УДК 336.330.43 (45)

О РИСК-НЕЙТРАЛЬНЫХ МЕРАХ В ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

П. М. Лаппо

Белорусский государственный университет, пр. Независимости,4, 220030, г. Минск, Беларусь, lappopm@bsu.by

Рассматриваются подходы к построению риск нейтральной меры в некоторых моделях оценки финансовых активов. Рассмотрены дискретные однопериодные модели при известных функциях полезности инвесторов. Приводятся уравнения для оценки активов. Также рассмотрены модели с непрерывным временем. Показано применение преобразования Эсшера для построения риск-нейтральной меры.

Ключевые слова: риск-нейтральная мера, финансовая производная, функция полезности.

ON RISK-NEUTRAL MEASURES IN TEACHING THE THEORY OF VALUATION OF FINANCIAL ASSETS AND THEIR DERIVATIVES

P. M. Lappo

Belarusian State University, Nezavisimosti Av., 4, 220030, Minsk, Belarus, lappopm@bsu.by

Approaches to constructing a risk-neutral measure in some models of financial asset valuation. Discrete one-period models with known functions of investors' utility are considered. Equations for the valuation of assets are given. Continuous-time models are also considered. The use of the Esscher transform to construct a risk-neutral measure is shown.

Keywords: risk-neutral measure, financial derivative, utility function.

Введение

В настоящей статье будут описаны некоторые подходы к оцениванию финансовых производных, которые используются в лекциях на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного при чтении курсов «Инвестиции и управление портфелем ценных бумаг» и «Динамическая теория оценивания активов» для студентов специальности «Актуарная математика».

В современных финансах существуют два основных подхода к определению стоимостей ценных бумаг: безарбитражный и равновесный [1].

Безарбитражный подход широко используется в оценивании производных ценных бумаг. Он основан на принципе отсутствия арбитража, который постулирует, что на хорошо функционирующих финансовых рынках, две ценные бумаги, которые имеют одинаковые выплаты, должны продаваться по одинаковой цене. Это означает, что если мы можем сформировать выплаты ценной бумаги, используя ценные бумаги, которыми торгуют на рынке, то мы можем определить цену этой бумаги в терминах ценных бумаг, имеющихся на рынке. Например, в однопериодной модели, выплаты колл-опциона могут быть заменены портфелем, состоящим из лежащего в основе актива и безрисковой облигации. Инвестору должно быть безразлично, иметь ли на руках колл-опцион или соответствующий портфель, так как оба обеспечивают одинаковые выплаты в конце периода.

Равновесный подход обеспечивает более широкие возможности для анализа рынков и определения цен ценных бумаг. Он связывает цены с более фундаментальными экономическими концепциями в том смысле, что он проясняет происхождение цен. Следовательно, чтобы применить этот подход мы должны рассмотреть более широкую структуру, чем при арбитражном подходе, который рассматривает цены как данные.

При однопериодной равновесной модели мы предполагаем, что множество лиц (экономических агентов) торгуют ценными бумагами. Характеристики этих ценных бумаг фиксированы вначале. Каждый агент имеет начальные ресурсы или капитал. Мы предполагаем, что существует финансовый рынок, где агенты покупают и продают ценные бумаги. Агенты максимизируют свой капитал путем торговли доступными ценными бумагами. Равновесные цены возникают в результате оптимальных действий всех агентов на рынке. Равновесие достигается тогда, когда цены становятся такими, что ожидаемая полезность каждого агента является максимальной. При установившемся равновесии цены являются такими, что ни один агент не имеет намерений торговать по этим ценам. Равновесные цены имеют отношение к таким атрибутам агентов в экономике, как капиталы, ожидания, предпочтения, а также к типу и структуре продаваемых ценных бумаг. Если изменяется один из атрибутов, то это, вообще говоря, приводит к изменению равновесных цен. Если рынок находится в равновесии, то интуитивно мы понимаем, что не должно быть арбитражных возможностей. Если множество цен допускает арбитраж, то агенты способны улучшить свое положение за нулевую стоимость. Это противоречит тому, что при равновесии полезности агентов уже максимизированы. Следовательно, оба подхода приводят к состоятельному ценообразованию.

Одноериодная модель рынков ценных бумаг

В этом разделе, мы используем одноериодную модель рынка ценных бумаг со следующими характеристиками:

- в модели отсутствует производство. Такие модели известны под названием биржевые экономики;
- существует единственный продукт, который не может накапливаться. Мы используем этот продукт как единицу измерений;
- ценная бумага представляет собой контракт, который определяет размер потребления в каждом будущем состоянии;
- ценные бумаги свободны от риска неуплаты;
- агенты максимизируют их ожидаемую полезность потребления торгуя доступными ценными бумагами на рынке;
- равновесные цены являются результатом действий всех агентов модели.

В момент 1, состояние экономики выражается множеством исходов $\omega \in \Omega$. Предположим, что существует N ценных бумаг, которые характеризуются своими выплатами в момент 1. Существует единственный продукт, в единицах которого мы измеряем все цены и выплаты. Выплата ценной бумаги j в состоянии ω в момент 1 равна $X_j(\omega)$. Мы в дальнейшем предполагаем, что отсутствует риск неуплаты.

Мы предполагаем, что агенты принимают решения с целью максимизировать свои индивидуальные ожидаемые полезности. Каждый агент вычисляет математическое ожидание, используя свою собственную вероятностную меру. Удобно выделить два случая. В первом случае агенты имеют различные (гетерогенные) ожидания. Агент с номером i приписывает свои субъективные вероятности $p_i(\omega)$ состоянию ω. Во втором случае, агенты имеют одинаковые (однородные) ожидания. Каждый агент приписывает одну и ту же вероятность $p(\omega)$ состоянию ω. Мы обозначим эту вероятностную меру P и будем называть ее естественной мерой или физической мерой.

В оставшейся части этого раздела будем полагать, что агенты имеют гетерогенные ожидания. Агент i предполагается имеющим функцию полезности

$$u_i\left(c_{i0},C_{i1}\right)=u_{i0}\left(c_{i0}\right)+u_{i1}\left(C_{i1}\right),$$

где u_{i0} и u_{i1} – возрастающие выпуклые вверх и дважды дифференцируемые функции. При этих предположениях, ожидаемая полезность для агента i равна

$$Eu_i\left(c_{i0},C_{i1}\right)=u_{i0}\left(c_{i0}\right)+\sum_{\omega} p_i\left(\omega\right)\cdot u_{i1}\left(C_{i1}\left(\omega\right)\right).$$

Мы полагаем, что каждый агент уже сделал оптимальный выбор. Результатом таких решений являются равновесные цены. Когда система находится в равновесии, цены и распределение потребления являются такими, что ожидаемая полезность каждого агента максимальна при этих ценах и распределении потребления. Это означает, что при этих ценах для агентов не имеет смысла осуществлять торговлю. Мы, опираясь на этот факт, можем получить формулу для цены для i-го агента. Во-первых, обозначим оптимальный способ потребления в равновесии через $\left\{c_{i0}^{\bullet},C_{i1}^{\bullet}\right\}$. Далее рассмотрим ценную бумагу j с настоящей ценой x_j.

Мы будем опираться на тот факт, что агент уже принял оптимальное инвестиционное решение. По определению любое уклонение от этой позиции не является оптимальным. Если агенту предлагается купить любое количество α этой ценной бумаги в момент 0, то оптимальный выбор будет $\alpha=0$.

Предположим, что агент покупает α штук ценной бумаги x_j в момент 0. Тогда агент будет иметь потребление $c_{i0}^{*}-\alpha\cdot x_j$ в момент 0 и $C_{i1}^{*}+\alpha\cdot X_j\left(\omega\right)$ в момент 1 в состоянии ω. С учетом этих новых инвестиций и плана потребления ожидаемая полезность агента становится равной

$$Eu_i\left(c_{i0}^{*}-\alpha\cdot x_j,C_{i1}^{*}+\alpha\cdot X_j(\omega)\right)=u_{i0}\left(c_{i0}^{*}-\alpha\cdot x_j\right)+$$
$$+\sum_{\omega} p_i(\omega)\cdot u_{i1}\left(C_{i1}^{*}+\alpha\cdot X_j(\omega)\right).$$

Взяв производную от этого выражения по α, и приравняв производную к нулю, мы получим, что

$$x_j=\sum_{\omega} p_i(\omega)\frac{u_{i1}'(C_{i1}^{*}(\omega))}{u_{i0}'(c_{i0}^{*})}X_j(\omega)=E^{(P_i)}[Z_i\cdot X_j] \qquad (1)$$

где $Z_i = \dfrac{u'_{i1}(C^*_{i1}(\omega))}{u'_{i0}(c^*_{i0})}$. Последнее равенство показывает, что настоящая стоимость ценной бумаги равна математическому ожиданию произведения будущей выплаты и случайной величины Z_i. Эта случайная величина равна маргинальной интенсивности замещения агента. Математическое ожидание в (1) берется по субъективной вероятностной мере отдельного агента.

Уравнение (1) представляет важный результат оценивания и формирует основу для многих современных моделей оценивания активов. Заметим, что при выводе этого результата, мы не делали никаких предположений о полноте рынка ценных бумаг. То есть, он остается в силе для неполных рынков. Равновесный подход требует большей информации, но взамен он являет собой более мощное средство оценивания.

При наличии безрискового актива, в предположении однородных ожиданий, стоимость j-той ценной бумаги через соответствующую риск нейтральную вероятностную меру выражается в виде

$$x_j = \frac{1}{1+i_f}\sum_{\omega} q(\omega) X_j(\omega) = \frac{E^Q[X_j]}{1+i_f},$$

где

$$q(\omega) = (1+i_f)\, p(\omega) Z(\omega),$$

для всех $\omega \in \Omega$, а i_f – безрисковая процентная ставка.

При безарбитражном подходе стоимости ценных бумаг в момент 0 можно представить в виде

$$S(0) = \left[S_1(0), S_2(0), \ldots, S_N(0)\right],$$

а в момент 1 в виде матрицы

$$S(1,\Omega) = \begin{bmatrix} S_1(1,\omega_1) & S_2(1,\omega_1) & \ldots & S_N(1,\omega_1) \\ S_1(1,\omega_2) & S_2(1,\omega_2) & \ldots & S_N(1,\omega_2) \\ . & . & . & . \\ S_1(1,\omega_M) & S_2(1,\omega_M) & \ldots. & S_N(1,\omega_M) \end{bmatrix}.$$

Вектор цен состояний (state price vector) определяется как строго положительный вектор $\psi = (\psi(w_1),...,\psi(w_m))$, для которого выполняется следующее соотношение:

$$S(0) = \psi \cdot S(1,\Omega).$$

При наличии безрискового актива стоимость любой ценной бумаги с достижимыми выплатами X в момент 1 будет определяться соотношением

$$\pi = \psi \cdot X.$$

При наличии безрискового актива эта стоимость может быть выражена через риск нейтральную меру в виде

$$\pi = \frac{1}{1+i_f}\sum_{\omega} q(\omega)X(\omega) = \frac{E^Q[X]}{1+i_f},$$

где $q(\omega) = \left(1+i_f\right)\psi(\omega)$.

При этом, в соответствии в фундаментальной теоремой оценки активов отсутствие арбитража равносильно существованию вектора цен состояний (риск-нейтральной меры), а полнота рынка – единственности вектора цен состояний (риск-нейтральной меры).

Модели с непрерывным временем

В случае непрерывного времени хорошо известна модель Блэка-Шоулза[4]. В этой модели логарифм цены акции по риск-нейтральной мере является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ и $\sigma^2 t$, где r – безрисковая процентная ставка, а σ^2 – волатильность. Имеются ряд обобщений формулы Блэка-Шоулза и предположений, при которых она получена. Можно сослаться на учебник Г.А. Медведева [3] и недавнюю работу Siu T.K. [5], в которой в отличие от стандартных предположений модели Блэка-Шоулза рассматривается модель с учетом стоимости сделок и сменой состояний рынка, которая моделируется цепью Маркова.

Эффективным методом для определения стоимости производных ценных бумаг является преобразования Эсшера (Esscher tramsform). Оно может применяться в ситуациях, когда логарифмы цен базовых (первичных) ценных бумаг являются определенными процессами со стационарными и независимыми приращениями [2,3]. В этом случае для того, чтобы цены акций в модели были внутренне состоятельными, мы ищем такое $h = h^*$, чтобы процесс дисконтированной цены акции $\{S(t)\exp(-rt), t \geq 0\}$ являлся мартингалом по отношению к вероятностной мере, соответствующей значению параметра h^*. Параметр h^* находится из равенства

$$r = \ln\left[M(1,1,h^*)\right],$$

где r – постоянная безрисковая ставка, $M(1,1,h^*)$ – производящая функция моментов преобразования Эсшера для процесса $X(t)$ такого, что

$$S(t) = S(0)\exp\left(X(t)\right).$$

При этом предполагается, что $X(t)$ – стационарный случайный процесс с независимыми приращениями и $X(0)=0$. В этом случае стоимость европейского опциона-колл с ценой исполнения K с датой погашения τ равна

$$S(0)\left[1 - F(K,\tau,h^*+1)\right] - e^{-r\tau}K\left(1 - F(K,\tau,h^*)\right), \qquad (2)$$

где

$$dF(x,t;h) = \frac{(e^{hx}dF(x,t))}{M(h,t)},$$

а $F(x,t) = P\left(X(t) \leq x\right)$. Из формулы (2) следует классическая формула Блэка-Шоулза. Когда логарифм цены акции представляет собой сдвинутый пуассоновский процесс вида

$$X(t) = k\,N(t) - ct,$$

где $\{N(t)\}$ – процесс Пуассона с параметром λ, а k и c положительные константы. В этом случае преобразование Эсшера приводит к сдвинутому процессу Пуассона с параметром λe^{hk}. В этом случае стоимость финансовых производных определяется согласно сдвинутому пуассоновскому параметру

$$\lambda^* = \frac{r+c}{e^k - 1}.$$

В этом случае цена европейского опциона-колл в соответствии с (2) имеет вид

$$S(0)\left[1-\Lambda\left(\frac{k+c\tau}{k};\lambda^* e^k\tau\right)\right]-e^{-r\tau}K\left(1-\Lambda\left(\frac{k+c\tau}{k};\lambda^*\tau\right)\right),$$

где $\Lambda(n;\theta)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\theta^j}{j!}.$

Пусть логарифм цены акции является сдвинутым гамма-процессом

$$X(t)=Y(t)-ct,$$

где $\{Y(t)\}$ – гамма-процесс с параметрами α и β, а $c>0$ – положительная константа. В этом случае h^* определяется из соотношения

$$e^r=\left(\frac{\beta-h^*}{\beta-h^*-1}\right)^{\alpha}e^{-c}.$$

Тогда, полагая $\beta^*=\beta-h^*$, стоимость европейского опциона-колл равна

$$S(0)\left[1-G(k+c\tau;\alpha\tau,\beta^*-1)\right]-e^{-r\tau}K\left(1-G(k+c\tau;\alpha\tau,\beta^*)\right),$$

где $G(y;\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^y t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt,\ y\geq 0.$

Предположим, что логарифм цены – обратный гауссовский процесс с параметрами *a* и *b*. Обозначим $J(x;a,b)$ функцию распределения обратного гауссовского процесса

$$J(x;a,b)=\Phi\left(\frac{-a}{2x}+\sqrt{2bx}\right)+e^{2a\sqrt{b}}\Phi\left(\frac{-a}{2x}-\sqrt{2bx}\right),$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального закона. В этом случае стоимость европейского опциона-колл равна

$$S(0)\left[1-J(k+c\tau;\alpha\tau,b^*-1)\right]-e^{-r\tau}K\left(1-J(k+c\tau;\alpha\tau,b^*)\right),$$

где $b^*=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{c+r}+\frac{c+r}{a}\right)^2.$

Существуют и другие подходы к оцениванию финансовых активов и их производных [6].

Библиографические ссылки

1. *Boyle P.P* **[***et. all*] Financial Economics with Applications to Investments, Insurance and Pensions // The Actuarial Foundation, Schaumburg, Illinois. 1998. 670 P.

2. *Gerber H.U.*, *Shiu E.S*. Option Pricing by Esscher Transforms //Transactions of Society Actuaries. 1994. Vol. XLVI.P. 99–191.

3. *Медведев Г.А*. Математические основы финансовой экономики: учебник – Минск : БГУ, 2011.

4. *Black F*., *Schoules M.* The pricing of option and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973.Vol. 81, No. 3. P. 637–659.

5. *Siu T.K*. European option pricing with market frictions, regime switches and model uncertainty // Insurance: Mathematics and Economics. 2023, Vol.113. P.233–250.

6. *Dybvig P. H.* Distributional Analysis of Portfolio Choice // Journal of Business. 1988. Vol.61. P. 369–393.