

# БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского  
государственного университета

А.Д.Король

17 января 2025 г.

Регистрационный № 13597/гэ.



## ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

по специальности

**1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ**

2025 г.

Программа государственного экзамена по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ разработана на основе образовательного стандарта высшего образования для специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ ОСВО 1-31 03 09-2021; учебных программ по учебным дисциплинам: Алгебра и теория чисел, № УД – 10349/уч. от 02.07.2021; Геометрия и основы топологии № УД – 10181/уч. от 02.07.2021; Математический анализ № УД – 10480/уч. от 02.07.2021; Функциональный анализ № УД – 11536/уч. от 20.12.2022; Теория вероятностей и математическая статистика № УД – 12289/уч. от 05.07.2023; Дифференциальные уравнения № УД – 11155/уч. от 08.07.2022; Дискретная математика и теория графов № УД – 12542/уч. от 05.07.2023; Компьютерная математика УД – 10272/уч. от 02.07.2021; Прикладной системный анализ УД – 11391/уч. от 08.07.2022; Нейронные сети и генетические алгоритмы № УД – 11340/уч. от 08.07.2022; Основы машинного обучения № УД – 12776/уч. от 05.07.2023; Вейвлет-анализ УД – 13559/уч. от 15.07.2024.

### **СОСТАВИТЕЛИ:**

С.М. Босяков, декан механико-математического факультета, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Д.Ф. Базылев, зав. кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики, кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Н.В. Бровка, зав. кафедрой теории функций, доктор пед. наук, профессор;

А.Л. Гладков, зав. кафедрой интеллектуальных методов моделирования, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Л.Л. Голубева, зав. кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа, кандидат физ.-мат. наук, доцент;

В.Г. Кротов, профессор кафедры теории функций, доктор физ.-мат. наук, профессор;

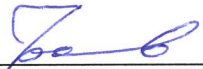
С.В. Тихонов, зав. кафедрой высшей алгебры и защиты информации, кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Н.Б. Яблонская, доцент кафедры общей математики и информатики, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Советом механико-математического факультета  
(протокол № 4 от 17.12.2024);

Председатель Совета

механико-математического факультета  С.М. Босяков

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 6 от 16.01.2025)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Государственный экзамен является одной из обязательных составляющих итоговой аттестации студентов. Программа государственного экзамена по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ разработана в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта I ступени высшего образования и действующими Правилами проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования.

Программа государственного экзамена определяет и регламентирует структуру и содержание государственного экзамена по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ.

В программу государственного экзамена включаются следующие учебные дисциплины: алгебра и теория чисел; геометрия и основы топологии; математический анализ; функциональный анализ; дифференциальные уравнения; дискретная математика и теория графов; теория вероятностей и математическая статистика; компьютерная математика; прикладной системный анализ; нейронные сети и генетические алгоритмы; основы машинного обучения; вейвлет-анализ.

Государственный экзамен проводится на заседании государственной экзаменационной комиссии.

Цель проведения государственного экзамена по специальности – выявление компетенций специалиста, т. е. теоретических знаний и практических умений, необходимых для решения теоретических и практических задач специалиста с высшим образованием.

Программа государственного экзамена носит системный, междисциплинарный характер и ориентирована на выявление у выпускника общепрофессиональных и специальных знаний и умений. Выпускник должен:

**знать:**

- определения математических понятий, участвующих в формулировках теорем, которые он излагает;
- точные формулировки математических теорем;
- формулировки лемм и теорем, используемых при доказательствах;
- методы решения научно-технических и информационных задач.

**уметь:**

- применять теорию к решению задач и иллюстрировать определения математических понятий и формулировки теорем простыми примерами;
- проверять выполнимость условий теорем, применяемых при доказательствах;
- применять современные информационные технологии и методы реализации решения прикладных задач.

**владеть:**

- способами использования математического аппарата для проведения исследований в области математики;
- современными вычислительными средствами.



Освоение образовательной программы высшего образования по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ должно обеспечить формирование следующих компетенций:

универсальные компетенции

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;

УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий.

базовые профессиональные компетенции

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира;

БПК-3. Применять математический аппарат в интеграции с компьютерными средами для создания и исследования моделей различных уровней абстракции;

БПК-4. Использовать методологии системного анализа, методы и инструменты проектирования информационных систем;

БПК-5. Строить и анализировать дифференциальные модели.

## **ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА**

Экзамен (ответы студентов и беседа с экзаменуемыми) проводится на русском или белорусском языке.

В ходе подготовки, экзаменующиеся имеют право использовать учебные программы соответствующих дисциплин. Также в процессе подготовки может быть использован *эвристический подход*, который предполагает: осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира; демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем; творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов; индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

На подготовку к ответу на государственном экзамене обучающемуся при освоении содержания образовательных программ высшего образования I ступени отводится не менее 30 минут не более одного астрономического часа, на сдачу государственного экзамена отводится до 30 минут.

## **СТРУКТУРА ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА**

Вопросы экзаменационного билета по учебным дисциплинам: алгебра и теория чисел; геометрия и основы топологии; математический анализ; функциональный анализ; дифференциальные уравнения; дискретная математика и теория графов; теория вероятностей и математическая статистика; компьютерная математика; прикладной системный анализ; нейронные сети и генетические алгоритмы; основы машинного обучения; вейвлет-анализ отражают содержание образовательной программы высшего образования по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ.



Экзаменационный билет состоит из трех теоретических вопросов, позволяющие оценить полученные в процессе обучения знания и практические навыки. Вопросы, выделенные жирным шрифтом, излагаются с доказательствами.

Характеристика теоретической части: формулировка вопроса в экзаменационном билете является краткой (в виде постановки вопроса).

Для уточнения экзаменационной отметки члены ГЭК могут задавать обучающемуся дополнительные вопросы в соответствии с программой государственного экзамена. Количество дополнительных вопросов не должно превышать трех.

# СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

## Раздел 1. Учебная дисциплина «Алгебра и теория чисел»

### Тема 1. Арифметика целых чисел

Делимость целых чисел и ее свойства. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида и запись НОД в виде целочисленной линейной комбинации. Взаимно простые числа, критерий взаимной простоты. Наименьшее общее кратное. Простые и составные числа, бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики.

### Тема 2. Поле комплексных чисел

Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.

### Тема 3. Многочлены

Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Теорема Безу и следствия из нее. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Значение многочлена в точке, корень многочлена. Кратность корня многочлена.

### Тема 4. Матрицы и операции над ними

Понятие матрицы размера  $m \times n$ . Виды матриц: квадратная матрица, диагональная матрица, верхняя и нижняя треугольная матрица, единичная матрица, нулевая матрица, вектор-строка, вектор-столбец. Операции над матрицами: сложение и умножение матриц, умножение матрицы на скаляр, транспонирование. Свойства операций над матрицами. Обратная матрица, критерий существования и методы ее вычисления.

### Тема 5. Определители

Определители второго и третьего порядков. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Определитель транспонированной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке и столбцу. Определитель произведения квадратных матриц.

### Тема 6. Системы линейных уравнений

Матричная запись системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Методы Гаусса и Крамера. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений.

### Тема 7. Векторные пространства

Определение и примеры. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Сумма и пересечение подпространств. Ранг матрицы.

### Тема 8. Линейные отображения



Линейное отображение, его ядро и образ. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов.

#### **Тема 9. Билинейные и квадратичные формы**

Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Квадратичная форма и ее матрица. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

#### **Тема 10. Евклидовы пространства**

Евклидовы пространства. Длина вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

#### **Тема 11. Группы**

Определение группы, подгруппы. Гомоморфизм, изоморфизм. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Основная теорема о гомоморфизмах групп.

### **Примерный перечень вопросов по Разделу 1. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Теорема о делении с остатком для целых чисел. Алгоритм Евклида. Простые и составные числа, бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики.

2. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. **Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.** Формула Муавра.

3. Матрицы и операции над ними. Виды матриц. Обратная матрица, критерий существования и методы ее вычисления.

4. Определители, их основные свойства. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Определитель произведения матриц.

5. Системы линейных уравнений. **Теорема Кронекера-Капелли.** Методы Гаусса и Крамера. Системы однородных линейных уравнений.

6. Многочлены от одной переменной. Теорема о делении многочленов с остатком, теорема Безу. Корень многочлена, кратность корня, число корней многочлена. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых многочленов.

7. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность, координаты вектора. Матрица перехода от одного базиса к другому. Ранг матрицы.

8. Линейное отображение векторных пространств, его ядро и образ. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и произведения линейных операторов. Собственное число и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы.

9. Билинейные и квадратичные формы. Канонический вид квадратичной формы. **Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.**

10. Определение группы, подгруппы. Гомоморфизм, изоморфизм. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее.

11. Евклидовы пространства. Длина вектора. **Неравенство Коши-Буняковского.** Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

## **Раздел 2. Учебная дисциплина «Геометрия и основы топологии»**

### **Тема 1. Векторы**

Понятие вектора в пространстве  $E^3$ . Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, базисы и аффинные реперы. Координаты векторов и точек, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

### **Тема 2. Аффинная геометрия**

Уравнения прямых на плоскости  $E^2$ , прямых и плоскостей в пространстве  $E^3$ . Понятие аффинного пространства  $A^n$ , аффинные реперы в  $A^n$ .  $k$ -мерные плоскости в  $A^n$ , способы их задания, взаимное расположение двух плоскостей. Группы аффинных преобразований плоскости  $E^2$  и пространства  $E^3$ , аффинная геометрия.

### **Тема 3. Евклидовы пространства**

Понятие евклидова точечного пространства  $E^n$ , ортогональность плоскостей в  $E^n$ . Расстояние между двумя плоскостями. Группы движений плоскости  $E^2$  и пространства  $E^3$ , евклидова геометрия.

### **Тема 4. Кривые и поверхности второго порядка**

Эллипсы, гиперболы, параболы. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры и конусы второго порядка в пространстве  $E^3$ . Фигуры второго порядка в пространствах  $A^n$  и  $E^n$ .

### **Тема 5. Основы топологии**

Метрические и топологические пространства и их геометрия. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Связные пространства и множества. Компактные пространства и множества. Компактные множества в  $R^n$ .

### **Тема 2.6. Линии и поверхности в $E^3$**

Понятие линии; способы задания; примеры. Кривизна и кручение кривой. Понятие поверхности в  $E^3$ , способы задания; примеры. Первая и вторая формы поверхности. Нормальная кривизна; полная и средняя кривизны поверхности.



**Примерный перечень вопросов по Разделу 2. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Векторы в пространстве  $E^3$ , скалярное, векторное и смешанное произведения.
2. Уравнения прямых на плоскости  $E^2$ , прямых и плоскостей в пространстве  $E^3$ .
3. Эллипс, гипербола, парабола, их уравнения и свойства.
4. **Кривые второго порядка на плоскости  $E^2$ .**
5. Понятие аффинного пространства  $A^n$ , примеры. Плоскости в  $A^n$ , их уравнения и взаимное расположение.
6. Понятие евклидова точечного пространства  $E^n$ . Ортогональность плоскостей в  $E^n$ . **Расстояние от точки до плоскости.**
7. Понятия метрического и топологического пространства. Примеры и основные свойства.
8. Кривизна и кручение кривой.

**Раздел 3. Учебная дисциплина «Математический анализ»**

**Тема 1. Множества и функции**

Понятие множества, отношения включения и равенства множеств, операции над множествами. Отношения, отношение эквивалентности. Общее понятие функции, образы и прообразы элементов и множеств. Композиция, сюръекция, инъекция, биекция, обратная функция. Мощность множества.

**Тема 2. Числа и последовательности**

Множество вещественных чисел, его важнейшие подмножества. Точные границы числовых множеств. Определение предела последовательности. Предел монотонной последовательности, число Эйлера. Критерий Коши сходимости последовательности. Различные формы полноты множества вещественных чисел. Частичные пределы последовательности, верхний и нижний пределы.

**Тема 3. Функции одной переменной и ряды**

Определение предела функции в точке. Пять замечательных пределов. Определение непрерывности функции в точке и на множестве. Основные теоремы о функциях непрерывных на отрезке (Вейерштрасса и Больцано-Коши). Понятие равномерной непрерывности, теорема Кантора. Определение производной и дифференциала функции одной переменной, таблица производных. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма, Лагранжа, Коши). Правила Лопиталя. Формула Тейлора с остатками Пеано и Лагранжа. Исследование функции с помощью производной (экстремумы, монотонность, выпуклость). Понятие первообразной и неопределенного интеграла, таблица интегралов. Определение интеграла Римана. Суммы Дарбу, критерий интегрируемости, классы интегрируемых функций. Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы первого и второго рода. Понятие числового ряда. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов (Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса). Признаки Дирихле и Абеля. Ряд Фурье, условия сходимости ряда Фурье (в точке и

равномерной). Свойства суммы функционального ряда (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость).

#### **Тема 4. Функции многих переменных**

Понятие дифференцируемости функций многих переменных. Частные производные, производная по направлению, градиент и его геометрический смысл. Матрица Якоби. Теоремы о неявной и обратной функции. Экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие, достаточные условия существования экстремума.

#### **Тема 5. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы**

Определение интеграла Римана на евклидовых пространствах. Определение криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Формула Грина.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 3. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Множество вещественных чисел. Важнейшие подмножества в  $\mathbb{R}$  и их мощность. Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел.

2. Числовые множества и их границы. Теорема Дедекинда о существовании точных границ.

3. Предел последовательности и его свойства (единственность, операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах). **Теорема о пределе монотонной последовательности.** Число Эйлера.

4. Критерий Коши сходимости последовательности. Предельная точка множества в  $\mathbb{R}$ , лемма Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.

5. Теорема Кантора о стягивающейся последовательности отрезков. **Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами.**

6. Предел функции в точке и непрерывность. Основные теоремы о непрерывных функциях (две теоремы Больцано-Коши, две **теоремы Вейерштрасса**).

7. Производная и дифференцируемость, правила дифференцирования. Производная композиции, производная обратной функции.

8. Теоремы Ферма, Ролля, **Лагранжа (о конечных приращениях)**, Коши (об отношении приращений).

9. **Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.**

10. Формула Тейлора с остатками в форме Пеано и Лагранжа.

11. Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Необходимое условие интегрируемости. Суммы Дарбу и их свойства, критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций.

12. Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. **Существование первообразной для непрерывной функции, формула Ньютона-Лейбница.** Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле.

13. Понятие числового ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов (Коши с корнем, Даламбера, Гаусса).



14. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. **Признаки Дирихле и Абеля.**

15. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости.

16. Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости рядов Фурье (в точке и равномерной).

17. Дифференцируемость и частные производные функции многих переменных, производная по направлению, градиент. Производные высших порядков, теорема Шварца о равенстве смешанных производных.

18. Локальные экстремумы функций одной и многих переменных. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума функции.

19. Теоремы о неявной и обратной функциях, условия их дифференцируемости и формулы для производных.

20. Мера Жордана в  $R^n$  и ее свойства: монотонность, аддитивность, субаддитивность.

21. Интеграл Римана в  $R^n$  и его свойства. Сведение интеграла к повторному (теорема Фубини), замена переменной в кратном интеграле.

22. Криволинейные интегралы и их основные свойства. Формула Грина.

#### **Раздел 4. Учебная дисциплина «Функциональный анализ»**

##### **Тема 1. Мера и интеграл Лебега**

Кольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры множеств. Мера на кольце множеств.  $\sigma$ -аддитивная мера на кольце множеств. Борелевские множества, продолжение меры по Лебегу. Измеримые множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

##### **Тема 2. Метрические и нормированные пространства**

Сходящаяся последовательность, последовательность Коши в метрических пространствах. Сходимость функциональных последовательностей: точечная сходимость, сходимость почти всюду, равномерная сходимость. Отображения: непрерывные, равномерно непрерывные, удовлетворяющие условию Липшица. Полное метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений. Пополнение метрического пространства. Всюду плотное множество. Норма на векторном пространстве. Банахово пространство. Пространства суммируемых функций.

##### **Тема 3. Линейные операторы**

Линейный ограниченный оператор. Норма линейного ограниченного оператора. Линейные интегральные операторы. Образ, ядро, график линейного оператора. Обратимый оператор. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Спектр линейного оператора.

##### **Тема 4. Гильбертовы пространства**

Скалярное произведение. Гильбертово пространство. Ортогональные векторы. Проекция вектора. Базис в нормированном векторном пространстве, в гильбертовом пространстве. Ряд Фурье по ортонормированной системе в гильбертовом пространстве.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 4. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра.
2. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства  $L_p[0,1]$  их полнота.
3. **Принцип сжимающих отображений.**
4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в пространствах  $C[a,b]$  и  $L_2(T, \mu)$ .
5. Векторные пространства. Понятие топологического векторного пространства. Норма и полунорма. Нормированные пространства.
6. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. Интегральные операторы в пространствах  $C[0,1]$  и  $L_2[0,1]$ .
7. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства.
8. **Теорема о проекции в гильбертовом пространстве.**
9. **Теорема об обратимости оператора, близкого к единичному.**

## **Раздел 5. Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика»**

### **Тема 1. Вероятность**

Элементарное событие, случайное событие, пространство элементарных событий. Алгебра и  $\sigma$ -алгебра событий. Вероятностное пространство, вероятность. Классическое, конечное, дискретное, геометрическое вероятностные пространства. Условная вероятность, независимость событий. Схема Бернулли.

### **Тема 2. Случайные величины и независимость**

Случайная величина, ее функция распределения. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность вероятности.  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайной величиной. Распределение вероятностей, независимость случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции. Характеристическая функция случайной величины.

### **Тема 3. Последовательности случайных величин**

Центральная предельная теорема, закон больших чисел, усиленный закон больших чисел. Понятие о случайном процессе, пуассоновский случайный процесс, случайный процесс броуновского движения.

### **Тема 4. Математическая статистика**

Выборка, вариационный ряд выборки, статистика. Несмещенность, состоятельность, оптимальность, эффективность статистической оценки. Достаточная статистика, статистическая гипотеза, параметрическая гипотеза, линейная регрессия, метод наименьших квадратов.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 5. для подготовки к государственному экзамену:**



1. Аксиоматика Колмогорова. Условные вероятности.
2. Числовые характеристики случайных величин – математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции и их свойства.
3. Критерии независимости случайных величин (дискретный, абсолютно непрерывный).
4. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.
5. Закон больших чисел.
6. Неравенство и теоремы Колмогорова.

## **Раздел 6. Учебная дисциплина «Дифференциальные уравнения»**

### **Тема 1. Основные понятия**

Обыкновенные дифференциальные уравнения, поле направлений, решение, интегральная кривая, задача Коши.

### **Тема 2. Уравнения 1-го порядка**

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные, Риккати и в полных дифференциалах.

### **Тема 3. Системы и уравнения $n$ -го порядка**

Фундаментальная система решений однородных линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородных линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка.

### **Тема 4. Особые точки и устойчивость**

Особые точки автономных систем: узел, седло, фокус, центр. Устойчивость решений по Ляпунову, функции Ляпунова.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 6. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Критерий уравнения в полных дифференциалах.
2. Базис пространства решений линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений.
4. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Колебательный характер решений.
5. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Задача Коши. Схема её решения.
6. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.
7. Особые точки автономных систем: узел, седло, фокус, центр.
8. Понятие устойчивости решений дифференциальных уравнений. Метод функций Ляпунова.

## **Раздел 7. Учебная дисциплина «Дискретная математика и теория графов»**

### **Тема 1. Комбинаторика**

Предмет комбинаторики. Комбинаторная конфигурация. Подсчет числа комбинаторных конфигураций. Логические правила комбинаторики. Размещения и сочетания. Число  $r$ -размещений из  $n$  элементов. Число  $r$ -размещений с повторениями из  $n$  элементов. Число подмножеств конечного множества. Число  $r$ -сочетаний из  $n$  элементов. Биномиальная теорема и следствия из нее. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Число  $r$ -сочетаний с повторениями из  $n$  элементов. Метод включения и исключения, его применение.

### **Тема 2. Булевы функции**

Понятие булевой функции. Задание булевой функции с помощью таблицы истинности. Число булевых функций от  $n$  переменных. Элементарные булевы функции. Задание булевых функций с помощью логических формул. Основные логические равносильности. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ) и конъюнктивные нормальные формы (КНФ). Разложение Шеннона. Принцип двойственности. Полиномиальные нормальные формы. Полином Жегалкина. Теорема о единственности представления булевой функции посредством полинома Жегалкина. Замкнутые классы булевых функций. Полнота системы булевых функций. Теорема Поста.

### **Тема 3. Определение графа**

Определение графа. Примеры графов. Способы задания графов. Лемма о рукопожатиях. Маршруты и их типы. Критерий двудольности графа.

### **Тема 4. Деревья**

Эквивалентные определения деревьев. Деревья и остовы. Матричная теорема Кирхгофа о деревьях.

### **Тема 5. Независимость и покрытия**

Независимое множество вершин. Оценки числа независимости. Клика. Вершинные и реберные покрытия. Паросочетания. Соотношения между параметрами независимости и покрытия в произвольном графе. Теорема Галлаи. Паросочетания в двудольных графах, теорема Холла. Число паросочетания и число независимости. Оценки числа независимости. Теорема Холла о паросочетаниях.

### **Тема 6. Обходы графов**

Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Разбиение ребер графа на наибольшее число реберно-непересекающихся цепей. Гамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости.

### **Тема 7. Раскраска графов**

Вершинная раскраска, хроматическое число графа. Применение вершинной раскраски. Алгоритм последовательной раскраски. Раскраска графов. Оценки хроматического числа. Теорема Зыкова. Теорема Брукса.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 7. для подготовки к государственному экзамену:**



1. Выборки, размещения, сочетания. Булеан. Бином Ньютона, следствия. Метод включения и исключения.
2. Нормальные формы булевых функций. Полнота системы булевых функций. Теорема Поста.
3. **Эквивалентные определения дерева.** Матричная теорема Кирхгофа о числе остовных деревьев.
4. Число независимости и число паросочетания графа. Оценки числа независимости. **Теорема Холла о паросочетаниях.**
5. Обходы графов. **Критерий эйлеровости.** Достаточные условия гамильтоновости.
6. Раскраска графов. Оценки хроматического числа. Алгоритм последовательной раскраски.

## **Раздел 8. Учебная дисциплина «Компьютерная математика»**

### **Тема 1. Компьютерная математическая система *Mathematica***

Состав *Mathematica*: ядро Kernel, интерактивная среда FrontEnd, справочная система Wolfram Documentation, драйверы FrontEndLink, JavaLink, NETLink..., базы знаний Wolfram Data Repository. Сеанс работы Session, основной цикл In[xx]->Out[xx]. Документ Notebook как математическая рукопись.

Представление данных. Выражение. Размерная величина. Объект. Сущность. Поиск и извлечение частей выражения и знаний из баз данных.

Обработка и анализ данных. Ввод/вывод данных: чтение и запись в файлы разных форматов. Отображение данных на двумерных и трехмерных графиках: высоко- и низкоуровневая графика. Интерактивные графические объекты.

Ограничение зоны видимости (scoping) переменных в *Mathematica*: функции With, Block, Module, Function, отличия между ними.

Функциональный стиль программирования. Значение символов (Symbol) в *Mathematica*. Символы и база знаний. Выражение как функция. Безымянные функции. Оператор Apply и семейство операторов MapXxx. Операторы повторного действия (Nest, Fold, FixedPoint).

Обработка списков. Генерация списков, доступ к элементам списка. Преобразование списка. Обработка многоуровневых списков: Partition, Flatten, Transpose. Операторы Thread и Through. Вычисление функций от списков. Дистрибутивность операции относительно списка (атрибут Listable).

Шаблоны (Pattern), их классификация, построение, использование. Базовые шаблоны: Blank, BlankSequence, BlankNullSequence. Составные шаблоны: Alternatives, Repeated, RepeatedNull, Except, Longest\Shortest. Шаблоны: HoldPattern, Verbatim, PatternSequence, OrderlessPatternSequence. Ограничения шаблонов: указание головы, Condition, PatternTest. Значения по умолчанию: Optional, Default. Текстовый шаблон: StringExpression. Операторы, использующие шаблоны: MatchQ, Cases, Count, Position.

Глобальные определения и подстановки. Функции семейства xSetxxx. Механизм верхних и нижних значений символа. Локальные правила

преобразований, или подстановки: Rule, RuleDelayed. Применение правил: ReplaceAll, ReplaceRepeated. Замена: Replace, ReplaceAt, ReplacePart, ReplaceList.

## **Тема 2. Компьютерное моделирование на Python**

Встроенные типы объектов. Изменяемые и неизменяемые типы. Булево значение объекта. Итерируемый объект (итерационный инструмент, объект итератора, протокол итераций). Генераторный объект (генераторное выражение, генераторная функция).

Создание пользовательской функции. Объект функции. Элементы функционального программирования. Области видимости переменной.

Создание классов и экземпляров классов. Дерево наследования. Перегрузка операций и встроенных функций.

## **Тема 3. Компьютерная математическая среда MATLAB**

Структура и интерфейс системы MATLAB. Встроенные типы данных и вычисления. Сценарии, функции, переменные. Объектно-ориентированное программирование, классы и объекты. Высокоуровневая и дескрипторная графика. Импорт и экспорт данных.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 8. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Состав *Mathematica*. Представление, обработка и анализ данных. Графические объекты и динамические выражения.

2. *Mathematica*. Функциональный стиль программирования. Ограничение зоны видимости (scoping) переменных. Обработка списков.

3. *Mathematica*. Шаблоны (Pattern). Глобальные определения (Set). Локальные правила преобразований (Rule) и их применение.

4. Python. Встроенные типы объектов. Итерируемый объект (протокол итераций, объект итератора, итерационный инструмент). Создание генераторных объектов.

5. Python. Область видимости переменной. Определение и вызов пользовательской функции. Элементы функционального программирования.

6. Python. Объектно-ориентированное программирование на основе классов. Дерево наследования. Перегрузка операций и встроенных функций.

7. Интерактивный интерфейс пользователя системы Matlab. Программирование на языке Matlab.

8. Matlab. Типы данных. Работа с матрицами, структурами, объектами.

9. Matlab. Высокоуровневая и дескрипторная графика.

10. Matlab. Импорт и экспорт данных.

## **Раздел 9. Учебная дисциплина «Прикладной системный анализ»**

### **Тема 1. Системный анализ**

Сущность системного подхода. Системы, их свойства и классификация. Основные системные принципы. Стейкхолдеры и их классификация. Улучшающее вмешательство. Принцип win-win. Циклы обратной связи в системах. Системные архетипы. Точки воздействия на систему. Основные



инструменты системного моделирования. Каузальные диаграммы. Шаблоны поведения динамических систем. Процедура проведения системного исследования.

### **Тема 2. Требования к ПО**

Жизненный цикл создания ПО. Каскадная модель. Итерационная разработка. Гибкие методы разработки (Agile). Проектные роли. Потребности, требования и ограничения. Деятельность бизнес-аналитика. Методы сбора и анализа требований к ПО. Виды и уровни требований к ПО. Пользовательские сценарии. Пользовательские истории. Виды документов требований и их структура. Принципы проектирования пользовательского интерфейса. Управление изменениями в требованиях. Проверка и верификация требований.

### **Тема 3. Язык моделирования UML**

Принципы объектно-ориентированного анализа и проектирования. CASE-средства. Основные этапы развития и принятые стандарты языка UML. Методология RUP. Основные принципы и этапы моделирования сложных систем согласно RUP. Основные виды диаграмм UML и их применение в моделировании ПО.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 9. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Системы, их свойства и классификация. Основные системные принципы.
2. Улучшающее вмешательство. Принцип win-win. Стейкхолдеры и их классификация.
3. Обратные связи в системах. Системные архетипы. Точки воздействия на систему.
4. Сущность системного подхода. Процедура проведения системного исследования.
5. Жизненный цикл создания ПО. Каскадная модель. Итерационная разработка. Гибкие методы разработки (Agile).
6. Принципы объектно-ориентированного анализа и проектирования. Методология RUP.
7. Язык моделирования UML. Основные виды диаграмм UML и их применение в моделировании ПО.
8. Деятельность бизнес-аналитика. Методы сбора и анализа требований к ПО.
9. Виды и уровни требований к ПО. Пользовательские сценарии. Пользовательские истории.
10. Виды документов требований и их структура. Спецификация требований к ПО.

## **Раздел 10. Учебная дисциплина «Нейронные сети и генетические алгоритмы»**

### **Тема 1. Классификация и кластеризация**

Задача классификации, фазовое пространство, обучающий и тестирующий наборы данных. Искусственный нейрон; вход, возбуждение и отклик нейрона. Синаптические веса и функция активации нейрона, линейная отделимость. Искусственная нейронная сеть, слои нейронов, полносвязная нейронная сеть прямого распространения.

Нормально распределённая случайная величина, выборка, среднее значение, стандартное (среднеквадратичное) отклонение, функция плотности распределения вероятностей, гистограмма. Распознавание «Свой/Чужой», наивный байесовский классификатор. Ошибки классификации первого и второго рода, метрики качества обучения.

Многомерная нормально распределённая случайная величина, ковариационная матрица, эллипсоид рассеивания. Понижение размерности. Выделение главных компонент, сингулярное разложение матрицы. Кластеризация методом  $k$ -средних. Функция Гаусса векторного аргумента. Зона влияния. Сети радиально-базисных функций.

## **Тема 2. Метод опорных векторов**

Фазовое пространство задачи классификации, линейная разделимость классов, разделительная полоса. Повышение размерности и искривление фазового пространства. Задача условной оптимизации, множители Лагранжа, двойственная задача, квадратичная оптимизация. Опорные векторы, алгоритм нахождения опорных векторов.

SVM-классификатор в случае линейно неразделимых классов. Нарушители и штрафы. Ядра и повышение размерности. Сведение обучения SVM-классификатора к решению задачи квадратичного программирования. Обучение последовательным методом активных ограничений.

## **Тема 3. Обучение методом обратного распространения ошибки**

Функции активации и их производные. Функции потерь. Обучение методом обратного распространения ошибки. Локальный градиент. Скорость обучения. Мини-пакетный градиентный спуск. Контроль за процессом обучения.

Архитектура свёрточной нейронной сети. Подслои свёрточного слоя. Входное поле нейрона свёрточного слоя, его веса. Выходное поле нейрона свёрточного слоя. Слой подвыборки. Полносвязный слой. Функции активации: Leaky ReLU и SoftMax. Перекрёстная энтропия в качестве функции потерь. Обратное распространение ошибки в свёрточной нейросети. Локальный градиент свёрточного нейрона. Возбуждение свёрточного нейрона. Отклик свёрточного нейрона. Зона влияния входа на возбуждение свёрточного нейрона.

## **Тема 4. Эволюционные и генетические алгоритмы**

Задача оптимизации, фазовое пространство. Генетические алгоритмы. Фенотип и генотип. Генетическое кодирование: квантование, код Грея, гаплоидные и диплоидные коды. Особь и популяция. Репродуктивный план Холланда. Генетические операции: мутация и инверсия, скрещивание, селекция. Приспособленность особи, элитаризм, элиминация, эволюция. Селекционная привлекательность.



Общая схема эволюционных алгоритмов. Поиск и приспособленность, мутация и скрещивание. Алгоритм оптимизации роением частиц, управление движением частицы.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 10. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Задача классификации. Архитектура и функционирование многослойной прямой распространения.
2. Наивный байесовский классификатор, метод главных компонент, понижение размерности, сети радиально-базисных функций, кластеризация методом k-средних.
3. Машина опорных векторов (SVM), линейная разделимость и повышение размерности, ядра и штрафы. Обучение SVM последовательным методом активных ограничений.
4. Обучение искусственной нейронной сети методом обратного распространения ошибки, функции активации, функции потерь, автоматическое дифференцирование.
5. Архитектура, функционирование и обучение свёрточной нейронной сети.
6. Эволюционные и генетические алгоритмы решения задач оптимизации. Метод роя частиц, Гапллоидные и диплоидные генетические алгоритмы.
7. Генетические алгоритмы: генотип и фенотип, код Грея, генетические операторы, репродуктивный план Холланда.
8. Обучение искусственной нейронной сети. Алгоритм, модель алгоритмов восстанавливаемой зависимости. Метод обучения. Критерий качества обучения, функция ошибок. Функционал качества. Метод минимизации эмпирического риска. Сведение задачи обучения к задаче оптимизации.
9. Свойство обобщения нейронной сети. Проблема обобщающей способности. Причины прекращения обучения нейронной сети. Переобучение. Понятие паралича сети и причины его возникновения. Геометрический анализ поверхности функции ошибок. Геометрический смысл обучения нейронной сети.
10. Анализ и прогнозирование временных рядов (BP). Нейронные сети MATLAB для работы с BP: linearlayer, narxnet, narnet, timedelaynet. Линия задержки с отводами TDL (Tapped Delay Line), принцип ее функционирования.
11. Рекуррентные нейронные сети (РНС). Назначение, структура РНС. Проблема долгосрочных зависимостей.
12. Нейронные сети долгой краткосрочной памяти LSTM.

**Раздел 11. Учебная дисциплина «Основы машинного обучения»**

**Тема 1. Введение в машинное обучение.**

Основные понятия МО. Обучение с учителем. Обучение без учителя. Тестовая и обучающая выборки. Понятие эстиматора. Метрики качества моделей. Простейшая линейная регрессия.

**Тема 2. Предварительная обработка данных.**

Работа с признаками. Нормализация данных и шкалирование. Поиск аномалий в данных. Числовые и категориальные признаки. Корреляция. Описательная статистика.

### **Тема 3. Задачи обучения по прецедентам**

Задачи обучения по прецедентам. Типология задач. Постановка задачи обучения по прецедентам. Объект, признаковое описание объекта. Множество объектов, обучающее множество. Матрица «объекты-признаки». Множество допустимых ответов. Модель алгоритмов восстанавливаемой зависимости. Метод обучения. Функция ошибок. Функционал качества. Метод минимизации эмпирического риска. Обобщающая способность ИНС.

Проблема переобучения. Методы оценки аналитической модели и её поведения на независимых данных.

### **Тема 4. Машинное обучение с учителем**

Алгоритмы регрессии. Постановка задачи регрессии. Линейная регрессия. Полиномиальная регрессия. Графическая визуализация задачи регрессии. Проблема переобучения. Регуляризация. Lasso-регуляризация. Ridge-регуляризация.

Алгоритмы классификации. Постановка задачи классификации. Простейшие алгоритмы классификации: дерево решений, метод ближайших соседей. Оценка качества модели классификации. Гиперпараметры моделей, их подбор. Валидационные кривые и кривые обучения.

Линейный классификатор. Линейная классификация. Разделяющая гиперплоскость. Логистическая регрессия. L2-регуляризация логистической функции потерь.

Бэггинг. Ансамбли оценщиков. Бутстреп. Бэггинг. Случайные леса и подбор гиперпараметров для них. Сверхслучайные леса.

Бустинг и стэкинг. Понятие стекинга и градиентного бустинга. Модели классификатора и регрессора.

Оценка качества модели. Метрики качества модели. Кросс-валидация. Дисперсия и отклонение в задачах МО. Проблема переобучения. Выбор оптимальной сложности модели оценщика. Преобразование признаков. Нормализация и изменения распределения.

### **Тема 5. Машинное обучение без учителя.**

Понятие кластеризации. Алгоритм k-средних. Агломеративная кластеризация. Алгоритм DBSCAN. Оценка качества кластеризации.

Понижение размерности. Метод главных компонент. Оценка количества компонент с учётом объяснимой дисперсии. Графическая интерпретация метода главных компонент. Алгоритм TSNE.

### **Тема 6. Временные ряды**

Временной ряд в МО. Rolling window estimations. Экспоненциальное сглаживание, модель Хольта-Винтерса. Кросс-валидация на временных рядах, подбор параметров. Извлечение признаков (Feature extraction). Линейная регрессия и XGBoost.

### **Тема 7. Глубокое обучение**



Введение в глубокое обучение. *AI vs ML vs DL*. Искусственный интеллект (Artificial Intelligence, AI), машинное обучение (Machine Learning, ML), глубокое обучение (Deep Learning, DL) и искусственные нейронные сети (Artificial Neural Networks). Определения, основные понятия, сферы применения, примеры применения.

Основные понятия и определения теории ИНС. Биологический прототип нейрона. Математическая модель нейрона. Области применения ИНС. Классификация ИНС. Этапы построения ИНС. Компьютерная модель нейрона и архитектура ИНС. Однослойные и многослойные ИНС. Неглубокие (Shallow Networks) и глубокие (Deep Networks) нейронные сети. *Обучение нейронных сетей*. Методы обучения нейронных сетей.

### **Примерный перечень вопросов по Разделу 11. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Технологии обучения: с учителем, без учителя, с подкреплением.
2. Задачи обучения по прецедентам. Типология задач. Объект, признаковое описание объекта. Множество объектов, обучающее множество. Множество допустимых ответов.
3. Задачи обучения по прецедентам. Модель алгоритмов восстанавливаемой зависимости. Метод обучения. Функция ошибок. Функционал качества. Метод минимизации эмпирического риска. Обобщающая способность ИНС. Проблема переобучения.
4. Задачи обучения по прецедентам. Подмножества обучающего множества. Цель выделения подмножеств в обучающем множестве (training, validation, testing subsets).
5. Процедура скользящего контроля (кросс-проверка, кросс-валидация, cross-validation, CV).
6. Задачи и методы классификации. Бинарная и мультиклассовая классификация.
7. Задачи и методы регрессии.
8. Методы кластерного анализа.
9. Временные ряды. Определение, элементы ВР. Анализ и прогнозирование ВР. Компоненты, модели, методы прогнозирования ВР.

## **Раздел 12. Учебная дисциплина «Вейвлет-анализ»**

### **Тема 1. Кратномасштабный анализ/синтез сигналов**

Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Частотно-временные характеристики сигнала. Вейвлет-семейства. Порождающие вейвлет-семейство функции: масштабирующая функция и вейвлет. Двухмасштабное соотношение. Построение семейства ортогональных вейвлетов Добеши. Способы построения вейвлета и масштабирующей функции по коэффициентам двухмасштабного соотношения: методом последовательных приближений, вычислением таблицы значений в диадических точках.

Кратномасштабный анализ. Базис кратномасштабного анализа, порождённый вейвлет-семейством. Разложение функции в вейвлет-ряд.

Формулы вейвлет-разложения и вейвлет-восстановления. Матрицы анализа и синтеза. Связь с коэффициентами двухмасштабного соотношения. Ортогональные, полуортогональные и биортогональные вейвлет-семейства.

## **Тема 2. Дискретное вейвлет-преобразование**

Прямое и обратное дискретные вейвлет-преобразования и алгоритмы их реализации. Вейвлетограмма сигнала. Вейвлет-пакеты и алгоритм нахождения оптимального вейвлет-пакета.

Лифтинг-схема вейвлет-преобразования. Запись лифтинг-схемы в терминах полиномов Лорана. Полифазные матрицы дискретного вейвлет-преобразования и их свойства. Алгоритм Евклида для полиномов Лорана и факторизация полифазной матрицы. Фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ). Блок фильтров со свойством точного восстановления. Связь между лифтинг-схемой, полифазной матрицей и блоком КИХ-фильтров дискретного вейвлет-преобразования.

## **Тема 3. Базисные сплайн-вейвлеты**

Процедура последовательного деления, маски последовательного деления: усредняющая, оценочная, производная. Кривые и поверхности последовательного деления.

Однородные (кардинальные) базисные сплайны. Формула Кокса-де Бура. Неравномерные базисные сплайны. Формулы Кокса-де Бура для неравномерных базисных сплайнов. Базисные сплайны, интерполирующие конечные точки. Алгоритм де Бура быстрого вычисления точки В-сплайн кривой. Матричное представление базисных сплайнов. Метод вставки узлов (алгоритм Осло). Полуортогональные вейвлет-семейства В-сплайнов, интерполирующих крайние точки.

**Примерный перечень вопросов по Разделу 12. для подготовки к государственному экзамену:**

1. Кратномасштабный анализ сигналов, пара порождающих функций: масштабирующая функция и вейвлет, вейвлет-базис и двухмасштабное соотношение, вейвлетограмма сигнала.

2. Вейвлет-семейства: ортогональные, полуортогональные, биортогональные; двухмасштабное соотношение и порождающие функции.

3. Дискретное вейвлет-преобразование: лифтинг-схема, полифазная матрица, блок КИХ-фильтров (с конечной импульсной характеристикой).

4. Кривые и поверхности последовательного деления, В-сплайн кривые, вейвлет-семейства базисных неравномерных сплайнов.



## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

### Основная литература

1. Глухов, М. М. Алгебра : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 608 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/187793>.

2. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – Изд. 16-е. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 476 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/183752>

3. Каргаполов, М. И. Основы теории групп : учебное пособие для вузов / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – Изд. 6-е., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 288 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/238481>

4. Мартынов, Л. М. Алгебра и теория чисел для криптографии : учебное пособие для вузов / Л. М. Мартынов. – Изд. 2-е., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 456 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/189446>

5. Виноградов И. М. Основы теории чисел : учебное пособие для вузов / И. М. Виноградов. – Изд. 15-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 176 с.

6. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / П. С. Александров. – Изд. 4-е., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 512 с.

7. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебник / Л. Л. Березкина. – Минск : РИВШ, 2022. – 412 с.

8. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии : учебник для государственных университетов / П.К. Рашевский. – Москва : URSS : ЛКИ, 2021. – 428 с.

9. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие [для студентов физических и механико-математических специальностей вузов] / Б. П. Демидович. – Изд. 24-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. – 623 с.

10. Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2022. – Ч. 1 / [И. Л. Васильев и др.]. – 2022. – 293 с.

11. Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2023. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 2 / [С. А. Бондарев и др.]. – 2023. – 355 с.

12. Бровка, Н. В. Практикум по математическому анализу : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 1 / Н. В. Бровка, А. В. Ляцкая, А. П. Карпова – Минск : БГУ, 2023. – 455 с. – (Классическое университетское издание). – <https://elib.bsu.by/handle/123456789/303294>.

13. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – Изд. 2-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 272 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: – <https://e.lanbook.com/book/210290>.

14. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. – Изд. 6-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 560 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: – <https://e.lanbook.com/book/189430>.

15. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 176 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система – URL: – <https://e.lanbook.com/book/212048>.

16. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 240 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: – <https://e.lanbook.com/book/212057>.

17. Боровков, А. А. Теория вероятностей : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 010100 "Математика" / А. А. Боровков. – Изд. стер. – Москва : URSS : Либроком, 2023. – 652 с.

18. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Б. В. Гнеденко; [предисл. А. Н. Ширяева]. – Изд. 13-е. – Москва : URSS, 2022. – 448 с.

19. Севастьянов, Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика" и "Механика" / Б. А. Севастьянов. – Изд. стер. – Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2022. – 255 с.

20. Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибииков. – Изд. 2-е, стер. – Москва : Лань, 2022. – 304 с.

21. Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений : учебник / А. Ф. Филиппов. – Изд. 5-е. – Москва : Ленард, 2024. – 248 с.

22. Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум : учебник / Я.М. Ерусалимский. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2022. – 476 с.

23. Лекции по теории графов : учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. – 383 с.

24. Папшев, С.В. Дискретная математика. Курс лекций для студентов естественнонаучных направлений подготовки: учебное пособие / С.В. Папшев. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 192 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/206210>.

25. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica : электронный учебно-методический комплекс для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / Л. Л. Голубева, О. А. Лаврова, А. Э.



Малевич, Н. Л. Щеглова ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. дифференциальных уравнений и системного анализа. – Минск : БГУ, 2024. – 260 с. : ил. – Библиогр.: с. 260. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/323368>

26. Вавилов, Н. А. Mathematica для нематематика : учеб. пособие для вузов / Н. А. Вавилов, В. Г. Халин, А. В. Юрков. – Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2021. – 483 с.

27. Компьютерная математика. Компьютерное моделирование на Python : электронный учебно-методический комплекс для специальности 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / Голубева Л. Л., Лаврова О. А., Малевич А. Э., Щеглова Н. Л. ; БГУ, Фак. механико-математический, Каф. дифференциальных уравнений и системного анализа. – Минск: БГУ, 2025. – 229 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 227–229. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/325782>.

28. Бизли, Д. Python. Исчерпывающее руководство / Д. Бизли; [пер. с англ. Е. Матвеев]. – Санкт-Петербург : Питер, 2023. – 368 с.

29. Компьютерная математика. Моделирование в среде MATLAB-SIMULINK : электронный учебно-методический комплекс для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / Л. Л. Голубева, О. А. Лаврова, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова ; БГУ, Фак. механико-математический, Каф. дифференциальных уравнений и системного анализа. – Минск : БГУ, 2025. – 124 с. : ил. – Библиогр.: с. 121-122.

30. ВАВОК. Руководство к своду знаний по бизнес-анализу. Версия 3.0 / [пер. с англ.]. – Москва : Олимп-Бизнес, 2022. – 603 с.

31. Тидвелл, Дж. Разработка интерфейсов. Паттерны проектирования / Дж. Тидвелл, Ч. Брюэр, Э. Валенсия; [пер. с англ.]. – Санкт-Петербург : Питер, 2022. – 560 с.

32. Флегонтов, А. В. Моделирование информационных систем. Unified Modeling Language : учебное пособие / А. В. Флегонтов, И. Ю. Матюшичев. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 140 с.

33. Баланов А. Н. Машинное обучение и искусственный интеллект : учебное пособие для вузов / А. Н. Баланов. – СПб : Лань, 2024. – 172 с.

34. Воронов, М. В. Системы искусственного интеллекта : учебник и практикум для студентов высших учебных заведений, обучающихся по ИТ и математическим направлениям / М. В. Воронов, В. И. Пименов, И. А. Небаев. – Москва: Юрайт, 2022. – 256 с.

35. Плас, Д. В. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение. – Санкт-Петербург ; Москва ; Минск : Питер, 2023. – 573 с.

36. Хливненко, Л. В. Практика нейросетевого моделирования : учебное пособие [для вузов] / Л. В. Хливненко, Ф. А. Пятакович. – Изд. 3-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2023. – 196 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/310190>.

37. Захарова, Т. В. Вейвлет-анализ и его приложения : учебное пособие / Т. В. Захарова, О. В. Шестаков. – Изд. 2-е. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 158 с.

38. Прикладная математика. Цифровая обработка изображений : учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-38 80 01

"Приборостроение" / [М. А. Гундина и др.] ; Министерство образования РБ. – Минск : БНТУ, 2022. – 53 с.

39. Умняшкин, С. В. Основы теории цифровой обработки сигналов : учебное пособие / С. В. Умняшкин. – Изд. 7-е, испр. – Москва : Техносфера, 2024. – 553 с.

### Дополнительная литература

1. Беняш-Кривец В.В. Лекции и семинары по алгебре: группы, кольца, поля. / В.В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский. – Минск: БГУ, – 2015. – 152 с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/149209>.

2. Беняш-Кривец, В. В. Лекции и семинары по алгебре: основные понятия алгебры и теории чисел : учебное пособие / В. В. Беняш-Кривец, Г. Е. Пунинский. – Минск : БГУ, 2015. – 152 с.

3. Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2019. – 592 с.

4. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 т. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск : Амалфея, 2001. – 2 т.

5. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. пособие для студ. мат. и физических спец. ун-тов / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко ; Под ред. А. С. Феденко. – 2-е изд. – Минск: Універсітэцкае, 1999. – 302 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13294>

6. Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре : учебник / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – Изд. 17-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 288 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210164>

7. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" : в 3 ч. / А. И. Кострикин. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2022. – Ч. 1 : Основы алгебры. – 271 с.

8. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" : в 3 ч. / А. И. Кострикин. – Новое издание. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2022. – Ч. 2 : Линейная алгебра. – 367 с.

9. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" : в 3 ч. / А. И. Кострикин. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2022. – Ч. 3 : Основные структуры алгебры. – 271 с.

10. Дыбкова, Е. В. Задачи по алгебре. Основы теории групп / Е. В. Дыбкова, И. Б. Жуков, А. А. Семенов, Р. А. Шмидт. – Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 32 с.

11. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики : в 5 ч. / Г. П. Размыслович. – Минск : БГУ, 2010. – Ч. 1 : Матрицы, определители, системы линейных уравнений. – 73 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/2336>.

12. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики : в 5 ч. / Г. П. Размыслович.



– Минск : БГУ, 2013. – Ч. 2 : Векторные пространства. – 56 с. – URL : <https://elib.bsu.by/handle/123456789/50318>.

13. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов факультета прикладной математики и информатики : в 5 ч. / Г. П. Размыслович. – Минск : БГУ, 2014. – Ч. 3 : Линейные и билинейные отображения векторных пространств. – 71 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/98210>.

14. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов факультета прикладной математики и информатики : в 5 ч. / Г. П. Размыслович. – Минск : БГУ, 2014. – Ч. 4 : Полиномиальные и нормальные формы матриц. Евклидово и унитарное пространства. – 65 с.

15. Кононов, С. Г. Аналитическая геометрия : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / С. Г. Кононов ; БГУ. – Минск : БГУ, 2014. – 238 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/113440>.

16. Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Москва : Наука, 1986. – 303 с.

17. Постников, М. М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия : учебное пособие / М. М. Постников. – Москва : Наука, 1979. – 336 с.

18. Дифференциальная геометрия : учебное пособие / под ред. А. С. Феденко. – Минск : БГУ, 1982. – 255 с.

19. Кротов, В. Г. Математический анализ : учеб. пособие для студ. уво по математическим спец. / В. Г. Кротов ; БГУ. – Минск : БГУ, 2017. – 375 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394>.

20. Антонец, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник для студ. мат. спец. вузов / А. Б. Антонец, Я. В. Радыно. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2006. – 431 с.

21. Радыно, Я. В. Задачи и упражнения по курсу "Функциональный анализ" : учеб.-метод. пособие для студ. мех.-мат. фак. / Я. В. Радыно, В. И. Чесалин, А. Г. Яблонская ; БГУ, Мех.-мат. фак., Каф. функционального анализа. – Минск : БГУ, 2013. – 40 с.

22. Антонец, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по мат. спец. / А. Б. Антонец, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с.

23. Ивченко, Г. И. Математическая статистика / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. – Москва : Высш. шк., 1984. – 248 с.

24. Лагутин, М. Б. Наглядная математическая статистика : учебное пособие / М. Б. Лагутин. – Изд. 10-е. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2024. – 472 с.

25. Лазакович, Н. В. Теория вероятностей : учебник / Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок, О. Л. Яблонский. – Изд. 3-е, с изм. – Минск : БГУ, 2013. – 335 с.

26. Лазакович, Н.В. Курс теории вероятностей: электронное учебное пособие / Н.В. Лазакович, С.П. Сташулёнок, О.Л. Яблонский. – Минск : Электронная книга БГУ, 2003. – 322 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/10291>

27. Лазакович Н.В. Теория вероятностей : учебное пособие / Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок – Минск : БГУ, 2003. – 259 с.
28. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ. вузов по мат. спец. : в 2 ч. / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, С. Л. Штин, О. Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. – Минск : БГУ, 2011. – Ч. 1. – 147 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/38806>.
29. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ. вузов по мат. спец. : в 2 ч. / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, А. Г. Яблонская, О. Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. – Минск : БГУ, 2014. – Ч. 2. – 175 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/113437>.
30. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В. В. Амелькин. – Минск : БГУ, 2012. – 288 с. – (Классическое университетское издание).
31. Прохорова, Р. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Р. А. Прохорова. – Минск : БГУ, 2017. – 335 с.
32. Теория графов в задачах и упражнениях. Более 200 задач с подробными решениями / В. А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва: URSS: Либроком, 2016. – 415 с.
33. Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика : пер. с англ. / Дж. Андерсон. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
34. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы : учебное пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. – Изд. 2-е, испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 368 с.
35. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – Москва : ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
36. Супрун, В. П. Основы теории булевых функций / В. П. Супрун. – Москва : ЛЕНАНД, 2017. – 208 с.
37. Лутц, М. Изучаем Python : в 2 т. / М. Лутц ; пер. с англ. – Изд. 5-е. – Санкт-Петербург : ООО «Диалектика», 2019–2020. – Т. 1. – 2019. – 832 с.
38. Лутц, М. Изучаем Python : в 2 т. / М. Лутц ; пер. с англ. – Изд. 5-е. – Санкт-Петербург : ООО «Диалектика», 2019–2020. – Т. 2. – 2020. – 720 с.
39. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica : курс лекций / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2005. – 103 с.
40. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica : лаб. практикум : в 2 ч. / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2012. – Ч. 1. – 235 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/95686>.
41. Тарасенко, Ф. П. Прикладной системный анализ : учебник / Ф. П. Тарасенко. – Томск : Издательство Томского университета, 2004. – 186 с.
42. Агеев, Ю. Д. Проектные методологии управления. Agile и Scrum : учеб. пособие для вузов / Ю. Д. Агеев. – Москва : Аспект Пресс, 2018. – 160 с.
43. Вигерс, Г. Разработка требований к программному обеспечению / Г. Вигерс, Дж. Битти ; пер. с англ. – Москва : BHV, 2019. – 576 с.



44. Волк, В. К. Практическое введение в программную инженерию : учебное пособие / В. К. Волк. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 100 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/206669>.
45. Жилин, Д. М. Теория систем. Опыт построения курса : учебное пособие / Д. М. Жилин. – Изд. 7-е, испр. – Москва : URSS, 2021. – 200 с.
46. Гладков, Л. А. Генетические алгоритмы : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по напр. «Информатика и вычислительная техника» и «Информационные системы» / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик ; под ред. В. М. Курейчика. – Изд. 2-е, испр. и доп. – Москва : Физматлит, 2006. – 320 с.
47. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Числовой пакет MATLAB : курс лекций / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2007. – 164 с.
48. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Числовой пакет MATLAB : лабораторный практикум / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2008. – 171 с.
49. Микелуччи, У. Прикладное глубокое обучение. Подход к пониманию глубоких нейронных сетей на основе метода кейсов / У. Микелуччи. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2020. – 368 с.
50. Рассел, С. Искусственный интеллект: современный подход : пер. с англ. / С. Рассел, П. Норвиг. – Изд. 4-е. – Санкт-Петербург : ООО «Диалектика», 2022. – Т. 3. Обучение, восприятие и действие. – 640 с.
51. Хайкин, С. Нейронные сети: Полный курс / С. Хайкин. – Изд. 2-е. – Москва : Вильямс, 2006. – 1104 с.
52. Воронцов К. В. Математические методы обучения по прецедентам. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki>. – Дата доступа: 20.03.2024.
53. Себастьян, Р. Python и машинное обучение / Р. Себастьян. – Москва : ДМК Пресс, 2017. – 614 с.
54. Домингос, П. Верховный алгоритм: как машинное обучение изменит наш мир / П. Домингос. – Москва : РГГУ, 2015. – 447 с.
55. Новиков, И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. – Москва : ФизМатЛит, 2005. – 616 с.
56. Сато, Ю. Без паники! Цифровая обработка сигналов / Ю. Сато. – Москва : Додэка-XXI, 2010. – 176 с.
57. Столниц, Э. Вейвлеты в компьютерной графике / Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. – Ижевск : НИЦ "Регулярная и Хаотическая Динамика", 2002. – 272 с.