} = \ldots = \frac{dx_n}{0} = \frac{dt}{0}$$

с функционально независимыми первыми интегралами $x_1^{c_1} x_2 = C_1,$ $t = C_2,$ $x_i = C_i,$ $i = 3, \ldots, n,$ где $C_i,$ $i = 1, \ldots, n,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (10) примет вид $f(x,t) = \tilde{\Phi}(x_1^{c_1} x_2, x_3, \ldots, x_n, t),$ где $\tilde{\Phi}$ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию f во второе уравнение системы в частных производных (9) получаем дифференциальное уравнение

$$c_1 u \cdot \partial_u \tilde{\Phi} - c_2 x_3 \cdot \partial_{x_3} \tilde{\Phi} = 0, \tag{11}$$

где переменная $u = x_1^{c_1} x_2,$ с характеристической системой

$$\frac{du}{c_1 u} = \frac{dx_3}{-c_2 \cdot x_3} = \frac{dx_4}{0} = \ldots = \frac{dx_n}{0} = \frac{dt}{0},$$

которая имеет функционально независимые первые интегралы $u^{c_2} x_3^{\,c_1} = C_1,\quad t = C_2,\ x_i = C_{i-1},\ i = 4,\ldots,n,$ где $C_i,\ i = 1,\ldots,n,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (11) имеет вид $\tilde{\Phi}(u, x_3,\ldots,x_n,t) = \Phi(u^{c_2} x_3^{\,c_1}, x_4,\ldots,x_n,t),$ где Φ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция. А общее решение системы уравнений в частных производных (9) при $\gamma = 1$ запишется в аналитической форме $f(x,t) = \Phi(x_1^{\,c_1 c_2} x_2^{\,c_2} x_3^{\,c_1}, x_4,\ldots,x_n,t).$

Случай $\gamma \neq 1.$ Для первого уравнения системы в частных производных первого порядка (1.9)

$$x_1^{\gamma} \cdot \partial_{x_1} f - c_1 x_2^{\gamma} \cdot \partial_{x_2} f = 0 \qquad (12)$$

запишем характеристическую дифференциальную систему

$$\frac{dx_1}{x_1^{\gamma}} = \frac{dx_2}{-c_1 \cdot x_2^{\gamma}} = \frac{dx_3}{0} = \ldots = \frac{dx_n}{0} = \frac{dt}{0}$$

и найдем ее функционально независимые первые интегралы $c_1 x_1^{1-\gamma} + x_2^{1-\gamma} = C_1,\quad t = C_2,\ x_i = C_i,\ i = 3,\ldots,n,$ где $C_i,\ i = 1,\ldots,n,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (12) примет вид $f(x,t) = \tilde{\Phi}(c_1 x_1^{1-\gamma} + x_2^{1-\gamma}, x_3,\ldots,x_n,t),$ где $\tilde{\Phi}$ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию f во второе уравнение системы в частных производных (9) получаем дифференциальное уравнение

$$c_1(1-\gamma) \cdot \partial_u \tilde{\Phi} - c_2 x_3^{\gamma} \cdot \partial_{x_3} \tilde{\Phi} = 0, \qquad (13)$$

где переменная $u = c_1 x_1^{1-\gamma} + x_2^{1-\gamma}$, с характеристической системой

$$\frac{du}{c_1(1-\gamma)} = \frac{dx_3}{-c_2 \cdot x_3^{\gamma}} = \frac{dx_4}{0} = \ldots = \frac{dx_n}{0} = \frac{dt}{0},$$

которая имеет функционально независимые первые интегралы $c_2 u + c_1 x_3^{1-\gamma} = C_1,\quad t = C_2,\ x_i = C_{i-1},\ i = 4,\ldots,n,$ где $C_i,\ i = 1,\ldots,n,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (13) имеет вид $\tilde{\Phi}(u, x_3,\ldots,x_n,t) = \Phi(c_2 u + c_1 x_3^{1-\gamma}, x_4,\ldots,x_n,t),$ где Φ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция. А общее решение системы уравнений в частных производных (9) при $\gamma \neq 1$ запишется в форме $f(x,t) = \Phi(c_1c_2x_1^{1-\gamma} + c_2x_2^{1-\gamma} + c_1x_3^{1-\gamma}, x_4, \ldots, x_n, t)$.

Таким образом, на основании рассмотренных случаев заключаем, что верны необходимые условия следующего утверждения.

Теорема 2. Динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1, x_2 и x_3 НТП тогда и только тогда, когда ПФ (0.1) можно представить в одном из следующих аналитических видов $f_1(x,t) = \Phi(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}, x_4, \ldots, x_n, t)$ или $f_2(x,t) = \Phi(a_1x_1^{1-\gamma} + a_2x_2^{1-\gamma} + a_3x_3^{1-\gamma}, x_4, \ldots, x_n, t)$, где числа $\alpha_i, a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2,3$, $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, а Φ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Достаточность теоремы 2 следует из того, что предельные нормы технического замещения факторов производства для динамических многофакторных ПФ f_1 и f_2 соответственно равны

$$MRTS_{x_1x_2}(f_1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}, \qquad MRTS_{x_1x_3}(f_1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \cdot \frac{x_3}{x_1}, \qquad MRTS_{x_2x_3}(f_1) = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot \frac{x_3}{x_2};$$

$$MRTS_{x_1x_2}(f_2) = \frac{a_1}{a_2} \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\gamma}, MRTS_{x_1x_3}(f_2) = \frac{a_1}{a_3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\gamma}, MRTS_{x_2x_3}(f_2) = \frac{a_2}{a_3} \cdot \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{\gamma}.$$

Следствие 3. Для того, чтобы динамическая трехфакторная ПФ $y = f(x_1, x_2, x_3, t)$ учитывала нейтральный по Хиксу НТП необходимо и достаточно, чтобы она была представима или в аналитической форме $f_1(x,t) = \Phi(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}, t)$ или $f_2(x,t) = \Phi(a_1x_1^{1-\gamma} + a_2x_2^{1-\gamma} + a_3x_3^{1-\gamma}, t)$, где числа $\alpha_i, a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2,3$, $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, а Φ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Следствие 4. Однородная степени $q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ динамическая трехфакторная ПФ $y = f(x_1, x_2, x_3, t)$ учитывает нейтральный по Хиксу НТП тогда и только тогда, когда она может быть представлена в одной из аналитических форм $f_1(x_1, x_2, x_3, t) = A(t) \cdot x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ или $f_2(x_1, x_2, x_3, t) = A(t)(a_1x_1^{1-\gamma} + a_2x_2^{1-\gamma} + a_3x_3^{1-\gamma})^{q/(1-\gamma)}$, где строго возрастающая функция A такая, что $A(0) = 1$, есть индекс НТП, а числа $\alpha_i, a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = q$, $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Общий случай. Индукционными рассуждениями, используя метод доказательства, примененный при доказательстве теоремы 2, устанавливаем более общие утверждения.

Теорема 3. Динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k$, $k \le n,$ НТП, если и только если динамическую ПФ (0.1) можно представить в одном из аналитических форм $f_1(x,t) = \Phi(x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k}, x_{k+1},\ldots,x_n,t)$ или $f_2(x,t) = \Phi(a_1 x_1^{1-\gamma} + \ldots + a_k x_k^{1-\gamma}, x_{k+1},\ldots,x_n,t),$ где числа $\alpha_i, a_i \in \mathbf{R},$ $i = 1,\ldots,k,$ $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{1\},$ а Φ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Следствие 5. Для того, чтобы ПФ (0.1) учитывала нейтральный по Хиксу НТП необходимо и достаточно, чтобы она имела или форму $f_1(x,t) = \Phi(x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, t)$ или $f_2(x,t) = \Phi(a_1 x_1^{1-\gamma} + \ldots + a_n x_n^{1-\gamma}, t),$ где числа $\alpha_i, a_i \in \mathbf{R},$ $i = 1,\ldots,n,$ $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{1\},$ а Φ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Следствие 6. Однородная степени $q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она может быть представлена или в аналитической форме $f_1(x,t) = A(t) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ или в форме $f_2(x,t) = A(t)\,(a_1 x_1^{1-\gamma} + \ldots + a_n x_n^{1-\gamma})^{q/(1-\gamma)},$ где строго возрастающая функция A такая, что $A(0) = 1,$ есть индекс НТП, а числа $\alpha_i, a_i \in \mathbf{R},$ $i = 1,\ldots,n,$ $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = q,$ $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{1\}.$

2. НТП, расширенно нейтральный по Хиксу. НТП назовем *расширенно нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* x_i *и* x_j, $i, j \in \{1,...,k\},$ $i \ne j,$ $k \le n,$ если предельная норма замещения фактора производства x_i фактором x_j не изменяется с течением времени.

Таким образом, динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает НТП, расширенно нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_i и x_j, если и только если имеет место тождество

$$\frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{\partial_{x_j} f(x,t)} = h_{ij}(x), \tag{14}$$

где h_{ij} – некоторая непрерывно дифференцируемая функция на экономической области $G \subset \mathbf{R}^2_{++}$.

Если условие нейтральности (14) выполняется при всех индексах $i, j = 1,\ldots,k,$ $i < j,$ $k \le n,$ то будем говорить, что НТП является *расширенно нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* $x_1,\ldots,x_k$, а при $k = n$ – просто *расширенно нейтральным по Хиксу*.

Множество динамических многофакторных ПФ, учитывающих расширенно нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k,\ k\le n,$ обозначим $EHN(1,\ldots,k)$. А множество ПФ, учитывающих расширенно нейтральный по Хиксу НТП через EHN. Очевидно, что множество $HN(1,\ldots,k)\subset EHN(1,\ldots,k),$ а $HN\subset EHN$.

Теорема 4. (критерий НТП, расширенно нейтрального по Хиксу относительно части факторов производства). *Динамическая ПФ* (0.1) *учитывает расширенно нейтральный по Хиксу относительно факторов производства* $x_1,\ldots,x_k,\ k\le n,$ *НТП, если и только если верны тождества*

$$\partial_t MRTS_{ij}(f)=0 \quad \forall (x,t)\in G\times T, \quad i,j=1,\ldots,k,\ i<j,\ k\le n. \qquad (15)$$

Доказательство. *Необходимость.* Если ПФ (0.1) учитывает расширенно нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов $x_1,\ldots,x_k,$ то используя тождества (14) находим частные производные

$$\partial_t MRTS_{ij}(f)=\partial_t \frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{\partial_{x_j} f(x,t)}=\partial_t h_{ij}(x)=0,\ \ i,j=1,\ldots,k,\ i<j,\ k\le n.$$

Достаточность. Решая дифференциальные уравнения в частных производных (15) получаем, что $MRTS_{ij}(f)=h_{ij}(x),$ где h_{ij} – произвольные функции, а значит, имеют место тождества (14). □

Аналитический вид ПФ, учитывающих расширенно нейтральный по Хиксу НТП относительно части факторов производства выражает

Теорема 5. Динамическая ПФ (0.1) учитывает расширенно нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k,$ $k\le n,$ НТП, если и только она представима в форме

$$f(x,t)=\Phi(\Psi(x),x_{k+1},\ldots,x_n,t), \qquad (16)$$

где Φ *– некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, а* Ψ *– непрерывно дифференцируемая функция.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть динамическая ПФ (0.1) учитывает расширенно нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k,\ k\le n,$ НТП. Тогда существуют непрерывно дифференцируемые функции h_{ij}, такие, что имеют место тождества

$$\frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{\partial_{x_j} f(x,t)}=h_{ij}(x),\ \ i,j=1,\ldots,k,\ i<j,\ k\le n. \qquad (17)$$

При этом из тождеств (17) следует, что функции h_{ij} связаны функциональными тождествами

$$\frac{h_{1j}(x)}{h_{1i}(x)} = h_{ij}(x), \quad i, j = 1, \ldots, k, \ i < j, \ k \le n. \tag{18}$$

На основании (17) введем линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$Z_{ij}(x,t) = \partial_{x_i} - h_{ij}(x)\partial_{x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, k, \ i < j, \ k \le n, \tag{19}$$

и рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$Z_{ij} f(x,t) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, k, \ i < j, \ k \le n. \tag{20}$$

С учетом тождеств (18) получаем, что часть операторов в множестве (19) является линейно связанными [15] ибо для операторов имеет место представление

$$Z_{ij}(x,t) = \frac{1}{h_{1i}(x)}\left(Z_{1j}(x,t) - Z_{1i}(x,t)\right), \quad i, j = 2, \ldots, k, \ i < j, \ k \le n.$$

Поэтому выделим базисную систему линейно не связанных дифференциальных операторов $Z_{1i}, \ i = 1, \ldots, k, \ k \le n,$ и построим на основании ее линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$Z_{1i} f(x,t) \equiv \partial_{x_i} f(x,t) - h_{1i}(x)\partial_{x_i} f(x,t) = 0, \quad i = 2, \ldots, k, \quad k \le n, \tag{21}$$

которая интегрально равносильна системе (20), но задана уже посредством линейных дифференциальных операторов $Z_{1i}, \ i = 2, \ldots, k,$ которые уже не являются линейно связанными.

Из предположения существования ПФ (0.1) следует, что для дифференциальной системы (21) выполнены условия интегрируемости (Гюнтер), т. е. имеют место тождества

$$\frac{Z_{1j} h_{1i}(x)}{Z_{1i} h_{1j}(x)} = \frac{h_{1i}(x)}{h_{1j}(x)}, \quad i, j = 2, \ldots, k, \ i < j, \ k \le n,$$

а значит, система (21) является [17] и имеет базис первых интегралов размерности: $(n+1)-(k-1) = n-k+2,$ где $n+1$ есть количество факторов производства $x_1, \ldots, x_n$ и параметр t НТП, а $k-1$ есть число уравнений в задании системы в частных производных (21).

Легко заметить, что система (21) не содержит частных производных по факторам производства $x_{k+1}, \ldots, x_n$ и параметру t НТП, а поэтому система в частных производных (21) имеет n-k+1 первых интегралов:

$$x_{k+1} = C_{k+1},\ \ldots\ ,\ x_n = C_n \quad \text{и} \quad t = C_{n+1}, \tag{22}$$

где C_j, $j = k+1, \ldots, n+1,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные. С учетом (22) из дифференциальной системы (21) получаем полную систему в частных производных первого порядка, состоящую из k-1 уравнения и k переменных,

$$\partial_{x_i} f - h_{1i}(x_1, ..., x_k, C_{k+1}, ..., C_n)\partial_{x_i} f = 0, \quad i = 2, \ldots, k, \quad k \le n,$$

которая имеет один первый интеграл $\Psi(x_1, ..., x_k, C_{k+1}, ..., C_n) = C_1.$ А значит, система (21) имеет первый интеграл $\Psi(x) = C_1.$ Следовательно, первые интегралы (21) и $\Psi(x) = C_1,$ будучи функционально независимыми образуют интегральный базис системы (21), а следовательно и системы (20).

Таким образом, общее решение системы уравнений в частных производных (20) можно записать в аналитическом виде (16).

Достаточность утверждения следует из того, что предельные нормы технического замещения

$$MRTS_{x_i x_j}(f) = \frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{\partial_{x_j} f(x,t)} = \frac{\partial_{x_i} \Phi(\Psi(x), x_{k+1}, \ldots, x_n, t)}{\partial_{x_j} \Phi(\Psi(x), x_{k+1}, \ldots, x_n, t)} =$$

$$= \frac{\partial_\zeta \Phi(\zeta, x_{k+1}, \ldots, x_n, t)_{|\zeta = \Psi(x)} \cdot \partial_{x_i} \Psi(x)}{\partial_\zeta \Phi(\zeta, x_{k+1}, \ldots, x_n, t)_{|\zeta = \Psi(x)} \cdot \partial_{x_j} \Psi(x)} = \frac{\partial_{x_i} \Psi(x)}{\partial_{x_j} \Psi(x)},$$

а значит, верны тождества (17) при $h_{ij}(x) = \partial_{x_i} \Psi(x) / \partial_{x_j} \Psi(x),$ а значит функция (16) учитывает НТП, расширенно нейтральный по Хиксу. □

Следствие 7. [19]. Динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает расширенно нейтральный по Хиксу НТП тогда и только тогда, когда она представима в аналитической форме $f(x,t) = \Phi(\Psi(x), t).$

3. НТП, полностью нейтральный по Хиксу. НТП назовем *полностью нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* $x_1, \ldots, x_k,$ $k \le n,$ если для динамической многофакторной ПФ (0.1), учитывающей этот НТП, выполняется система тождеств

$$\partial_{x_i} \ln f(x,t) = \varphi_i(x), \quad i = 1, \ldots, k, \quad k \le n, \tag{23}$$

где $\varphi_i,$ $i = 1, \ldots, k,$ – некоторые непрерывно дифференцируемые на экономической области G функции, которые не зависят от параметра НТП $t.$ При $k = n$ будем говорить о полностью *нейтральном по Хиксу НТП* [19].

Общий вид динамических многофакторных ПФ (0.1), учитывающих полностью нейтральный по Хиксу НТП, описывает

Теорема 6. Динамическая многофакторная ПФ (23) учитывает НТП, полностью нейтральный по Хиксу, если и только если ее можно представить в аналитическом виде

$$f(x,t) = A(t)\Lambda(x), \tag{24}$$

где Λ – некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция на экономической области G, а строго возрастающая функция A такая, что $A(0)=1$, есть индекс НТП.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть динамическая ПФ (0.1) учитывает полностью нейтральный по Хиксу НТП. Тогда выполняется система тождеств (23). Из первого уравнения системы в частных производных первого порядка (23) находим, что

$$\ln f(x,t) = \int \varphi_1(x)\,dx_1 + \psi_1(x_2,\ldots,x_n,t), \tag{25}$$

где ψ_1 – произвольная непрерывно дифференцируемая функция переменных $x_2,\ldots,x_n$ и параметра НТП t.

Подставляя выражение (25) во второе уравнение системы в частных производных (23) и используя правило Лейбница дифференцирования по параметру под знаком интеграла (см., например, (Фихтенгольц)), имеем $\int \partial_{x_2}\varphi_1(x)\,dx_1 + \partial_{x_2}\psi_1(x_2,\ldots,x_n,t) = \varphi_2(x).$

Отсюда следует, что функция $\partial_{x_2}\psi_1(x_2,\ldots,x_n,t)$ не зависит от параметра НТП t, а является функцией только от переменных $x_2,\ldots,x_n$, т. е. $\partial_{x_2}\psi_1(x_2,\ldots,x_n,t) = \tilde{\psi}_1(x_2,\ldots,x_n),$ а значит, функция

$$\psi_1(x_2,\ldots,x_n,t) = \int \tilde{\psi}_1(x_2,\ldots,x_n)\,dx_2 + \psi_2(x_3,\ldots,x_n,t)$$

и функция (25) примет вид

$$\ln f(x,t) = \int \varphi_1(x)\,dx_1 + \int \tilde{\psi}_1(x_2,\ldots,x_n)\,dx_2 + \psi_2(x_3,\ldots,x_n,t).$$

Продолжая последовательно подставлять полученную на предыдущем этапе функцию $\ln f(x,t)$ в следующее уравнение системы (23) на k-ом шаге получим, что

$$\begin{gathered} \partial_{x_k}\psi_{k-1}(x_k,\ldots,x_n,t) = \tilde{\psi}_{k-1}(x_k,\ldots,x_n), \\ \psi_{k-1}(x_k,\ldots,x_n,t) = \int \tilde{\psi}_{k-1}(x_k,\ldots,x_n)\,dx_k + \psi_k(x_{k+1},\ldots,x_n,t), \qquad (26) \\ \ln f(x,t) = \int \varphi_1(x)\,dx_1 + \sum_{i=1}^{k-1}\int \tilde{\psi}_i(x_{i+1},\ldots,x_n)\,dx_{i+1} + \psi_k(x_{k+1},\ldots,x_n,t), \end{gathered}$$

$$k = 2,\ldots,n, \qquad \psi_n = \psi_n(t).$$

Отсюда, при $k = n$ находим, что динамическая ПФ

$$f(x,t) = \exp\left(\int \varphi_1(x)\,dx_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \int \tilde{\psi}_i(x_{i+1},\ldots,x_n)\,dx_{i+1} + \psi_n(t) \right) = A(t)\Lambda(x),$$

где приняты обозначения

$$A(t) = \exp\psi_n(t), \quad \Lambda(x) = \exp\left(\int \varphi_1(x)\,dx_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \int \tilde{\psi}_i(x_{i+1},\ldots,x_n)\,dx_{i+1} \right).$$

Таким образом, для ПФ (0.1) имеет место представление (24).

Достаточность. Пусть для динамической ПФ (0.1) имеет место представление (24). Тогда темпы прироста

$$\partial_{x_i} \ln f(x,t) = \frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{f(x,t)} = \frac{\partial_{x_i}(A(t)\Lambda(x))}{A(t)\Lambda(x)} = \frac{\partial_{x_i}\Lambda(x)}{\Lambda(x)} = \partial_{x_i} \ln\Lambda(x), \quad i = 1,\ldots,n,$$

а значит, верны тождества (23) при условии, что $\varphi_i(x) = \partial_{x_i} \ln\Lambda(x)$, $i = 1,\ldots,n,$ и динамическая многофакторная ПФ (0.1) учитывает НТП, полностью нейтральный по Хиксу. □

Замечания:

1°. Утверждение теоремы 6 было сформулировано и доказано в статье (Blackorby, Lovell, Thursby). В данной работе нами предложено доказательство, основанное на других принципах.

2°. Так как функция *f* является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times T$, то функции φ_i, $i = 1,\ldots,n,$ удовлетворяют системе тождеств $\partial_{x_j}\varphi_i(x) = \partial_{x_i}\varphi_j(x) \quad \forall x \in G, \; i, j = 1,\ldots,n.$ Эти тождества выражает условия интегрируемости [16] системы в частных производных (23) для неизвестной функции $\ln f(x,t)$.

Основываясь на теореме 6 и понятии «*продуктоувеличивающий НТП*» (см, например, [20]) получаем следующую закономерность

Предложение 1. НТП является полностью нейтральным по Хиксу, если и только если он является продуктоувеличивающим.

Следовательно, понятия «продуктоувеличивающий НТП» и «полностью нейтральный по Хиксу НТП» равносильны и их можно использовать на равных правах (как синонимы).

Используя доказательство теоремы 6 на основании формулы (26) заключаем, что верна

Теорема 7. Динамическая ПФ (0.1) учитывает полностью нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k,\ k \le n,$ НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде

$$f(x,t) = A(x_{k+1},\ldots,x_n,t)\Lambda(x), \tag{27}$$

где Λ и A – некоторые неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции.

4. ПФ, учитывающие как нейтральный, так и полностью нейтральный по Хиксу НТП. Опишем класс динамических многофакторных ПФ, учитывающих как нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов $x_1,\ldots,x_k$, так и полностью нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k,\ k \le n.$

Случай $k=2,\ n \ge 2.$ Имеет место

Теорема 8. Динамическая многофакторная ПФ (0.1), учитывающая полностью нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства x_1 и x_2, будет также учитывать и нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1 и x_2 НТП, если и только если ее можно представить в аналитической форме

$$f(x,t) = A(x_3,\ldots,x_n,t)\,H(\Psi(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_n), \tag{28}$$

где A и H – некоторые неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а Ψ – линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. По теореме 7, динамическая ПФ (0.1) учитывает полностью нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1 и x_2 НТП, тогда и только тогда, когда она представима в форме $f(x,t) = A(x_3,\ldots,x_n,t)\,\Lambda(x)$. А для того, чтобы она учитывала нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1 и x_2 НТП необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество (2), а значит при некоторой непрерывно дифференцируемой функции h имеет место дифференциальное тождество $\dfrac{\partial_{x_1} f(x,t)}{\partial_{x_2} f(x,t)} = h\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$. Из этого тождества для определения функции Λ получаем линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\partial_{x_1}\Lambda - h\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\cdot\partial_{x_2}\Lambda = 0, \tag{29}$$

с характеристической системой

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-h(x_2 / x_1)} = \frac{dx_3}{0} = \ldots = \frac{dx_n}{0} = \frac{dt}{0}. \tag{30}$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения в частных производных (29). Обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dx_2}{dx_1} = -h\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, введя новую переменную $\xi = x_2 / x_1$ и разделяя переменные, перепишем в следующем виде $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{d\xi}{h(\xi)+\xi} = 0.$ Откуда, получаем $\ln x_1 + \int \frac{d\xi}{h(\xi)+\xi} = \tilde{C}_1$ или $x_1 \cdot \psi(\xi) = C_1,$ где положено $\psi(\xi) = \exp \int \frac{d\xi}{h(\xi)+\xi}$ (по теореме Барроу ψ есть непрерывно дифференцируемая функция), $C_1 = \exp \tilde{C}_1,$ а $\tilde{C}_1$ – произвольная вещественная постоянная.

Следовательно, характеристическая система (30) для дифференциального уравнения (29) имеет первый интеграл $x_1 \cdot \psi(x_2 / x_1) = C_1$ или $\Psi(x_1, x_2) = C_1,$ где Ψ есть линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция.

Из обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_\tau}{0},$ $\tau = 3, \ldots, n,$ находим функционально независимые первые интегралы $x_\tau = C_\tau,$ $\tau = 3, \ldots, n,$ характеристической системы (30), где $C_\tau,$ $\tau = 3, \ldots, n,$ – произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Тогда общее решение уравнения в частных производных первого порядка (29) имеет аналитический вид

$$\Lambda(x) = H(\Psi(x_1, x_2), x_3, \ldots, x_n), \tag{31}$$

где H – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, а Ψ – линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция двух аргументов. Отсюда, на основании представления (31) получаем, что динамическую ПФ (0.1) можно представить в аналитическом виде (28).

Верно и обратное утверждение: если динамическая многофакторная ПФ (0.1) представима в виде (28), то она учитывает НТП, нейтральный по Хиксу относительно факторов x_1 и x_2. Действительно, предельная норма технического замещения

$$MRTS_{x_1x_2}(f)=\frac{\partial_{x_1}f(x,t)}{\partial_{x_2}f(x,t)}=\frac{\partial_{x_1}H(\Psi(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_n)}{\partial_{x_1}H(\Psi(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_n)}=$$

$$=\frac{\partial_{\zeta}H(\zeta,x_3,\ldots,x_n)_{|\zeta=\Psi(x_1,x_2)}\cdot\partial_{x_1}\Psi(x_1,x_2)}{\partial_{\zeta}H(\zeta,x_3,\ldots,x_n)_{|\zeta=\Psi(x_1,x_2)}\cdot\partial_{x_2}\Psi(x_1,x_2)}=$$

$$=\frac{\partial_{x_1}\Psi(x_1,x_2)}{\partial_{x_2}\Psi(x_1,x_2)}=\frac{\partial_{x_1}(x_1\cdot\psi(x_2/x_1))}{\partial_{x_2}(x_1\cdot\psi(x_2/x_1))}=\frac{\psi(x_2/x_1)}{\psi'(x_2/x_1)}-\frac{x_2}{x_1},$$

а значит, верно тождество (2) при $h(\xi)=\psi(\xi)/\psi'(\xi)-\xi=\text{const},$ где $\xi=x_2/x_1=\text{const}$. □

Из теоремы 8 при $n=2$ получаем представление динамической двухфакторной ПФ, учитывающей нейтральный и расширенно нейтральный по Хиксу НТП.

Следствие 8. Динамическая двухфакторная ПФ $y=f(x_1,x_2,t)$, учитывающая полностью нейтральный по Хиксу НТП, будет также учитывать и нейтральный по Хиксу НТП тогда и только тогда, когда она представима в аналитическом виде $f(x_1,x_2,t)=A(t)\cdot H(\Psi(x_1,x_2)),$ где H – некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, Ψ есть линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция от факторов производства x_1 и x_2, а строго возрастающая функция A такая, что $A(0)=1,$ есть индекс НТП.

Случай $k=3,\ n\geq 3.$ Имеет место

Теорема 9. Динамическая многофакторная ПФ (0.1), учитывающая полностью нейтральный по Хиксу относительно факторов производства x_1, x_2 и x_3 НТП, будет также учитывать и нейтральный по Хиксу относительно факторов x_1, x_2 и x_3 НТП, если и только если динамическую многофакторную ПФ (0.1) можно представить в одном из следующих аналитических видов $f_1(x,t)=A(x_4,\ldots,x_n,t)\cdot H(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3},x_4,\ldots,x_n)$ или $f_2(x,t)=A(x_4,\ldots,x_n,t)\cdot H(a_1x_1^{1-\gamma}+a_2x_2^{1-\gamma}+a_3x_3^{1-\gamma},x_4,\ldots,x_n),$ где числа $\alpha_i,a_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,3,\ \gamma\in\mathbf{R}\setminus\{1\},$ а A и H – некоторые неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции.

Доказательство. По теореме 7, динамическая ПФ (0.1) учитывает полностью нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства $x_1,$ x_2 и $x_3,$ если и только если она представима в форме $f(x,t)=A(x_4,\ldots,x_n,t)\,\Lambda(x).$ А для того, чтобы она учитывала нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1,$ x_2 и x_3 НТП необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества (2), а значит существуют непрерывно дифференцируемые функции h_1, h_2 и h_3 такие, что для функции Λ имеют место тождества

$$\frac{\partial_{x_1}\Lambda(x)}{\partial_{x_2}\Lambda(x)}=h_1\left(\frac{x_2}{x_1}\right),\quad \frac{\partial_{x_1}\Lambda(x)}{\partial_{x_3}\Lambda(x)}=h_2\left(\frac{x_3}{x_1}\right)\quad \text{и}\quad \frac{\partial_{x_2}\Lambda(x)}{\partial_{x_3}\Lambda(x)}=h_3\left(\frac{x_3}{x_2}\right). \qquad (32)$$

Из системы дифференциальных тождеств (32) следует, что функции h_1, h_2 и h_3 связаны функциональным уравнением

$$h_2(\xi)=h_1\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\cdot h_3(\zeta), \qquad (33)$$

где введены переменные $\xi = x_3 / x_1$ и $\zeta = x_3 / x_2$.

Функциональное уравнение (33) есть обобщенное уравнение Коши относительно трех неизвестных функций, которое имеет единственное решение [13; 14]

$$h_1\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)=c_1\cdot\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^{\gamma},\quad h_2(\xi)=c_2\cdot\xi^{\gamma},\quad h_3(\zeta)=c_3\cdot\zeta^{\gamma}, \qquad (34)$$

где c_1, c_3 и $c_2 = c_1\cdot c_3$ – произвольные вещественные числа, а число $\gamma\in\mathbf{R}$.

На основании тождеств (32) при условии (34) запишем и исследуем систему линейных однородных уравнений в частных производных

$$Z_1(f)\equiv x_1^{\gamma}\cdot\partial_{x_1}f - c_1x_2^{\gamma}\cdot\partial_{x_2}f=0,\quad Z_2(f)\equiv x_1^{\gamma}\cdot\partial_{x_1}f - c_2x_3^{\gamma}\cdot\partial_{x_3}f=0,$$

$$Z_3(f)\equiv x_2^{\gamma}\cdot\partial_{x_2}f - c_3x_3^{\gamma}\cdot\partial_{x_3}f=0.$$

Отметим, что линейный дифференциальный оператор первого порядка $Z_3=(Z_2-Z_1)/c_1$ является линейной комбинацией операторов Z_1 и Z_2. Поэтому данная дифференциальная система интегрально равносильна системе из двух уравнений в частных производных первого порядка

$$Z_1(f)=0,\qquad Z_2(f)=0, \qquad (35)$$

которая задана посредством не являющихся линейно связанными (Овсянников) дифференциальных операторов Z_1 и Z_2. При этом система в частных производных (35) является якобиевой [16] ибо скобки Пуассона

$$[Z_1,Z_2]=(Z_1x_1^{\gamma}-Z_2x_1^{\gamma})\cdot\partial_{x_1}+(Z_1 0-Z_2(-c_1\cdot x_2^{\gamma}))\cdot\partial_{x_2}+(Z_1(-c_2\cdot x_3^{\gamma})-Z_2 0)\cdot\partial_{x_3}+$$
$$+\sum_{i=4}^{n}(Z_1 0-Z_2 0)\cdot\partial_{x_i}=\mathrm{O}$$

симметричны на экономической области $G,$ где O есть линейный дифференциальный нуль-оператор.

Следовательно, базис первых интегралов системы уравнений в частных производных первого порядка (35) имеет размерность [17]: $n-m=n-2,$ где n есть количество факторов производства $x_1,\ldots,x_n$, а $m=2$ есть число дифференциальных уравнений в задании системы в частных производных (35).

Решим систему линейных однородных уравнений в частных производных (35) используя подход последовательного решения дифференциальных уравнений [16], входящих в задание системы. Для этого найдем общее решение первого линейного однородного уравнения в частных производных (35) методом характеристик [18], подставим его во второе уравнение дифференциальной системы (35) и исследуем полученное уравнение.

Случай $\gamma=1.$ При $\gamma=1$ первое уравнение системы в частных производных (35)

$$x_1\cdot\partial_{x_1}\Lambda-c_1x_2\cdot\partial_{x_2}\Lambda=0 \tag{36}$$

имеет характеристическую систему $\dfrac{dx_1}{x_1}=\dfrac{dx_2}{-c_1\cdot x_2}=\dfrac{dx_3}{0}=\ldots=\dfrac{dx_n}{0}$ с функционально независимыми первыми интегралами $x_1^{\,c_1}x_2=C_1,$ $x_i=C_i,$ $i=3,\ldots,n,$ где $C_i,$ $i=1,\ldots,n,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (36) примет вид $\Lambda(x)=\tilde{H}(x_1^{c_1}x_2,x_3,\ldots,x_n),$ где $\tilde{H}$ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию Λ во второе уравнение системы в частных производных (35) получаем дифференциальное уравнение

$$c_1u\cdot\partial_u\tilde{H}\;-\;c_2\,x_3\cdot\partial_{x_3}\tilde{H}=0, \tag{37}$$

где переменная $u=x_1^{\,c_1}x_2,$ с характеристической дифференциальной системой $\dfrac{du}{c_1u}=\dfrac{dx_3}{-c_2\cdot x_3}=\dfrac{dx_4}{0}=\ldots=\dfrac{dx_n}{0},$ которая имеет функционально независимые первые интегралы $u^{c_2} x_3^{c_1} = C_1, \quad x_i = C_{i-1}, \quad i = 4, \ldots, n,$ где $C_i,$ $i = 1, \ldots, n,$ – произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (37) имеет вид $\tilde{H}(u, x_3, \ldots, x_n) = H(u^{c_2} x_3^{c_1}, x_4, \ldots, x_n),$ где H – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция. А общее решение системы уравнений в частных производных (35) при $\gamma = 1$ запишется в аналитической форме $\Lambda(x) = H(x_1^{c_1 c_2} x_2^{c_2} x_3^{c_1}, x_4, \ldots, x_n).$

Случай $\gamma \neq 1.$ Для первого уравнения системы в частных производных первого порядка (35)

$$x_1^{\gamma} \cdot \partial_{x_1} \Lambda - c_1 x_2^{\gamma} \cdot \partial_{x_2} \Lambda = 0 \tag{38}$$

запишем характеристическую систему $\dfrac{dx_1}{x_1^{\gamma}} = \dfrac{dx_2}{-c_1 \cdot x_2^{\gamma}} = \dfrac{dx_3}{0} = \ldots = \dfrac{dx_n}{0} = \dfrac{dt}{0}$ и найдем ее функционально независимые первые интегралы

$$c_1 x_1^{1-\gamma} + x_2^{1-\gamma} = C_1, \quad t = C_2, \quad x_i = C_i, \; i = 3, \ldots, n,$$

где $C_i, \; i = 1, \ldots, n,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (38) примет вид $\Lambda(x) = \tilde{H}(c_1 x_1^{1-\gamma} + x_2^{1-\gamma}, x_3, \ldots, x_n),$ где $\tilde{H}$ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию f во второе уравнение системы в частных производных (33) получаем дифференциальное уравнение

$$c_1 (1-\gamma) \cdot \partial_u \tilde{H} \, - \, c_2 \, x_3^{\gamma} \cdot \partial_{x_3} \tilde{H} = 0, \tag{39}$$

где переменная $u = c_1 x_1^{1-\gamma} + x_2^{1-\gamma},$ с характеристической дифференциальной системой $\dfrac{du}{c_1(1-\gamma)} = \dfrac{dx_3}{-c_2 \cdot x_3^{\gamma}} = \dfrac{dx_4}{0} = \ldots = \dfrac{dx_n}{0},$ которая имеет функционально независимые первые интегралы $c_2 u + c_1 x_3^{1-\gamma} = C_1, \quad x_i = C_{i-1},$ $i = 4, \ldots, n,$ где $C_i, \; i = 1, \ldots, n,$ есть произвольные неотрицательные вещественные постоянные. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (39) имеет вид $\tilde{H}(u, x_3, \ldots, x_n) = H(c_2 u + c_1 x_3^{1-\gamma}, x_4, \ldots, x_n),$ где H – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция. А общее решение системы уравнений в частных производных (35) при $\gamma \neq 1$ запишется в форме $\Lambda(x) = H(c_1 c_2 x_1^{1-\gamma} + c_2 x_2^{1-\gamma} + c_1 x_3^{1-\gamma}, x_4, \ldots, x_n).$

Отсюда, на основании полученного аналитического представления функции Λ заключаем, что для динамической многофакторной ПФ (0.1) имеют место формы f_1 и f_2.

Достаточность теоремы 9 следует из того, что предельные нормы технического замещения факторов производства для динамических ПФ f_1 и f_2 соответственно равны

$$MRTS_{x_1x_2}(f_1)=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{x_2}{x_1},\qquad MRTS_{x_1x_3}(f_1)=\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\cdot\frac{x_3}{x_1},\qquad MRTS_{x_2x_3}(f_1)=\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\cdot\frac{x_3}{x_2};$$

$$MRTS_{x_1x_2}(f_2)=\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\gamma},\ MRTS_{x_1x_3}(f_2)=\frac{a_1}{a_3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\gamma},\ MRTS_{x_2x_3}(f_2)=\frac{a_2}{a_3}\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{\gamma}.\square$$

Следствие 9. Динамическая трехфакторная ПФ $y=f(x_1,x_2,x_3,t)$, учитывающая полностью нейтральный по Хиксу НТП, будет также учитывать и нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она представима в одном из аналитических форм $f_1(x,t)=A(t)\cdot H(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})$ или $f_2(x,t)=A(t)\cdot H(a_1x_1^{1-\gamma}+a_2x_2^{1-\gamma}+a_3x_3^{1-\gamma})$, где числа $\alpha_i,a_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,3$, $\gamma\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, H – некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, а строго возрастающая функция A такая, что $A(0)=1$, есть индекс НТП.

Случай $k>2,\ k\le n.$ Имеет место

Теорема 10. Динамическая многофакторная ПФ (0.1), учитывающая полностью нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k$ НТП, будет также учитывать и нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k$, $(k>2,\ k\le n)$, НТП, если и только если ПФ (0.1) можно представить в одной из двух аналитических форм $f_1(x,t)=A(x_{k+1},\ldots,x_n,t)\cdot H(x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{\alpha_k},x_{k+1},\ldots,x_n)$ или $f_2(x,t)=A(x_{k+1},\ldots,x_n,t)\cdot H(a_1x_1^{1-\gamma}+\ldots+a_kx_k^{1-\gamma},x_{k+1},\ldots,x_n)$, где $\alpha_i,a_i\in\mathbf{R}$, $i=1,\ldots,k$, $\gamma\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, а H – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. По теореме 7, динамическая ПФ (0.1) учитывает полностью нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k$, $(k>2,\ k\le n)$, тогда и только тогда, когда она представима в аналитической форме (27). А для того, чтобы она учитывала и нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов производства $x_1,\ldots,x_k$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества (2), а значит существовали непрерывно дифференцируемые функции h_{ij} такие, что выполняются тождества

$$\frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{\partial_{x_j} f(x,t)} = h_{ij}\left(\frac{x_j}{x_i}\right), \qquad i,j=1,\ldots,k, \quad i<j, \quad 2<k\le n.$$

Тогда верна система тождеств

$$\frac{\partial_{x_i} \Lambda(x)}{\partial_{x_j} \Lambda(x)} = h_{ij}\left(\frac{x_j}{x_i}\right), \qquad i,j=1,\ldots,k, \quad i<j, \quad 2<k\le n,$$

а функция Λ должна удовлетворять системе линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial_{x_i}\Lambda - h_{ij}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)\cdot\partial_{x_j}\Lambda = 0, \qquad i,j=1,\ldots,k, \quad i<j. \qquad (40)$$

Методом аналогично использованному при доказательстве теорем 8 и 9 получаем, что общим решением дифференциальной системы в частных производных (40) будут функции

$\Lambda_1(x) = H(x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{\alpha_k}, x_{k+1},\ldots,x_n)$ и
$\Lambda_2(x) = H(a_1 x_1^{1-\gamma}+\ldots+a_k x_k^{1-\gamma}, x_{k+1},\ldots,x_n).$

Отсюда, на основании представления (27) для ПФ (0.1), полученного вида решений Λ_1 и Λ_2, получаем утверждение теоремы 10. □

Следствие 10. Динамическая многофакторная ПФ (0.1), учитывающая полностью нейтральный по Хиксу НТП, будет также учитывать и нейтральный по Хиксу НТП, если и только если ПФ (0.1) представима в одной из двух аналитических форм

$$f_1(x,t) = A(t)\cdot H(x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}) \quad \text{или} \quad f_2(x,t) = A(t)\cdot H(a_1 x_1^{1-\gamma}+\ldots+a_n x_n^{1-\gamma}),$$

где числа $\alpha_i, a_i \in \mathbf{R}$, $i=1,\ldots,n$, $\gamma\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, а H – некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, а строго возрастающая функция A такая, что $A(0)=1$, есть индекс НТП.

Заключение. В работе представлены концепции нейтральности, расширенной нейтральности и полной нейтральности НТП по Хиксу для динамических многофакторных ПФ (0.1). Получен общий аналитический вид динамических многофакторных ПФ, которые учитывают нейтральный (теоремы 2 и 3), расширенно нейтральный (теорема 5) и полностью нейтральный (теорема 7) по Хиксу относительно части факторов производства НТП. Установлен аналитический вид многофакторных ПФ, учитывающих нейтральный (теорема 3), расширенно нейтральный (следствие 7) и полностью нейтральный (теорема 6) по Хиксу НТП. Выделены аналитические формы ПФ, которые учитывают одновременно нейтральный и полностью нейтральный НТП по Хиксу (теоремы 8 – 10, следствия 8 – 10). Полученные в работе теоретические результаты могут быть использованы при моделировании и прогнозировании реальных производственных процессов, которые учитывают полностью нейтральный по Хиксу НТП. Так, например, конкретные формы ПФ, представленные в следствиях 8 – 10, целесообразно использовать:

1) для изучения структуры экономического роста, оценки затрат факторов и совокупной факторной производительности в белорусской экономике по методике, описанной в работе [22];

2) в теории реального делового цикла при рассмотрении положительных и отрицательных шоков технологий [1];

3) в качестве примера приведем разработанную нами модель динамической двухфакторной ПФ (следствие 10) с постоянной эластичностью замещения факторов производства для экономики Республики Беларусь по статистическим данным за 1990 – 2021 гг. (https://www.worldbank.org/) в индексной форме методом Дж. Кменты [23]:

$$Y = 0{,}87e^{0{,}02t}(0{,}3K^{0{,}83} + 0{,}7L^{0{,}83})^{-1/0{,}83}, \ \ R^2 = 0{,}97, \ DW = 1{,}5.$$

С точки зрения статистик R^2 и DW зависимость получилась значимой. С помощью статистического пакета EViews проверено выполнение модельных предпосылок, компьютерная реализация метода Кменты выполнена на языке программирования Python. Показатель эластичности замещения факторов производства для экономики Республики Беларусь меньше единицы (равен 0,55), что говорит о «не высокой» степени взаимозаменяемости труда и капитала. Темп прироста индекса НТП составляет $\lambda = 0{,}02$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (НИР «*Экономико-математическое моделирование научно-технического прогресса в контексте производственных функций для прогнозирования экономического роста Республики Беларусь*», договор с БРФФИ № Г23-089 от 02.05.2023 г., № ГР 20221093).

Библиографические ссылки

1. *Курзенев В., Матвеенко В.* Экономический рост. СПб. : Питер, 2018.
2. *Hicks J.R.* The theory of wages. London : Macmillan, 1932.

3. *Harrod R.F.* Towards a dynamic economics. London : Macmillan, 1948.
4. *Solow R.M.* Technical progress, capital formation, and economic growth // The American Economic Review. 1962. Vol. 52(2). PP. 76–86.
5. *Sato R., Beckmann M.J.* Neutral inventions and production functions // The Review of Economic Studies. 1968. Vol. 35(1). PP. 57–67.
6. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение // Белорусский экономический журнал. 2020. № 3. С.87–105.
7. *Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф.* Классификация Сато – Бекмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. 2020. № 2. С. 4–17.
8. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу // Вестник института экономики НАН Беларуси. 2021. Вып. 2. С. 105–120.
9. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-технический прогресс // Вестник института экономики НАН Беларуси. 2022. Вып. 5. С. 9–27.
10. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Концепция нейтральности научно-технического прогресса по Хиксу для многофакторных производственных функций // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2023. Вып. 17. С. 84–93.
11. *Beckmann M.J.* Invariant relationships for homothetic production functions // Production theory: proceedings of an International seminar held at the university of Karlsruhe. May-July 1973. Ed. M.J.Beckmann and H.P.Kunzi. 1974. Vol. 99. P. 3–20.
12. *Morimoto Y.* Neutral technical progress and the separability of the production function // The Economic Studies Quarterly. 1974. Vol. 25, No. 3. PP. 66–69.
13. *Pexider H.W.* Hotiz über functional theorem // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1903. Vol. 14(1). S. 293–301.
14. *Castillo E., Cobo A., Gutiérrez J.M., Pruneda R.E.* Functional networks with applications. New York : Springer. 1999.
15. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука. 1978.
16. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука. 1966.
17. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. Гродно : ГрГУ. 2006.
18. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М. : ФИЗМАТЛИТ. 2003.
19. *Blackorby Ch., Lovell C.A.K., Thursby M.C.* Extended Hicks neutral technical change // The Economic Journal. 1976. Vol. 35, No. 344. PP. 845–852.
20. *Черемных Ю.Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. М. : *ИНФРА-М,* 2008.
21. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В.* Математические модели в экономике. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1979.
22. *Энтов Р.* Факторы экономического роста российской экономики. М. : *ИЭПП*. 2003.
23. *Kmenta J.* On estimation of the CES production function // International Economic Review. 1967. Vol. 8. PP. 180–189.