УДК 519.72

МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ИСКАЖЕНИЯМИ И ОШИБКАМИ РЕГИСТРАЦИИ СОСТОЯНИЙ

П. М. Лаппо

Белорусский государственный университет, пр. Независимости,4, 220030, г. Минск, Беларусь, lappopm@bsu.by

Рассматриваются модели дискретных временных рядов, описываемые цепями Маркова высших порядков. Найден вид функции правдоподобия для модели искажений Тьюки-Хьюбера и для модели с ошибками в регистрации состояний.

Ключевые слова: цепи Маркова высших порядков, модель Тьюки-Хьюбера, функция правдоподобия, ошибки регистрации наблюдений.

DISCRETE TIME SERIES MODELS WITH DISTORTIONS AND ERRORS IN STATE REGISTRATION

P. M. Lappo

Belarusian State University, Nezavisimosti Av., 4, 220030, Minsk, Belarus, lappopm@bsu.by

Models of complex time series are considered, described by higher-order Markov chains. The form of the likelihood function was found for the Tukey-Huber models and for models with errors in state registration.

Keywords: higher order Markov chain, Tukey-Huber model, likelihood function, observation error.

Введение

Цепь Маркова $x_t \in A, t \in N$ порядка s с пространством состояний A, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и временной области N характеризуется обобщенным марковским свойством [1]

$$P\{x_{t+1} = i_{t+1} | x_t = i_t, \ldots, x_1 = i_1\} =$$
$$= \{x_{t+1} = i_{t+1} | x_t = i_t, \ldots, x_{t-s+1} = i_{t-s+1}\} =$$
$$= p_{i_{t-s+1}, \ldots, i_t; i_{t+1}}(t), t \geq s, \ i_1, \ldots, i_{t+1} \in A. \quad (1)$$

Соотношение (1) означает, что условное распределение будущих состояний зависит не от всей предыстории, а лишь от ближайших на глубину s значений. Заметим, что при $s=1$ получаем обычную цепь Маркова, а при $s=0$ схему независимых испытаний.

Цепь Маркова ЦМ(s) характеризуется s-мерным начальным распределением

$$\pi_{i_1,\ldots,i_s} = P\{x_1 = i_1, \ldots, x_s = i_s\},\ i_1, \ldots, i_s \in A,$$

и $(s+1)$-матрицей вероятностей одношаговых переходов (тензором переходных вероятностей) в моменты времени $t \geq s$:

$$P(t) = \left(p_{i_{t-s+1},\ldots,i_t;i_{t+1}}(t)\right),\ t \geq s,\ i_1,\ldots,i_{t+1} \in A.$$

Если $P(t)$ не зависит от времени, $P(t) = P = p_{i_{t-s+1},\ldots,i_t;i_{t+1}}$, $i_1, \ldots, i_{t+1} \in A,$ то имеем однородную цепь Маркова ОЦМ(s). Матрица P удовлетворяет условиям нормировки

$$\sum_{i_{t+1}=0}^{N-1} p_{i_{t-s+1},\ldots,i_t;i_{t+1}} = 1.$$

С помощью расширения пространства ОЦМ(s) можно привести к простой цепи Маркова [2].

Модель искажений Тьюки-Хьюбера для дискретных временных рядов

В модели Тьюки–Хьюбера предполагается, что вероятности перехода имеют вид:

$$\begin{aligned} &P\left\{x_t = u_t;\ x_{t-1} = u_{t-1}, \ldots, x_{t-s^+} = u_{t-s^+}\right\} = \\ &= (1-\varepsilon)P\left\{x_t = u_t;\ x_{t-1} = u_{t-1}, \ldots, x_{t-s} = u_{t-s}\right\} + \\ &+ \varepsilon h\left\{x_t = u_t;\ x_{t-s-1} = u_{t-s-1}, \ldots, x_{t-s^+} = u_{t-s^+}\right\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $0 \leq \varepsilon < 1,\ s < s^+$.

Введем для удобства обозначения:

$$X_{t-s^+}^{t-1} = (x_{t-1}, \ldots, x_{t-s^+});\ U_{t-s^+}^{t-1} = (u_{t-1}, \ldots, u_{t-s^+}).$$

Тогда соотношение (2) примет вид

$$P\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s^+}^{t-1} = U_{t-s^+}^{t-1}\right\} = (1-\varepsilon)P\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s}^{t-1} = U_{t-s}^{t-1}\right\} +$$

$$+\varepsilon h\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s^+}^{t-s-1} = U_{t-s^+}^{t-s-1}\right\}. \qquad (3)$$

Найдем функцию правдоподобия $L\left\{x_1, \ldots, x_n;\ X_{1-s^+}^{0}\right\}$ при условии, что $X_{1-s^+}^{0}$ известны. Используя формулу умножения вероятностей, и учитывая (2), мы имеем:

$$L\left\{u_1, \ldots, u_n;\ X_{1-s^+}^{0}\right\} = P\left\{X_1^n = U_1^n;\ X_{1-s^+}^{0}\right\} =$$

$$= \prod_{t=1}^{n}\left[(1-\varepsilon)P\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s}^{t-1} = U_{t-s}^{t-1}\right\} + \varepsilon h\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s^+}^{t-s-1} = U_{t-s^+}^{t-s-1}\right\}\right]. \qquad (4)$$

Теорема. Функция правдоподобия для модели Тьюки–Хьюбера (2) допускает следующее разложение по степеням ε.

$$L\left\{u_1, \ldots, u_n;\ X_{1-s^+}^{0}\right\} = \prod_{t=1}^{n}P\left\{x_t = u_t; X_{t-s}^{t-1} = U_{t-s}^{t-1}\right\} + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k g_k\left(u_1, \ldots, u_n;\ X_{1-s^+}^{0}\right),$$

где

$$g_k\left(u_1, \ldots, u_n; X_{1-s^+}^{0}\right) =$$

$$= \sum_{I_1^k, I_2^k}\prod_{t\in I_1^k}\left\{h\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s^+}^{t-s-1} = U_{t-s^+}^{t-s-1}\right\} - P\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s}^{t-1} = U_{t-s}^{t-1}\right\}\right\}\times$$

$$\times\prod_{t\in I_2^k}P\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s}^{t-1} = U_{t-s}^{t-1}\right\},$$

а суммирование в сумме $\sum_{I_1^k, I_2^k}$ ведется по всем различным разбиениям множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два подмножества, в первом из которых k элементов, а во втором – $n-k$.

Доказательство. Представим функцию правдоподобия в следующем виде

$$L\left\{u_1,\ldots,u_n; X_{1-s^+}^{0}\right\} = \prod_{t=1}^{n}\left[P\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s}^{t-1} = U_{t-s}^{t-1}\right\} + \varepsilon(h\left\{x_t = u_t;\ X_{t-s^+}^{t-s-1} = U_{t-s^+}^{t-s-1}\right\} -\right.$$

$$\left. -P\left\{x_t = u_t; X_{t-s}^{t-1} = U_{t-s}^{t-1}\right\}\right]. \qquad (5)$$

Результат теоремы следует из представления (5), если сгруппировать члены при различных степенях ε.

Следствие. В частности, группируя члены при $\varepsilon^0,\varepsilon^1,\varepsilon^2,$ получаем, что

$$L\left\{u_1,\ldots,u_n;\, X_{1-s^+}^{0}\right\}=$$

$$=\prod_{t=1}^{n}P\left\{x_t=u_t;\, X_{t-s}^{t-1}=U_{t-s}^{t-1}\right\}+\varepsilon\sum_{t=1}^{n}\left\{h\left\{x_t=u_t;\, X_{t-s^+}^{t-s-1}=U_{t-s^+}^{t-s-1}\right\}-\right.$$

$$\left.-P\left\{x_t=u_t;\, X_{t-s}^{t-1}=U_{t-s}^{t-1}\right\}\right\}\prod_{k=1;k\neq t}^{n}P\left\{x_k=u_k;\, X_{k-s}^{k-1}=U_{k-s}^{k-1}\right\}+$$

$$+\varepsilon^2\sum_{t=1}^{n}\left\{h\left\{x_t=u_t;\, X_{t-s^+}^{t-s-1}=U_{t-s^+}^{t-s-1}\right\}-P\left\{x_t=u_t;\, X_{t-s}^{t-1}=U_{t-s}^{t-1}\right\}\right\}\times$$

$$\times\sum_{m=1;m\neq t;m>t.}^{n}\left\{h\left\{x_m=u_m;X_{m-s^+}^{m-s-1}=U_{m-s^+}^{m-s-1}\right\}-P\left\{x_m=u_m;\, X_{m-s}^{m-1}=U_{m-s}^{m-1}\right\}\right\}\times$$

$$\times\prod_{k=1;k\neq t;k\neq m}^{n}P\left\{x_k=u_k;\, X_{k-s}^{k-1}=U_{k-s}^{k-1}\right\}+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Модель дискретного временного ряда с ошибками регистрации состояний

Предположим, что вместо ряда x_t регистрируется дискретный временной ряд y_t, определяемый следующими соотношениями:

$$y_t=\begin{cases} x_t, \text{ с вероятностью 1, если } x_t\in\{0,N-1\},\\ x_t-1, \text{ с вероятностью } \varepsilon_-, \text{ если } x_t\in\{1,N-2\},\\ x_t, \text{ с вероятностью } 1-\varepsilon, \text{ если } x_t\in\{1,N-2\},\\ x_t+1, \text{ с вероятностью } \varepsilon_+, \text{ если } x_t\in\{1,N-2\},\end{cases}$$

где $\varepsilon=\varepsilon_++\varepsilon_-,\ \varepsilon\geq 0,\ \varepsilon_+\geq 0,\ \varepsilon_-\geq 0,\ 0\leq\varepsilon<1.$

Введем в рассмотрение события

$$H_{\varepsilon^-,v_i}=\{\text{искажение вида } v_i=x_i-1\},$$

$$H_{\varepsilon^+,v_i}=\{\text{искажение вида } v_i=x_i+1\},$$

$$H_{1-\varepsilon,v_i}=\{\text{нет искажения } v_i=x_i\}.$$

Тогда событие $(y_i=v_i)$ можно представить в виде:

$$(y_i=v_i)=A_{v_i}^{\varepsilon^-}\cup A_{v_i}^{1-\varepsilon}\cup A_{v_i}^{\varepsilon^+},$$

где

$$A_{v_i}^{\varepsilon^-} = \left(x_i = v_i + 1\right) \cap H_{\varepsilon^-, v_i},$$

$$A_{v_i}^{1-\varepsilon} = \left(x_i = v_i\right) \cap H_{1-\varepsilon, v_i},$$

$$A_{v_i}^{\varepsilon^+} = \left(x_i = v_i - 1\right) \cap H_{\varepsilon^+, v_i}.$$

Тогда

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(y_i = v_i)\right\} = P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\left(A_{v_i}^{\varepsilon^-} \cup A_{v_i}^{1-\varepsilon} \cup A_{v_i}^{\varepsilon^+}\right)\right\} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n = \varepsilon^+,\varepsilon^-,1-\varepsilon} P\left\{A_{v_1}^{\alpha_1} \cdots A_{n}^{\alpha_n}\right\}.$$

В последнем выражении

$$P\left\{A_{v_1}^{\alpha_1} \cdots A_{n}^{\alpha_n}\right\} = \prod_{i:\alpha_i = \varepsilon^-} P(H_{\varepsilon^-, v_i}) \cdot \prod_{i:\alpha_i = \varepsilon^+} P(H_{\varepsilon^+, v_i}) \prod_{i:\alpha_i = 1-\varepsilon} P(H_{\varepsilon^-, v_i}) \times$$

$$\times P\left(\bigcap_{i:\alpha_i = \varepsilon^-}(x_i = v_i + 1) \bigcap_{i:\alpha_i = 1-\varepsilon}(x_i = v_i) \bigcap_{i:\alpha_i = \varepsilon^+}(x_i = v_i - 1)\right).$$

Ясно, что эту вероятность можно вычислить с учетом того, что

$$P\left(H_{\varepsilon^-, v_i}\right) = \begin{cases} \varepsilon^-, \text{ если } v_i \in \{1, \ldots, N-2\} \\ 0, \text{ если } v_i = 0 \end{cases},$$

$$P\left(H_{1-\varepsilon, v_i}\right) = \begin{cases} 1-\varepsilon, \text{ если } v_i \in \{1, \ldots, N-2\} \\ 1, \text{ если } v_i \in \{0, N-1\} \end{cases},$$

$$P\left(H_{\varepsilon^+, v_i}\right) = \begin{cases} \varepsilon^+, \text{ если } v_i \in \{1, \ldots, N-2\} \\ 0, \text{ если } v_i = N-1 \end{cases},$$

а вероятности $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(x_i = v_i\right)\right)$ находятся по формуле умножения в соответствии с пунктом 1.

Библиографические ссылки

1. *Дуб Дж*. Вероятностные процессы. М., 1956.
2. *Харин Ю.С*., *Бодягин И.А*., *Вечерко Е.В*. Математичские основы теории информации. Минск : БГУ, 2018.