

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки

Профилизации: Веб-программирование и интернет-технологии,
Математическое и программное обеспечение мобильных устройств,
Математика

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-07-2023, учебных планов БГУ № 6-5.4-55/03, № 6-5.4-55/02, № 6-5.4-55/01 от 15.05.2023, № 6-5.4-55/13и., № 6-5.4-55/12и., № 6-5.4-55/12и. от 31.05.2023, № 6-5.4-55/22з., № 6-5.4-55/23з. 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

М.Н. Василевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

В.И. Громак, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

С.Г. Красовский, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Е.К. Макаров, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

А.Е. Руденок, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В.В. Цегельник, профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», доктор физико-математических наук, профессор;

А.А. Леваков, профессор кафедры фундаментальной математики и интеллектуальных систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ
(протокол № 12 от 25.04.2024)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и системного анализа



Л. Л. Голубева

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» – формирование знаний и практических навыков по эффективному использованию основных методов теории дифференциальных уравнений.

Задачи учебной дисциплины:

1. Приобретение студентами знаний в области теории дифференциальных уравнений.
2. Приобретение практических навыков решения математических задач, построения и анализа математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится к модулю «Дифференциальные уравнения» государственного компонента.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная программа составлена с учетом программ по дисциплинам: «Математический анализ», «Алгебра и теория чисел».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

базовые профессиональные компетенции:

Строить и анализировать дифференциальные модели реально происходящих явлений и процессов.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- элементарные приемы интегрирования;
- постановку задачи Коши;
- теоремы существования и единственности;
- основные понятия и теоремы общей теории систем дифференциальных уравнений;
- основные понятия и теоремы теории устойчивости по Ляпунову;

уметь:

- решать основные типы уравнений первого порядка;
- ставить начальные и краевые задачи, решать вопросы существования и единственности решения начальных задач;
- решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами;
- применять основные теоремы второго метода Ляпунова для решения вопросов устойчивости движения, определять типы особых точек автономных систем на плоскости;

иметь навыки:

– использования основных приёмов построения дифференциальных моделей реально происходящих явлений и процессов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3 и 4 семестре очной формы, в 5 и 6 семестре заочной формы. Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» отведено для *профилизаций «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств»:*

3 семестр:

- для **очной** формы получения высшего образования: 108 часов, в том числе 72 аудиторных часов, из которых 36 часов (в том числе – 6 ч ДОТ) составляют лекции, 30 часов (в том числе – 6 ч ДОТ) – лабораторные занятия, 6 часа – управляемая самостоятельная работа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

4 семестр:

- для **очной** формы получения высшего образования: 102 часов, 68 аудиторных часов, из которых 34 часа (в том числе 6 ч ДОТ) составляют лекции, 30 часов (в том числе 6 ч ДОТ) – лабораторные занятия, 4 часа – управляемая самостоятельная работа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

5 семестр:

- для **заочной** формы получения высшего образования: 105 часов, 18 аудиторных часов, из которых 8 часов составляют лекции, 10 – лабораторные занятия.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

6 семестр:

- для **заочной** формы получения высшего образования: 105 часов, 18 аудиторных часов, из которых 10 часов составляют лекции, 8 – лабораторные занятия.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» отведено для *профилизации «Математика»*:

3 семестр:

- для очной формы получения высшего образования: 116 часов, в том числе 72 аудиторных часов, из которых 36 часов (в том числе – 6 ч ДОТ) составляют лекции, 30 часов (в том числе – 6 ч ДОТ) – лабораторные занятия, 6 часов – управляемая самостоятельная работа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

4 семестр:

- для очной формы получения высшего образования: 198 часов, 68 аудиторных часов, из которых 34 часа (в том числе 6 ч ДОТ) составляют лекции, 30 часов (в том числе 6 ч ДОТ) – лабораторные занятия, 4 часа – управляемая самостоятельная работа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет и экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Тема 1.1. Введение в теорию дифференциальных уравнений.

Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Простейшие математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями.

Тема 1.2. Уравнения первого порядка в нормальной форме.

Геометрический смысл уравнения $y' = f(x, y)$. Векторное поле. Изоклины. Решения. Интегральные кривые. Задача Коши. Автономные системы. Особые точки. Фазовое пространство. Траектории. Интеграл. Теорема существования и единственности. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме.

Тема 1.3. Методы интегрирования простейших скалярных уравнений.

Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными и к однородным уравнениям.

Тема 1.4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Риккати.

Линейные уравнения первого порядка. Методы интегрирования линейных уравнений первого порядка: метод Лагранжа, метод интегрирующего множителя. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Свойства решений уравнения Риккати.

Тема 1.5. Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Специальные классы интегрирующих множителей. Существование, единственность и общий вид интегрирующего множителя.

Тема 1.6. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.

Изоклины. Интегральные кривые. Задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными и к однородным уравнениям. Геометрические и физические задачи. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Тема 1.7. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной.

Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Неполные уравнения.

Тема 1.8. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Общий метод введения параметра.

Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро. Р и С-дискриминантные кривые. Особые решения уравнений первого порядка, не разрешённых относительно производной.

Раздел 2. Общие теоремы теории дифференциальных уравнений

Тема 2.1. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши для уравнения.

Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Условие Липшица. Метод последовательных приближений доказательства теоремы Пикара существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Метод сжатых отображений доказательства теоремы Пикара. Теорема Пикара для систем дифференциальных уравнений. Теорема Пеано.

Тема 2.2. Теорема Коши существования и единственности голоморфного решения задачи Коши для уравнения.

Теорема Коши существования и единственности голоморфного решения задачи Коши уравнения.

Тема 2.3. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных.

Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных.

Раздел 3. Уравнения высших порядков

Тема 3.1. Уравнения высших порядков.

Уравнения высших порядков. Общие понятия, определения. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения высших порядков, интегрируемые в квадратурах и допускающие понижение порядка.

Раздел 4. Системы дифференциальных уравнений

Тема 4.1. Системы дифференциальных уравнений.

Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия, определения, автономные и гамильтоновы системы. Общие свойства решений систем дифференциальных уравнений.

Тема 4.2. Системы дифференциальных уравнений. Базис первых интегралов системы дифференциальных уравнений.

Интеграл, первый и общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Система в симметричной форме. Базис первых интегралов системы дифференциальных уравнений.

Раздел 5. Дифференциальные уравнения и системы с частными производными первого порядка

Тема 5.1. Однородные линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка и его связь с системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Структура общего решения. Задача Коши.

Тема 5.2. Неоднородные линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Характеристики и интегральные поверхности. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (в случае двух независимых переменных) (без доказательства). Уравнение Пфаффа.

Раздел 6. Линейные дифференциальные уравнения

Тема 6.1. Линейные дифференциальные уравнения.

Линейные уравнения n -го порядка. Общие понятия, определения. Задача Коши и краевая задача. Однородные линейные уравнения n -го порядка. Вронскиан и линейная независимость скалярных функций. Понижение порядка линейных дифференциальных уравнений. Формула Лиувилля.

Тема 6.2. Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения.

Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения (ФСР). Начальная матрица. Критерий ФСР. Линейные уравнения n -го порядка с вещественными коэффициентами.

Тема 6.3. Линейные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Принцип линейной суперпозиции.

Тема 6.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка.

Метод вариации произвольных постоянных решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений (метод Лагранжа). Метод Коши определения частного решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений.

Тема 6.5. Линейные уравнения второго порядка и колебательные явления.

Линейные уравнения второго порядка и колебательные явления. Колебательные свойства решений линейных уравнений второго порядка. Теорема Штурма и теорема сравнения. Линейные уравнения Эйлера и Чебышёва.

Тема 6.6. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных и обобщённых степенных рядов.

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных и обобщённых степенных рядов. Теоремы Коши и Фукса. Метод Фробениуса. Уравнение Эйри и Бесселя. Функции Бесселя.

Тема 6.7. Линейные разностные (дискретные) уравнения.

Линейные разностные (дискретные) уравнения

Тема 6.8. Линейные дифференциальные уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения. Колебательные свойства решений линейных уравнений второго порядка. Интегрирование рядами.

Раздел 7. Линейные дифференциальные системы

Тема 7.1. Линейные дифференциальные системы n -го порядка.

Линейные дифференциальные системы n -го порядка. Общие понятия определения. Задача Коши. Однородные линейные дифференциальные системы. Общие свойства решений. Линейная независимость вектор функций. Вронскиан.

Тема 7.2. Фундаментальная матрица однородной линейной дифференциальной системы.

Матричное линейное дифференциальное уравнение. Фундаментальная матрица и общее решение однородной линейной дифференциальной системы. Формула Лиувилля для линейных дифференциальных систем.

Тема 7.3. Системы Лаппо-Данилевского.

Функции от матриц. Матрицы $\exp(A)$, $\ln(A)$. Фундаментальная матрица для линейных дифференциальных систем. Теорема Лаппо-Данилевского. Метод Эйлера для линейных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами.

Тема 7.4. Структура фундаментальной матрицы.

Структура фундаментальной матрицы. Матричный метод интегрирования линейных дифференциальных систем.

Тема 7.5. Введение в теорию Флоке.

Линейные дифференциальные системы с периодической матрицей коэффициентов. Матрица монодромии, мультипликаторы и характеристические показатели.

Тема 7.6. Неоднородные линейные дифференциальные системы.

Неоднородные линейные дифференциальные системы. Метод Лагранжа. Линейные неоднородные периодические дифференциальные системы. Понятие о краевой задаче для линейных дифференциальных систем. Функция Грина.

Раздел 8. Автономные системы дифференциальных уравнений и теория устойчивости

Тема 8.1. Основные понятия и свойства теории динамических систем.

Основные понятия и свойства теории динамических систем.

Тема 8.2. Поведение траекторий линейных и нелинейных дифференциальных систем второго порядка.

Поведение траекторий линейных дифференциальных систем второго порядка. Невырожденные и вырожденные случаи. Проблема различения центра и фокуса.

Тема 8.3. Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений.

Основные понятия теории устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Примеры. Устойчивость линейных систем n -го порядка. Теоремы об устойчивости по первому приближению.

Тема 8.4. Функции Ляпунова.

Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Тема 8.5. Линейные дифференциальные системы и теория устойчивости.

Линейные дифференциальные системы. Поведение траекторий линейных дифференциальных систем второго порядка. Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Функции Ляпунова.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские Занятия	Лабораторные Занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Всего	70			60		10	
3 семестр								
1	Дифференциальные уравнения первого порядка	16			16		2	
1.1	Введение в теорию дифференциальных уравнений	2			2			Устный опрос
1.2	Уравнения первого порядка в нормальной форме	2			2			Устный опрос
1.3	Методы интегрирования простейших скалярных уравнений	2			2			Устный опрос
1.4	Линейные уравнения первого порядка и уравнения Риккати	2 (ДОТ)			2 (ДОТ)			Устный опрос
1.5	Уравнения в полных дифференциалах	4			2			Устный опрос
1.6	Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной				2		2	Контрольная работа

1.7	Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной	2			2			Устный опрос
1.8	Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Общий метод введения параметра.	2			2			Устный опрос
2	Общие теоремы теории дифференциальных уравнений	8			4			
2.1	Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши для уравнения	4			2			Устный опрос
2.2	Теорема Коши существования и единственности голоморфного решения задачи Коши для уравнения	2			1			Устный опрос
2.3	Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных	2			1			Устный опрос
3	Уравнения высших порядков	4			4		2	
3.1	Уравнения высших порядков	4 (ДОТ)			4 (ДОТ)		2	Контрольная работа
4	Системы дифференциальных уравнений	4			2			
4.1	Системы дифференциальных уравнений	2			1			Устный опрос
4.2	Системы дифференциальных уравнений. Базис первых интегралов системы дифференциальных уравнений	2			1			Устный опрос
5	Дифференциальные уравнения и системы с частными производными первого порядка	4			4		2	

5.1	Однородные линейные уравнения в частных производных первого порядка	2			2			Устный опрос
5.2	Неоднородные линейные уравнения в частных производных первого порядка	2			2		2	Контрольная работа.
4 семестр								
6	Линейные дифференциальные уравнения	14			12		2	
6.1	Линейные дифференциальные уравнения	2			1			Устный опрос
6.2	Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения	2			1			Устный опрос
6.3	Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	2			4			Устный опрос
6.4	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка	2 (ДОТ)			2 (ДОТ)			Устный опрос
6.5	Линейные уравнения второго порядка и колебательные явления	2			1			Устный опрос
6.6	Интегрирование линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных и обобщённых степенных рядов	2 (ДОТ)			2 (ДОТ)			Устный опрос
6.7	Линейные разностные (дискретные) уравнения	2			1			Устный опрос
6.8	Линейные дифференциальные уравнения						2	Контрольная работа
7	Линейные дифференциальные системы	12			10			
7.1	Линейные дифференциальные системы n-го порядка	2			1			Устный опрос
7.2	Фундаментальная матрица однородной линейной дифференциальной системы	2			1			Устный опрос

7.3	Системы Лапко-Данилевского	2 (ДОТ)			2 (ДОТ)			Устный опрос
7.4	Структура фундаментальной матрицы	2			2			Устный опрос
7.5	Введение в теорию Флоке	2			2			Устный опрос
7.6	Неоднородные линейные дифференциальные системы	2			2			Устный опрос
8	Автономные системы дифференциальных уравнений и теория устойчивости	8			8		2	
8.1	Основные понятия и свойства теории динамических систем	2			2			Устный опрос
8.2	Поведение траекторий линейных и нелинейных дифференциальных систем второго порядка	2			2			Устный опрос
8.3	Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений	2			2			Устный опрос
8.4	Функции Ляпунова	2			2			Устный опрос
8.5	Линейные дифференциальные системы и теория устойчивости						2	Контрольная работа

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения высшего образования.

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские Занятия	Лабораторные Занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Всего	18			18			
5 семестр								
1	Дифференциальные уравнения первого порядка	4			6			
1.1	Введение в теорию дифференциальных уравнений	0,5			1			Устный опрос
1.2	Уравнения первого порядка в нормальной форме	0,5			1			Устный опрос
1.3	Методы интегрирования простейших скалярных уравнений	0,5			1			Устный опрос
1.4	Линейные уравнения первого порядка и уравнения Риккати	0,5			1			Устный опрос
1.5	Уравнения в полных дифференциалах	0,5			0,5			Устный опрос
1.6	Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	0,5			0,5			Контрольная работа

1.7	Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной	0,5			0,5			Устный опрос
1.8	Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Общий метод введения параметра.	0,5			0,5			Устный опрос
2	Общие теоремы теории дифференциальных уравнений	2			2			
2.1	Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши для уравнения	1			1			Устный опрос
2.2	Теорема Коши существования и единственности голоморфного решения задачи Коши для уравнения	1			1			Устный опрос
3	Уравнения высших порядков	2			2			
3.1	Уравнения высших порядков	2			2			Контрольная работа
6 семестр								
6	Линейные дифференциальные уравнения	10			8			
6.1	Линейные дифференциальные уравнения	2			1			Устный опрос
6.2	Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения	2			1			Устный опрос
6.3	Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	1			1			Устный опрос
6.4	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка	1			1			Устный опрос
6.5	Линейные уравнения второго порядка и колебательные явления	1			1			Устный опрос
6.6	Интегрирование линейных дифференциальных уравнений при	1			1			Устный опрос

	помощи степенных и обобщённых степенных рядов							
6.7	Линейные разностные (дискретные) уравнения	1			1			Устный опрос
6.8	Линейные дифференциальные уравнения	1			1			Контрольная работа

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / Ю. Н. Бибииков. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2023. - 303 с. - URL: <https://reader.lanbook.com/book/210617>.
2. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения : учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / Л. Э. Эльсгольц. - Изд. стер. - Москва : URSS, 2023. - 309 с.
3. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : [более 1400 задач с ответами] / А. Ф. Филиппов. - Изд. 9-е. - Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2022. - 239 с.
4. Егоров А. И. Обновленный курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие для вузов / Егоров А. И. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2024. - 472 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/359828>.

Дополнительная литература

1. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / В. В. Амелькин. - Минск: БГУ, 2012. - 288 с. - URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/43871>.
2. Прохорова, Р.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. УВО по математическим спец. / Р. А. Прохорова; БГУ. - Минск: БГУ, 2017. - URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/205697>.
3. Берёзкина, Н. С. Дифференциальные и интегральные уравнения. Тесты : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим и физическим специальностям : в 2 ч. / Н. С. Берёзкина, А. А. Гринь, В. С. Немец. - Минск : РИВШ, 2021. - Ч. 1. - 2021. - 307 с.
4. Берёзкина, Н. С. Дифференциальные и интегральные уравнения. Тесты : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим и физическим специальностям : в 2 ч. / Н. С. Берёзкина, А. А. Гринь, В. С. Немец. - Минск : РИВШ, 2021. - Ч. 2. - 2021. - 322 с.
5. Богданов, Ю.С. Курс дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для студ. математич. и физич. спец. высш. учеб. завед. / Ю.С.Богданов, С.А.Мазаник, Ю.Б.Сыроид. - Мн.: Універсітэцкае, 1996.
6. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Дифференциальные уравнения: учеб.-метод. пособие для спец. I ступени высш. образования / [авт.: В. В. Цегельник и др.]; М-во образования Республики Беларусь, УО "БГУИР", Фак. компьютерных систем и сетей, Каф. высшей математики. - Минск: БГУИР, 2018.

7. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - Минск: Наука и техника, 1979.
8. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник для мех.-мат. спец. ун-тов / Н. М. Матвеев. - Изд. 4-е, испр. и доп. - Минск: Высшая школа, 1974.
9. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд., доп. - СПб.: Лань, 2002.
10. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие для студ. вузов / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. - Изд. 2-е, перераб. - Москва: Высшая школа, 1989.
11. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для гос. ун-тов. - Изд. 6-е. - Москва: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1953.
12. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов / Л.Э.Эльсгольц. - 5-е изд. - М. : УРСС, 2002.
13. Мартынов, И.П. Дифференциальные уравнения и системы Пенлеве типа / И.П. Мартынов, Н. С. Берёзкина, В. А. Пронько; УО "Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы". – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2019.
14. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. высш. технических учеб. заведений / М. В. Федорюк. - Изд. стер. – Москва: URSS: Либроком, 2017.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: устный опрос, контрольная работа.

Задания к лабораторным и контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Отметка за ответы на лекциях и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументов, примеров из практики, глубину понимания терминов, используемых студентом при ответе на вопросы.

При опросах на лабораторных занятиях ценится знание студентом теоретических сведений, полученных на лекции, поэтому студенту перед занятием необходимо почитать и разобраться с лекционным материалом, чтобы он был готов пробовать применять его на практических занятиях.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дифференциальные уравнения» учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

Зачет по дисциплине проходит в форме письменных контрольных работ. Если студент успешно, не менее чем на «четыре» написал все контрольные работы, то допускается получение зачета без проведения дополнительного опроса.

Экзамен по дисциплине проходит в устной форме.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- устный опрос – 50 %,
- контрольная работа – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) - 40% и экзаменационной отметки - 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы обучающихся

Тема 1.6. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. (2 ч.)

Изоклины. Интегральные кривые. Задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными и к однородным уравнениям. Геометрические и физические задачи. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

При изучении первого раздела студент учится решать задачи на лекциях, практических занятиях и дома, выполняя домашние практические упражнения. После изучения дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, студент пишет контрольную работу №1. Примерные варианты контрольной работы №1 можно найти в [4], §10.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.1. Уравнения высших порядков. (2 ч.)

Уравнения высших порядков. Общие понятия, определения. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения высших порядков, интегрируемые в квадратурах и допускающие понижение порядка.

После изучения второго и третьего разделов студент пишет контрольную работу №2. Примерные варианты контрольной работы №2 можно найти в [4], §18.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 5.2. Неоднородные линейные уравнения в частных производных первого порядка. (2 ч.)

Системы дифференциальных уравнений. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики и интегральные поверхности. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (в случае двух независимых переменных) (без доказательства). Уравнение Пфаффа.

После изучения четвертого и пятого разделов студент пишет контрольную работу №3. Примерные варианты контрольной работы №3 можно найти в [4], §18.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6.8. Линейные дифференциальные уравнения. (2 ч.)

Линейные дифференциальные уравнения. Колебательные свойства решений линейных уравнений второго порядка. Интегрирование рядами.

После изучения шестого раздела студент пишет контрольную работу №4. Примерные варианты контрольной работы №4 можно найти в [4], §26.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 8.5. Линейные дифференциальные системы и теория устойчивости. (2 ч.)

Линейные дифференциальные системы. Поведение траекторий линейных дифференциальных систем второго порядка. Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Функции Ляпунова. После изучения седьмого и восьмого разделов студент пишет контрольную работу №5. Примерные варианты контрольной работы №5 можно найти в [4], §35.

Форма контроля – контрольная работа.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

При организации образовательного процесса *используются методы и приемы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и

письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: курсы лекций и лабораторные практикумы, методические указания к лабораторным занятиям, вопросы для подготовки к зачету и экзамену, перечень рекомендуемой литературы, информационные ресурсы.

Самостоятельная работа студента включает в себя работу с учебной литературой по заданным темам дисциплины, поиск новейшей учебной и научной информации в указанных областях знаний и знакомство с ней, а также выполнение поставленных заданий.

Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, метод решения. Пример ДУ с разделяющимися переменными с решением.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка, метод решения. Пример однородного ДУ с решением.
4. Уравнения, сводящиеся к однородным.
5. Уравнение Бернулли.
6. Уравнение Риккати.
7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, метод интегрирующего множителя, пример.
8. Определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Критерий принадлежности к ДУ в полных дифференциалах. Метод решения, пример.
9. Интегрирующий множитель. Формула для его нахождения. Случаи $\mu(x, y) = \mu(x)$ и $\mu(x, y) = \mu(y)$. Пример: $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$, найти интегрирующий множитель.
10. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.
11. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Случаи $x = f(y, y')$ и $y = f(x, y')$. Пример: $x = (y')^2$, решить ДУ методом введения параметра.
12. Дифференциальные уравнения Клеро. Пример: $y = xy' + (y')^2$, решить ДУ.

13. Дифференциальные уравнения Лагранжа. Пример: $y = xy' + (y')^2$, решить ДУ.
14. Особое решение. Дискриминантная кривая. Пример: $y = xy' + (y')^2$, найти особое решение.
15. Огибающая семейства кривых. Пример: $y = xc + c^2$, найти огибающую семейства.
16. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Формулировка, схема доказательства.
17. Метод последовательных приближений.
18. Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними.
19. Дифференциальное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. Пример: $y^{(3)} = 1/x$, решить ДУ.
20. Дифференциальные уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$ и $F(y, y', y'') = 0$. Пример: $2yy'' + (y')^2 = 0$, решить ДУ.
21. Системы дифференциальных уравнений первого порядка. Основные понятия, связанные с ними.
22. Первый интеграл системы дифференциальных уравнений первого порядка.
23. Теорема о существовании n функционально независимых первых интегралов системы.
24. Автономные системы и ее функционально независимые первые интегралы. Пример: система $dx/dt = -y, dy/dt = x$, найти все ее функционально независимые первые интегралы.
25. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка и дифференциального уравнения n -го порядка.
26. Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных 1-го порядка. Алгоритм решения задачи Коши.
27. Линейные неоднородные уравнения в частных производных 1-го порядка и их связь с линейными однородными уравнениями в частных производных 1-го порядка.
28. Задача Коши для линейного неоднородного уравнения в частных производных 1-го порядка. Алгоритм решения задачи Коши.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними: решение, задача Коши, общее решение, частное решение, интегральная кривая.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, метод решения. Пример ДУ с разделяющимися переменными с решением.

3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка, метод решения. Пример однородного ДУ с решением.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, метод интегрирующего множителя, пример.
5. Определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Критерий принадлежности к ДУ в полных дифференциалах. Метод решения, пример.
6. Интегрирующий множитель. Формула для его нахождения. Случаи $\mu(x, y) = \mu(x)$ и $\mu(x, y) = \mu(y)$. Пример: $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$, найти интегрирующий множитель.
7. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра. Случаи $x = f(y, y')$ и $y = f(x, y')$. Пример: $x = (y')^2$, решить ДУ методом введения параметра.
8. Дифференциальные уравнения Клеро и Лагранжа. Пример: $y = xy' + (y')^2$, решить ДУ.
9. Особое решение. Дискриминантная кривая. Пример: $y = xy' + (y')^2$, найти особое решение.
10. Огибающая семейства кривых. Пример: $y = xc + c^2$, найти огибающую семейства.
11. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Формулировка, схема доказательства.
12. Метод последовательных приближений. Пример: $y' = y^2, y(0) = 0$. Найти первые два последовательные приближения.
13. Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними.
14. Дифференциальное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. Пример: $y^{(3)} = 1/x$, решить ДУ.
15. Дифференциальные уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$ и $F(y, y', y'') = 0$. Пример: $2yy'' + (y')^2 = 0$, решить ДУ.
16. Линейная зависимость и независимость функций. Вронскиан. Необходимое условие линейной независимости функций. Пример: $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x|x|$, найти их вронскиан и показать, что они линейно независимы.
17. Однородное линейное ДУ n -го порядка. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения.
18. Формула Остроградского-Лиувилля и ее применение для решения однородного линейного ДУ 2-го порядка. Пример: $y'' - 2y' + y = 0, y_1 = e^x$ - его решение. Найти общее решение.
19. Неоднородное линейное ДУ n -го порядка. Теорема о структуре общего решения.

20. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения неоднородного линейного ДУ n -го порядка. Пример: $y'' = x$, найти его решение методом Лагранжа.

21. Однородное линейное ДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Случай попарно разных действительных корней характеристического уравнения. Пример: $y'' - 3y' + 2y = 0$, найти его решение.

22. Однородное линейное ДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Случай кратных корней характеристического уравнения. Пример: $y'' - 2y' + y = 0$, найти его решение.

23. Однородное линейное ДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Случай комплексных корней характеристического уравнения. Пример: $y'' + y = 0$, найти его решение.

24. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Основные понятия, связанные с ними: задача Коши, общее решение, частное решение.

25. Однородная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения.

26. Неоднородная системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема о структуре общего решения.

27. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Ее представление в матричном виде.

28. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Случай попарно разных действительных корней характеристического уравнения. Пример: $dX / dt = AX, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, найти ее решение.

29. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Случай комплексных корней характеристического уравнения. Пример: $dX / dt = AX, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, найти ее решение.

30. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения. Матричный способ решения. Пример: $dX / dt = AX, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, найти решение.

31. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения неоднородной линейной системы ДУ. Пример: $dX / dt = AX + F(t), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$ найти ее решение методом Лагранжа.

32. Матричная экспонента. Метод ее нахождения. Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, найти e^A ?

33. Автономные системы ДУ на плоскости. Траектории. Направление движения по траектории. Пример: $dx/dt = -y, dy/dt = x$. Определить направление движения по траектории в точке $(-1, -2)$.

34. Классификация особых точек линейных систем ДУ на плоскости. Пример: $dx/dt = -y, dy/dt = x$. Построить траектории в окрестности особой точки.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и системного анализа



Л. Л. Голубева

25.04.2024

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
____ (протокол № ____ от ____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)