

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король



15 июля 2024 г.

Регистрационный №УД- 13559/уч.

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 09-2021, и учебного плана № G31-1-019/уч. от 25.05.2021, № G31-1-004/уч.ин. от 31.05.2021, № G31-1-222/уч. от 22.03.2022, № G31-1-226/уч.ин. от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

А. Э. Малевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Н. Л. Щеглова, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Е. А. Крушевский, доцент кафедры математические методы в строительстве Белорусского национального технического университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ
(протокол № 12 от 25.04.2024)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой дифференциальных
уравнений и системного анализа,
к. ф.-м. н., доцент



Л. Л. Голубева

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Вейвлет-анализ является сравнительно молодым, но в то же время бурно развивающимся разделом теоретической и прикладной математики, современным дополнением ставшему классикой анализу Фурье и даёт более гибкую технику обработки сигналов как аналоговых, так и цифровых. Одно из преимуществ вейвлет-анализа заключается в том, что он позволяет заметить локализованные изменения характеристик сигнала, тогда как анализ Фурье этого не даёт, поскольку отражает поведение сигнала за все время его существования.

Отправной точкой в систематическом изучении вейвлет-анализа и базисов вейвлетов считается работа Маллата, в которой было введено понятие кратно-масштабного анализа и намечен общий подход к построению базисов вейвлетов. Вейвлет-анализ оказался одинаково продуктивным как для чисто теоретических вопросов, так и для прикладных. Показано, что существует множество базисов, хорошо локализованных по пространству, чьи преобразования Фурье также хорошо локализованы.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – подготовка специалиста, обладающего достаточными компетенциями в области обработки сигналов и анализа данных.

Образовательная цель: формирование у студентов знаний, умений, навыков по теории сигналов для освоения тех математических методов и построения компьютерных моделей, которые лежат в основе современных алгоритмов обработки сигналов и анализа данных.

Развивающая цель: формирование у студентов умений использования современных методов анализа, необходимых для будущей профессиональной деятельности.

Задачи учебной дисциплины:

1. приобретение навыков использования математических и компьютерных методов анализа и обработки сигналов;
2. формирование знаний в области теории кратно-масштабного анализа;
3. приобретение навыков применения вейвлет-преобразований при решении определённого круга прикладных задач;
4. формирование у студентов способности самостоятельно конструировать и использовать вейвлет-семейства;
5. развитие способностей самостоятельного приобретения знаний в области математики, анализа данных и информационных технологий и дальнейшего их использования при построении и анализе математических и компьютерных моделей для широкого круга прикладных задач;
6. освоение студентами теоретического материала, включённого в цикл лекций;
7. выполнение студентами предусмотренных рабочей программой лабораторных работ;
8. активная самостоятельная работа студентов, включая выполнение домашних заданий, других учебных заданий, курсовых работ;
9. своевременный контроль текущей и промежуточной успеваемости;

10. составление и подготовка к публикации научных обзоров, рефератов, библиографий, научно-технических отчётов по тематике выполняемых проектов.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина «Вейвлет-анализ» относится к дисциплинам по выбору модуля «Анализ данных» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины «Вейвлет-анализ» с знаниями, умениями и навыками, полученными при изучении дисциплин: «Компьютерная математика» «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ» и «Функциональный анализ»

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Вейвлет-анализ» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

специализированные компетенции:

осуществлять полный цикл анализа данных с применением машинного обучения.

универсальные компетенции:

владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации.

решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- теорию и методы кратко-масштабного анализа и синтеза сигналов;
- алгоритмы дискретного вейвлет-преобразования;

уметь:

- анализировать, сравнивать, распознавать и синтезировать сигналы;
- конструировать вейвлет семейства;
- конструировать различные схемы дискретного вейвлет-преобразования и применять их в практических задачах;

– пользоваться системой компьютерной математики «Wolfram Mathematica»;

– самостоятельно расширять компьютерные математические знания с дальнейшим их использованием при построении и анализе математических и компьютерных моделей широкого круга теоретических и прикладных задач;

владеть:

- методами выделения главных компонент сигнала;
- приёмами исследования проблем анализа и обработки данных с использованием математических компьютерных приложений;

– навыками работы с системой компьютерной математики «Wolfram Mathematica».

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Вейвлет-анализ» изучается в 7-м семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Вейвлет-анализ» отведено для очной формы получения высшего образования: 200 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 36 часов. **Из них:**

Лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоёмкость учебной дисциплины составляет 6 зачётных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачёт и экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Сигналы

Тема 1.1. Сравнение сигналов. Колебания

Сигнал. Дискретный и непрерывный сигналы. Тренд, колебания, шум. Ковариация и корреляция сигналов. Функция автокорреляции. Свертка сигналов, фильтры. Частотно-временные характеристики сигнала. Теорема Котельникова. Анализ сигнала. Выделение тренда и удаление шума из сигнала.

Тема 1.2. Спектр сигнала. Ряд Фурье. Преобразования Фурье

Преобразования Фурье: непрерывное, дискретного времени, дискретное, быстрое. Фурье-анализ сигнала. Гармонические колебания: частота, амплитуда, фаза. Амплитудно-фазовая частотная характеристика. Типовые сигналы и их Фурье-образы.

Тема 1.3. Анализ временного ряда методом «Гусеница»

Аналоговый сигнал и соответствующий ему временной ряд. Интервал наблюдения и интервал дискретизации. Траекторная матрица. Сингулярное разложение траекторной матрицы. Выделение и группировка главных компонент временного ряда. Восстановление временного ряда по группе его главных компонент. Определение периода и частоты колебания при помощи автокорреляционной функции.

Раздел 2. Вейвлет-анализ

Тема 2.1. Преобразование Хаара, вейвлеты Хаара

Разложение и синтез сигнала по Хаару. Вейвлетограмма сигнала. Масштабирующие функции и вейвлеты Хаара. Общая схема построения многомерной масштабирующей функции Хаара, двухмасштабное соотношение, носитель масштабирующей функции Хаара и его декомпозиция, паркет.

Тема 2.2. Семейства ортогональных вейвлетов Добеши

Ортогональные вейвлет-семейства. Порождающие вейвлет-семейство функции: масштабирующая функция и вейвлет. Двухмасштабное соотношение. Семейства ортогональных вейвлетов Добеши. Компактность носителя вейвлета Добеши. Обращение в нуль первых моментов вейвлета. Построение системы уравнений для определения коэффициентов двухмасштабного соотношения. Вывод коэффициентов двухмасштабного соотношения для вейвлета из коэффициентов для масштабирующей функции. Способы построения вейвлета и масштабирующей функции по коэффициентам двухмасштабного соотношения: методом последовательных приближений, вычислением таблицы значений в диадических точках.

Тема 2.3. Кратномасштабный анализ/синтез сигнала. Алгоритм Малла

Кратномасштабный анализ. Базис кратномасштабного анализа, порождённый вейвлет-семейством. Разложение функции в вейвлет-ряд.

Формулы вейвлет-разложения. Формулы вейвлет-восстановления. Матрицы анализа и синтеза. Связь с коэффициентами двухмасштабного соотношения. Ортогональные, полуортогональные и биортогональные вейвлет-семейства.

Тема 2.4. Дискретное вейвлет-преобразование. Вейвлет-пакеты

Прямое и обратное дискретные вейвлет-преобразования и алгоритмы их реализации. Способы устранения «краевого эффекта». Вейвлетограмма сигнала. Вейвлет-пакеты. Алгоритм нахождения оптимального вейвлет-пакета.

Раздел 3. Лифтинг

Тема 3.1. Лифтинг-схема дискретного вейвлет-преобразования

Лифтинг-схема вейвлет-преобразования. Матричная форма лифтинг-схемы. Z-преобразование. Полиномы Лорана. Запись лифтинг-схемы в терминах полиномов Лорана.

Тема 3.2. Полифазная матрица дискретного вейвлет-преобразования

Полифазные матрицы дискретного вейвлет-преобразования. Свойства полифазных матриц.

Тема 3.3. Алгоритм Евклида для полиномов Лорана и факторизация полифазной матрицы

Деление с остатком полиномов Лорана, алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя для полиномов Лорана, алгоритм Евклида для полиномов Лорана в матричной форме. Разложение полифазной матрицы в произведение треугольных матриц. Построение лифтинг-схемы по полифазной матрице.

Тема 3.4. Связь между лифтинг-схемой, полифазной матрицей и фильтрами дискретного вейвлет-преобразования

Фильтры с конечной импульсной характеристикой. Блок фильтров со свойством точного восстановления. Матричная форма блока фильтров. Переход от блока фильтров к полифазной матрице и обратно. Переход от лифтинг-схемы к блоку фильтров и к полифазной матрице.

Раздел 4. Базисные сплайн-вейвлеты

Тема 4.1. Кривые и поверхности последовательного деления

Процедура последовательного деления, кривые последовательного деления. Равномерная и неравномерная схемы. Контрольные точки. Маски последовательного деления: усредняющая, оценочная, производная. Поверхности последовательного деления. Схема Лупа (Loop).

Тема 4.2. Равномерные базисные сплайны

Однородные (кардинальные) базисные сплайны. Формула Кокса-де Бура. Семейства кардинальных B-сплайн вейвлетов с компактным носителем, разбиение единицы, коэффициенты двухмасштабного соотношения.

Тема 4.3. Кратномасштабное редактирование кривой

В-сплайн кривые: контрольные точки, каркас, степень сглаживания, параметризация, область определения параметра параметризации; замкнутые В-сплайн кривые. Уровни детализации В-сплайн кривой. Кратномасштабное редактирование замкнутой кривой.

Тема 4.4. Неравномерные базисные сплайны

Формулы Кокса-де Бура для неравномерных базисных сплайнов. Базисные сплайны, интерполирующие конечные точки. Алгоритм де Бура быстрого вычисления точки В-сплайн кривой.

Тема 4.5. Процедура вставки узлов. Алгоритм Осло

Матричное представление базисных сплайнов. Метод вставки узлов (алгоритм Осло).

Тема 4.6. Полуортогональные вейвлет-семейства базисных сплайнов, интерполирующих крайние точки

Вейвлеты на основе интерполирующих конечную точку В-сплайнов. Полуортогональные вейвлет-семейства В-сплайнов, интерполирующих крайние точки.

Тема 4.7. Приложения вейвлет-анализа

Вейвлет-анализ и вейвлет-синтез изображений. Алгоритм извлечения признаков в нейронных сетях при помощи вейвлетов с использованием лифтинг-схемы. Обработка изображений: сжатие, удаления мелких деталей, сглаживание, усиление контрастности. Кратномасштабное редактирование изображений.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Вейвлет-анализ	36			30		6	
1.	Сигналы	6			6			
1.1	Сравнение сигналов. Колебания	2			2			Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
1.2	Спектр сигнала. Ряд Фурье. Преобразования Фурье	2			2			Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
1.3	Анализ временного ряда методом «Гусеница»	2			2			Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
2.	Вейвлет-анализ	8			6		2	
2.1	Преобразование Хаара, вейвлеты Хаара	2			2			Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
2.2	Семейства ортогональных вейвлетов Добеши	2					2	Контрольная работа.
2.3	Кратномасштабный анализ/синтез сигнала. Алгоритм Малла	2			2			Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
2.4	Дискретное вейвлет-преобразование. Вейвлет-пакеты	2			2			Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
3.	Лифтинг	8			6		2	

3.1	Лифтинг-схема дискретного вейвлет-преобразования	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
3.2	Полифазная матрица дискретного вейвлет-преобразования	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
3.3	Алгоритм Евклида для полиномов Лорана и факторизация полифазной матрицы	2				2	Контрольная работа.
3.4	Связь между лифтинг-схемой, полифазной матрицей и фильтрами дискретного вейвлет-преобразования	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
4.	Базисные сплайн-вейвлеты	14			12	2	
4.1	Кривые и поверхности последовательного деления	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
4.2	Равномерные базисные сплайны	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
4.3	Кратномасштабное редактирование кривой	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
4.4	Неравномерные базисные сплайны	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
4.5	Процедура вставки узлов. Алгоритм Осло	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.
4.6	Полуортогональные вейвлет-семейства базисных сплайнов, интерполирующих крайние точки	2				2	Контрольная работа.
4.7	Приложения вейвлет-анализа	2			2		Отчёт по лабораторной работе с устной защитой.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Захарова Т. В. Вейвлет-анализ и его приложения. Учебное пособие / Т. В. Захарова, О. В. Шестаков – 2-е изд. – ИНФРА-М, 2023. – 158 с. – URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1915656>.
2. Прикладная математика. Цифровая обработка изображений : учебно-методическое пособие для студентов / [М. А. Гундина и др.] ; Министерство образования РБ. – Минск : БНТУ, 2022. – 53 с.
3. Умняшкин С. В. Основы теории цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. 7-е изд., исправленное – М.: Техносфера, 2024. – 553 с.
4. Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям "Математика", "Математика. Прикладная математика" / Н. К. Смоленцев. - 5-е изд., доп. и перераб. - Москва : ДМК Пресс, 2019. - 559 с.

Дополнительная литература

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и применения / Успехи физических наук, 1996. т. 166, № 11. – С. 1145-1170
2. Блаттер, Кристиан. Вейвлет-анализ. Основы теории– М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
3. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов (учебное пособие). СПб, 2004. – 74 с.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – 2-е изд. – М.: РХД, 2004. – 464 с.
5. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. – 671 с.
6. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М., ФизМатЛит, 2005. – 616 с.
7. Сато Ю. Без паники! Цифровая обработка сигналов. М.: Додэка-XXI, 2010. – 176 с.
8. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ "Регулярная и Хаотическая Динамика", 2002. – 272 с.
9. Чуи Ч.К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001. – 412 с.
10. Addison P.S. The Illustrated Wavelet Transform Handbook. – Bristol, IOP, 2002.
11. Jensen A., la Cour-Harbo A. Ripples in mathematics: the discrete wavelet transform. Springer, 2001. – 246 p.
12. Resnikoff H.L., Wells R.O. Wavelet Analysis and the Scalable Structure of Information. Springer, 1998. – 435 p.
13. Floater M. S. An Introduction to Spline Theory. Lecture Notes. [Electronic resource] : Department of Mathematics, University of Oslo, 2023 – Mode of access: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4170/v23/beskjeder/new-version-of-the-kompendium.html> – Date of access: 31-05-2024.

Рекомендуемое учебно-лабораторное оборудование

Для проведения лабораторных занятий рекомендуется использование следующего программного обеспечения: операционная система MS Windows, программа MS Excel, система компьютерной математики Mathematica.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины «Вейвлет-анализ». Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: отчёт по лабораторной работе с устной защитой, контрольная работа.

При защите лабораторных работ оценивается полнота ответа, аргументация выбранных решений, последовательность и оригинальность изложения материала, оригинальность кода, корректность оформления, самостоятельность выполнения заданий.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Вейвлет-анализ» учебным планом предусмотрены зачёт и экзамен.

Зачёт по дисциплине «Вейвлет-анализ» проходит в форме контрольного опроса в устной или письменной форме, выполнения заданий на компьютере. Экзамен по дисциплине проходит в устной форме.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- отчёты по лабораторным работам с устной защитой, устные опросы – 60%;
- контрольные работы – 40%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) 40% и экзаменационной отметки 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.2. Семейства ортогональных вейвлетов Добеши (2 часа)

Цель: познакомиться с механизмом конструирования ортогональных вейвлет-семейств, порождаемых парой функций $\{\varphi(t), \psi(t)\}$ с компактным носителем, удовлетворяющих двумасштабному соотношению, вычислить коэффициенты двумасштабного соотношения и построить графики порождающих функций.

Задание 1. *Масштабирующая функция и вейвлет.* Реализуйте метод последовательных приближений, позволяющий получить аппроксимацию масштабирующей функции $\varphi(t)$ и вейвлета $\psi(t)$ ортогонального вейвлет-семейства по набору p -коэффициентов двумасштабного соотношения. Рекомендуется использовать оператор `PiecewiseExpand`.

Для семейства симлетов $S8$ (Symlets), порождённого набором p -коэффициентов, постройте и отобразите на графике аппроксимацию масштабирующей функции $\varphi_n(t)$ и вейвлета $\psi_n(t)$.

Задание 2. *Носитель масштабирующей функции.* Выведите формулу зависимости длины L носителя порождающих функций ортогонального вейвлет-семейства (масштабирующей функции $\varphi(t)$ и вейвлета $\psi(t)$) от количества K коэффициентов в двумасштабном соотношении.

Задание 3. *Значения в диадических точках.* Для семейства симлетов $S8$ из предыдущего пункта вычислите точные значения масштабирующей функции $\varphi(t)$ и вейвлета $\psi(t)$ в диадических точках вида $t = m2^{-n}$ для $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Постройте графики. Сравните с результатом предыдущего пункта.

Задание 4. *Двумасштабное соотношение.* Выведите и запишите уравнения для определения коэффициентов $\{p_k\}$ двумасштабного соотношения.

Задание 5. *Вейвлеты Добеши (Daubechies).* Решая полученную в предыдущем пункте систему уравнений (2), вычислите коэффициенты $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ двумасштабного соотношения для двух семейств ортогональных вейвлетов Добеши. В каждом случае постройте графики порождающих функций семейства. Используйте для этого метод последовательных приближений, реализованный в задании 1.

Задание 6. *Койфлеты (Coiflets).* Действуя по аналогии с заданиями 4-5, вычислите коэффициенты двумасштабного соотношения и постройте графики масштабирующей функции и вейвлета семейства $S6$ (Coiflets). В данном семействе $k = -2, \dots, 3$. Семейства койфлетов обладают всеми свойствами, присущими вейвлет-семействам Добеши, плюс ещё одно дополнительное свойство: $\int t^n \varphi(t) dt = 0$ при $n = 1, 2, \dots$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.3. Алгоритм Евклида для полиномов Лорана и факторизация полифазной матрицы (2 часа)

Цель: реализовать алгоритм Евклида нахождения НОД двух полиномов Лорана; используя реализованный алгоритм, факторизовать полифазную матрицу указанного вейвлет-семейства и выписать лифтинг-схему соответствующего дискретного преобразования.

Задание 1. *Степень полинома Лорана.* Реализуйте вспомогательную функцию `kmDegree`, вычисляющую диапазон показателей степени и степень полинома Лорана. Для этого рекомендуется использовать встроенную функцию `Exponent`.

Задание 2. *Алгоритм деления с остатком полиномов Лорана.* Разработайте и отладьте алгоритм деления с остатком для полиномов Лорана. В качестве примера используйте полиномы Лорана $\{H_{00}(z), H_{01}(z)\}$ верхней строки полифазной матрицы анализа $\mathbb{H}(z)$.

Задание 3. *Оптимизация деления с остатком.* Обратите внимание на тот факт, что в процедуре деления полиномов Лорана с остатком для однозначного определения коэффициентов частного достаточно приравнять нулю требуемое количество крайних коэффициентов остатка. При этом обнулять можно коэффициенты как при младших, так и при старших степенях одновременно. Реализуйте процедуру нахождения всех вариантов деления полиномов Лорана с остатком. Используйте для этого встроенную функцию `RotateRight`.

Задание 4. *Алгоритм Евклида.* Используя реализованную ранее процедуру, реализуйте алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя полиномов Лорана. Проверьте правильность реализованной процедуры, представив алгоритм Евклида для полиномов Лорана в матричной форме.

Задание 5. Используя реализацию алгоритма Евклида нахождения НОД двух полиномов Лорана, являющихся низкочастотными компонентами полифазной матрицы анализа $\{H_{00}(z), H_{01}(z)\}$, выпишите НОД и все частные от делений, полученные в процессе его нахождения, для случая, когда каждое частное имеет наименьшие по модулю коэффициенты.

Задание 6. *Факторизация полифазной матрицы.* Используя результаты предыдущего задания, выполните факторизацию полифазной матрицы анализа $\mathbb{H}(z)$, представив её произведением треугольных матриц Лорана специального вида.

Задание 7. *Лифтинг-схема.* Используя результаты предыдущего задания, выпишите фильтры лифтинг-схемы указанного вейвлет-семейства в форме полиномов Лорана. Для проверки правильности реализуйте процедуры прямого и обратного дискретных вейвлет-преобразований по лифтинг-схеме. Используя построенные процедуры, синтезируйте порождающие функции данного вейвлет-семейства.

Форма контроля – **контрольная работа.**

Тема 4.6. Полуортогональные вейвлет-семейства базисных сплайнов, интерполирующих крайние точки (2 часа)

Цель: реализовать процедуры вейвлет-анализа и вейвлет-синтеза В-сплайн кривой, интерполирующей крайние точки.

Задание 1. Узлы В-сплайнов, интерполирующих крайние точки. Реализуйте функцию $\text{kmKnot}[\text{degree}, \text{level}]$ для разных уровней детализации level , вычисляющую узлы $T = \{\tau_k\}_{k=1}^K$ В-сплайнов степени degree , интерполирующих крайние точки. В то же время функция $\text{kmKnot}[\text{degree}, \text{level}, t]$ должна возвращать номер k полуотрезка, в который попадает параметр t , то есть $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$.

Задание 2. Формула Кокса-деБура для В-сплайнов, интерполирующих крайние точки. Используя результаты предыдущего задания, доопределите функцию kmBSpline , придав ей способность вычислять по формуле Кокса-деБура значения В-сплайнов $B_{d,k}(t)$ степени d , интерполирующих крайние точки для разных уровней детализации level . Для проверки постройте графики.

Задание 3. Матричное представление базисных сплайнов, интерполирующих крайние точки. Доопределите функцию kmMatrixR , придав ей способность вычислять двухдиагональную матрицу $\mathbf{R}_{r,k}(t)$ k -го отрезка, состоящую из r строк и $(r + 1)$ столбца, для В-сплайнов, интерполирующих крайние точки, уровня детализации level степени d . Используя построенную матрицу $\mathbf{R}_{r,k}(t)$, постройте базис В-сплайнов, интерполирующих крайние точки, уровня детализации level степени d для k -го невырожденного отрезка $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$. Изобразите построенный базис на графике.

Задание 4. Алгоритм вставки узлов (Осло). Модифицируйте процедуру вычисления матрицы вставки узлов $\text{kmKnotInsertionMatrix}$ для семейства В-сплайнов, интерполирующих крайние точки, степени d и уровня детализации level при переходе на следующий уровень детализации ($\text{level} + 1$). Размер этой матрицы: $(2\text{level} + 1 + d)$ строк и $(2\text{level} + d)$ столбцов.

Задание 5. Матрицы синтеза. Используя результаты предыдущего пункта, вручную вычислите матрицы синтеза \mathbf{P} и \mathbf{Q} для вейвлет-семейства кубических В-сплайнов ($d = \text{degree} = 3$), интерполирующих крайние точки, уровней детализации $\text{level} = 0, 1, 2$.

Задание 6. В-сплайн-вейвлеты, интерполирующие крайние точки. Выпишите базисы базисных сплайнов $\Phi_L(t)$ и базисных сплайн-вейвлетов $\Psi_L(t)$ на уровнях детализации $L = \text{level} = 0, 1, 2$. Постройте графики. Для этого сначала убедитесь в справедливости кратномасштабных соотношений, а затем для построения базиса сплайн-вейвлетов $\Psi_L(t)$ воспользуйтесь соотношением $\underbrace{\mathbf{P}_L^T \cdot \Phi_{L+1}(t)^T \cdot \Phi_{L+1}(t)}_{M_{L+1}} \cdot \mathbf{Q}_L = \mathbf{0}$.

Форма контроля – контрольная работа.

Примерная тематика лабораторных занятий

1. Сравнение временных рядов.
2. Преобразования Фурье.
3. Анализ временного ряда методом «Гусеница».
4. Многомерные функции Хаара, сжатие изображений, паркет.

5. Ортогональные вейвлет-семейства.
6. Кратномасштабный анализ/синтез сигналов.
7. Вейвлет-пакеты.
8. Лифтинг-схема дискретного вейвлет-преобразования.
9. Полифазная матрица и банк фильтров дискретного вейвлет-преобразования.
10. Алгоритм Евклида для полиномов Лорана.
11. Факторизация полифазной матрицы.
12. Процедура последовательного деления.
13. Кардинальные базисные сплайны.
14. Кратномасштабное редактирование замкнутой кривой.
15. Неравномерные базисные сплайны.
16. Вейвлет-семейство неравномерных базисных сплайнов, интерполирующих крайние точки.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает освоение содержания через решения практических задач, приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

При организации образовательного процесса *используются методы и приёмы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

На лекциях и лабораторных занятиях используются следующие методы обучения: проблемного изложения, поисковый, репродуктивный, исследовательский. При проведении занятий также планируется использовать наглядные методы, такие как иллюстрация, демонстрация, визуализация.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: курсы лекций и лабораторные практикумы, методические указания к лабораторным занятиям, вопросы для подготовки к зачёту, перечень рекомендуемой литературы, информационные ресурсы.

Самостоятельная работа студента включает в себя работу с учебной литературой по заданным разделам дисциплины, поиск новейшей учебной и научной информации в указанных областях знаний и знакомство с ней, а также выполнение поставленных заданий.

Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Сравнение временных рядов.
2. Сигнал, тренд, шум, колебания. Спектр сигнала. Ряд Фурье.
3. Преобразования Фурье.
4. Анализ временного ряда методом «Гусеница».
5. Многомерные функции Хаара, сжатие изображений, паркет.
6. Семейства ортогональных вейвлетов Добеши.
7. Кратномасштабный анализ/синтез сигналов.
8. Дискретное вейвлет-преобразование. Вейвлет-пакеты.
9. Лифтинг-схема дискретного вейвлет-преобразования.
10. Полифазная матрица и банк фильтров дискретного вейвлет-преобразования.
11. Алгоритм Евклида для полиномов Лорана.
12. Факторизация полифазной матрицы.
13. Связь между лифтинг-схемой, полифазной матрицей и банком фильтров дискретного вейвлет-преобразования.
14. Процедура последовательного деления.
15. Равномерные базисные сплайны.
16. Кратномасштабное редактирование замкнутой кривой.
17. Неравномерные базисные сплайны.
18. Процедура вставки узлов (алгоритм Осло).
19. Полуортогональные вейвлет-семейства неравномерных базисных сплайнов, интерполирующих крайние точки.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Сигнал: аналоговый, дискретный, цифровой. Интервал наблюдения и интервал дискретизации. Спектр сигнала, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала.
2. Временной ряд: подготовка, заполнение пропусков, сглаживание, скользящее среднее.
3. Линейный коэффициент корреляции, автокорреляционная функция, взаимокорреляционная функция.
4. Ряд Фурье, частичная сумма ряда Фурье, тригонометрический полином. Плоский многозвенный шарнир, спирограф.
5. Гармонические колебания, параметры гармонического колебания: частота, амплитуда, начальная фаза; децибел.
6. Дельта-функция Дирака $\delta(t)$, прямоугольная функция $\Pi(t)$, кардинальный синус $\text{sinc}(t)$, гребень Дирака $\text{Ш}(t)$.
7. Свёртка сигналов.
8. Преобразования Фурье: FT — преобразование Фурье, DFT — дискретное преобразование Фурье, FFT — быстрое преобразование Фурье.
9. Тренд, колебание, шум. Гармонические колебания, параметры гармонического колебания: частота, амплитуда, начальная фаза; децибел.

10. Выделение тренда методом наименьших квадратов (OLS — Ordinary Least Squares).
11. Метод неопределённых коэффициентов, псевдообратная матрица. Сингулярное разложение матрицы (SVD — Singular-Value Decomposition).
12. Анализ временного ряда методом «Гусеница», (SSA — Singular Spectrum Analysis).
13. Временной ряд и соответствующая ему траекторная матрица, ганкелева матрица (Hankel matrix). Выделение главных компонент (PCA — Principal Component Analysis).
14. Определение периода и начальной фазы колебания при помощи корреляционной и автокорреляционной функций.
15. Вейвлет-семейство Хаара, преобразование Хаара, вейвлетограмма.
16. Тензорное произведение преобразований Хаара, вейвлетограмма изображения, сжатие изображений.
17. Общая схема построения многомерной масштабирующей функции Хаара. Двухмасштабное соотношение, носитель, паркет.
18. Ортогональные вейвлет-семейства, общая схема построения ортогонального вейвлет-семейства.
19. Порождающие функции вейвлет-семейства: масштабирующая функция и вейвлет, двухмасштабное соотношение, длина носителя.
20. Двухмасштабное соотношение, вычисление точных значений порождающих функций в диадических точках.
21. Вейвлет-семейства, кратномасштабный анализ (MultiResolution Analysis, MRA), разбиение единицы.
22. Прямое и обратное дискретные вейвлет-преобразования (Discrete Wavelet Transform, DWT).
23. Вейвлет-анализ и вейвлет-синтез сигналов, матрицы анализа/синтеза, вейвлетограмма сигнала.
24. Вейвлет-семейства: ортогональные, полуортогональные, биортогональные.
25. Лифтинг-схема дискретного вейвлет-преобразования и различные техники её реализации.
26. Алгоритм извлечения признаков в нейронных сетях при помощи вейвлетов с использованием лифтинг-схемы.
27. Свёртка последовательностей, Z-преобразование, полиномы Лорана.
28. Дискретное вейвлет-преобразование в терминах полиномов Лорана.
29. Полифазные матрицы дискретного вейвлет-преобразования.
30. Банк фильтров дискретного вейвлет-преобразования, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра.
31. Связь полифазной матрицы с банком фильтров.
32. Вейвлетограмма и вейвлет-пакеты дискретного сигнала, восстановление сигнала из вейвлет-пакетов.
33. Оптимальное разложение дискретного сигнала на вейвлет-пакеты.
34. Алгоритмом Евклида для полиномов Лорана.
35. Процедура разложения полифазной матрицы в лифтинг-схему.

36. Кривые последовательного деления; усредняющая, оценочная и касательная маски.
37. Поверхности последовательного деления, схема Лупа.
38. Семейства равномерных базисных сплайнов, коэффициенты двухмасштабного соотношения.
39. В-сплайн кривые, область определения параметра параметризации, разбиение единицы.
40. Кратномасштабное редактирование замкнутой кривой.
41. Неравномерные базисные сплайны, формула Кокса-де Бура.
42. Базисные сплайны, интерполирующие конечные точки.
43. В-сплайн функции: узлы, каркас, алгоритм де Бура быстрого вычисления значений.
44. Матричное представление базисных сплайнов, метод вставки узлов (алгоритм Осло).
45. Полуортогональные вейвлет-семейства сплайнов, интерполирующих крайние точки; конструирование базиса такого семейства.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа



Л. Л. Голубева

25.04.2024

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)