УДК 519.872

НАХОЖДЕНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ G-СЕТИ С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ РАЗНОТИПНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И СИГНАЛАМИ

Д.Я. Копать

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь, dk80395@mail.ru

Статья посвящена нахождению ожидаемых доходов в системах G-сети с нетерпеливыми разнотипными положительными заявками и сигналами в случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами (СВ) с известными моментами первого и второго порядков, а системы сети функционируют в режиме насыщения. Дисциплина обслуживания – случайный выбор заявок из очереди.

Ключевые слова: G-сеть; нетерпеливые заявки; сигналы; ожидаемый доход; режим насыщения.

FINDING EXPECTED REVENUES OF G-NETWORK WITH MULTIPLE TYPE INPATIENT POSITIVE CUSTOMERS AND SIGNALS

D. Kopats

Grodno State Univercity of Yanka Koupala, str. Orzeshko, 22, 230023, .city Grodno, Belarus, dk80395@mail.ru

The article is devoted to finding the expected revenue in G-network systems with impatient multiple types positive customers and signals in the case when the revenue from transitions between network states are random variables (RV) with known moments of the first and second orders, and the network systems operate in saturation mode. Service discipline is a random selection of applications from the queue.

Keywords: G-network; inpatient customers; signals;expected revenue; saturation mode.

Рассмотрим открытую G-сеть [1,2] с n однолинейными СМО, в которую поступают положительные заявки и сигналы r типов. В СМО S_i из внешней среды поступают независимые простейшие потоки положительных заявок и сигналов типа c с интенсивностями соответственно

λ_{0ic}^{+} и $\lambda_{0ic}^{(1)}$, $i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$. Длительности обслуживания положительных заявок типа c в СМО S_i распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_{ic}, $i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$. Каждая положительная заявка типа c, находящаяся в системе, имеет время ожидания, ограниченное экспоненциально распределенной СВ с параметром $\theta_{ic}(k_{ic})$, где k_{ic} – количество положительных заявок типа c в i-ой СМО и не зависит от иных факторов, $i=\overline{1,n}$.

Сигнал, поступающий в систему, увеличивает их число в системе на единицу. Каждый сигнал, находящийся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром μ_{ic}^{-} для $l_{ic}\geq 1$, где l_{ic} – число отрицательных заявок типа c в i-й СМО и 0 в противном случае. После окончания времени ожидания в i-й СМО сигнал типа c с вероятностью $\bar{q}_{ic0}$ уменьшает число положительных заявок своего типа на единицу, если в системе они имеются, и не производит никаких воздействий на СМО, в противном случае или с вероятностью $\bar{q}_{icjs}$ переместит заявку в j-ую СМО в качестве положительной заявки типа s.

Заявки выбираются на обслуживание случайным образом. Если в момент времени t на обслуживании в i-й СМО находится положительная заявка типа c, то на интервале $[t, t+\Delta t)$ она закончит обслуживание с вероятностью $M_{ic}(\vec{k})\Delta t + o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$, $M_{ic}(\vec{k}) = \mu_{ic}\dfrac{k_{ic}+1}{\sum_{c=1}^{r} k_{ic}+1}$. Если на интервале времени $[t, t+\Delta t)$ время ожидания заявки типа c в очереди i-й СМО истекло, то она уходит из очереди с вероятностью $\theta_{ic}(k_{ic})\Delta t + o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$. Кроме того, положительная заявка типа c, время ожидания которой в очереди i-й СМО истекло, переходит в j-ю систему с вероятностью q_{icjs}^{+} как положительная заявка типа s, а с вероятностью q_{icjs}^{-} как сигнал типа s, и с вероятностью $q_{ic0} = 1 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\left(q_{icjs}^{+} + q_{icjs}^{-}\right)$ уходит из сети, $i, j=\overline{1,n}$. В случае однотипных заявок с сигналами, но с терпеливыми заявками данная сеть исследовалась в статье [3], в случае однотипных нетерпеливых заявок данная сеть исследовалась в работе [4]. G-сеть с разнотипными заявками, доходы и некоторыми особенностями исследовалась только методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов [5-6]. В данной статье G-сеть с разнотипными заявками и доходами в случае, когда доходы от переходов сети в другое является случайной величиной исследуется впервые.

Под состоянием сети в момент времени t будем понимать вектор

$$\left(\vec{k},\ \vec{l},\ t\right)=\left(k_{11},...,k_{1r},k_{21},...,k_{2r},...,k_{n1},...,k_{nr},l_{11},...,l_{1r},l_{21},...,l_{2r},...,l_{n1},...,l_{nr},t\right), \quad (1)$$

образующий однородную ЦМ с непрерывным временем и счетным числом состояний. Рассмотрим динамику изменения доходов i-й СМО сети, $i=\overline{1,n}$. Пусть доход этой СМО в начальный момент времени был равен $v_{i0}, i=\overline{1,n}$. Нам нужно найти доход системы $V_i(t)$ в момент времени t, $i=\overline{1,n}$. Доход i-й СМО в момент времени $t+\Delta t$ можно записать в виде

$$V_i\left(t+\Delta t\right)=V_i\left(t\right)+\Delta V_i\left(t,\Delta t\right), \quad (2)$$

где $\Delta V_i\left(t,\Delta t\right)$ – изменение дохода i-ой системы на интервале времени $\left[t,t+\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$. Возможны следующие переходы нашей ЦМ в состояние $\left(\vec{k},\vec{l},t+\Delta t\right)$ за малое время Δt:

1) в i-ю СМО из внешней среды за время Δt поступит положительная заявка типа c с вероятностью $\lambda_{0ic}^{+}u\left(k_{ic}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; доход i-й СМО увеличится на r_{0ic}^{+}, где r_{0ic}^{+} – СВ с м. о. $M\left\{r_{0ic}^{+}\right\}=a_{0ic}$, $i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$.

2) в i-ю СМО за время Δt из внешней среды поступит сигнал типа c с вероятностью $\lambda_{0ic}^{(1)}u\left(l_{ic}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$;

3) положительная заявка типа с после обслуживания или по истечении времени ожидания в i-й СМО покинет сеть с вероятностью $\left(M_{ic}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)p_{ic0}+\theta_{ic}\left(k_{ic}+1\right)q_{ic0}\right)\Delta t+o\ (\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$; убыток i-й СМО составит R_{ic0}^{+}, где R_{ic0}^{+} – СВ с м. о. $M\left\{R_{ic0}^{+}\right\}=b_{ic0}^{+}$, $i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$.

4) по окончании времени ожидания в i-й СМО сигнал типа c уничтожает в этой СМО положительную заявку этого же типа, вероятность такого события равна $\mu_{ic}^{-}\overline{q}_{i0}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; доход для i-й системы уменьшится на R_{ic0}^{-}, где $M\left\{R_{ic0}^{-}\right\}=b_{ic0}^{-}$, $i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$.

5) по окончании времени ожидания в i-й СМО сигнал типа c пере-

мещает положительную заявку этого же типа в j-ую СМО в качестве заявки типа s, вероятность такого события равна $\mu_{ic}^{-}\left(l_{ic}+1\right)\bar{q}_{icjs}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; доход для i-й системы уменьшится на R_{icjs}^{-}, где $M\left\{R_{icjs}^{-}\right\}=b_{icjs}^{-}$, $i,j=\overline{1,n},s,c=\overline{1,r}$.

Аналогично, когда время ожидания сигнала типа s в j-й СМО закончилось, и он перемещает в i-ю СМО как положительную заявку типа с, доход i-й СМО увеличится на величину R_{jsic}^{+}.

6) в i-й СМО время ожидания сигнала закончилось, если в момент времени t в ней отсутствовали положительные заявки; вероятность этого события равна $\mu_{i}^{-}\left(l_{i}+1\right)\left(1-u\left(k_{i}\right)\right)\Delta\, t+o\,\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$;

7) время обслуживания или ожидания положительной заявки типа c в i-й СМО закончилось, и она переходит в j-ю СМО опять как положительная заявка типа s с вероятностью

$$\left(M_{ic}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)p_{icjs}^{+}+\theta_{ic}\left(k_{ic}+1\right)q_{icjs}^{+}\right)u\left(k_{js}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ i,j=\overline{1,n},s,c=\overline{1,r};$$

доход i-й СМО уменьшится на величину R_{icjs}^{+}, а доход j-й СМО увеличится на эту величину, где $M\left\{R_{icjs}^{+}\right\}=a_{icjs}^{+}$, $i,j=\overline{1,n},s,c=\overline{1,r},\ i\neq j$.
Аналогично, когда время обслуживания или ожидания положительной заявки типа s в j-й СМО закончилось, и она переходит в i-ю СМО опять как положительная заявка типа c, доход i-й СМО увеличится на величину R_{jsic}^{+}.

8) при этом время обслуживания или ожидания положительной заявки типа c в i-й СМО закончилось, и она переходит в j-ю СМО как сигнал типа s; вероятность такого события будет равна $\left(M_{ic}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)p_{icjs}^{-}+\theta_{ic}\left(k_{ic}+1\right)q_{icjs}^{-}\right)u\left(l_{js}\right)\Delta t+o\,\left(\Delta t\right)$, $i,j=\overline{1,n},s,c=\overline{1,r}$; доход i-й СМО уменьшится на величину R_{icjs}^{-}, а доход j-й СМО не изменится, где $M\left\{R_{icjs}^{-}\right\}=a_{icjs}^{-}$, $i,\ j=\overline{1,n},s,c=\overline{1,r},\ i\neq j$.

9) при этом в каждую i-ю СМО, $i=\overline{1,n}$, не поступают ни положительные заявки, ни сигналы, и в них за время Δt не обслужилось ни одной заявки, не уйдет из очереди ни одной отрицательной заявки; вероятность такого события равна доход i-й СМО может увеличиться на вели-

чину $r_i\Delta t,$ где $M\{r_i\}=c_i$, $i=\overline{1,n}$.

$$1-\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\lambda_{0ic}^{+}+\lambda_{0ic}^{-}+\left(M_{ic}\left(k_{ic}\right)+\theta_{ic}\left(l_{ic}\right)\right)\ +\mu_i^{-}\left(l_{ic}\right)\right]\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ i=\overline{1,n};$$

10) из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Предположим, что в любой момент времени СВ r_{0i}, R_{i0}, R_{i0}^{-}, R_{ij}, R_{ij}^{-} не зависят от СВ r_i. Тогда получим, что изменение дохода *i*-й системы на интервале $[t, t+\Delta t]$ представимо в виде:

$$\Delta V_i\left(t,\Delta t\right)=\begin{cases}
r_{0ic}^{+}+r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}\ \lambda_{0ic}^{+}u\left(k_i\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\\
-R_{ic0}^{+}+r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}\left(M_{ic}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)p_{ic0}+\theta_{ic}\left(k_{ic}+1\right)q_{ic0}\right)\Delta t+o\ (\Delta t),\\
-R_{ic0}^{-}+r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}\ \mu_{ic}^{-}\left(l_{ic}+1\right)\bar{q}_{ic0}\Delta t+o\left(\Delta t\right),\\
-R_{icjs}^{-}+r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}\ \mu_{ic}^{-}\left(l_{ic}+1\right)\bar{q}_{icjs}\Delta t+o\left(\Delta t\right),\\
R_{icjs}^{-}+r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}\ \mu_{js}^{-}\left(l_{js}+1\right)\bar{q}_{jsic}\Delta t+o\left(\Delta t\right),\\
R_{icjs}^{+}+r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}\left(M_{ic}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)p_{icjs}^{+}+\theta_{ic}\left(k_{ic}+1\right)q_{icjs}^{+}\right)\times\\
\times u\left(k_{js}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ j=\overline{1,n},\ s,c=\overline{1,r}\ \ j\neq i,\\
R_{jsic}^{+}+r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}\left(M_{js}\left(\vec{k}+I_{js}\right)p_{jsic}^{+}+\theta_{js}\left(k_{js}+1\right)q_{jsic}^{+}\right)\times\\
\times u\left(k_{ic}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ j=\overline{1,n},\ j\neq i,\\
-R_{icjs}^{-}+r_i\Delta t\ c\text{вер.}\left(M_{ic}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)p_{icjs}^{-}+\theta_{ic}\left(k_{ic}+1\right)q_{icjs}^{-}\right)\times\\
\times u\left(l_{js}\right)\Delta t+o\ \left(\Delta t\right),\ j=\overline{1,n},\ s,c=\overline{1,r},\ j\neq i,\\
r_i\Delta t\ c\ \text{вер.}1-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\left\{\lambda_{0js}^{+}+\lambda_{0js}^{-}+\left(M_{js}\left(\vec{k}\right)+\theta_{js}\left(l_{js}\right)\right)u\left(k_i\right)+\mu_{js}^{-}\left(l_{js}\right)\right\}\times\\
\times\Delta t+o\left(\Delta t\right).
\end{cases}$$

Будем считать, что длительности ожидания сигналов в *i*-й СМО имеют экспоненциальное распределение с параметрами μ_i^{-} соответственно, а длительности ожидания в *i*-й СМО отрицательных заявок – экспоненциальное распределение с параметром μ_i^{-}. В этом случае $\theta_{ic}\left(k_{ic}\right)=\theta_{ic}u\left(k_{ic}\right),\ i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$..

Из практических соображений можно считать, что все величины r_{0ic}^{+}, R_{ic0}^{+}, $R_{ic0}^{-}, R_{icjs}^{-}$, R_{icjs}^{+}, r_{jsic}^{+}, R_{icjs}^{-}, r_i, $i,j=\overline{1,n}, i\neq j$, ограничены. Тогда с учетом (1) и (2) и в предложении функционирования сети в режиме насыщения, т. е. когда $k_{ic} > 0$ для м. о. можно записать:

$$M\left\{\Delta V_i(t,\Delta t)\right\} = \sum_{c=1}^{r}\Big[\left(a_{0ic} + c_i\Delta t\right)\left(\lambda_{0ic}^{+}\Delta t + o(\Delta t)\right) +$$

$$+\left(-b_{ic0}^{+} + c_i\Delta t\right)\left(\left(M_{ic}(\vec{k} + I_{ic})p_{ic0} + \theta_{ic}k_{ic}q_{ic0}\right)\Delta t + o(\Delta t)\right) +$$

$$+\left(-b_{ic0}^{-} + c_i\Delta t\right)\left(\mu_{ic}^{-}\overline{q}_{ic0}\Delta t + o(\Delta t)\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(-b_{icjs}^{-} + c_i\Delta t\right)\left(\mu_{ic}^{-}\overline{q}_{icjs}\Delta t + o(\Delta t)\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(b_{icjs}^{-} + c_i\Delta t\right)\left(\mu_{js}^{-}\overline{q}_{jsic}\Delta t + o(\Delta t)\right) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\left[\left(-a_{icjs}^{+} + c_i\Delta t\right)\left(\left(M_{ic}(\vec{k} + I_{ic})p_{icjs}^{+} + \theta_{ic}q_{icjs}^{+}\right)\Delta t + o(\Delta t)\right)\right] +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\left[\left(a_{jsic}^{+} + c_i\Delta t\right)\left(\left(M_{js}(\vec{k} + I_{js})p_{jsic}^{+} + \theta_{js}q_{jsic}^{+}\right)\Delta t + o(\Delta t)\right)\right] +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\left[\left(-a_{icjs}^{-} + c_i\Delta t\right)\left(\left(M_{ic}(\vec{k} + I_{ic})p_{icjs}^{-} + \theta_{ic}q_{icjs}^{-}\right)\Delta t + o(\Delta t)\right)\right] +$$

$$+c_i\Delta t\left(1 - \sum_{c=1}^{r}\left\{\lambda_{0ic}^{+} + \lambda_{0ic}^{-} + M_{ic}\left(\vec{k}\right) + \theta_{ic} + \mu_{ic}^{-}\right\}\Delta t + o(\Delta t)\right) =$$

$$= c_i + \sum_{c=1}^{r}\left[a_{0ic}\lambda_{0ic}^{+} - b_{ic0}^{+}\left(M_{ic}(\vec{k} + I_{ic})p_{ic0} + \theta_{ic}k_{ic}q_{ic0}\right) - b_{ic0}^{-}\mu_{ic}^{-}\overline{q}_{ic0}\right] +$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(b_{icjs}^{-}\mu_{ic}^{-}\overline{q}_{icjs} + b_{icjs}^{-}\mu_{js}^{-}\overline{q}_{jsic} + a_{icjs}^{+}M_{ic}(\vec{k} + I_{ic})p_{icjs}^{+} +\right.$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\left[a_{jsic}^{+}\left(M_{js}(\vec{k} + I_{js})p_{jsic}^{+} + \theta_{js}q_{jsic}^{+}\right)\right] -$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\left[a_{icjs}^{-}\left(M_{ic}(\vec{k} + I_{ic})p_{icjs}^{-} + \theta_{ic}q_{icjs}^{-}\right)\right].$$

Для нахождения $\rho_{ic} = M\left\{\dfrac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{c=1}^{r} k_{ic}+1}\right\}$, которое мы аппроксимируем выражением $\rho_{ic} = \dfrac{N_{ic}}{\sum\limits_{c=1}^{r} N_{ic}}$, $N_{ic} = M\{k_{ic}\}$, необходимо решить следующую системы нелинейных уравнений

$$\rho_{ic} = \frac{\lambda_{0ic}^{+} - \mu_{ic}^{-} - \mu_{ic}\rho_{ic} - \theta_{ic} + \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{js}\rho_{js}\left(p_{jsic}^{+} - p_{jsic}^{-}\right) + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{js} q_{jsic}}{\sum\limits_{c=1}^{r}\left(\lambda_{0ic}^{+} - \mu_{ic}^{-} - \mu_{ic}\rho_{ic} - \theta_{ic} + \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{js}\rho_{js}\left(p_{jsic}^{+} - p_{jsic}^{-}\right) + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{js} q_{jsic}\right)}$$

Библиографические ссылки

1. *Gelenbe E.* Product form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. Vol. 28. P. 656–663.
2. *Matalytski M., Naumenko V.* Non-stationary analysis of queueing network with positive and negative messages // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2013. Vol. 12, No 2. P. 61–71.
3. *Науменко В. В., Маталыцкий М.А.* Исследование и применение G-сети с доходами и сигналами со случайным временем активизации // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2014. № 3. С. 142–152.
4. *Naumenko V., Matalytski M., Kopats D.* Analysis of queueing network with random waiting time of negative customers at non-stationary regime // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2016. Vol. 15, № 3. P. 87–100.
5. *Маталыцкий М. А., Копать Д.Я.* Анализ в переходном режиме сети с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками различных типов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 42. С. 60–71.
6. *Копать Д. Я., Маталыцкий М.А.* Анализ сети с положительными заявками и сигналами различных типов в переходном режиме // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Естественные науки. 2018. № 3 (108). С. 131–136.