

УДК 519.2

ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ СЕТИ ДЖЕКSONА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАПРОСОВ В ПОЛЮСАХ

Ю.В. Малинковский

*Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь, malinkovsky@gsu.by*

Рассмотрены экспоненциальные сети массового обслуживания, отличающиеся от сети Джексона или Гордона-Ньюэлла только тем, что время пребывания запросов в полюсах сети является случайной величиной, условное распределение которой при фиксированном числе запросов в полюсе имеет экспоненциальное распределение. Запросы, обслуженные в узлах, и запросы, покинувшие их без завершения обслуживания, движутся по сети в соответствии с разными матрицами маршрутизации. Доказаны теоремы, обобщающие результат Джексона.

Ключевые слова: сети массового обслуживания; экспоненциальное ограничение на время пребывания; эргодичность; стационарное распределение.

OPEN AND CLOSED JACKSON NETWORKS WITH EXPONENTIAL BOUNDED SOJOURN TIMES OF CUSTOMERS IN THE POLES

Yu. V. Malinkovsky

*Francisk Gomel State University, Sovetskaya str., 104,
246028, Gomel, Belarus, malinkovsky@gsu.by*

The exponential queuing networks different from Jackson and Gordon-Newell networks on sojourn times of the customers in network poles is the random variable which conditional distribution with the fixed quantity of customers in pole has the exponential distribution are considered. The customers served in poles and customers left it without complete service move on network in accordance to different routing matrices. The theorems generalized the Jackson result are proved.

Keywords: queueing networks; exponential restriction on sojourn times; ergodicity; stationary distribution.

Системы массового обслуживания с ограничениями на время пребывания или ожидания рассматривались в работах [1, 2]. Обзор полученных результатов имеется в классической монографии Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко [2].

Сети Джексона с ограничениями на время пребывания (хотя автор пишет о времени ожидания, а по факту использует ограничение на время

пребывания) впервые рассмотрел Е.А. Ковалев [1]. Он показал, что стационарное распределение состояний совпадает со стационарным распределением состояний сети Джексона, в которой к скорости обслуживания $\mu_i(n_i)$, когда в i -ом полюсе находится n_i запросов, необходимо добавить параметр $v_i(n_i)$ условного показательного распределения случайной величины, ограничивающей время пребывания некоторой заявки в i -ом полюсе. При этом предполагалось, что обслуженные запросы и запросы, время пребывания которых истекло, ведут себя одинаково, т. е. маршрутизируются с помощью одной и той же матрицы маршрутов. Сети Джексона с однолинейными узлами и экспоненциальным ограничением на время пребывания с разными матрицами маршрутизации рассмотрены в работе автора настоящего сообщения [3]. В [4] рассмотрена аналогичная сеть Геленбе с положительными и отрицательными заявками.

В настоящем сообщении будут рассмотрены многолинейные в классическом смысле, но однолинейные при параметрическом описании процесса обслуживания сети Джексона и Гордона-Ньюэлла с экспоненциальным ограничением на время пребывания и различными в описанном выше смысле матрицами маршрутизации.

Для лучшего понимания постановок задач теории массового обслуживания с ограничениями на время пребывания рассмотрим некоторую систему массового обслуживания. По традиции входящие потоки задаются с помощью согласованных конечномерных распределений последовательных промежутков времени

между моментами поступления заявок. Времена обслуживания задаются с помощью согласованных конечномерных распределений времен обслуживания запросов. Авторы [1, 2] для рассмотрения систем с ограничением на время пребывания ожидания вводят случайную величину ξ , ограничивающую время пребывания, причем при составлении уравнений неявно предполагается, что она не зависит от поступающих запросов, а ее значение разыгрывается при поступлении запроса в систему. По сути, мы имеем выборку из «независимых экземпляров» случайной величины ξ .

На мой взгляд удобнее вместо введения случайной величины ξ ввести три последовательности взаимно независимых случайных величин $\{z_n\}$, $\{v_n\}$, $\{V_n\}$. Здесь $\{z_n\}$ – последовательные промежутки времени между моментами поступления запросов, $\{v_n\}$ – последовательные номинальные времена обслуживания запросов приборами, $\{V_n\}$ – последовательные номинальные времена пребывания запросов в системе. Слово «номинальное» употребляется в том смысле, что V_n обнулится, если реализация v_n оказалась меньше соответствующей реализации V_n , а v_n обнулится, если реали-

зация V_n оказалась меньше соответствующей реализации v_n . Назовем номинальное время пребывания рекуррентным, если $\{V_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с функцией распределения $V(t)$). Если $V(t)$ – функция показательного распределения, то номинальное время пребывания назовем экспоненциальным. В дальнейшем тексте слово «номинальный» будет часто опускаться.

В случае сетей массового обслуживания для экспоненциального времени обслуживания и пребывания используем параметрическое описание i -го полюса сети с помощью условного показательного распределения с параметрами $\frac{\mu_i(n_i)}{n_i}$ и $\frac{v_i(n_i)}{n_i}$ соответственно, зависящими от числа запросов в i -ом полюсе.

Сначала рассмотрим замкнутую сеть, состоящую из N однолинейных полюсов (систем) с бесконечным числом мест для ожидания. В сети циркулирует постоянное число запросов K , т. е. число мест для ожидания можно считать равным K . Дисциплину обслуживания и дисциплину ограничения на время пребывания зададим не традиционным, а параметрическим образом. Условное распределение времени обслуживания запроса единственным прибором i -ого узла, когда в нем находится n_i запросов, показательное с параметром $\mu_i(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, зависящем от числа запросов n_i в i -ом узле. Будем считать, $\mu(0) = 0$, $\mu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$. В частном случае в i -ом узле может находиться s_i параллельно работающих экспоненциальных приборов с интенсивностью обслуживания μ_i , если положить

$$\mu_i(n_i) = \begin{cases} n_i \mu_i, & \text{если } n_i \leq s_i \\ s_i \mu_i, & \text{если } n_i > s_i \end{cases}.$$

Время пребывания каждого запроса в i -ом полюсе является случайной величиной, условное распределение которой (если в i -ом полюсе находится n_i запросов) экспоненциальное с параметром $\frac{v_i(n_i)}{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Время пребывания запроса в полюсе не реализуется (обнуляется), если в течение этого времени закончится его обслуживание. Таким образом, условная вероятность того, что длительность пребывания каждого запроса в i -ом полюсе закончится в промежутке времени $[t, t+h)$, если в момент t в полюсе находилось n_i запросов, равна $\frac{v_i(n_i)}{n_i} h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная вероят-

ность завершения процесса пребывания хотя бы одного из этих запросов равна $\nu_i(n_i)h + o(h)$. Предполагается, что $\nu_i(0) = 0$, $\nu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$. Если запрос поступает в полюс свободный от запросов, он сразу начинает обслуживаться, и начинается отсчет времени его пребывания в полюсе.

Для определенности будем предполагать, что запросы обслуживаются в порядке поступления в полюсы (дисциплина FCFS). Предполагается, что номинальные времена обслуживания запросов и номинальные времена пребывания запросов в узлах – взаимно независимые случайные величины. Запрос, обслуженный в i -ом полюсе, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью p_{ij} мгновенно переходит в j -ый полюс

($i, j = 1, 2, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$). Запрос, время пребывания которого в i -ом полюсе закончилось, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью r_{ij} направляется в j -й полюс ($i, j = 1, 2, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N r_{ij} = 1$).

Состояния сети в момент t будем описывать марковским процессом или цепью Маркова с непрерывным временем $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число заявок в i -ом полюсе в момент времени t . Пространство состояний этого процесса представляет собой симплекс $X = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) : n_1 + n_2 + \dots + n_N = K\}$. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и положительности интенсивностей выхода из состояний в моменты ее скачков $\mathbf{n}(t)$ – неприводимая цепь Маркова. Так как число ее состояний конечно, то она эргодична. Введем две стохастические квадратные матрицы $P = (p_{ij})$ и $R = (r_{ij})$ порядка N ($i, j = 1, 2, \dots, N$), которые назовем матрицами маршрутизации соответственно обслуженных и просроченных по времени пребывания запросов. Очевидно матричная функция $S(\mathbf{n}) = (s_{ij}(n_i); i, j = 1, 2, \dots, N)$, где $s_{ij}(n_i) = [\mu(n_i)p_{ij} + \nu_i(n_i)r_{ij}] / [\mu(n_i) + \nu_i(n_i)]$, элементы i -ой строки которой зависят от числа n_i запросов в i -ом полюсе, также является стохастической матрицей, управляющей движением запросов между полюсами без учета того, за счет чего (окончания обслуживания или пребывания) запрос покидает узел. Будем называть эту матрицу $S(\mathbf{n})$ матрицей маршрутизации.

Обозначим через $\varepsilon_i(n_i)$ условную интенсивность потока запросов, выходящего из i -го полюса, находящегося в состоянии n_i ($i = 1, 2, \dots, N$).
Уравнение

$$[1 - S_{ii}(n_i)]\varepsilon_i(n_i - 1) = \sum_{j \neq i} \varepsilon_j(n_j) s_{ji}(n_j + 1), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

назовем уравнением трафика. Далее предполагается, что матрица $S(\mathbf{n})$ при любом $\mathbf{n} \in X$ неприводима. Для ее неприводимости достаточно, чтобы неприводимой была хотя бы одна из матриц P или R . Тогда уравнение (1), которое будем называть уравнением трафика, при фиксированных $\mathbf{n} \in X$, $\mu_i(n_i), \nu_i(n_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) будет иметь единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение.

Пусть $\{p(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in X\}$ – предельное эргодическое распределение цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$, которое в этом случае будет единственным решением глобальных уравнений равновесия

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}) \sum_{i=1}^N (\mu_i(n_i)(1 - p_{ii}) + \nu_i(n_i)(1 - r_{ii})) = \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i) (\mu_j(n_j + 1) p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji}), \end{aligned} \quad (2)$$

удовлетворяющим условию нормировки $\sum_{\mathbf{n} \in X} p(\mathbf{n}) = 1$. Здесь $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор i -го направления, причем предполагается, что $p(\mathbf{n}) = 0$ при $\mathbf{n} \notin X$.

Изолируем i -ый полюс от сети, помещая его в фиктивную случайную среду, отличающуюся от условий его функционирования в сети только тем, что в него поступает поток моментов последовательных скачков процесса чистого размножения с интенсивностью рождения $\varepsilon_i(n_i)$, зависящей от числа запросов n_i в этом полюсе. Получается процесс размножения и гибели с интенсивностями рождения $\varepsilon_i(n_i)$ и интенсивностями гибели $\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)$ ($n_i = 1, 2, \dots$). Стационарные вероятности состояний изолированного узла имеют вид

$$p_i(n_i) = p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)}, \quad n_i = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где

$$p_i(0) = \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)} \right]^{-1} \quad (4)$$

с множителями, определенными с помощью (3), $C(N, K)$ – нормирующая постоянная,

$$C(N, K) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N: n_1 + n_2 + \dots + n_N = K} p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N). \quad (5)$$

Теорема 1. Если матрица маршрутизации неприводима, то цепь Маркова $\mathbf{n}(t)$ эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(\mathbf{n}) = [C(N, K)]^{-1} p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N) \quad (6)$$

с множителями (3), где $\varepsilon_i(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ – решение уравнения трафика (1), $C(N, K)$ – нормирующая постоянная, определенная с помощью равенства (5).

В силу однородности при использовании теоремы 1 можно не находить $p_i(0)$ по формуле (4), а считать, что $p_i(0) = 1$.

Таким образом, как и в обычной сети Гордона-Ньюэлла в стационарном режиме в каждый фиксированный момент времени t состояния полюсов $n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)$ зависимы. Это является очевидным следствием линейной зависимости $n_1(t) + n_2(t) + \dots + n_N(t) = K$ координат случайного вектора $\mathbf{n}(t)$.

Уравнение трафика проще уравнений глобального равновесия для стационарных вероятностей состояний сети. Однако возникают определенные трудности, связанные с тем, что для каждого полюса i , полагая, например, $\varepsilon_j(0) = 1$, придется решать систему $K - 1$ линейных уравнений трафика. Таким образом, для применения теоремы 1 предварительно надо решить $N(K - 1)$ систем линейных уравнений. Хорошо, что эти уравнения линейные.

Если матрицы маршрутизации обслуженных запросов и запросов с истекающим временем совпадают, т. е. $P = R$, то $S_{ij}(\mathbf{n}) = S_{ij} = (\mu_i p_{ij} + v_i r_{ij}) / (\mu_i + v_i)$ не зависит от $\mathbf{n}$, т. е. коэффициенты уравнения трафика не зависят от $\mathbf{n}$. Значит, его решение $\varepsilon_i(n_i) = \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, не зависит от $\mathbf{n}$. Из теоремы 1 вытекает результат статьи [1]. Если $\mu_i(n_i) = \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}}$, $v_i(n_i) = v_i I_{\{n_i \neq 0\}}$, то из теоремы 1 вытекает теорема 3 [2].

Теперь рассмотрим открытую сеть, состоящую из N однолинейных полюсов (систем) с бесконечным числом мест для ожидания, в которую по-

ступает простейший поток запросов с интенсивностью λ , причем каждый запрос мгновенно и независимо от других запросов присоединяется к i -му полюсу с вероятностью $p_{0i} \left(\sum_{i=1}^N p_{0i} = 1 \right)$. Дисциплину обслуживания и дисциплину ограничения на время пребывания зададим не традиционным, а

параметрическим образом. Условное распределение времени обслуживания запроса единственным прибором i -ого узла, когда в нем находится n_i запросов, показательное с параметром $\mu_i(n_i)$, $i=1, 2, \dots, N$, зависящем от числа запросов n_i в i -ом узле. Будем считать $\mu(0)=0$, $\mu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$.

Время пребывания каждого запроса в i -ом полюсе является случайной величиной, условное распределение которой (если в i -ом полюсе находится n_i запросов) экспоненциальное с параметром $\mu_i(n_i) / n_i$, $i=1, 2, \dots, N$. Время пребывания запроса в полюсе не реализуется (обнуляется), если в течение этого времени закончится его обслуживание. Таким образом, условная вероятность того, что длительность пребывания каждого запроса в i -ом полюсе закончится в промежутке времени $[t, t+h)$, если в момент t в полюсе

находилось n_i запросов, равна $\frac{\mu_i(n_i)}{n_i} h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная веро-

ятность завершения процесса пребывания хотя бы одного из этих запросов равна $\mu_i(n_i) h + o(h)$. Предполагается, что $v_i(0)=0$, $v_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$. Если запрос поступает в полюс, свободный от запросов, он сразу начинает обслуживаться и начинается отсчет времени его пребывания в полюсе.

Для определенности будем предполагать, что запросы обслуживаются в порядке поступления в полюсы (дисциплина FCFS). Предполагается, что промежутки времени между моментами поступления запросов в сеть, номинальные времена обслуживания запросов и номинальные времена пребывания запросов в узлах – взаимно независимые случайные величины. Запрос, обслуженный в i -ом полюсе, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью p_{ij} мгновенно переходит в j -ый полюс, а с вероят-

ностью p_{i0} покидает сеть ($i, j = 0, 1, 2, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$). Запрос, время пре-

бывания которого в i -ом полюсе закончилось, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью r_{ij} направляется в j -ый полюс, а с веро-

ятностью r_{i0} покидает сеть ($i, j = 0, 1, 2, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N r_{ij} = 1$).

Состояния сети в момент t будем описывать марковским процессом или цепью Маркова с непрерывным временем

$\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число заявок в i -ом полюсе в момент времени t . Пространство состояний этого процесса представляет собой $X = \mathbf{Z}_+^N$. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и положительности интенсивностей выхода из состояний в моменты ее скачков $\mathbf{n}(t)$ – неприводимая цепь Маркова. Введем две стохастические квадратные матрицы $P = (p_{ij})$ и $R = (r_{ij})$ порядка $N + 1$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, N$), которые назовем матрицами маршрутизации соответственно обслуженных и просроченных по времени пребывания запросов. Очевидно, матричная функция $S(\mathbf{n}) = (s_{ij}(\mathbf{n}); i, j = 0, 1, 2, \dots, N)$, где $s_{0j}(\mathbf{n}) = p_{0j}$, $s_{00}(\mathbf{n}) = 0$, а для $i \neq 0$

$$s_{ij}(\mathbf{n}) = [\mu_i(\mathbf{n})p_{ij} + v_i(\mathbf{n})r_{ij}] / [\mu_i(\mathbf{n}) + v_i(\mathbf{n})],$$

элементы i -ой строки которой зависят от числа n_i запросов в i -ом полюсе, также является стохастической матрицей, управляющей движением запросов между полюсами без учета того, за счет чего (окончания обслуживания или пребывания) запрос покидает узел. Будем называть эту матрицу $S(\mathbf{n})$ матрицей маршрутизации.

Пусть $\{p(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in X\}$ – предельное эргодическое распределение цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$, которое является единственным решением глобальных уравнений равновесия

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}) \sum_{i=1}^N (\lambda + \mu_i(\mathbf{n})(1 - p_{ii}) + v_i(\mathbf{n})(1 - r_{ii})) = \\ = \sum_{i=1}^N [\lambda p_{0i} p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i) + p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i)(\mu_i(\mathbf{n} + 1)p_{i0} + \\ + v_i(\mathbf{n} + 1)r_{i0}) + \sum_{j \neq i} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)(\mu_j(\mathbf{n} + 1)p_{ji} + v_j(\mathbf{n} + 1)r_{ji})], \end{aligned} \quad (7)$$

удовлетворяющим условию нормировки $\sum_{\mathbf{n} \in X} p(\mathbf{n}) = 1$. Предполагается, что

$p(\mathbf{n}) = 0$ при $\mathbf{n} \notin X$. Для упрощения записи считаем, что диагональные элементы матриц P и R равны нулю, что на практике чаще всего выполняется, поскольку заявка, обслуженная в некотором полюсе, а тем более время пребывания которой в узле завершилось снова начнет обслуживаться или продлевать время пребывания в этом полюсе сначала. Обозначим через

$\varepsilon_i(n_i)$ условную интенсивность потока запросов, выходящего из i -ого полюса, находящегося в состоянии $n_i (i = 1, 2, \dots, N)$. Уравнение

$$\varepsilon_i(n_i) = p_{0i} + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j(n_j) S_{ji}(n_j + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

назовем уравнением трафика. Далее предполагается, что матрица $S(\mathbf{n})$ при любом $\mathbf{n} \in X$ неприводима. Для ее неприводимости достаточно, чтобы неприводимой была хотя бы одна из матриц P или R . Тогда уравнение (8), которое будем называть уравнением трафика, при фиксированных $\mathbf{n} \in X$, $\mu_i(n_i), \nu_i(n_i) (i = 1, 2, \dots, N)$, будет иметь единственное положительное решение.

Изолируем i -ый полюс от сети, помещая его в фиктивную случайную среду, отличающуюся от условий его функционирования в сети только тем, что в него поступает поток моментов последовательных скачков процесса чистого размножения с интенсивностью рождения $\lambda \varepsilon_i(n_i)$, зависящей от числа запросов n_i в этом полюсе. Получается процесс размножения и гибели с интенсивностями рождения $\lambda \varepsilon_i(n_i)$ и интенсивностями гибели $\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)$. Стационарные вероятности состояний изолированного узла имеют вид

$$p_i(n_i) = p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)}, \quad n_i = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$p_i(0) = \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)} \right]^{-1}. \quad (10)$$

Теорема 2. Если матрица маршрутизации неприводима и сходится ряд $\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)}$, то цепь Маркова $\mathbf{n}(t)$ эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N)$$

с множителями, определенными с помощью (9), (10), где $\varepsilon_i(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, – решение уравнения трафика (8), тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i(n_i) = \text{const}$ при любых $\mathbf{n} \in X$.

Если матрицы маршрутизации обслуженных запросов и запросов с истекшим временем совпадают, т. е. $P = R$, то $S_{ij}(\mathbf{n}) = S_{ij} = (\mu_i p_{ij} + v_i r_{ij}) / (\mu_i + v_i)$ не зависит от $\mathbf{n}$, т. е. коэффициенты уравнения трафика не зависят от $\mathbf{n}$. Значит, его решение $\varepsilon_i(n_i) = \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, не зависит от $\mathbf{n}$. Из теоремы 1 вытекает результат статьи [1]. Если $\mu_i(n_i) = \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}}$, $v_i(n_i) = v_i I_{\{n_i \neq 0\}}$, то из теоремы 1 вытекает теорема 1 статьи [3].

Отметим тот факт, что все результаты данного сообщения справедливы, если номинальные времена пребывания заявок в узлах независимы, но имеют показательные распределения с различными параметрами.

Библиографические ссылки

1. Ковалев Е.А. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях // Автоматика и вычислительная техника. 1985. № 2. С. 50–55.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М. : Наука, 1966.
3. Malinkovskii Yu.V Jackson networks with single-line nodes and limited sojourn or waiting times // Automation and remote control. 2015. Vol. 76, № 4. С. 67–79.
4. Malinkovskii Yu.V. Stationary probability distribution for states of G-networks with constrained sojourn waiting time // Automation and remote control. 2017. Vol. 564, № 4. С. 155–167.