

СЕРИЯ «КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ИЗДАНИЕ»

Основана в 2010 году



Редакционный совет серии:

С. В. Абламейко (*пред.*), Н. Н. Герасимович (*отв. секретарь*),
М. А. Журавков, С. Н. Ходин, И. С. Ровдо,
В. В. Лысак, О. М. Самусевич, О. А. Ивашкевич,
В. М. Анишик, П. А. Мандрик

М. А. Журавков Э. И. Старовойтов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования по специальностям
«Механика и математическое моделирование»,
«Физика (по направлениям)»,
«Промышленное и гражданское строительство»,
«Автомобильные дороги»*

УДК 539.3:51(075.8)
ББК 22.251в631я73-1
Ж91

Рецензенты:
кафедра теоретической механики и механики материалов
Белорусского национального технического университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук *Ю. В. Василевич*);
доктор технических наук *В. В. Можаровский*

Журавков, М. А.
Ж91 Математические модели механики твердых тел : учеб. пособие / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. — Минск : БГУ, 2021. — 535 с. — (Классическое университетское издание).
ISBN 978-985-881-131-0.

Издание содержит фундаментальные, классические понятия механики деформируемого твердого тела, а также новые, современные неклассические модели. Представлены основы математического моделирования. Отражены современные подходы к постановке и решению задач различных разделов механики деформируемого твердого тела.

Для студентов учреждений высшего образования по специальностям «Механика и математическое моделирование», «Физика (по направлениям)», «Промышленное и гражданское строительство», «Автомобильные дороги».

УДК 539.3:51(075.8)
ББК 22.251в631я73-1

ISBN 978-985-881-131-0

© Журавков М. А.,
Старовойтов Э. И., 2021
© БГУ, 2021

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Серия «Классическое университетское издание» посвящена 90-летию Белорусского государственного университета. Путь, который прошло наше учебное заведение в своем развитии, свидетельствует о становлении в нем собственной академической и научной традиции. Несомненно, опыт и знания, аккумулированные в стенах БГУ, являются не только предметом нашей гордости, но и достоянием всего белорусского общества. Одна из целей предлагаемой серии – сделать это достояние как можно более открытым и доступным.

Белорусский государственный университет всегда славился академичностью и фундаментальностью в подготовке специалистов. Однако сегодня этого уже недостаточно. От выпускника требуется умение быстро включаться в непосредственную практическую работу, которой свойствен синтез нескольких форм деятельности: собственно производственной, исследовательской, проектно-разработческой. В выигрыше в конечном итоге окажется тот, кто сегодня научится более эффективно создавать и применять знания, оперативно изменять технологии, совершенствовать и радикально трансформировать накопленный опыт. Вот почему совмещение преимуществ фундаментального и прагматического образования стало основой инновационно ориентированной подготовки будущих специалистов в нашем университете.

Серия отражает многолетний опыт научно-педагогической, методической и издательской работы БГУ. Ее цель – представить модель учебного текста, которая в своей структуре содержит набор программ образовательно-научно-производственной деятельности будущих специалистов. Реализация этой модели позволит обеспечить универсализм выпускника, его способность к эффективному решению важных задач, стоящих перед Республикой Беларусь на национальном и международном уровне.

Новое университетское издание, являя собой сплав научной и педагогической мысли, призвано формировать особую культуру знания – передового и доступного, теоретического и практического, общекуль-

турного и специализированного. Словом, такого знания, которое будет работать.

Книги этой серии должны стать образцом научно-методического обеспечения современного образовательного процесса в высшей школе, утвердить ведущую роль нашего университета в качестве национального научно-методического центра Республики Беларусь.

С. В. Абламейко

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии рассматриваются актуальные и важные проблемы выбора и построения корректных механико-математических моделей, которые адекватно описывают изучаемый механический объект/явление/процесс.

Подходы и методы решения конкретных классов граничных задач механики деформируемых твердых тел в данном издании подробно не приводятся. Эти вопросы изложены в соответствующих специальных многочисленных изданиях. Кроме того, одним из основных инструментов получения решений является использование численных методов, что делает круг вопросов, связанных с выбором и обоснованием исходной механико-математической постановки решаемой прикладной задачи, анализом и интерпретацией результатов моделирования, актуальным.

Издание написано на основе учебного пособия Журавкова М. А., Старовойтова Э. И. «Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности» (Минск: БГУ, 2011), которое было существенно переработано и расширено.

В представленном учебном пособии аккумулирован материал, накопленный авторами за многие годы преподавательской и научно-исследовательской работы. В частности, в книге получил дальнейшее логическое развитие материал учебников, учебных пособий и курсов лекций, изданных авторами ранее (например, [1–17]).

Механика деформируемого твердого тела (МДТТ) представляет собой совокупность дисциплин, изучающих напряженно-деформированное состояние твердых деформируемых тел при различных физических законах поведения материалов.

Базовые, классические разделы МДТТ — теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Сюда можно отнести также сопротивление материалов и строительную механику.

Задачи, которые решаются этими науками, сходны между собой и заключаются в установлении связи между внешними нагрузками и поведением деформируемого тела. Различие между этими разделами механики состоит в рассматриваемых объектах, принимаемых допущениях и в методах решения задач.

В курсе сопротивления материалов анализируются главным образом брусья.

В теории упругости — брусья, пластины, оболочки, двух- и трехмерные области (полуплоскость и полупространство).

В строительной механике — системы, состоящие из стержней (ферм), балок (рам), пластин и оболочек.

В теориях упругости, пластичности и вязкоупругости используются физические законы, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями, но не вводятся каких-либо упрощающих гипотез о деформации рассматриваемого объекта при внешней нагрузке. В результате приходится решать более сложные задачи, чем, например, в сопротивлении материалов, и для их решения необходимо прибегать к более сложным математическим методам.

Часто теорию упругости (это относится и к теории пластичности) подразделяют на математическую и прикладную теории упругости.

Математическая теория упругости не использует деформационных гипотез, а получаемые уравнения решаются либо точными, либо такими приближенными методами, которые позволяют безгранично увеличивать степень приближения к точному решению. Именно поэтому можно считать результаты, получаемые при решении задач математической теории упругости, эталоном для оценки точности различных приближенных теорий и методов решения сходных задач.

Прикладная теория упругости отличается от математической тем, что для решения задач помимо закона Гука¹ применяются некоторые дополнительные гипотезы.

¹ Гук Роберт (Hook R., 1635–1703), английский естествоиспытатель, разносторонний ученый и экспериментатор.

зы деформационного характера (гипотеза плоских сечений для стержней, прямых нормалей для пластин и оболочек и т. п.).

При решении задач прикладной теории упругости наряду с точными методами решения соответствующих уравнений могут применяться и приближенные. Между прикладной теорией упругости, тесно связанной с запросами практики, и сопротивлением материалов нет четкой границы.

Первый математик, который исследовал сопротивление твердых тел разрушению, — Галилео Галилей¹. Хотя он считал твердые тела неупругими и не владел законом, связывающим смещения и силы, его работы указали путь, по которому пошли другие исследователи.

Открытие закона Гука в 1660 г. и установление общих уравнений Навье² в 1821 г. представляют две важные вехи в развитии теории. Закон Гука дал теории необходимое экспериментальное обоснование. Нахождение общих уравнений позволило свести к математическим вычислениям все вопросы, относящиеся к малым деформациям упругих тел.

В период между открытием закона Гука и установлением общих дифференциальных уравнений теории упругости интерес исследователей был направлен на проблемы колебаний стержней и пластин, а также на устойчивость колонн. Сюда следует отнести фундаментальные работы Якоба Бернулли³ по форме упругой кривой и Леонарда Эйлера⁴, положившие начало исследованиям в области устойчивости упругих систем. Жозеф Луи Лагранж⁵ следовал теории Эйлера и применил ее для определения наиболее надежной формы колонн.

Математическая теория упругости как наука сложилась в первой половине XIX в. в основном благодаря трудам французских инженеров и ученых.

Впервые уравнения равновесия и колебаний упругих твердых тел в предположении дискретного молекулярного строения тела были получены Навье. Пользуясь вариационным исчислением, он вывел не только дифференциальные уравнения, но и граничные условия, которые должны удовлетворяться на поверхности тела.

Габриель Ламе⁶ и Бенуа Клапейрон⁷ развили теорию Навье применительно к строительному делу, написали специальный мемуар о внутреннем равновесии твердых тел, решили задачу о напряжениях и деформациях толстостенной трубы при осесимметричном нагружении (задача Ламе).

¹ Галилей Галилео (Galilei Galileo, 1564–1642), итальянский ученый, один из основателей современной механики.

² Навье Анри (Navier A., 1785–1836), французский математик и механик, основоположник теории упругости, впервые ввел понятие напряжения.

³ Бернулли Якоб (Bernoulli J., 1654–1705), швейцарский ученый.

⁴ Эйлер Леонард (Euler L., 1707–1783), по происхождению — швейцарец, математик, механик, в 1727–1741 гг. работал в России, затем в Берлине.

⁵ Лагранж Жозеф Луи (Lagrange J. L., 1736–1813), французский математик и механик в области вариационного исчисления, аналитической механики.

⁶ Ламе Габриель (Lamé G., 1795–1870), французский математик и механик, в 1820–1832 гг. работал в России, специалист в математической физике, теории упругости.

⁷ Клапейрон Бенуа Поль Эмиль (Clapeyron B. P. E., 1799–1864), французский физик и инженер, в 1820–1830 гг. работал в России.

К осени 1822 г. Огюстен Луи Коши¹ открыл большинство основных элементов чистой теории упругости. Он ввел понятие о напряжении и деформациях в данной точке, показал, что они могут быть определены шестью соответствующими компонентами.

Исходя из гипотезы о сплошном и однородном строении твердого тела, Коши получил уравнения движения (или равновесия). Он впервые ввел в уравнения теории упругости две упругие постоянные, в то время как уравнения Навье содержали лишь одну постоянную. Соотношения, связывающие малые деформации и перемещения, названы его именем.

Значительный вклад в развитие теории упругости принадлежит Барре де Сен-Венану². Он предложил новый подход для решения ряда прикладных задач (полуобратный метод Сен-Венана). С помощью этого метода были решены важные задачи об изгибе и кручении бруса некруглого поперечного сечения. Ему также принадлежат исследования по колебаниям, удару, теории пластичности.

Во второй половине XIX в. Густав Роберт Кирхгоф³ сформулировал основные уравнения теории тонких стержней, положив начало развитию методов расчета упругих пружин, разработал последовательную теорию тонких пластин. Первые попытки в этом направлении были сделаны Жозефом Лагранжем и Софи Жермен⁴ в 1814 г., но они не сумели правильно сформулировать граничные условия задачи.

В конце XIX в. Герман Арон⁵ и Огастес Ляв⁶ дали первые варианты уравнений современной теории оболочек, основанные на применении гипотезы недеформируемости нормального прямолинейного элемента. Жозеф Буссинеск⁷ изучал распределение напряжений в упругом теле под действием сосредоточенной силы. Это позволило Генриху Герцу⁸ поставить задачу о взаимодействии при контакте двух упругих тел.

Важную роль в развитии теории упругости сыграли работы русских ученых. Фундаментальные результаты в развитии принципа возможных перемещений, теории удара, а также интегрирования уравнений динамики принадлежат Михаилу Васильевичу Остроградскому⁹.

¹ Коши Огюстен Луи (cauchy A. L., 1789–1857), французский математик, один из основоположников математической теории упругости.

² Барре де Сен-Венан (Saint-Venant A. J. C., 1797–1886), французский механик, один из основоположников теории пластичности.

³ Кирхгоф Густав Роберт (Kirchhoff G. R., 1824–1887), немецкий физик, автор трудов по механике, математической физике, электричеству, спектральному анализу.

⁴ Жермен Софи (Germaine Sophie), за исследования равновесия пластин награждена премией французского Института 1815 г., работа опубликована в 1821 г. Первый вариант уравнения равновесия пластинок был исправлен Лагранжем в 1811 г.

⁵ Арон Герман (Aron Herman, 1845–1913), немецкий исследователь электротехники.

⁶ Ляв Огастес Эдуард Хьют (Love A. E. H.) издал уникальную книгу, которая по праву считается энциклопедией математической теории упругости начала XX столетия.

⁷ Буссинеск Жозеф Валантен (Boussinesq J. V., 1862–1929), французский механик, автор трудов по гидродинамике, оптике, термодинамике, теории упругости.

⁸ Герц Генрих Рудольф (Hertz H. R., 1857–1894), немецкий физик; дал постановку класса контактных задач.

⁹ Остроградский Михаил Васильевич (1801–1861/62), русский математик, механик; провел важные исследования по интегральному исчислению.

Генерал от артиллерии Аксель Вильгельмович Гадолин¹ исследовал напряжения в многослойных цилиндрах, построил основы проектирования стволов артиллерийских орудий.

Дмитрий Иванович Журавский² изложил современную теорию изгиба балок. Он широко применял методы сопротивления материалов при проектировании мостов железных дорог. Существенное продвижение в решении плоской задачи теории упругости связано с трудами Гурия Васильевича Колосова³ и Николая Ивановича Мухелишвили⁴, которые впервые применили метод, основанный на использовании функций комплексного переменного.

Иван Григорьевич Бубнов⁵ решил ряд задач об изгибе пластин.

Основополагающие исследования по теории пластин и оболочек, колебаниям стержней с учетом влияния деформаций сдвига были выполнены Степаном Прокофьевичем Тимошенко⁶. Впоследствии многие задачи были решены предложенным им энергетическим методом.

Борису Григорьевичу Галеркину⁷ принадлежит цикл исследований по теории изгиба тонких пластин, толстых плит и теории оболочек. Для вывода уравнений теории оболочек он, по-видимому, впервые применил уравнения трехмерной теории упругости.

Петр Федорович Папкович⁸ впервые предложил решение задач теории упругости в перемещениях в форме гармонических функций, исследовал общие теоремы устойчивости упругих систем, решил задачи об изгибе пластин при различных граничных условиях.

Большой вклад в развитие общей теории оболочек внес Василий Захарович Власов⁹. Он исследовал общие уравнения теории оболочек, разработал технический и полубезмоментный ее варианты, предложил новую теорию изгиба и кручения

¹ Гадолин Аксель Вильгельмович (1828–1892), русский ученый, разработал теорию скрепления стволов артиллерийских орудий, автор трудов по физике, обработке металлов.

² Журавский Дмитрий Иванович (1821–1891), русский ученый и инженер, основатель школы в области строительной механики и мостостроения.

³ Колосов Гурий Васильевич (1867–1936), русский, советский механик, автор трудов по математике, теории машин и механизмов. Член-корреспондент АН СССР.

⁴ Мухелишвили Николай Иванович (1891–1976), отечественный математик и механик, автор трудов по теории упругости, интегральным уравнениям и граничным задачам. Академик АН СССР. Герой Социалистического Труда.

⁵ Бубнов Иван Григорьевич (1872–1919), русский инженер, заложил основы строительной механики корабля, построил две подводные лодки.

⁶ Тимошенко Степан Прокофьевич (1878–1972), русский, советский ученый, с 1922 г. – в США, автор трудов по устойчивости упругих систем, вариационным методам, вибрации. Иностранное член АН СССР.

⁷ Галеркин Борис Григорьевич (1871–1945), русский, советский инженер и ученый, один из создателей теории изгиба пластин, его труды способствовали внедрению математических методов в инженерные исследования. Академик АН СССР.

⁸ Папкович Петр Федорович (1887–1946), русский, советский кораблестроитель; основные труды по строительной механике корабля, теории упругости. Член-корреспондент Академии наук СССР.

⁹ Власов Василий Захарович (1906–1958), русский, советский ученый в области механики, автор трудов по сопротивлению материалов, строительной механике, теории упругости. Член-корреспондент АН СССР.

тонкостенных стержней открытого профиля, основал новую научную дисциплину — строительную механику оболочек.

Продолжили исследования в этой области Валентин Валентинович Новожилов¹ и Юрий Николаевич Работнов².

Теория пластичности, изучающая необратимые деформации твердых тел, в качестве самостоятельного раздела механики начала оформляться более ста пятидесяти лет назад.

В первых работах Барре де Сен-Венана (1868—1871 гг.) сформулированы основы теории пластического течения. Создание этой теории направлено на описание процессов обработки металлов давлением. Хотя в распоряжении ученого было ограниченное количество опытных данных, ему удалось (в некоторой степени по аналогии с гидродинамикой вязкой жидкости) сформулировать отдельные закономерности, значимость которых сохранилась до наших дней.

В начале XX в. Теодор фон Карман³ (1909), Максимилиан Хубер⁴ (1904), Рихард Мизес⁵ (1913), Арпад Надаи⁶ (1921), Генрих Хенки⁷ (1924) выдвинули новые концепции и теории, которые хотя и не решили проблемы, но расширили круг идей.

В 1920—30-е гг. помимо предложения разных вариантов теории были широко поставлены экспериментальные исследования. Это важный этап в развитии теории пластичности.

Однако к концу 1930-х — началу 40-х гг. сложилась ситуация, когда опыты могли подтверждать одну теорию и одновременно опровергать другие теории.

Ясность была внесена Алексеем Антоновичем Ильюшиным⁸ (в 1943—1945 гг.), который указал на необходимость четкого разграничения характера процессов деформирования (простая и сложная деформации). Анализ экспериментальных данных свидетельствовал о взаимной согласованности, если они были получены в условиях простой деформации. Эти исследования завершились разработкой теории малых упругопластических деформаций.

¹ Новожилов Валентин Валентинович (1910—1987), русский, советский механик, автор трудов по теории упругости, пластичности, расчету оболочек и корабельных конструкций. Академик АН СССР. Герой Социалистического Труда.

² Работнов Юрий Николаевич (1914—1985), русский и советский ученый-механик, автор трудов по теории оболочек, теории пластичности, ползучести и разрушению материалов. Академик АН СССР.

³ Карман Теодор фон (Karman Th., 1881—1963), немецкий ученый, автор трудов по самолето- и ракетостроению, аэро-, гидро- и термодинамике, строительной механике.

⁴ Хубер Максимилиан Тытус (Hyber M. T., 1872—1950), автор трудов в области сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности, предложил критерий пластичности потенциальной энергии изменения формы.

⁵ Мизес Рихард (Mises R.) (1883—1953), немецкий математик и механик, с 1939 г. — в США, один из основоположников теории пластичности, автор трудов по аэромеханике.

⁶ Надаи Арпад Людвиг (Nadai A. L., 1883—1963); работы в области теории упругости, пластичности, вместе с Лоде ввел параметр Надаи — Лоде.

⁷ Хенки Генрих (Hencky H., 1885—1951); наиболее известные работы в области теории скольжения, пластичности, реологии.

⁸ Ильюшин Алексей Антонович (1911—1998), русский и советский ученый-механик, один из основоположников теорий пластичности, вязкоупругости и других разделов механики, член-корреспондент АН СССР.

В начале 1950-х гг. были предложены различные теории пластичности при произвольном сложном нагружении.

Подходы к структуре этих теорий оформились в виде трех течений:

- современная теория течения;
- теория скольжения;
- общая теория упругопластических деформаций.

Построение общей математической деформационной теории пластичности базировалось на сформулированном Алексеем Антоновичем Ильюшиным постулате изотропии.

Основой дальнейшего развития теории течения упругопластических тел стал постулат упрочнения Даниэля Друкера¹ о неотрицательности работы внешних сил в замкнутом цикле пластического нагружения.

В развитие этих направлений большой вклад внесли теоретические и экспериментальные исследования отечественных и зарубежных ученых.

Во второй половине прошлого века широкое признание завоевало представление о вязкоупругом поведении материалов. Дело в том, что у многих материалов в эксплуатационных условиях закон связи между силами и перемещениями оказывается существенно зависящим от времени. Эта зависимость проявляется в том, что, например, при постоянной нагрузке деформации не остаются постоянными, «ползут». Они растут со временем и достигают недопустимо большой величины, если нагрузка действует достаточно долго.

С другой стороны, если изделию сообщена принудительная деформация и наложены связи, удерживающие деформацию неизменной, реакции связей убывают со временем, «релаксируют». Таким образом, например, соединение деталей путем посадки становится неплотным.

Наибольший интерес для приложений представляет ползучесть металлов при повышенных температурах. Например, углеродистая сталь, поведение которой при обычных температурах хорошо описано теорией упругости, если напряжения не слишком велики, и теорией пластичности при более высоких напряжениях, при температуре примерно 450° и выше ведет себя совершенно иначе. Уже при небольших напряжениях сталь перестает подчиняться закону Гука, кривая растяжения ее существенно зависит от скорости нагрузки.

Первоначальное развитие современной теории вязкоупругости связано с именами Людвиг Больцмана², Джеймса Максвелла³, Кельвина (Уильяма Томсона)⁴, Вольдемара Фойгта⁵. Впоследствии оказалось, что их простейшие модели не опи-

¹Друкер Даниэль Чарльз (Drucker D. C., 1918–2001), американский ученый-механик и инженер, автор фундаментальных работ по теории пластичности.

²Больцман Людвиг (Boltzmann L., 1844–1906), австрийский физик, один из основателей статистической физики и механики.

³Максвелл Джеймс Клерк (Maxwell J. C., 1831–1879) обратил внимание на некорректность статьи Эри и получил дифференциальные уравнения совместности для плоской задачи относительно функций напряжений Эри.

⁴Томсон Уильям, с 1892 г. за научные заслуги — барон Кельвин (Kelvin, 1824–1907), английский физик, автор трудов по термодинамике, электромагнетизму, предложил абсолютную шкалу температур, изобрел многочисленные научные приборы.

⁵Фойгт (Фогт) Вольдемар (Woldemar Voigt, 1850–1919), немецкий физик-теоретик.

сывают реальных свойств каких-либо материалов, а лишь качественно иллюстрируют основные наблюдаемые факты. Были созданы более сложные модели из упругих и вязких элементов, скомбинированных различным образом. При помощи таких моделей оказалось возможным удовлетворительно описать поведение материалов, для которых зависимость между напряжением и деформацией линейна.

Поведение металлов при высоких температурах довольно существенно отличается от поведения пластиков. Зависимость между деформацией и напряжением у металлов при ползучести оказывается резко нелинейной.

Многие достижения современной теории вязкоупругости связаны с работами Алексея Антоновича Ильюшина, Александра Юльевича Ишлинского¹, Юрия Николаевича Работнова и других ученых.

¹Ишлинский Александр Юльевич (1913–2003), русский и советский ученый-механик, один из основоположников теорий пластичности, вязкоупругости и других разделов механики, академик АН СССР.

ЧАСТЬ

1

КЛАССИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА



Глава 1

МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ И ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

1.1. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Механические свойства характеризуют поведение материала в различных механических силовых полях.

Механические свойства имеют важное значение при изучении деформационных процессов, так как они определяют характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) в рассматриваемом объеме тела при заданных граничных условиях.

Методы решения задач механики оперируют физическими уравнениями, включающими параметры или характеристики, а в некоторых случаях — функции распределения механических свойств тела.

Для материалов, обладающих относительной однородностью строения и малыми размерами слагающих структурных элементов (металлы, некоторые виды пластмасс и др.), при стандартных методах испытаний механические свойства образцов практически соответствуют механическим свойствам материала.

Для неоднородных по строению и сложенных структурными элементами различных размеров материалов (геоматериалы, большинство композиционных материалов и др.), как правило при отсутствии стандартного оборудования и стандартных методов испытаний, механические свойства материала, механические свойства образцов, механические свойства исследуемых тел различны, и в некоторых случаях — существенным образом.

Данный вопрос имеет принципиальное значение, например для количественной оценки механических процессов деформирования и разрушения породных массивов, грунтов, конструкций из композиционных материалов.

В опытах расчет численных значений механических свойств материалов производится на образцах правильной формы при определенных условиях проведения испытаний. Поэтому получаемые значения механических свойств условны, так как при других условиях проведения опытов определяемые показатели могут иметь другие значения. Кроме того, значения показателей физико-механических свойств для большого класса материалов зависят от размера образцов, т. е. подвержены влиянию масштабного фактора. Следовательно, необходимо четко представлять, что

получаемые значения физико-механических показателей характеризуют свойства конкретного рассматриваемого образца (объема) материала.

Можно показать, что образцы материала, используемые для определения его механических свойств, должны быть по размерам не менее элементарного объема.

Рассмотрим *основные характеристики механических свойств материалов*. Их можно подразделить на несколько групп:

а) прочностные, характеризующие предельное сопротивление материала различного рода нагрузкам;

б) упругие, характеризующие упругую деформируемость материала под нагрузками;

в) динамические/акустические, характеризующие условия передачи материала-упругих колебаний, волн деформаций и напряжений;

г) реологические, характеризующие деформирование материалов во времени при заданных условиях нагружения.

Прочностные свойства определяют способность пород сопротивляться разрушению под действием приложенных механических напряжений.

Чаще всего для характеристики таких свойств используются следующие понятия: пределы прочности при сжатии и растяжении, сцепление, коэффициент (угол) внутреннего трения.

Пределом прочности σ_* называют напряжение, при котором образец разрушается: $\sigma_* = P/S$, где P – разрушающая нагрузка; S – площадь, на которую действует приложенная нагрузка.

Предел прочности при одноосном сжатии образцов материалов, или прочность на сжатие σ_{press} , – наиболее широко определяемая характеристика прочности материала.

Обычно прочность материалов на сжатие тем выше, чем выше их плотность.

Значение прочности материала на сжатие, определенное на стандартном образце, для многих материалов чаще всего принимается за базовый показатель, с которым устанавливается связь других физико-механических характеристик.

Прочность на растяжение σ_{ext} является важнейшим показателем физико-механических свойств материалов.

Замечание. Хотя прочность на растяжение σ_{ext} является одним из основных показателей физико-механических свойств материалов, проведение опытов по определению среднего значения показателя σ_{ext} прямым растяжением для большого класса материалов затруднено по многим причинам (например, горные породы, почвы). Поэтому прочность на растяжение σ_{ext} во многих случаях рекомендуется определять расчетным путем.

Прочность на растяжение σ_{ext} для большого круга материалов значительно ниже их прочности на сжатие.

Например, это одна из наиболее характерных особенностей горных пород, бетона и других материалов, определяющих их поведение в поле механических сил. В то же время для большинства металлов прочность на сжатие и растяжение практически совпадают. Действительно, для стали и ряда других материалов показатели σ_{press} и σ_{ext} , как известно, равны между собой. Горные породы плохо сопротивляются растягивающим усилиям, появление которых в тех или иных участках массива пород при разработке служит критерием опасности обрушения пород и разрушения подземных сооружений.

Прочность на срез (сдвиг) может быть охарактеризована двумя функционально связанными параметрами: сцеплением и углом (коэффициентом) внутреннего трения. Эту функциональную связь выражают уравнением Кулона¹:

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + \tau_0, \quad (1.1)$$

где τ_n — напряжение среза (касательное напряжение); σ_n — нормальное напряжение при срезе; φ — угол внутреннего трения (соответственно $\operatorname{tg} \varphi$ — коэффициент внутреннего трения); τ_0 — сцепление.

Сцепление τ_0 (C) характеризует предельное сопротивление срезу по площадке, на которой отсутствует нормальное давление, т. е. отсутствует сопротивление срезающим усилиям за счет внутреннего трения (рис. 1.1).

Угол внутреннего трения φ , или *коэффициент внутреннего трения* $\operatorname{tg} \varphi$, характеризует интенсивность роста срезающих напряжений с возрастанием нормальных напряжений, т. е. представляет собой коэффициент пропорциональности между приращениями касательных $d\tau_n$ и нормальных $d\sigma_n$ напряжений при срезе (рис. 1.2):

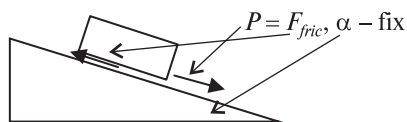
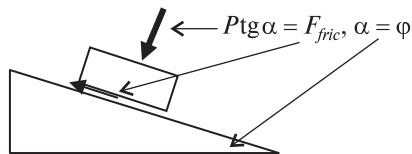


Рис. 1.2. Иллюстративная схема к пояснению физического смысла показателя «коэффициент (угол) внутреннего трения»

Рис. 1.1. Иллюстративная схема к пояснению физического смысла показателя «сцепление»

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau_{n_2} - \tau_{n_1}}{\sigma_{n_2} - \sigma_{n_1}} = \frac{d\tau_n}{d\sigma_n}.$$

В соответствии с рис. 1.2, чем больше по величине действующие нормальные усилия, тем больше касательных (срезающих) усилий необходимо приложить, чтобы сдвинуть тело.

Пример. Значение сцепления горных пород меняется в пределах от десятых долей (глины, мергели, слабо сцементированные песчаники и др.) до сотен килограмм-сил на квадратный сантиметр (прочные песчаники и массивно-кристаллические породы), угол внутреннего трения — от 10–15° для некоторых глин до 25–40° для прочных массивно-кристаллических и метаморфических пород (граниты, сиениты, кварциты и др.) и крупнозернистых сыпучих пород (галечники, крупнозернистые пески и др.).

Важно, что уравнение Кулона может использоваться в качестве граничного условия в зонах значительных горизонтальных подвижек. Хотя условие (1.1) является приемлемым для зон необратимых деформаций, оно может использоваться и для упругих зон, если контактные подвижки в них достаточно велики.

Часто используют запись уравнения (1.1) в главных напряжениях:

$$\sigma_1 - (2\lambda + 1)\sigma_3 = \sigma_{press}, \quad (1.2)$$

где σ_1 и σ_3 — соответственно максимальное и минимальное главные нормальные напряжения; $\lambda = \sin \varphi / (1 - \sin \varphi)$; σ_{press} — предел прочности пород при одноосном сжатии.

¹ Кулон Шарль-Огюстен (Charles-Augustin de Coulomb, 1736–1806), французский инженер и физик, один из основателей электростатики; исследовал деформацию кручения нитей, установил ее законы, изобрел крутильные весы и открыл закон, впоследствии названный его именем.

Особенностью *критерия прочности* (1.1) является то, что данный критерий учитывает разрушение как в результате сдвига, так и в результате отрыва. Разрушение путем сдвига происходит тогда, когда касательное напряжение, действующее в плоскости сдвига и зависящее от нормального к этой плоскости напряжения, достигнет величины, определяющей прочность материала. Разрушение путем отрыва будет иметь место в том случае, когда наименьшее нормальное напряжение достигнет величины предела прочности породы при одноосном сжатии.

Для сложного напряженно-деформированного состояния указанные понятия пределов прочности теряют смысл даже при хрупком разрушении.

Если пронумеровать главные оси в соответствии с обозначением $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и считать сжимающие напряжения положительными, то условие Кулона – Мора можно записать в виде

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cos \varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg} \varphi = C. \quad (1.3)$$

В общем случае характеристики φ и C зависят от величины нормального напряжения σ_n , действующего на площадке, где достигается условие (1.3).

Если построить в плоскости $\sigma_n - \tau_n$ график, соответствующий условию (1.3), то он будет представлять собой огибающую предельных кругов напряжений Мора¹ (рис. 1.3).

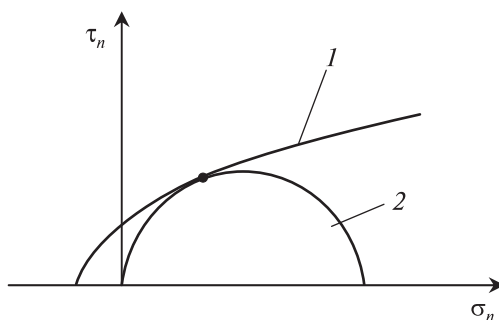


Рис. 1.3. Иллюстрация условия (1.3)

В момент разрушения наибольший круг Мора (линия 2) касается огибающей (линия 1) в точке. В случае введения предположения о постоянстве значений φ и C огибающая представляет собой прямую линию.

Коэффициент внутреннего трения геоматериалов и строительных материалов является одной из важнейших характеристик, предопределяющих их прочность и энергозатраты на процесс разрушения. Поэтому при определении величины разрывающего усилия необходимо учитывать коэффициент внутреннего трения. Так, например, прочность образцов на раскол прямо пропорционально зависит от коэффициента внутреннего трения.

¹ Мор Кристиан Отто (Christian Otto Mohr, 1835–1918), немецкий инженер и ученый в области теоретической механики и сопротивления материалов; разработал графический метод анализа напряжений при сложном напряжённом состоянии, известный как «круг Мора».

Значение *прочности образца на раскалывание* можно определять в соответствии со следующей формулой [18]:

$$\sigma_p = K_\Phi P_{press} \operatorname{tg} \varphi / F_p, \quad (1.4)$$

где K_Φ — коэффициент формы контакта (изменяется от 0,318 до 0,5); P_{press} — усилие сжатия (можно принять, что $\sigma_{press} = P_{press} / S_k$, здесь S_k — общая площадь плотного контакта, где произошли контактные разрушения); S_p — площадь разрыва образца.

Замечание. Как уже было сказано, прочность на растяжение σ_{ext} рекомендуется определять расчетным путем. В соответствии с зависимостью (1.4) следует, что при этом желательно учитывать и прочность материала на сжатие, и значение коэффициента внутреннего трения.

Из физических соображений угол внутреннего трения может быть определен через напряжения сжатия и растяжения:

$$\varphi = \arcsin \frac{\sigma_{press} - \sigma_{ext}}{\sigma_{press} + \sigma_{ext}}. \quad (1.5)$$

Упругие свойства материалов характеризуются модулем упругости E при одноосном напряженном состоянии (модулем продольной упругости, или, иначе, модулем Юнга¹); модулем сдвига $\mu(G)$; k — коэффициентом объемного расширения; коэффициентом поперечных деформаций ν (коэффициентом Пуассона²).

Модуль упругости E представляет собой отношение нормального напряжения σ_n к относительной линейной упругой деформации образца $\varepsilon_l = \Delta l / l$ в направлении действия приложенной нагрузки (т. е. отношение напряжения к деформации при одноосном сжатии или растяжении):

$$E = \sigma_n / \varepsilon_l.$$

Модуль сдвига $\mu(G)$ есть отношение касательного напряжения τ к относительному сдвигу θ (т. е. отношение касательного напряжения к деформации сдвига, например, при кручении образца):

$$\mu = \tau / \theta.$$

Относительный сдвиг θ именуют иногда угловой деформацией. Он характеризует изменение формы деформируемого тела и выражается зависимостью

$$\theta = \frac{\pi/2 - \alpha}{\pi/2},$$

где α — угол наклона каждого прямоугольного элемента тела после деформирования.

Коэффициент объемного расширения k (или *объемный модуль упругости*, или *модуль всестороннего сжатия*) равен отношению равномерного всестороннего напряжения к относительному упругому изменению объема образца:

$$k = \frac{\sigma_v}{\Delta V / V},$$

где $\Delta V / V$ — относительное изменение объема.

¹ Юнг Томас (Young T.) (1773–1829), английский ученый, в честь которого назван модуль продольной упругости.

² Пуассон Симеон Дени (Poisson S. D.) (1781–1840), французский математик и механик; труды по математическому анализу, теории вероятностей, теории упругости.

Коэффициент поперечных деформаций ν , или коэффициент Пуассона, является мерой пропорциональности между относительными деформациями в направлении, перпендикулярном вектору приложенной нагрузки и параллельном ему (отношение поперечных деформаций к продольным при простом нагружении образца):

$$\nu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_l}.$$

Характеристики упругих свойств пород функционально связаны между собой.

Связь между основными физическими константами для идеально упругого тела (а это, кроме уже определенных, еще и λ — коэффициент Ламе) представлена в табл. 1.1. Коэффициентами Ламе часто называют коэффициенты λ и μ .

Таблица 1.1

Связь между основными физическими константами для идеально упругого тела

Основные константы	Пары констант				
	λ, μ	μ, ν	E, ν	E, μ	k, μ
λ	λ	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$k - \frac{2}{3}\mu$
μ	μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ	μ
k	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	—	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	—	k
E	$\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$	$2(1+\nu)\mu$	E	E	$\frac{9k\mu}{3k+\mu}$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	ν	$\frac{(E-2\mu)}{2\mu}$	$\frac{3k-2\mu}{6k+2\mu}$

Таким образом, зная две из этих любых характеристик, можно расчетным путем определить значения двух других. Обычно экспериментально определяют на образцах характеристики E и ν .

С ростом плотности материалов модули их упругости, как правило, возрастают. Коэффициенты поперечных деформаций ν материалов теоретически могут изменяться в пределах $-1 \leq \nu \leq 0,5$.

Одной из актуальных задач современного материаловедения является создание принципиально новых материалов, способных проявлять программируемые, существенно нелинейные деформационные свойства, вплоть до получения адаптивной (приспособительной) реакции на внешнее воздействие. В частности, к таковым материалам относятся *ауксетики* (ауксетичные материалы) — материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона ν , способные расширяться/сужаться в направлении, перпендикулярном одноосному растяжению/сжатию соответственно.

Актуальность исследования ауксетичных материалов мотивируется возможностью получения ряда ценных деформационно-прочностных характеристик материалов и изделий. В условиях стесненного деформирования ауксетики позволяют повысить несущую способность фрикционных соединений, что делает их наибо-

лее предпочтительными для использования в крепежных изделиях в качестве «интеллектуальных» фиксаторов и заклепок, которые при наложении нагрузки плотнее прилегают к материалу, увеличивая несущую нагрузку соединения. Так, в композите, армированном ауксетичными волокнами, значительно повышается адгезионная прочность, что делает такие композиционные материалы перспективными для применения в ударо- и энергопоглощающих конструкциях, а также в средствах защиты (шлемы, щитки, наколенники и т. д.).

У большинства «нормальных» материалов и веществ значения коэффициента Пуассона положительны и колеблются в пределах $0,2-0,5$. Тем не менее теоретические значения для изотропного материала лежат в пределах $-1 \leq \nu \leq 0,5$. Больше $0,5$ коэффициент ν быть и не может — такие материалы увеличивали бы при растяжении собственную плотность и стали бы неустойчивы.

Хотя, на первый взгляд, неположительность ν противоречит здравому смыслу, возможность существования таких материалов подтверждается известным соотношением теории упругости изотропных тел (см. табл. 1.1):

$$\nu = (3k - 2\mu) / (6k + 2\mu), \quad (1.6)$$

где k и μ — модули объемной деформации и сдвига, положительные для стабильных материалов.

Из (1.6) следует, что отрицательные значения ν возможны при условии

$$\mu > (3/2)k,$$

т. е. когда модуль сдвига превышает модуль объемной деформации более чем на 50 %.

Следовательно, для изотропного материала коэффициент Пуассона может находиться в пределах $-1 \leq \nu \leq 0,5$. Верхний предел соответствует несжимаемым материалам, сохраняющим в процессе деформации «свой» объем при значительном изменении формы. Нижний предел соответствует материалам, сохраняющим геометрические пропорции, но изменяющим объем при деформации.

Хотя к настоящему времени известно много примеров проявления данной особенности деформирования, сведения о них в русскоязычной литературе разрознены и малоизвестны большинству специалистов в области механики материалов.

Все известные теоретические и экспериментальные подходы, применяемые для создания композитов с $\nu < 0$, можно разделить на две категории: либо все компоненты композита имеют $\nu > 0$, либо некоторые из них являются ауксетиками.

После того как появилась практическая возможность синтеза материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона, стала актуальной задача оценки и регулирования упругих свойств двухфазных композитов, наполненных частицами ауксетика, с целью получения недорогих квазиизотропных ауксетичных материалов. Также продолжается изучение ауксетичных композитов, матричная фаза и наполнители которых не являются ауксетиками.

Упругие свойства вместе с плотностью материала ρ определяют *динамические свойства материала* — способность к распространению волн упругих деформаций или упругих колебаний в материале.

Динамические свойства характеризуются скоростью распространения упругих волн C , акустическим сопротивлением Q и коэффициентом поглощения α .

Среди различного вида упругих колебаний в твердых телах наибольший интерес представляют продольные (волны уплотнения – разрежения, P -волны), поперечные (волны распространения сдвиговых деформаций, S -волны) и поверхностные (рэлеевские) волны.

В *продольных волнах* направление колебаний частиц совпадает с направлением распространения волны.

В *поперечных* направление колебаний частиц перпендикулярно к направлению распространения волны.

Поверхностные волны – это колебания поверхности среды.

Скорость распространения продольной волны

$$C_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}.$$

Скорость распространения поперечной волны

$$C_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}.$$

Скорости распространения этих волн характеризуются следующим неравенством:

$$C_P > C_S > C_R,$$

где $C_R = K_v C_S$ – скорость рэлеевской волны; K_v – безразмерный коэффициент, зависящий от коэффициента Пуассона (например, при $\nu = 0,25$ – $K_v = 0,9194$; при $\nu = 0,5$ – $K_v = 0,9553$).

Как видно из выражений для скоростей распространения упругих волн, они определяются плотностью, характеризующей смещаемую массу, и показателями упругости среды, связывающими возвращающие силы со смещениями колеблющихся частиц.

Произведение плотности материала на скорость соответствующей волны называют *акустическим сопротивлением* или *акустической жесткостью*:

$$Q = \rho C.$$

Оно характеризует влияние свойств среды на интенсивность I (частоту) колебаний в этой среде, которая, кроме того, определяется еще параметрами возбудителя колебаний.

Поскольку большинство материалов не является идеально упругими твердыми телами, в них происходит ослабление возбуждаемых упругих волн вследствие поглощения энергии колебаний в среде из-за трения, теплопроводности и других эффектов. Это ослабление, или затухание, подчиняется экспоненциальному закону и описывается следующими выражениями: по амплитуде $A_x = A_0 e^{-\alpha_3 x}$; по интенсивности (частоте) $I_x = I_0 e^{-2\alpha_3 x}$, где A_0, I_0 – соответственно начальные амплитуда и интенсивность колебаний; A_x, I_x – соответственно амплитуда и интенсивность колебаний после прохождения волной в среде расстояния x ; α_3 – амплитудный коэффициент затухания.

Скорость продольных упругих волн является наиболее употребительной характеристикой.

С ростом сжимающих нагрузок скорость упругих волн в материалах возрастает. Для материалов, обладающих малым пределом упругости, упругие волны представляют акустические колебания.

В безграничной среде возможны два вида волн: продольные и поперечные.

В телах конечных размеров различной формы могут возникать специфические волны, скорость распространения которых может заметно отличаться от скоростей в неограниченной среде: поверхностные волны различных типов, изгибные волны в пластинах и стержневых, крутильные и т. п.

На границах тела происходит преломление и отражение волн, так что первоначально простейший по форме импульс, бесконечно отражаясь от границ тела, возбуждает в теле широкий спектр колебаний, стремясь распределить свою энергию между огромным числом свободы твердого тела. Надо учесть, что высокочастотные колебания могут рассеиваться зернистой структурой поликристаллических тел, всевозможными неоднородностями строения и дефектами решетки кристаллов. В этом отношении энергоемкость твердого тела очень велика.

В идеальном упругом теле поглощение механической энергии невозможно, есть только ее рассеяние. Колебательные движения твердого тела и его движения как целого определяют все возможные его состояния.

Если тело свободно, по инерции движется в пространстве, кинетическая энергия его движения как целого сохраняется, так что о колебательном движении тела можно забыть. Однако при взаимодействии двух таких тел возможно часть энергии поступательного движения передать внутренним степеням свободы, так что возникнет сомнение в идеальной упругости тел.

Механические характеристики большинства материалов зависят от скорости их нагружения.

Следует отметить, что при небольшом количестве циклов динамических нагружений пределы прочности и текучести большинства материалов в несколько раз выше, чем при статических испытаниях. В то же время при многократных нагружениях с нагрузкой, изменяющейся по значению и, может быть, по знаку, разрушение может произойти при напряжениях, значительно меньше статических показателей прочности. При высокоскоростном динамическом нагружении (например, взрывы) механизм разрушения имеет характер, отличный от рассмотрения данных процессов с точки зрения «классических представлений». В этом случае имеют место сложные волновые процессы, в результате которых вначале происходит упрочнение материала, а при повторных периодических нагружениях — усталостное разрушение.

Следует отметить, что результаты экспериментальных исследований по определению модуля упругости динамическим и статическим методами и их сопоставления с расчетными эффективными модулями упругости показали, что динамический модуль упругости в меньшей степени зависит от условий эксперимента, чем статический. Поэтому динамический модуль упругости в большей степени отражает свойства образцов как материала, причем растет он с увеличением образцов и приближается к расчетному эффективному модулю.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО ХАРАКТЕРУ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОТ ВНЕШНЕГО МЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

В зависимости от того, как материалы реагируют на нагружение, выделяют несколько основных типов материалов.

В первую очередь выделяют материалы, обладающие идеальными упругими свойствами.

Идеально упругое тело характеризуется прямой пропорциональностью между приложенными нагрузками и имеющими место деформациями. Идеально упругое тело можно характеризовать двумя физическими константами, за которые чаще всего принимают *модуль продольной упругости (модуль Юнга) E* и *модуль сдвига μ* , или *коэффициент Пуассона $\nu = (E - 2\mu)/(2\mu)$* .

Для большого количества материалов характерно проявление *реологических свойств*, которые характеризуют рост во времени деформаций при постоянных внешних нагрузках (ползучесть или крип), или постепенное снижение напряжений при постоянных деформациях, поддерживаемых постоянными нагрузками (релаксация напряжений).

Релаксация напряжений — это процесс, обратный ползучести. При релаксации упругие деформации в материале с течением времени постепенно переходят в пластические, но общая деформация во времени не изменяется. При этом происходит падение напряжений.

Подобные процессы вообще характерны для реальных твердых материалов, они являются предметом изучения специальной научной дисциплины — реологии (от греческого «рео» — течь) и имеют глубокую физико-химическую природу. Существенную роль в проявлении необратимых деформаций играют дефекты структуры материалов. Поэтому реологические процессы можно рассматривать как перемещение дефектов под воздействием внешних нагрузок. Однако исключительная сложность определения молекулярных констант и разнообразие микроструктур реальных твердых тел не позволяют применять уравнение связи между напряжениями и деформациями тел на микроскопическом уровне. Вследствие этого изучение деформируемости твердых тел во времени проводят на макроскопическом (феноменологическом) уровне, выражая взаимосвязи напряжений и деформаций в формализованных (т. е. не учитывающих реального механизма протекающих явлений) уравнениях механики сплошных сред.

Весьма характерной чертой реологических процессов, в частности ползучести, является зависимость деформации, наблюдаемой в данный момент времени, от характера всего процесса нагружения материала, или, другими словами, от всей предыдущей истории его деформирования. Это свойство реальных материалов называют *наследственностью*.

Особенностью большинства естественных материалов, как показывают эксперименты, является практически линейная зависимость между приращениями деформаций и приращениями напряжений в любой момент времени, т. е. проявление *линейной ползучести*. Это позволяет применять для описания деформирования таких материалов во времени теорию деформирования линейных наследственных сред.

Прочность и упругость естественных материалов при длительном воздействии достаточно больших нагрузок понижаются, асимптотически приближаясь к некоторым предельным значениям — *пределу длительной прочности* σ_∞ и *предельному модулю длительной упругости* E_∞ . Для большинства материалов $\sigma_\infty = (0,7 - 0,8)\sigma$, $E_\infty = (0,65 - 0,95)E$.

При напряжениях, превышающих предел упругости, появляются как упругие, так и *пластические деформации*. Последние после снятия нагрузки остаются.

До некоторого значения напряжения, называемого *пределом упругости материала*, остаточные деформации в нем при кратковременном нагружении не проявляются; протекающие деформации носят чисто упругий характер и исчезают после снятия нагрузки. Если же значения напряжений превышают предел упругости, то наряду с упругими деформациями происходят и пластические, сохраняющиеся после разгрузки испытываемых образцов пород.

Пластические свойства могут быть охарактеризованы *коэффициентом пластичности*, который представляет собой отношение работы W_{pl} , затрачиваемой на разрушение данного объема материала, к работе W_{el} , необходимой для разрушения такого же объема материала с тем же значением предела прочности на сжатие в предположении идеальной упругости материала:

$$K_{pl} = W_{pl} / W_{el}.$$

Большое значение при характеристике большого класса материалов имеет *хрупкость* — способность пород разрушаться под действием приложенных нагрузок без существенной остаточной (пластической) деформации.

Хрупкость может быть количественно охарактеризована *коэффициентом хрупкости* K_{fr} , который представляет собой отношение работы W_{el} , затраченной на деформирование образца материала до предела упругости, к общей работе W_{fr} на разрушение данного образца:

$$K_{fr} = W_{el} / W_{fr}.$$

Значения K_{fr} для различных материалов изменяются в весьма широких пределах.

Чем более тело приближается к идеально хрупкому, тем более предел прочности приближается к пределу упругости.

Проявление хрупкости материала существенно зависит от продолжительности действия силы. Динамические ударные нагрузки приводят породы к хрупкому разрушению, тогда как длительное приложение даже сравнительно небольших нагрузок может приводить к пластическим деформациям.

Специфической характеристикой, часто используемой в механике горных пород, является *разрыхляемость* — свойство породы занимать в разрыхленном состоянии больший объем по сравнению с тем, который она занимала в массиве. Это явление *дилатансии*.

Показателем разрыхляемости служит *коэффициент разрыхления* K_p , представляющий собой отношение объема V_p породы после ее разрыхления при обрушении или добыче к объему V_m в массиве, т. е. до разрыхления:

$$K_p = V_p / V_m.$$

Например, наименьшую разрыхляемость при прочих равных условиях имеют песчаные и глинистые породы ($K_p = 1,5-1,20$), наибольшую – хрупкие скальные породы ($K_p = 1,30-1,40$).

С течением времени разрыхленные породы уплотняются, однако и после уплотнения они не достигают первоначальной плотности в массиве, имевшей место до разрыхления. Минимальные значения коэффициента разрыхления различных пород после их уплотнения $K_p = 1,01-1,15$.

Существует принципиальная разница между упругими, пластическими, упругопластическими и реологическими моделями поведения среды.

После изменения нагружения упругой среды ее состояние однозначно определяется новыми условиями и никак не зависит от предыдущего.

Пластические модели «помнят» всю историю предыдущих нагружений. Но поскольку изменение состояний происходит мгновенно, в пластических моделях никак не связывают эту историю со временем.

Если пластичность материалов характеризует их поведение при напряжениях, превышающих предел упругости, то ползучесть, представляющая собой медленное нарастание пластических деформаций, проявляется и при напряжениях меньше предела упругости, но при длительном воздействии нагрузок.

Характерным свойством большинства природных материалов является *высокая степень их неоднородности и анизотропия*.

Материал называется *однородным*, если его физические свойства во всех точках одинаковы.

Материал называется *изотропным* по отношению к некоторому свойству, если это свойство в точке оказывается одинаковым по всем направлениям.

Если свойства материала в точке зависят от направления, то он называется *анизотропным*. Анизотропию рассматривают на нескольких уровнях.

1. Микроскопический. Все процессы рассматриваются на уровне кристаллов. Анизотропия обусловлена упорядоченным строением кристаллической решетки.

2. Субмакроскопический. На этом уровне рассматривается небольшой объем материала. Анизотропия обусловлена, например, трещиноватостью и текстурой.

3. Макроскопический. В этом случае рассматривается строение больших объемов твердых тел. Анизотропия обусловлена макротрещиноватостью, слоистостью, действием внешних полей напряжений и т. п.

4. Мегаскопический. Рассмотрение ведется на уровне весьма значительных протяженностей твердых сред.

Во многих прикладных задачах реальные материалы можно рассматривать как *квазиизотропные*.

1.3. О МАСШТАБНОМ ФАКТОРЕ

Для материалов, обладающих относительной однородностью строения и малыми размерами слагающих структурных элементов (металлы, некоторые виды пластмасс и др.), при стандартных методах испытаний *механические свойства образцов* практически соответствуют *механическим свойствам материала*.

Для большого класса материалов (геоматериалы, большинство композиционных материалов и др.), неоднородных по строению и сложенных структурными элементами различных размеров, при отсутствии стандартного оборудования и стандартных методов испытаний механические свойства материала, механические свойства образцов и механические свойства исследуемых тел различны, и в некоторых случаях существенно.

Такое же заключение корректно и при рассмотрении практически любых материалов на нано- и микроуровнях.

Остановимся подробнее на этом вопросе, имеющем принципиальное значение для количественной оценки механических процессов деформирования и разрушения большинства природных образований, а также объектов наномеханики, механики композиционных материалов.

В опытах определение численных значений механических свойств материалов производится на образцах правильной формы при определенных условиях проведения испытаний. Поэтому получаемые значения механических свойств условны, так как при других условиях проведения опытов определяемые показатели будут иметь другие значения. Кроме того, значения показателей физико-механических свойств материалов зависят от размера образцов, т. е. подвержены влиянию масштабного фактора. Следовательно, необходимо четко представлять себе, что получаемые значения физико-механических показателей характеризуют свойства конкретного рассматриваемого образца (объема, участка) из рассматриваемого материала.

Можно выделить следующие понятия: механические свойства материала и механические свойства образца материала. *Механические свойства материала (деформируемость и прочность)* — это класс физических свойств, характеризующих поведение собственно материала в условиях различных механических воздействий. *Механические свойства образца материала* — механические свойства части материала, имеющей размеры не менее элементарного объема.

Замечание. Элементарный объем — объем материала, полностью описывающий все его свойства.

Так, например, механические свойства горной породы как минерального агрегата с размерами структурного элемента h могут быть определены только для объемов, линейные размеры которых не менее $10h$ (согласно условию $l_0 = 10h$, где l_0 — минимальные линейные размеры элементарного объема горной породы из его условия представительности по свойствам), т. е. не менее линейных размеров элементарного объема. Отсюда следует, что образцы породы, используемые для определения ее механических свойств, должны быть по размерам не менее элементарного объема породы.

Необходимо подчеркнуть, что даже при соблюдении указанных соотношений между размерами образца и элементарного объема материала механические свойства образца нередко не соответствуют механическим свойствам материала. Происходит это вследствие одной или совокупности таких причин, как нарушение условий естественного нахождения/эксплуатации материала (нарушение структуры, влажности, контактных условий, пространственной ориентации и др.) при отборе и последующем изготовлении образцов; нарушение условий естественного силового нагружения при испытании образцов из-за несовершенства экспериментальных методов, что искажает процессы деформирования и разрушения материалов, и др.

Высказанные соображения касались механических свойств материала и образца материала. Этого, как правило, недостаточно, чтобы оценить свойства образца механического объекта/изделия и тем более всего механического объекта/изделия.

Чтобы доказать последнее положение, вернемся к сформулированному ранее понятию «элементарный объем материала», под которым понимается такой объем, который сохраняет в себе все свойства материала.

Например, анализируя характерные размеры h структурных элементов породного массива (куски, блоки, слои) и используя уже упомянутую формулу $l_0 = 10h$ (здесь l_0 — минимальные линейные размеры элементарного объема массива из его условия представительности по свойствам), приходим к выводу, что минимальные линейные размеры l_0 элементарного объема породного массива, как правило, больше линейных размеров технически доступных образцов породного массива и тем более образцов горных пород. Поэтому образцы горной породы и даже образцы породного массива не характеризуют механических свойств породного массива в целом.

Аналогичные рассуждения весьма показательны при рассмотрении механических свойств нанообъектов.

Поэтому весьма эффективным при определении механических свойств объектов является использование аналитических методов, базирующихся на решении задач механики. Например, активно используется обратный метод определения механических свойств объектов, когда соответствующие механические свойства объекта определяются в результате решения обратной задачи механики.

Широкое распространение имеют подходы к оценке механических свойств объекта по соответствующим свойствам его структурных элементов.

1.4. ПОЛНЫЕ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ И РАСТЯЖЕНИИ

В последние годы особое внимание уделяется разработке экспериментальных методов исследования, воспроизводящих реальные условия силового и кинематического воздействия на реальные деформируемые тела. Этот факт продиктован необходимостью экспериментального воспроизведения в образце материала НДС, соответствующего реальному НДС в точке в реальных условиях нахождения деформируемого тела, где определяются механические свойства.

Важным представляется, исходя из сути рассматриваемого процесса, установление факта о том, с каких позиций предпочтительней исследовать рассматриваемые процессы: с позиции деформированного или напряженного состояния.

Различие в режимах заданной нагрузки и заданной деформации может быть проиллюстрировано на следующих схемах, представленных на рис. 1.4 [19].

Если образец подвергается нагрузке весом P , то такой режим можно назвать *режимом заданной нагрузки* (рис. 1.4, а). В этом случае смещения образца не влияют на нагрузку, которая действует на него, а наоборот — смещения являются прямым следствием действующей нагрузки.

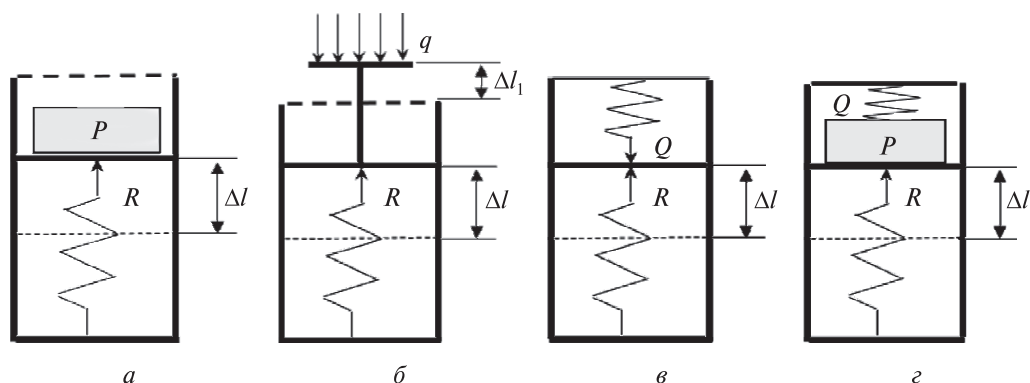


Рис. 1.4. Схемы режимов заданных нагрузок и деформаций:

а – режим заданной нагрузки на образец ($R = P$, $\Delta l = f_1(P)$, Δl не влияет на P);

б – режим заданной деформации (R практически не влияет на Δl_1);

в – режим взаимовлияющих деформаций ($\Delta l = f_1(Q, R)$);

г – комбинированный режим деформирования ($\Delta l = f_1(P, Q, R)$):

R – сопротивление испытуемого образца материала;

P – вес внешней нагрузки; q – напряжение от воздействия внешней нагрузки;

Q – сопротивление от воздействия внешней нагрузки

Пример. Наиболее характерным примером данного режима нагружения является воздействие внешнего силового нагружения на объект. Например, на крепь выработки / породный контур выработки действует отделившийся от массива некоторый объем пород. В этом случае смещения крепи / породного контура выработки не влияют на нагрузку на крепь / породный контур.

Если же «реактивное сопротивление» образца R при внешнем воздействии на него практически не влияет на перемещения поверхности образца Δl_1 , то такое взаимодействие называют *режимом заданной деформации* (рис. 1.4, б). Такой режим деформирования характерен для случаев, когда нагрузка на образец представляет большие напряжения, возникающие от внешнего воздействия.

Пример. Характерный пример такого типа воздействия на объект – внешнее давление через винтовой пресс. Существенным при этом является величина перемещения пресса Δl_1 , которая и определяет степень давления на образец. Такой режим деформирования характерен, например, для участков подземных выработок, подверженных действию очень высоких напряжений в зонах нарастающего опорного давления.

В *режиме взаимовлияющих деформаций* (рис. 1.4, в) смещение поверхности соприкосновения образца с внешней нагрузкой зависит от «реактивного сопротивления» образца и от внешней нагрузки. Или внешняя нагрузка зависит от смещения поверхности образца.

Пример. Данный режим нагружения характерен, например, для наличия двух слоев, когда верхний слой деформируется от боковой сжимающей нагрузки. В этом случае давление на нижележащий слой – следствие изгиба вышележащего слоя. Но в то же время и нижележащий слой оказывает противодействие (давление) на верхний. Наиболее часто крепь / породный контур подготовительных и капитальных выработок «работают» в режиме взаимовлияющих деформаций.

На практике часты случаи *комбинированного режима* «работы», когда одновременно имеют место режимы взаимовлияющих деформаций и заданной нагрузки образца (рис. 1.4, з).

Традиционные испытания образцов горных пород в режиме заданных нагрузок нередко не соответствуют реальному механическому состоянию этих объемов горных пород в массиве, где определяющим является режим заданных деформаций.

В традиционных методиках испытания строительных материалов, употребляемых для изготовления строительных конструкций, материал «работает» в режиме заданных нагрузок.

Разработанные в последние годы методики испытания материалов (в особенности природных горных пород) на прессах, обладающих высокой жесткостью или оборудованных следящими устройствами (что обеспечивает режим заданных деформаций), позволяют строить *полные диаграммы деформирования*.

Эти диаграммы характеризуют механическое состояние образцов на всех участках нагружения: до предела прочности (допредельная ветвь диаграммы); на уровне предела прочности; за пределом прочности, включая участок остаточной прочности (запредельная ветвь диаграммы). Получаемая при этом информация о механических свойствах материала является наиболее полной.

Полные диаграммы для условий одноосного сжатия существенным образом трансформируются при объемном нагружении образцов: уменьшается крутизна запредельной ветви диаграммы, увеличивается остаточная прочность и уменьшается коэффициент дилатансии.

Следует отметить, что полные диаграммы деформирования образцов отражают, как правило, мгновенное механическое состояние и не характеризуют реологические свойства материала.

Изменения в допредельной ветви деформирования при длительных испытаниях исследовались весьма подробно. Подобные же исследования для запредельного деформирования единичны. Вместе с тем практическая ценность этих исследований для оценки долговечности грузонесущих элементов многих конструкций совершенно очевидна.

Диаграмма деформирования при одноосном сжатии становится более информативной, если дополнить ее графической зависимостью сжимающих напряжений от поперечных деформаций, как это показано на рис. 1.5.

При этом в случае одноосного сжатия целесообразно обозначить: σ_1 — сжимающие нормальные напряжения как максимальные главные нормальные напряжения; e_1 — продольные линейные деформации сжатия как максимальные главные линейные деформации; e_3 — поперечные линейные деформации растяжения как минимальные главные линейные деформации, имеющие отрицательные значения, показанные на рис. 1.5.

Рассмотрим полную диаграмму деформирования на примере стадий деформирования породного образца. Для сравнения на рис. 1.5 показано изменение объемной деформации θ при нагружении одноосным сжатием, что соответствует уплотнению и откладывается влево от начала координат в единицах 10^4 .

С увеличением внешней сжимающей нагрузки до уровня напряжений σ_{1a} имеют место процессы закрытия микротрещин и пор, что сопровождается увеличением эффек-

тивного модуля упругости E_{ef} до значения E — модуля упругости материала, т. е. на данном участке зависимость $\sigma_1(e_1)$ является нелинейной. Экспериментальная зависимость $\sigma_1(e_3)$ до уровня деформаций e_{3a} также нелинейная, но в меньшей степени, чем $\sigma_1(e_1)$. На данной стадии коэффициент поперечной деформации $\beta = |\Delta e_3 / \Delta e_1|$, где $\Delta e_1, \Delta e_3$ — приращения соответствующих деформаций, возрастает до постоянной величины $|\Delta e_{3a} / \Delta e_{1a}|$. Объем образца уменьшается в результате его уплотнения.

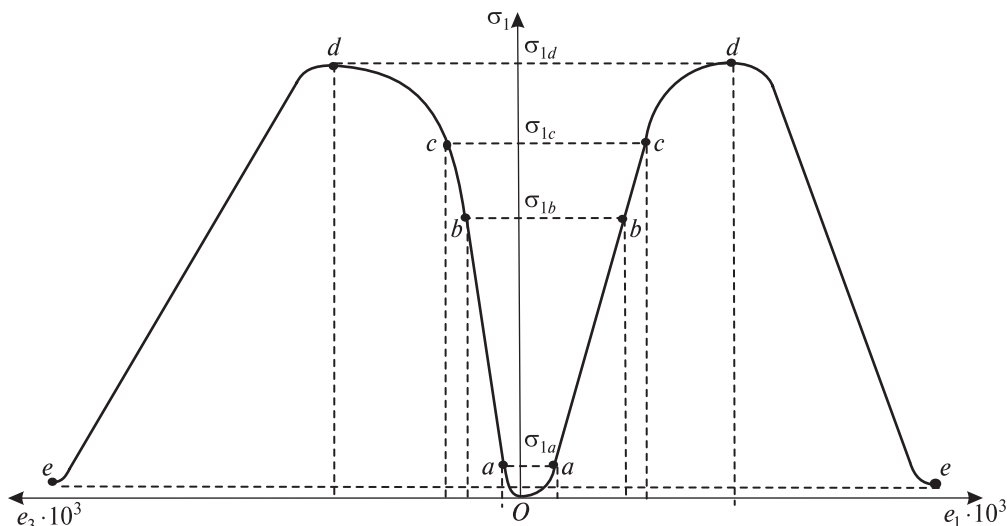


Рис. 1.5. Схема полной диаграммы деформирования горных пород

Начиная с уровня сжимающих напряжений σ_{1a} и до уровня σ_{1b} наблюдается упругое сжатие минерального скелета образца с постоянным модулем упругости E . Экспериментальные зависимости $\sigma_1(e_1)$ и $\sigma_1(e_3)$ на данном этапе являются линейными. Коэффициент поперечной деформации $\beta = |\Delta e_3 / \Delta e_1| < 0,5$ и остается постоянным до уровня деформаций e_{1b} и e_{3b} , т. е. имеет смысл коэффициент Пуассона. Объем образца продолжает уменьшаться.

При уровне напряжений больше σ_{1b} начинается образование микротрещин. Так, например, согласно внутреннему механизму их зарождения может начать реализовываться первая стадия разрушения образца. При этом зависимость $\sigma_1(e_1)$ сохраняется линейной, а зависимость $\sigma_1(e_3)$ по причине образования и раскрытия вертикальных микротрещин становится нелинейной. С увеличением сжимающих напряжений σ_1 поперечные деформации e_3 растут быстрее продольных e_1 , т. е. коэффициент поперечной деформации β увеличивается, а уменьшение объема образца замедляется. Если в дальнейшем внешняя нагрузка не увеличивается, то образовавшиеся микротрещины останавливаются в росте, а при снятии нагрузки закрываются.

Если и дальше увеличивать внешнюю нагрузку, то при превышении нагрузки уровня сжимающих напряжений величиной σ_{1c} начинается процесс неустойчивого развития микротрещин, вначале наиболее опасных, затем по мере увеличения внешней нагрузки и всех остальных. В этот период деформирования реализуется

вторая стадия разрушения. Необходимо подчеркнуть, что при напряжениях больше σ_{1c} развитие трещин приобретает неустойчивый лавинообразный характер. Развитие наиболее опасной микротрещины ослабляет нагруженное сечение образца и увеличивает действующие напряжения в окрестности других трещин, что, в свою очередь, вызывает их развитие. При этом нагруженное сечение образца уменьшается, а действующие напряжения увеличиваются, поддерживая развитие других трещин, и так далее вплоть до образования магистральных макротрещин и полного разрушения образца. Продолжительность процесса лавинообразного трещинообразования от его начала до разрушения образца зависит от уровня действующих напряжений в интервале от σ_{1c} до σ_{1d} . Уровень напряжений σ_{1c} является еще недостаточным для реализации процесса, т. е. разрушение образца не будет наблюдаться даже по истечении бесконечно длительного промежутка времени. *Уровень напряжений σ_{1c} можно трактовать как предел длительной прочности материала на одноосное сжатие σ_{press}^{∞} .* При напряжениях больше σ_{press}^{∞} разрушение наступает через определенный промежуток времени, величина которого сокращается с увеличением напряжений, а при напряжениях σ_{1d} разрушение происходит практически мгновенно. *Уровень напряжений σ_{1d} трактуется как предел мгновенной прочности материала на одноосное сжатие σ_{press} .*

В интервале напряжений от σ_1 до σ_{1d} зависимость $\sigma_1(e_1)$, как и зависимость $\sigma_1(e_3)$, становится нелинейной, т. е. модуль упругости E , постоянный на предыдущих участках деформирования ab и bc , становится переменным $E(e_1)$ и приобретает физический смысл *модуля деформации*. При увеличении напряжений от σ_{1c} до σ_{1d} величина $E(e_1)$ уменьшается от E до нуля. На участке деформирования cd поперечные деформации $|e_3|$ растут быстрее, чем продольные e_1 , и коэффициент поперечной деформации $\beta(e_1)$ увеличивается. При этом, начиная с уровня напряжений σ_{1c} , соответствующего пределу длительной прочности σ_{press}^{∞} , для горных пород наблюдается тенденция к увеличению их деформируемого объема (явление дилатансии). Последний эффект используется при экспериментальном определении σ_{press}^{∞} .

Величина максимальной несущей способности образца σ_{1d} , равная σ_{press} , зависит от режима экспериментального нагружения. Установлено, что в режиме заданной деформации, когда механическое состояние образца определяется задаваемыми деформациями, а не нагрузкой, величина σ_{1d} несколько больше, чем в режиме заданной нагрузки, который обычно реализуется на традиционном экспериментальном оборудовании. Качественная картина допредельного деформирования на участке $oabcd$ практически не зависит от режима нагружения. Эти два режима нагружения часто называют *жестким (заданной деформации)* и *мягким (заданной нагрузки) режимами нагружения*, имея в виду относительную жесткость нагружающего устройства в сопоставлении с жесткостью образца.

При мягком режиме нагружения достижение максимальной несущей способности σ_{1d} приводит к образованию магистральных макротрещин в образце и последующему его разрушению (третья стадия разрушения). При этом несущая способность образца падает до нуля без увеличения деформации, т. е. запредельная ветвь диаграммы деформирования практически вертикальна. Разрушение часто носит динамический характер с разлетом частей разрушенного образца. Причиной этого является

накопление упругой энергии деформирования в элементах мягкого нагружающего устройства и ее реализация в виде кинетической энергии при разрушении образца, что уменьшает величину максимальной несущей способности образца и искажает картину его запредельного деформирования. Таким образом, *мягкий режим нагружения позволяет зафиксировать только максимальную несущую способность образца, а не предел прочности горной породы как материала*. Наблюдаемая диаграмма запредельного деформирования, как правило, не отражает реального деформирования горных пород в массиве. Действительно, большинство грузонесущих элементов породных массивов (целики, потолочины, массивы вокруг выработок и др.) нагружаются в режиме ограниченных (заданных) деформаций, т. е. в большинстве случаев реализуется жесткий режим нагружения. Только в исключительных случаях (потеря устойчивости породных откосов, стрельание горных пород в призабойной зоне и горные удары) наблюдается реализация мягкого режима нагружения разрушаемых породных массивов.

При *жестком режиме нагружения*, как это показано на рис. 1.5, максимальная несущая способность образца σ_{1d} соответствует пределу мгновенной прочности материала на одноосное сжатие σ_{press} . Далее на участке деформирования *de* (запредельная ветвь диаграммы) увеличению деформации e_1 соответствует уменьшение несущей способности σ_1 образца до некоторого минимального значения σ_{1e} , называемого *остаточной прочностью материала* $\sigma_{ост}$. Крутизна запредельной ветви диаграммы $\sigma_1(e_1)$ характеризуется модулем спада, численное значение которого определяется углом наклона $\arctg M$ запредельной ветви $\sigma_1(e_1)$ к отрицательному направлению оси e_1 . На участке запредельного деформирования *de* реализуется третья стадия разрушения (от образования магистральных трещин до разделения образца на части).

При жестком режиме погружения можно наблюдать последовательные этапы разрушения образца на этой стадии, что практически невозможно сделать при мягком режиме нагружения, когда разрушение носит динамический характер. На запредельном участке деформирования *de* уменьшение несущей способности образца сопровождается преимущественным ростом поперечных деформаций образца $|e_3|$, что вызывает увеличение коэффициента поперечной деформации β до значений больше единицы. Иными словами, уменьшение несущей способности образца сопровождается процессом *дилатансии* – увеличением объема образца.

Экспериментальные диаграммы деформирования в виде зависимостей $\sigma_1(e_1)$ и $\sigma_1(e_3)$, показанных на рис. 1.5, представляют полные диаграммы деформирования, включающие допредельные, предельные и запредельные участки деформирования. Следует подчеркнуть, что построение таких диаграмм возможно только в жестком режиме нагружения, когда жесткость нагружающего устройства (пресса) больше жесткости исследуемого образца горной породы (подробно см. [20]).

Например, особенностью поведения подземных сооружений является то обстоятельство, что наступление предельного равновесия породных массивов еще не означает полной потери несущей способности подземного сооружения. Несущая способность последних существенным образом зависит от запредельного деформированного состояния. Таким образом, для описания поведения горных пород за пределом прочности необходимо использовать деформационную теорию прочности.

Замечание. Известно, что численное решение задач МДТТ с учетом разупрочнения (ниспадающая ветвь) имеет ряд математических трудностей. Так, при учете разупрочнения возникают вопросы о единственности решения. Наличие упругих элементов в среде и учет разупрочнения могут приводить к неустойчивому деформированию. Последнее означает, что в среде происходит динамическое неконтролируемое краевыми условиями высвобождение накопленной упругой энергии [21].

1.5. О КРИТЕРИЯХ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ СТАДИИ ЗАПРЕДЕЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Для большинства материалов за пределами упругости в качестве базовой механической характеристики можно принять *сопротивление сдвигу*, локальный предел текучести в той плоскости и в том направлении, где происходит скольжение.

Замечание. По определению в области, в которой интенсивность скольжений непрерывно растет, сопротивление сдвигу равно соответствующей компоненте касательного напряжения, а там, где скольжения прекращаются или их нет, сопротивление сдвигу больше касательного напряжения.

Если использовать представление о плоском механизме скольжений, то плоскость первых скольжений и величина предела текучести в этом случае определяются формулами [22]:

$$\operatorname{tg} 2\beta_0 = \mu, \quad T = (s_0 - \mu\sigma_0)(1 + \mu)^{-1/2}.$$

Здесь β_0 — угол, определяющий направление первых скольжений; $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$; $T = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ — максимальное касательное напряжение; s_0 — параметр, подлежащий определению. Параметр s_0 может быть рассчитан по формуле $s_0 = T + \sigma_0 \cos \alpha / \sin \alpha$, где $\alpha = \pi/4 - \beta_0$ — угол среза.

Замечание. Согласно теории плоского механизма скольжений сопротивление сдвигу выражается через интенсивность скольжений, происходящих по плоскостям, параллельным второй главной оси тензора напряжений, и в направлениях, перпендикулярных этой оси.

В плоскости первых скольжений нормальные и касательные напряжения всегда взаимосвязаны между собой. Соотношение между данными напряжениями можно представить в виде

$$\sigma_{\beta_0} = k\tau_{\beta_0},$$

где k — определяемый коэффициент пропорциональности.

В [22] показано, что коэффициент k можно определять по формуле

$$k = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 - s_0^2 - T^2}}{T}.$$

Модифицируем с учетом запредельного деформированного состояния *критерий прочности Кулона — Мора* (1.1). Рассмотрим нисходящий участок полной диаграммы деформирования. Если фактическую кривую диаграммы аппроксимировать ли-

нейной зависимостью, то уравнение механического состояния материала, соответствующее данному участку, можно записать в виде

$$\sigma_1^* = \sigma_{\text{lim}} - \sigma_1'.$$

Здесь σ_1^* — сопротивляемость материала в точках нисходящего участка кривой $(\sigma_1 - e_1)$. Характеристика σ_{lim} — предельная сопротивляемость материала для условий объемного напряженного состояния, определяемая выражением (1.1), описанным в терминах главных напряжений, т. е.

$$\sigma_{\text{lim}} = (2\lambda + 1)\sigma_3 + \sigma_{\text{press}}.$$

Для условий одноосного сжатия ($\sigma_3 = 0$) величина σ_{lim} равна пределу прочности на одноосное сжатие σ_{press} .

Величина σ_1' характеризует снижение максимальной сопротивляемости материала в зависимости от величины запредельной деформации e_1' : $\sigma_1' = E^* e_1'$. Здесь E^* — модуль деформации нисходящего участка полной диаграммы.

Напряжению в запредельном состоянии σ_1^* соответствует деформация e_1^* , которую по аналогии с выражением для напряжений σ_1^* можно представить как

$$e_1^* = e_{\text{lim}} + e_1',$$

где e_{lim} — деформация, соответствующая предельному значению напряжений σ_{lim} .

При достижении запредельной деформацией e_1' значения, соответствующего переходу деформируемой среды в состояние руинного разрушения $e_1' = e_p'$ (точка e на диаграмме), сопротивляемость материала снижается до минимального значения — σ_{press}^0 , которое называется *остаточной прочностью*. Тогда остаточная прочность породы может быть представлена выражением

$$\sigma_{\text{press}}^0 = (2\lambda + 1)\sigma_3 + \sigma_{\text{press}} - E^* e_p'.$$

Таким образом, уравнение $\sigma_1^* = \sigma_{\text{lim}} - \sigma_1'$ окончательно в виде *деформационного критерия прочности* записывается следующим образом:

$$\sigma_1^* = (2\lambda + 1)\sigma_3 + \sigma_{\text{press}} - E^* e_1'. \quad (1.7)$$

1.6. ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОГО ОБЪЕКТА МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для большого числа природных материалов, композиционных элементов, неоднородных по строению и сложенных структурными элементами различных размеров, как упоминалось ранее, *механические свойства материала, механические свойства образцов материала, образцов больших структурных образований из рассматриваемого материала и собственно механические свойства собственно структурных образований из рассматриваемого материала* различны, и в некоторых случаях существенно.

Следовательно, при учете неоднородности таких структурных образований необходимо учитывать специфические механические эффекты, к числу которых относятся и *масштабный эффект*, обусловленный структурной неоднородностью

природных/композиционных образований и проявляющийся в зависимости их механических характеристик от масштаба осреднения и размеров рассматриваемых структурных образований.

Масштабный эффект в данном контексте можно определить как зависимость от абсолютных размеров исследуемой и используемой для отбора выборки области механического объекта закона распределения изучаемого параметра по слагающим эту область элементам: появление и с увеличением размера рассматриваемой области систематическое проявление дефектов строения и состава объекта, не обнаруживаемых в меньших по размерам областях или обнаруживаемых как грубые отклонения. Так, внешним проявлением масштабного эффекта прочности неоднородной горной породы является снижение усредненного значения ее прочности с ростом абсолютных размеров изучаемой области породы.

С точки зрения построения теории деформирования неоднородных механических объектов для учета масштабного эффекта целесообразно сохранение гипотез классических теорий и подходов МДТТ в первоначальной формулировке и отказ от гипотезы об однородности среды и независимости механических характеристик от геометрических протяженностей объекта изучения, введение определенных операций осреднения и (на их основе) построение эффективных макроскопических характеристик среды [23]. В этом случае средние (эффективные) поля перемещений и напряжений становятся главными функциями координат, но возникают дополнительные параметры, характеризующие флуктуации свойств полей перемещений и напряжений.

Наиболее полно и последовательно механические эффекты, определяемые структурной неоднородностью материалов, могут быть учтены в теории, явно вводящей неоднородность свойств и использующей ту или иную операцию осреднения. Возникающие при этом трудности оправдываются полнотой и физической ясностью результатов.

Итак, в общем случае материальные функции $\hat{F}$, описывающие механические свойства выделенной области объекта МДТТ, будут различными в зависимости от размеров рассматриваемой области. Влиянием масштабного эффекта можно пренебречь, если размеры образца d , для которого были определены значения механических характеристик, существенно превосходят характерный размер неоднородности l .

Замечание. Под термином «образец» подразумевается область, подвергающаяся некоторым исследованиям, направленным на установление зависимостей, определяющих функции $\hat{F}$ для механических характеристик данной области. Эффект масштабного эффекта — один из важных факторов, ограничивающих условия отбора выборки образцов рассматриваемого объекта для изучения (измерения) показателей его свойств.

Следует отметить, что характерный размер неоднородности представляет собой грубую идеализацию неизбежно статистического описания действительной гетерогенной системы, однако данное понятие полезно при исследовании совокупности (класса) гетерогенных тел.

Из сказанного вытекает, что размер представительных образцов d является именно тем масштабом длины, в пределах которого свойства среды можно осреднить некоторым осмысленным образом. Благоприятен случай, когда масштаб длины осред-

нения d мал по сравнению с характерным размером тела L . В этом случае материал рассматриваемого тела можно идеализировать как эффективно однородный, а задача определения НДС тела может быть решена с использованием средних свойств, ассоциированных с масштабом длины d . Таким образом, предполагается существование промежуточного между l и L размера d , осреднение свойств в пределах которого обоснованно. Это *гипотеза об эквивалентной однородности*.

Замечание. Как указывалось ранее, можно, конечно, для каждой фазы проводить свои расчеты, удовлетворяя при этом условиям непрерывности векторов напряжений и перемещений на границах фаз. Но, например, для породных массивов или композиционных материалов, представляющих систему из десятков и сотен слоев, это крайне сложная задача. Принятие гипотезы об эквивалентной однородности позволяет свести основную проблему к тому, чтобы, используя процедуру осреднения, предсказывать эффективные свойства идеализированной однородной среды через свойства фаз и некоторые их геометрические характеристики.

В зависимости от класса задач меняется понятие характерного размера неоднородности. Строгого определения характерного размера неоднородности l дать нельзя. Обычно в качестве l выступает какая-либо метрика пространства, в которое «помещен» рассматриваемый объем объекта МДГТ (в каждом случае вопрос о выборе величины l может быть решен).

Так, в породном массиве, имеющем характерный размер L ($L \geq l$), рекомендуется выделять области, в которых определяющие соотношения для эффективных характеристик НДС массива непрерывны по координатам. Это могут быть в зависимости от масштаба постановки задачи объем породы в слое, объем слоя в суммарной мощности пласта и т. д., но может быть и весь объект исследований.

Следует отметить, что обобщенных численных показателей, характеризующих степень влияния структурных неоднородностей различных порядков на деформирование и разрушение неоднородных структур, в настоящее время нет. Это объясняется сложностью проведения крупномасштабных экспериментов, трудностью интерпретации результатов, поскольку при испытаниях на изучаемые процессы помимо неоднородностей оказывают влияние и другие факторы (напряженное состояние, способ подготовки испытуемых объемов к эксперименту, влажность и пр.).

При деформировании неоднородных структур проявляется не весь непрерывный набор неоднородностей, а лишь неоднородности определенных масштабов l_i . Диапазон размеров l_i определяется видом нагружения. Множество l_i различно для разных рассматриваемых областей и может меняться в процессе деформирования. В некоторых случаях наблюдается и качественное изменение характера деформирования.

Реально существующие твердые тела практически всегда представляют собой неоднородные тела со сложными физико-механическими связями между тензорами напряжений и деформаций. Другими словами, реальное твердое тело — не что иное, как гетерогенный материал вообще (материал с неоднородными физическими свойствами). Так как реальные твердые тела неоднородны, имеет место сложная проблема, которую называют проблемой осреднения: *механические характеристики материалов, составляющих исследуемое неоднородное тело, не дают нам представления об характеристиках тела как целого*. Необходимо знать, какую долю объема занимают те или иные компоненты, включения, их форму и размеры, определить связи между ними и т. д. [3; 23].

Но даже получив эти сведения, трудно перейти к средним механическим характеристикам, поскольку не существует теоретически обоснованной процедуры нахождения средних характеристик в общем случае.

Задача описания механических свойств *гетерогенных сред* (материалы с неоднородными физическими свойствами), зная свойства отдельных компонент, составляющих среду, может быть решена, например, *путем определения эффективных характеристик* опытным путем для тел, линейные размеры которых много больше размера отдельного объема, принятого за однородный (например, кристалл). Этим достигается осреднение характеристик.

При учете структурной неоднородности материалов в рамках феноменологических теорий механики деформируемого твердого тела выясняется, что параметров, определяющих в классических теориях состояние квазиоднородной среды, недостаточно, поскольку появляются новые механические эффекты, не вкладывающиеся в модель изотропной однородной среды. К числу таких эффектов относятся такие явления, как зависимость величин, определяющих осредненные по пространственной области (т. е. измеряемые в макроскопическом эксперименте) механические свойства тела, от параметров, характеризующих структурную неоднородность среды; дисперсия (разброс механических характеристик, определяемых на идентичных образцах в макроскопическом эксперименте; масштабный эффект, обусловленный структурной неоднородностью материалов и проявляющийся в зависимости измеряемых в опытах осредненных механических характеристик, особенно их дисперсий, от масштаба осреднения и размеров образца).

При детерминированных феноменологических подходах к проблеме учета структурной неоднородности материалов задача выбора дополнительных параметров, описывающих состояние среды, становится весьма неопределенной. Для ее решения необходимо отказаться от той либо иной гипотезы, лежащей в основе классических теорий МДТТ. Однако с точки зрения построения теории деформирования структурированных сред целесообразно сохранить гипотезы классической теории МДТТ в первоначальной формулировке и отказ от гипотезы об однородности среды, введение определенной операции осреднения и (на ее основе) эффективных макроскопических характеристик среды (об этом уже упоминалось). В этом случае средние (эффективные) поля перемещений и напряжений становятся главными функциями координат, но при этом возникают дополнительные параметры, характеризующие флуктуации свойств полей перемещений и напряжений.

Кроме того, весьма важно введение гипотезы континуума, включающей в себя процедуру статистического осреднения, посредством которой действительное состояние и структура объекта МДТТ идеализируются таким образом, что последний считается континуумом.

Замечание. Наиболее полно и последовательно механические эффекты, определяемые структурной неоднородностью материалов, могут быть учтены в теории, явно вводящей неоднородность свойств и использующей ту или иную операцию осреднения. Возникающие при этом трудности оправдываются полнотой и физической ясностью результатов.

Неоднородность среды в подходе МСС рассматривается как идеализация непрерывного изменения свойств от точки к точке или как скачкообразные изменения свойств при прохождении через поверхности раздела.

Рассмотрим подход к построению эффективных характеристик неоднородных твердых деформируемых тел, который можно отнести к категории *статистически квазиоднородных сред*. Под последними понимаются среды, в которых неоднородности в больших объемах допускают описывать свойства среды как статистически квазиоднородной.

В соответствии со сказанным *для описания механических свойств неоднородного твердого тела используется теория квазиоднородных структурированных упругих тел, а в качестве основной модели рассматривается модель стохастически неоднородной среды.*

Замечание. Выбор такой модели оправдан тем, что среди многих разделов МДТТ линейная теория упругости дает наиболее широкий спектр приложений. Ее успешное использование можно объяснить, в частности, такими факторами, как достоверное описание поведения широкого класса материалов, высокое развитие многочисленных разделов данной теории, представление окончательных результатов во многих практических задачах в простом, но достаточно общем виде, удобном для проведения конкретных расчетов.

Представляем определяющие соотношения МДТТ для неоднородной среды в следующем виде:

$$\sigma = \hat{F}(\varepsilon, \bar{x}) \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = \hat{F}_{ijlm} \varepsilon_{lm}, \quad (1.8)$$

где σ , ε — тензоры напряжений и деформаций; $\hat{F}$ — некоторый тензор второго ранга.

В записи (1.8) учтено, что эти определяющие соотношения зависят от координат. Предположим, что (1.8) описывает некоторую модель породного массива как модель МДТТ, а поэтому существует обратная зависимость

$$\varepsilon = \hat{G}(\sigma, \bar{x}). \quad (1.9)$$

Так как (1.8) описывает реальную физическую среду, данные операторные соотношения однозначно разрешимы относительно деформаций, т. е. операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ взаимно обратны. Отметим, что операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ могут быть как непрерывными, так и разрывными функциями координат.

Согласно постулату макрофизической определимости А. А. Ильюшина материальные функции $\hat{F}$ и $\hat{G}$, в принципе, могут быть найдены на макроскопических образцах, однако в зависимости от области решаемой задачи может случиться, что таких образцов потребуется огромное количество, т. е. практически невозможно экспериментально определить материальные функции. В этом случае можно каким-то образом найти некие «осредненные» материальные функции (например, на образцах из неоднородного материала, в которых однородное НДС реализуется только в среднем). Найденные материальные функции описывают эффективные определяющие соотношения (1.8) и (1.9):

$$\langle \sigma \rangle = \hat{f}(\langle \varepsilon \rangle), \quad (1.10)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \hat{g}(\langle \sigma \rangle). \quad (1.11)$$

Следует отметить, что в общем случае эффективные соотношения (1.10) и (1.11) будут различными в зависимости от размеров испытываемых образцов (масштабный

эффект). Однако если размеры образца d существенно превосходят характерный размер неоднородности l , то влиянием масштабного эффекта можно пренебречь (представительные образцы). Укажем, что под термином «образец» подразумевается область твердого тела, подвергающаяся некоторым исследованиям, направленным на установление зависимостей вида (1.10) или (1.11).

Замечание. Попытки осреднения изучаемых показателей по слишком малочисленной выборке, например при определении среднего значения прочности проб массива, сложенного двумя-тремя пластами различных пород, существенно различающихся по прочности, показывают, что помимо недопустимого неучета анизотропии подобной системы результаты такого осреднения при значительном коэффициенте вариации либо имеют низкую надежность, либо ошибка определения оказывается равной или больше самой определяемой величины «средней прочности». Понятно, что такой показатель «средней прочности» указанных пластов никак не характеризует их разнородное поведение при совместном нагружении.

Например, при определении прочности на сжатие трех ($n = 3$) пластов (90 МПа, 50 МПа, 40 МПа) со значительным коэффициентом вариации ($U = 44 \%$), при более или менее приемлемой надежности $\eta = 90 \%$ погрешность среднего значения составляет 74% , т. е. сравнима с самим средним значением; ограничение же погрешности приемлемой величиной 20% соответствует недопустимо низкой надежности определения $\eta = 50 \%$.

Еще хуже результаты осреднения значений прочности на сжатие двух ($n = 2$) пластов (90 МПа, 40 МПа) с коэффициентом их вариации ($U = 50 \%$). При приемлемой надежности $\eta = 90 \%$ погрешность среднего составляет 250% , а при приемлемой погрешности, например, 20% надежность осреднения составляет $\eta = 30 \%$, т. е. в этом примере либо осреднение вообще не дает уверенных результатов, либо результат оказывается ненадежным ($\eta < 50 \%$).

Осреднение значений этих показателей для малочисленных объектов может оказаться допустимым в случаях, когда практическая цель этого осреднения не связана с фактическим осреднением или же если это последнее обеспечивается дополнительно специальными детерминированными средствами, например физическим перемешиванием измельченных осредняемых компонентов.

Для решения задач МДТТ для «размазанной» среды вместо исходной задачи для неоднородного тела можно использовать *метод эффективного модуля*. Необходимо отметить, что решение задачи по теории эффективного модуля ничего не говорит о характере распределения перемещений, деформаций и напряжений внутри каждого компонента. Но когда по найденным эффективным характеристикам среды удастся восстановить операторы концентрации, то можно по средним напряжениям (которые найти не так сложно) отыскать средние микронапряжения в каждом компоненте.

В зависимости от класса задач меняется понятие характерного размера неоднородности. Выделим в композите, имеющем характерный размер L ($L \geq l$), области, в которых определяющие соотношения (1.8) и (1.9) непрерывны по координатам. Каждую такую область непрерывности называют компонентом композита.

Эффективные определяющие соотношения (1.10) и (1.11) могут быть найдены как экспериментально, так и теоретически. Теоретическое определение таких эф-

эффективных определяющих соотношений требует решения задач МДТТ, однако, как правило, получить аналитическое решение этих задач удастся только в простейших случаях. Применение численных методов не позволяет найти аналитическое выражение для определяющих соотношений. Поэтому их часто находят приближенно, используя различные методы, в частности вариационные, причем в этом случае важно знать, с какой степенью точности приближенные определяющие соотношения заменяют точные, т. е. установить области (так называемые «вилки»), внутри которых лежат точные эффективные характеристики.

Некоторые подходы к построению определяющих соотношений для определения эффективных характеристик гетерогенных твердых тел, опирающиеся на введение интервалов, в которых находятся реальные показатели, описаны в [3].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем отличие механических свойств образцов и механических свойств собственно материала?
2. Назовите основные группы характеристик механических свойств материалов.
3. Перечислите основные прочностные свойства материалов.
4. Перечислите основные упругие свойства материалов.
5. Что такое ауксетики (ауксетичные материалы)?
6. Охарактеризуйте динамические свойства материалов.
7. Существует классификация материалов по характеру реагирования на внешние механические воздействия. Что такое реология, пластичность?
8. В чем принципиальная разница между упругими, пластическими, упругопластическими и реологическими моделями поведения среды?
9. Проанализируйте изотропность, анизотропность по отношению к некоторому механическому свойству.
10. Что такое масштабный фактор по отношению к механическим свойствам?
11. Приведите примеры различных режимов механического нагружения образцов (режимов заданной нагрузки и заданной деформации).
12. Представьте полные диаграммы деформирования образцов под нагрузкой.
13. Что такое модуль упругости и модуль деформации?
14. В чем состоит осреднение механических характеристик неоднородных тел?
15. Математические соотношения, связывающие компоненты напряженно-деформированного состояния приведенной эффективной среды, — в чем их отличие от соотношений для реального неоднородного тела?

Глава 2

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

2.1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Механическое поведение твердого тела может быть весьма разнообразным и сложным. В данном курсе описание состояния и поведения деформируемых твердых тел базируется на *теории сплошной среды*. Хорошо известно, что в действительности сплошной среды нет, но для понимания механического поведения материи в макрообъемах можно принять такую модель. При игнорировании дискретной структуры материала предполагается, что объем, занимаемый телом, непрерывно заполнен материей.

Бесконечно малый объем материала можно рассматривать как «частицу» сплошной среды. При этом произвольная делимость материи, как и неразличимость отдельных частиц, составляет одно из основных понятий механики сплошной среды.

В основе выбора модели сплошной среды лежат понятия элементарного объема, критерии квазисплошности и квазиоднородности.

На выбор размеров элементарных объемов больше влияния оказывают дефекты строения среды. Классификация объемов как элементарных зависит от размеров объекта исследования.

Замечание. *Элементарный объем* — понятие более широкое, чем понятие «элементарная площадка». Под последней понимается участок сплошной среды, на котором напряжение может быть определено. Для непрерывной среды размер элементарной площадки ничем не ограничен: она может быть сколь угодно малой по площади, и поэтому напряжение может быть отнесено к точке на поверхности.

Твердое тело имеет кристаллическую структуру, и минимальный размер элементарной площадки должен быть по крайней мере на порядок больше межатомного расстояния.

В противном случае мгновенное по площади усреднение сил, приложенных к отдельным атомам, находящимся на поверхности, будет давать напряжение, сильно меняющееся во времени из-за тепловых колебаний решетки.

Реальные тела чаще всего являются поликристаллическими, т. е. состоят из сросшихся мелких зерен — кристалликов различной формы и ориентации в простран-

стве. Основные контакты между зернами распределены по поверхности кристаллика случайным образом. В этом случае напряжения внутри каждого зерна распределены неравномерно, и поэтому для характеристики напряженного состояния твердого тела (в среднем изотропного) нужно определять напряжения по площадке, размеры которой много больше размера зерна. Если тело включает неоднородности более крупного масштаба, возникает проблема представительности локальных напряжений, измеряемых на малых площадках.

Таким образом, вопрос о правомерности использования методов МСС должен решаться для каждого конкретного объема тела с учетом его структурно-механических особенностей.

В качестве *критерия квазисплошности* можно использовать, например, соотношение, введенное Т. А. Крупенниковым¹:

$$\Delta A < \varepsilon \text{ при } \Delta a < l_0,$$

где A — разность значений напряжений, деформаций и смещений в соседних точках среды с приращением координат Δa ; l_0 — характерный линейный размер элементарного объема (элементарная длина); ε — допускаемая погрешность при определении.

Критерий квазисплошности может быть сформулирован так:

$$\Delta P_i \leq \varepsilon \text{ при } \Delta a < l_0,$$

где ΔP_i — приращение любого из компонентов механических свойств; l_0 — характерный линейный размер элемента объема, в котором сохраняются все механические свойства и характеристики материала.

За *критерий рассмотрения среды как квазиоднородной* можно принять превышение области воздействия над размером неоднородности минимум на порядок по линейным размерам:

$$V_g / V_n = 10^3,$$

где V_g и V_n — объемы соответственно области воздействия и неоднородности.

Основанием для введения модели сплошной среды является опыт, делающий возможным экспериментальную проверку рассматриваемой теории. При нагружении под действием внешних сил материальные частицы меняют свое положение в пространстве, т. е. сплошная среда движется. Предполагается также, что движение сплошной среды непрерывно. Это означает, что все величины, определяющие деформирование, являются непрерывными функциями координат.

Описание деформирования твердых тел и жидкостей в механике является чисто геометрической проблемой и не зависит от внутреннего поведения материала. Это — задача кинематики сплошной среды, и характер сил, вызывающих деформацию, не играет при этом никакой роли. Равным образом и силы, возникающие в деформированном теле, не зависят от свойств материала.

Деформируемые твердые тела меняют свои размеры и форму (деформируются) под действием внешних сил (нагрузок). В них возникают внутренние усилия, величина и распределение которых зависят от нагрузки и геометрической формы тел.

¹ Крупенников Григорий Алексеевич — советский ученый, доктор технических наук, профессор, один из создателей советской научной школы в области горной геомеханики.

Будем рассматривать произвольное твердое тело с наложенными на него опорными реакциями. Воздействие окружающих тел заменяется силами, которые называются *внешними*. Внешние нагрузки можно разделить на *объемные (массовые)*, *поверхностные* и *сосредоточенные*. Последние могут рассматриваться как предельный случай приложения поверхностных нагрузок на малой части поверхности тела.

2.2. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Следует отметить, что согласно гипотезе сплошности движение материи изучается на макроскопическом уровне, т. е. не учитывается элементарное строение вещества. Это оправдано тем, что в огромном числе практических задач представляет интерес не поведение каждой молекулы (атома), а общее состояние тела.

Разделим воображаемым сечением тело на две области — V_1 и V_2 (рис. 2.1, а). Элемент поверхности сечения ΔS с центром в точке A характеризуется единичным вектором нормали $\mathbf{v}$, направленным к V_1 . Действие, оказываемое частью V_1 тела в точке A на часть V_2 , можно представить вектором силы $\Delta \mathbf{P}$ и вектором момента $\Delta \mathbf{M}$. В пределе при стягивании элементарной площадки к рассматриваемой точке $\Delta S \rightarrow 0$ (при фиксированном направлении $\mathbf{v}$) могут быть приняты следующие физически обоснованные предположения:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{P}}{dS} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v}}, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta S} = 0. \quad (2.1)$$

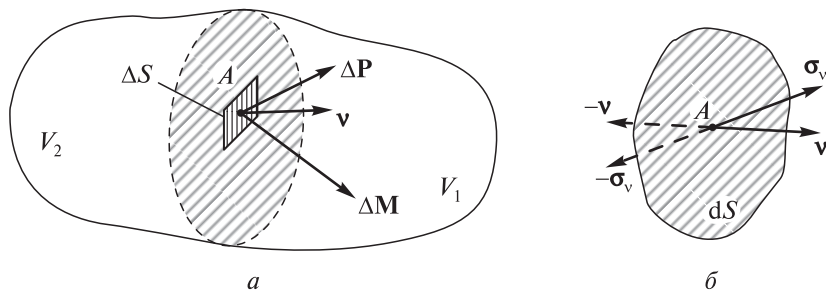


Рис. 2.1. К определению понятия «напряжение на площадке»

Определяемый соотношением (2.1) вектор $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v}}$ называется вектором напряжений в точке A . Он действует на элемент поверхности с направлением нормали $\mathbf{v}$ и меняется при изменении направления этой нормали к ΔS . Для векторов напряжений, действующих в одной и той же точке, но направленных в противоположные стороны от сечения элемента, справедливо равенство

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v}} = -\boldsymbol{\sigma}_{-\mathbf{v}}. \quad (2.2)$$

С его помощью, как видно из рис. 2.1, б, описывается действие части тела V_2 на часть V_1 и обратно.

Соотношение (2.2) можно трактовать как выражение третьего закона Ньютона¹ (принцип равенства действия и противодействия). Но оно может быть также не-

¹ Ньютон Исаак (Newton Icaak) (1643–1727), английский математик, механик; основатель классической механики.

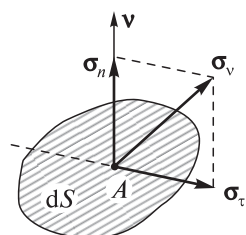


Рис. 2.2. Нормальная и касательная компоненты вектора напряжений

посредственно выведено из теоремы о количестве движения и из принципа напряжений Коши. Совокупность векторов напряжений $\sigma_v(A)$ для всех направлений v определяет напряженное состояние в точке A .

В общем случае вектор напряжений $\sigma_v(A)$ направлен не по нормали v . Его проекция на произвольное направление (определяемое единичным вектором) называется компонентой вектора напряжений в этом направлении. Если разложить σ_v по нормали и касательной к площадке dS , то получим нормальное напряжение σ_n и касательное напряжение τ_n (рис. 2.2).

Для модулей этих величин справедливо соотношение

$$\sigma_v^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2.$$

Следует всегда помнить, что напряжения σ_n и τ_n , определенные подобным образом, не являются компонентами вектора в обычном смысле. Заметим, что касательные напряжения в плоскости элемента dS обычно раскладывают на два координатных направления.

В дальнейшем будем применять декартовы координаты x_1, x_2, x_3 , которые впредь будем обозначать символом x_i , помня при этом, что i и другие латинские индексы принимают значения 1, 2, 3. Базисные векторы системы координат обозначим через e_i .

Под действием заданных нагрузок в точках твердого тела возникает напряженное состояние. Для его описания мысленно вырежем вокруг произвольной точки элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям и имеют малые длины dx_i (рис. 2.3, а). В силу малости параллелепипеда можно считать, что векторы напряжений σ_i на его гранях совпадают с векторами напряжений на параллельных им координатных площадках, проведенных через рассматриваемую точку.

В данном случае и при последующем рассмотрении должно быть принято во внимание важное предположение о том, что *деформированный и недеформированный элементы объема идентичны*. Это следует из гипотезы о малости деформаций.

Действующие на гранях параллелепипеда векторы напряжений σ_i можно разложить на нормальные σ_{ii} (перпендикулярные к граням) и касательные σ_{ij} ($i \neq j$) составляющие (лежащие в плоскости граней) (рис. 2.3, б).

Принимаем, что первый нижний индекс в обозначениях указывает на нормаль к площадке, на которой действует это напряжение,

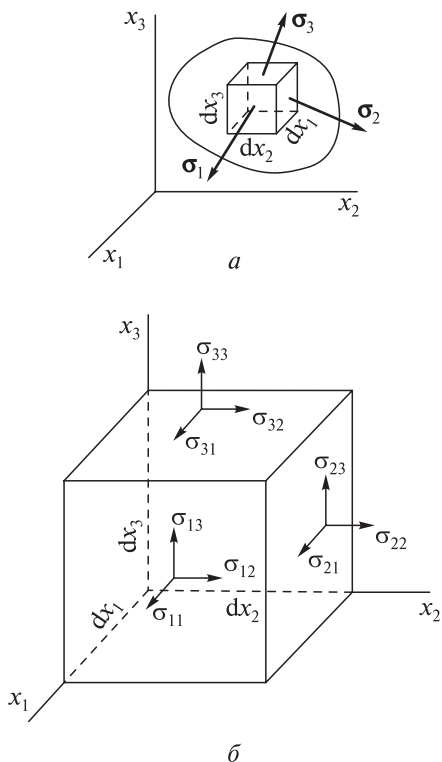


Рис. 2.3. Разложение вектора напряжений в общем случае

второй индекс обозначает ось, которой оно параллельно. *Растягивающие нормальные напряжения считаются положительными, сжимающие — отрицательными.*

Величины σ_{ij} не являются компонентами вектора в обычном смысле. Они измеряются чаще всего в паскалях ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$).

Разложение, например, вектора напряжения σ_3 (который действует на грани $x_3 = \text{const}$) по координатным осям x_i имеет вид

$$\sigma_3 = \sigma_{31}e_1 + \sigma_{32}e_2 + \sigma_{33}e_3 = \sum_{k=1}^3 \sigma_{3k}e_k \equiv \sigma_{3k}e_k.$$

В дальнейшем условимся, как и в классическом курсе МСС, что когда в одночлене дважды встречается какой-нибудь латинский индекс, то происходит суммирование по этому индексу от 1 до 3. Сам же знак суммирования писать не будем (этот индекс называется немой). Его можно, как и переменную интегрирования в подынтегральном выражении, заменить любым другим индексом. Например, $x_i y_i = x_k y_k$.

Если повторяется греческий индекс, то суммирование по нему не производится. Индекс, встречающийся в слагаемом один раз, называется свободным. При правильном написании любой формулы каждое ее слагаемое должно иметь одни и те же свободные индексы.

В общем случае для вектора напряжений σ_i справедливо равенство

$$\sigma_i = \sigma_{ij}e_j, \quad (2.3)$$

где e_j — единичный вектор координатной оси x_j .

Введем метрический тензор δ_{ij} , определяемый как скалярное произведение базисных векторов. В декартовой системе координат $e_i \cdot e_j = 0$, если $i \neq j$, поэтому

$$\delta_{ij} = e_i \cdot e_j, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.4)$$

Матрица этого тензора диагональная. Часто компоненты метрического тензора (2.4) называют символами Кронекера¹.

Скалярное умножение соотношения (2.3) на базисный вектор e_k дает

$$\sigma_i \cdot e_k = \sigma_{ij}e_j \cdot e_k = \sigma_{ij}\delta_{jk}.$$

Из (2.4) следует, что $\delta_{kj} = 1$ только при $j = k$, поэтому получаем

$$\sigma_{ik} = \sigma_i e_k. \quad (2.5)$$

Девять компонентов напряжений σ_{ij} представляют собой в совокупности физическую величину, которая называется *тензором напряжений*² Коши (T_s). Это тензор второго ранга (по числу индексов). Записанный в виде матрицы, он выглядит следующим образом:

$$T_s = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

¹ Кронекер Леопольд (Cronecker L., 1823—1891), немецкий математик.

² Понятие «тензор» было образовано от латинского *tension* — напряжение.

В строках матрицы содержатся компоненты тензора напряжений, параллельные одной оси, в столбцах — действующие на одной площадке. Компонента σ_{ij} означает напряжения в точке N , действующие в направлении оси i на площадке с внешней нормалью по направлению к оси j . В этом случае вектор напряжений $\vec{\sigma}_i$ в точке N в направлении оси i определяется как $\vec{\sigma}_i = \vec{\sigma}_i \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}\}$.

Не останавливаясь на точном математическом определении тензора, отметим, что он является инвариантным объектом, не изменяющимся при переходе от одной системы координат к другой. Изменяются по определенному «тензорному» закону при таком переходе только его компоненты. Однако в дальнейшем будем иногда для краткости называть тензором совокупность его компонент.

Для компонент тензора напряжений могут использоваться различные обозначения. Так, например, если для осей координат используются обозначения x, y, z , то компоненты тензора напряжений

$$T_s = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Обозначения Кармана имеют вид

$$T_s = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, напряженное состояние в теле определяется полем тензоров напряжений, т. е. заданием в каждой точке тела девяти функций $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$ (t — время). Тензор напряжений является симметричным, т. е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Очень важное утверждение — *закон взаимности*: если в данной точке тела имеются две пересекающиеся элементарные площадки, то проекция напряжения на первой площадке на нормаль ко второй равна проекции напряжения на второй площадке на нормаль к первой (это более общее утверждение, чем симметричность тензора напряжений).

2.3. СВОЙСТВА ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Компоненты вектора напряжения σ_v на произвольной косоугольной площадке, проведенной через рассматриваемую точку, можно выразить через напряжения на координатных площадках (гранях элементарного параллелепипеда) в этой точке (рис. 2.4, а).

Для доказательства рассматривается отдельно элементарная пирамида, образованная координатными гранями и косоугольной площадкой с нормалью $\mathbf{v}$ (рис. 2.4, б). Здесь σ_{vi} — проекции вектора напряжений σ_v на координатные оси; S — площадь косоугольной площадки; S_i — площади соответствующих координатных граней (нижний индекс указывает нормаль к площадке), которые связаны с S следующими соотношениями:

$$S_i = S l_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.6)$$

где $l_i = \cos(\mathbf{v}, x_i)$ — направляющие косинусы нормали $\mathbf{v}$ к косоугольной площадке.

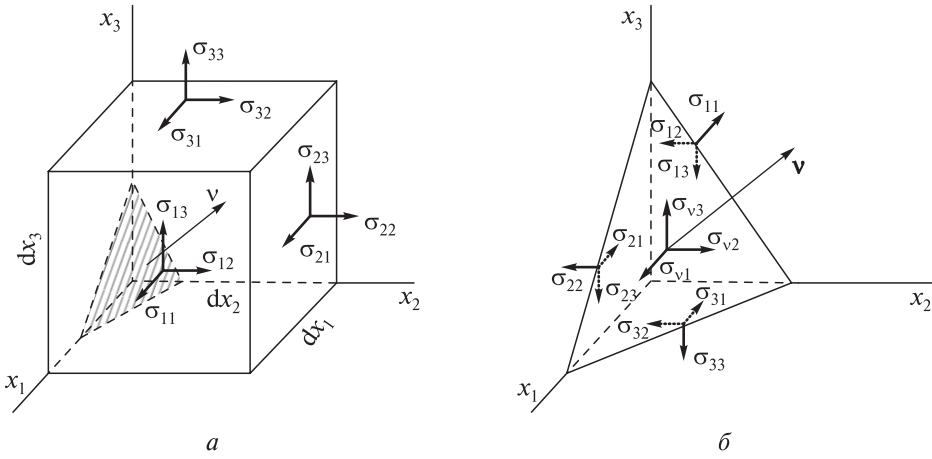


Рис. 2.4. К определению напряжений на произвольной площадке с нормалью $\mathbf{v}$

Составляем уравнения равновесия сил на гранях выделенной пирамиды (рис. 2.4, б), которыми являются произведения напряжений на гранях на площади соответствующих граней:

$$\sigma_{v1}S - \sigma_{11}S_1 - \sigma_{21}S_2 - \sigma_{31}S_3 = 0,$$

$$\sigma_{v2}S - \sigma_{12}S_1 - \sigma_{22}S_2 - \sigma_{32}S_3 = 0,$$

$$\sigma_{v3}S - \sigma_{13}S_1 - \sigma_{23}S_2 - \sigma_{33}S_3 = 0.$$

В тензорных обозначениях эта система уравнений принимает вид

$$\sigma_{vi}S - \sigma_{ji}S_j = 0. \quad (2.7)$$

Напоминаем: здесь суммирование производится по повторяющемуся латинскому индексу j . В рассматриваемом случае

$$\sigma_{ji}S_j = \sigma_{1i}S_1 + \sigma_{2i}S_2 + \sigma_{3i}S_3.$$

Подставляем в уравнение (2.7) соотношение (2.6). Сократив затем на S , получаем формулы, выражающие компоненты вектора напряжения на произвольной кривой площадке через координатные напряжения:

$$\sigma_{vi} = \sigma_{ji}l_j. \quad (2.8)$$

Таким образом, с помощью компонент тензора напряжений на координатных площадках можно полностью описать напряженное состояние в точке.

Вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}_v$ на произвольной кривой площадке, проведенной через эту точку, можно представить в виде разложения по базисным векторам:

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \sigma_{vi}\mathbf{e}_i \equiv \sigma_{v1}\mathbf{e}_1 + \sigma_{v2}\mathbf{e}_2 + \sigma_{v3}\mathbf{e}_3. \quad (2.9)$$

Используя (2.9), модуль этого вектора можно выразить через сумму квадратов его проекций:

$$\sigma_v^2 = \sigma_{v1}^2 + \sigma_{v2}^2 + \sigma_{v3}^2.$$

Соответствующие нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения на той же площадке определяются следующим образом (см. рис. 2.4):

$$\sigma_n = \sigma_{ij} l_i l_j = \sigma_{11} l_1^2 + \sigma_{22} l_2^2 + \sigma_{33} l_3^2 + 2\sigma_{12} l_1 l_2 + 2\sigma_{23} l_2 l_3 + 2\sigma_{31} l_3 l_1,$$

$$\tau_n^2 = \sigma_v^2 - \sigma_n^2.$$

2.4. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если деформируемое тело находится в равновесии, то и любая произвольно выделенная из него часть тела должна также находиться в равновесии.

Пусть тело нагружено заданными поверхностными силами $\mathbf{R}_v$ и однородными объемными силами $\rho \mathbf{F}$ (ρ – плотность материала):

$$\rho \mathbf{F} = \rho F_i \mathbf{e}_i \equiv \rho F_1 \mathbf{e}_1 + \rho F_2 \mathbf{e}_2 + \rho F_3 \mathbf{e}_3.$$

Предполагается, что компоненты напряжений σ_{ij} , так же как и их первые частные производные, являются непрерывными функциями координат. *Деформации считаем малыми, поэтому уравнения равновесия можно формулировать для недеформированного тела или его части.*

Для выделенного элемента с малыми ребрами dx_i , нагруженного согласно рис. 2.5, компоненты напряжений при приращении координат на бесконечно малую величину dx_i изменяются соответственно на $d\sigma_{ij}$. Например, изменение нормальных напряжений σ_{11} , действующих вдоль оси x_1 , за счет приращения только dx_1 будет следующим:

$$d\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \equiv \sigma_{11,1} dx_1.$$

Напряжения σ_{21} , действующие вдоль оси x_1 на другой грани, получают приращение за счет изменения координаты x_2 на величину dx_2 :

$$d\sigma_{21} = \sigma_{21}(x_1, x_2 + dx_2, x_3) - \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \equiv \sigma_{21,2} dx_2.$$

Аналогично изменяются напряжения σ_{31} :

$$d\sigma_{31} = \sigma_{31,3} dx_3.$$

Замечание. Для краткости операция частного дифференцирования обозначена запятой перед соответствующим нижним индексом:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\dots) \equiv (\dots)_{,i}.$$

Остальные приращения напряжений вдоль координатных осей следующие: $d\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta,\gamma} dx_\gamma$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$; без суммирования по повторяющемуся греческому индексу).

Из условия равенства нулю суммы моментов сил, действующих на элемент, относительно

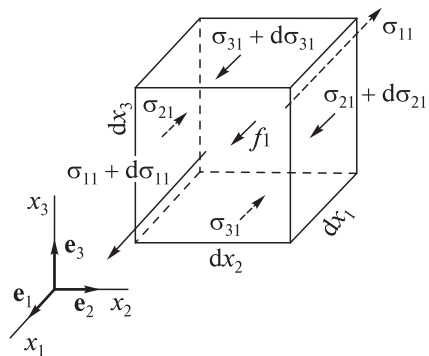


Рис. 2.5. К выводу уравнений равновесия

координатных осей получим известный закон парности касательных напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i \neq j$)¹. Это показывает, что тензор напряжений имеет только шесть независимых компонент и его матрица симметрична относительно главной диагонали.

Рассмотрим равновесие сил, действующих на выделенный элемент, в направлении оси x_1 . Спроектируем на эту ось все действующие силы, в том числе объемные. Для этого напряжения, параллельные оси x_1 , умножим на площади граней, на которых они действуют, а интенсивность ρF_1 — на объем параллелепипеда и просуммируем:

$$(\sigma_{11} + \sigma_{11,1} dx_1 - \sigma_{11})dx_2 dx_3 + (\sigma_{21} + \sigma_{21,2} dx_2 - \sigma_{21})dx_3 dx_1 + \\ + (\sigma_{31} + \sigma_{31,3} dx_3 - \sigma_{31})dx_1 dx_2 + \rho F_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

откуда следует

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} + \rho F_1 = 0.$$

Учитывая симметрию тензора напряжений ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), получаем

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + \rho F_1 = 0.$$

Аналогично для двух остальных направлений

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + \rho F_2 = 0, \quad \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + \rho F_3 = 0.$$

В общем случае эти три уравнения можно записать в следующей тензорной форме:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0. \quad (2.10)$$

Их называют *уравнениями равновесия твердого деформируемого тела* или *статическими уравнениями*.

Следует заметить, что в теории обобщенных сред, когда появляются моментные напряжения (например, в теории континуума Коссера), тензор напряжений уже не является симметричным.

2.5. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ НА ГРАНИЦЕ

Уравнения равновесия (2.10) справедливы всюду внутри деформируемого тела. На границе, т. е. на поверхности тела, должны удовлетворяться условия равновесия в напряжениях. Это означает, что на границе должен выполняться непрерывный переход тензора напряжений к поверхностной нагрузке. Из (2.2) следует

$$\mathbf{R}_v = -\boldsymbol{\sigma}_{-v} = \boldsymbol{\sigma}_v,$$

где $\mathbf{R}_v$ — вектор напряжений на границе, заданный на стороне поверхности с нормалью v .

Умножив скалярно это выражение на $\mathbf{e}_i$ и воспользовавшись формулой (2.8), получим *граничные условия* в напряжениях:

$$R_{vi} = \sigma_{ij} l_j. \quad (2.11)$$

¹ Впервые доказал Коши в 1822 г. при выводе уравнений равновесия.

Следовательно, напряжения на границе (поверхностные нагрузки) находятся в равновесии с напряжениями внутри тела. В координатной форме равенства (2.11) имеют вид

$$R_{v1} = \sigma_{11} \cos(v, x_1) + \sigma_{12} \cos(v, x_2) + \sigma_{13} \cos(v, x_3),$$

$$R_{v2} = \sigma_{21} \cos(v, x_1) + \sigma_{22} \cos(v, x_2) + \sigma_{23} \cos(v, x_3),$$

$$R_{v3} = \sigma_{31} \cos(v, x_1) + \sigma_{32} \cos(v, x_2) + \sigma_{33} \cos(v, x_3),$$

причем компоненты вектора нормали являются направляющими косинусами. В дальнейшем значок «v» нормали в нижнем индексе писать не будем.

2.6. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Возьмем вырезанный ранее элементарный параллелепипед с «впаянной» в него декартовой системой координат и начнем мысленно вращать его вокруг рассматриваемой точки. Значения компонент тензора напряжений на его гранях будут изменяться. Доказано, что существует хотя бы одно такое положение параллелепипеда, при котором касательные напряжения на его гранях обращаются в ноль, а нормальные напряжения становятся экстремальными (рис. 2.6). Соответствующие оси координат в данной точке называются *главными осями тензора напряжений*. Компоненты напряжений в этих осях обозначают σ_1 , σ_2 , σ_3 и называют *главными значениями тензора напряжений*.

Главные оси нумеруются так, чтобы в алгебраическом смысле выполнялись для главных значений следующие условия: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Матрица тензора напряжений в главных осях принимает диагональный вид. Компоненты вектора напряжения на косой площадке (2.8) в главных осях следующие (без суммирования по i):

$$\sigma_{vi} = \sigma_i l_i. \quad (2.12)$$

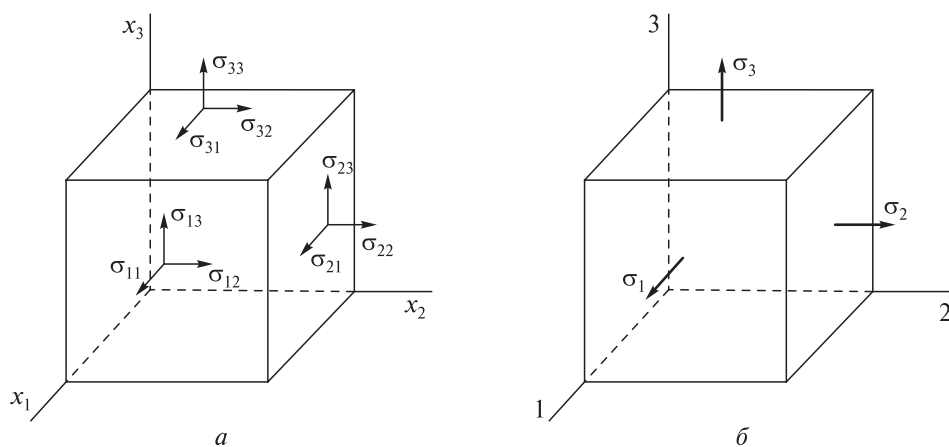


Рис. 2.6. К определению главных осей и главных значений тензора напряжений

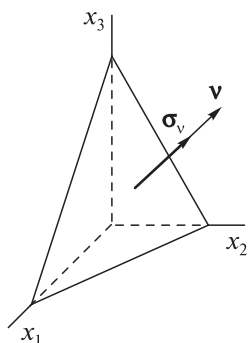


Рис. 2.7. Направление вектора напряжений на главной площадке

Рассмотрим процедуру определения величины главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по известным значениям шести координатных компонент тензора напряжений σ_{ij} .

Возвращаясь к рис. 2.4 и соотношениям (2.5), положим, что наклонная площадка является главной. Тогда вектор полного напряжения σ_v будет направлен по нормали $\mathbf{v}$ к этой площадке, так как касательные напряжения отсутствуют (рис. 2.7).

Искомую величину соответствующего главного напряжения обозначим через σ . Проекции вектора σ_v на координатные оси будут следующими:

$$\sigma_{vi} = \sigma l_i.$$

Подставляя их в соотношения (2.8) и перенося все слагаемые влево, получим систему уравнений

$$\sigma_{ij} l_j - \sigma l_i = 0. \quad (2.13)$$

Слагаемое σl_i в уравнениях (2.13) представим в виде $\sigma l_i \equiv \sigma \delta_{ij} l_j$.

Эта операция ($l_i \equiv \delta_{ij} l_j$) носит название жонглирования индексами с помощью метрического тензора. В самом деле, проверим это выражение, например при $i = 1$:

$$\sigma l_1 = \sigma \delta_{1j} l_j = \sigma \delta_{11} l_1 + \sigma \delta_{12} l_2 + \sigma \delta_{13} l_3 = \sigma \delta_{11} l_1 = \sigma l_1,$$

так как в силу (2.4) $\delta_{12} = \delta_{13} = 0, \delta_{11} = 1$.

В результате, подставляя эти соотношения в уравнение (2.13), получим систему трех однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных косинусов нормали, определяющих ориентацию главной площадки в исходной системе координат:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) l_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.14)$$

В случае единственности решения полученной системы оно будет нулевым: $l_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$). Но нулевое решение не имеет физического смысла. Для существования ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| \equiv \begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.15)$$

Достигается это надлежащим выбором величины σ . Если условие (2.15) выполнено, то хотя бы одно из трех уравнений системы (2.14) не является независимым и линейно выражается через два других. Добавив к независимым уравнениям условие

$$l_i l_i = 1, \text{ или } l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1,$$

получим новую систему трех независимых уравнений. Она достаточна для нахождения косинусов нормали к главной площадке, на которой действует напряжение, равное σ .

Уравнением для определения величин главных напряжений служит определитель (2.15). Если его раскрыть и расположить слагаемые по степеням σ , то получим кубическое уравнение, которое называют вековым:

$$\sigma^3 - \sigma^2 J_1 + \sigma J_2 - J_3 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sigma_{ii} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\
 J_2 &= \frac{\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}}{2} = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\
 J_3 &= \|\sigma_{ij}\| \equiv \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Можно показать, что все три корня векового уравнения — вещественные. Они являются главными значениями тензора напряжений и обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Их величины определяются характером внешней нагрузки и не зависят от первоначальной ориентации системы координат, т. е. главные напряжения инвариантны по отношению к преобразованию координатной системы. Поэтому при повороте осей должны оставаться неизменными и величины коэффициентов J_1, J_2, J_3 в вековом уравнении, определяемые формулами (2.16). В связи с этим их называют инвариантами тензора напряжений.

Плоскости, перпендикулярные к главным осям тензора напряжений, называются главными плоскостями.

Будем следовать общепринятому правилу и считать напряжения положительными, если они являются растягивающими. Кроме того, будем нумеровать главные напряжения в порядке убывания их величин, т. е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

В системе координат главных осей вектор нормальных напряжений $\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos(\vec{n}, x) + \vec{\sigma}_y \cos(\vec{n}, y) + \vec{\sigma}_z \cos(\vec{n}, z)$ коллинеарен вектору внешней нормали $\vec{n}$ к рассматриваемой площадке. Если направление главное, то на перпендикулярной к нему площадке касательное напряжение $\vec{\sigma}_{nt}$ равно нулю.

Тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Если все главные напряжения не равны нулю, то напряженное состояние называется *трехосным*. Если одно из них — нулевое, напряженное состояние — *плоское*. Если одновременно равны нулю два главных напряжения, имеем *линейное* напряженное состояние.

Физическое содержание тензора напряжений определяется его тремя инвариантами, поэтому величины, от него зависящие (например, критерии пластичности), должны быть функциями J_1, J_2, J_3 . Это обстоятельство нужно учитывать при построении общих теорий механического поведения материалов.

2.7. МАКСИМАЛЬНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Октаэдрическими называют площадки, равно наклоненные к главным осям тензора напряжений. Чтобы получить значения напряжений на них, сначала рассмотрим произвольную площадку в главных осях (рис. 2.8). Вектор напряжения на ней обозначим через σ_v . Разложим его на нормальную σ_n и касательную τ_n составляющие:

$$\sigma_v^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2. \tag{2.18}$$

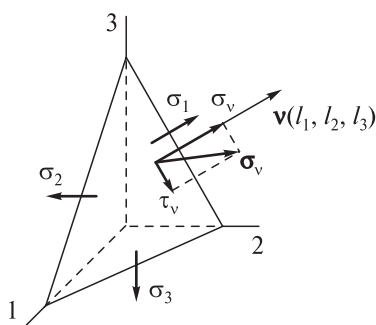


Рис. 2.8. Произвольная площадка с напряжениями в главных осях

Проекции вектора σ_v на главные оси в соответствии с (2.12) примут вид

$$\sigma_{v\alpha} = \sigma_{\alpha} l_{\alpha}.$$

Здесь l_{α} — направляющие косинусы нормали к рассматриваемой произвольно ориентированной площадке. Тогда модуль полного вектора напряжения на этой площадке можно получить из суммы квадратов проекций, а величину нормального напряжения σ_n — как сумму проекций составляющих полного напряжения на нормаль:

$$\sigma_v^2 = \sigma_{v1}^2 + \sigma_{v2}^2 + \sigma_{v3}^2 = \sigma_i^2 l_i^2, \quad \sigma_n = \sigma_{vi} l_i = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 = \sigma_i l_i^2. \quad (2.19)$$

Подставляя полученные выражения для σ_v^2 и σ_n в уравнение (2.18) и учитывая, что сумма квадратов косинусов $l_i l_i = 1$, получим следующее выражение для касательных напряжений на произвольной площадке:

$$\tau_n^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l_1^2 l_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 l_2^2 l_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 l_3^2 l_1^2. \quad (2.20)$$

Как видно из (2.20), τ_n^2 — величина положительная и на главных площадках обращается в нуль. Действительно, если нормаль v совпадает с одной из главных осей, то один из направляющих косинусов равен единице, а два других равны нулю, и тогда $\tau_n^2 = 0$.

Вернемся к октаэдрическим площадкам. Так как они равно наклонены к главным осям, то для них все направляющие косинусы $l_i^2 = 1/3$. Подставив их в формулы (2.19), (2.20), получим значения нормальных и касательных напряжений на октаэдрических площадках:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad \tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3}. \quad (2.21)$$

Выражая τ_{oct} через произвольные координатные компоненты напряжений, получим

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}}{3}.$$

Октаэдрические напряжения являются инвариантными величинами и выражаются через инварианты тензора напряжений:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{J_1}{3}, \quad \tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2J_1^2 - 2J_2}}{3}.$$

Эти напряжения были введены Надаи. Они играют важную роль при вычислении эквивалентных напряжений для сложного напряженного состояния, применяются также для формулировки критериев пластичности.

Особый интерес представляют площадки, на которых возникают максимальные касательные напряжения. Положение этих площадок можно определить, исследуя экстремум выражения (2.20). Так как

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3)$$

и квадрат числа больше суммы квадратов чисел, его составляющих, то

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \geq (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

Поэтому τ_n достигает максимума на тех площадках, на которых третьи из слагаемых в формуле (2.20) максимально. Следовательно, при, $l_1^2 = l_3^2 = 1/2$, $l_2^2 = 0$ получаем, что $\tau_n = \tau_{\max}$ (индекс 2 показывает ось, которой площадка параллельна),

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.22)$$

Таким образом, площадка с максимальным касательным напряжением параллельна главной оси 2 и одинаково наклонена к главным площадкам, на которых действуют максимальное (σ_1) и минимальное (σ_3) из главных напряжений (рис. 2.9).

Если рассмотреть еще две площадки, которые параллельны соответственно первой и третьей главным осям, а к остальным двум равно наклонены, то получим еще два экстремальных значения касательных напряжений:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Величины τ_1 , τ_2 , τ_3 называются главными касательными напряжениями. Для них справедливо соотношение $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

Поверхности, на которых действуют главные касательные напряжения, не являются взаимно ортогональными, а образуют стороны правильного додекаэдра. Его стороны не свободны от нормальных напряжений.

На площадках, на которых действуют главные касательные напряжения, нормальные напряжения составляют:

$$\sigma_{n1} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \quad \sigma_{n2} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}; \quad \sigma_{n3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

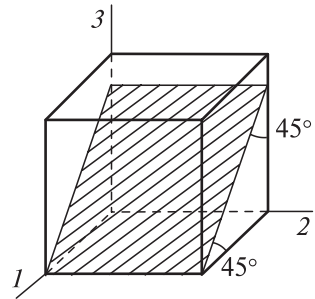


Рис. 2.9. Площадка с максимальными касательными напряжениями

2.8. ДЕВИАТОР И ШАРОВАЯ ЧАСТЬ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

В каждой точке деформируемого тела будет свой тензор напряжений, следовательно, в теле имеется поле тензоров напряжений. Отметим два свойства тензоров, которые нам потребуются в дальнейшем:

- суммой двух тензоров называется тензор, компоненты которого представляют собой сумму соответствующих компонентов слагаемых тензоров;

• произведением тензора на скаляр λ называется тензор, компоненты которого в λ раз больше соответствующих компонентов умножаемого тензора.

Рассмотрим напряженное состояние, при котором на трех взаимно перпендикулярных площадках действуют только три одинаковых главных напряжения σ , равные среднему напряжению в данной точке тела:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3} \equiv \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}.$$

Такое напряженное состояние описывается тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

который называется *шаровым тензором напряжений* (шаровой частью тензора напряжений).

Название «шаровой тензор» связано с предложенным Ламе геометрическим представлением напряженного состояния в точке. Если в системе координат, совпадающей с главными осями, для каждой площадки, проходящей через начало координат, построить вектор полного напряжения, то концы этих векторов опишут поверхность эллипсоида, который называется *эллипсоидом напряжений* или *эллипсоидом Ламе*.

Три полуоси эллипсоида напряжений равны по длине трем главным напряжениям. В случае напряженного состояния, описываемого шаровым тензором (2.23), все три главных напряжения равны между собой и эллипсоид напряжений обращается в шар.

Вычитая из тензора напряжений шаровой тензор, получим новый тензор, называемый *девиатором напряжений*:

$$D_\sigma \equiv (s_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Таким образом, тензор напряжений в каждой точке может быть представлен в виде суммы шарового тензора напряжений (σ) и девиатора напряжений (s_{ij}). Для их компонентов выполняется соотношение

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.25)$$

где δ_{ij} — символы Кронекера (2.4).

Разложение тензора напряжений на шаровую и девиаторную части имеет большое принципиальное значение при исследовании поведения упругих и пластических тел под нагрузкой. Шаровая часть выделяет из напряженного состояния равномерное всестороннее растяжение или сжатие, при котором изменяется лишь объем данного элемента тела без изменения формы. Девиатор напряжений характеризует состояние сдвига, при котором изменяется форма элемента без изменения его объема. Следовательно, девиатор напряжений указывает отклонение (девиацию) рассматриваемого напряженного состояния от всестороннего растяжения (сжатия) или отклонение приобретенной формы тела от первоначальной. Как показывают опыты, материалы по-разному реагируют на всестороннее сжатие и на напряжение сдвига.

Примеры некоторых простейших напряженных состояний.

1. Равномерное всестороннее растяжение (сжатие) тела.

В этом случае девиатор тензора напряжений равен нулю, а шаровой тензор отличен от нуля. Векторы $\vec{\sigma}_n$ и $\vec{n}$ коллинеарны, главные нормальные напряжения равны между собой.

2. Растяжение (сжатие) в одном направлении.

В этом случае тензор напряжений одноосный, например $\sigma_{xx} \neq 0$, а остальные компоненты равны нулю. Если $\sigma_{xx} > 0$, то тензор напряжений – тензор простого растяжения, если $\sigma_{xx} < 0$, то тензор напряжений – тензор простого сжатия. Если $\vec{n}$ коллинеарен оси x , то и $\vec{\sigma}_n$ тоже коллинеарен той же оси. Если же $\vec{n}$ нормален оси x , то $\vec{\sigma}_n = 0$. Два главных нормальных напряжения равны тождественно нулю.

3. Плоское напряженное состояние.

Пусть $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$. Если $\vec{n}$ коллинеарен оси z , то $\vec{\sigma}_n = 0$.

Одно из главных напряжений равно нулю, и матрица напряжений имеет вид

$$T_s = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По аналогии с инвариантами тензора напряжений построим инварианты для введенных тензоров. Первый инвариант шарового тензора совпадает с первым инвариантом тензора напряжений:

$$J_{1s} = 3\sigma \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

Первый инвариант девиатора напряжений равен нулю, так как

$$J_{1d} = s_{ii} \equiv (\sigma_{11} - \sigma) + (\sigma_{22} - \sigma) + (\sigma_{33} - \sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3\sigma = 0.$$

Для определения второго инварианта девиатора напряжений воспользуемся выражением для второго инварианта тензора напряжений (2.16), подставив в него вместо напряжений σ_{ii} разности $\sigma_{ii} - \sigma$. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} J_{2d} &= -\frac{s_{ij}s_{ij}}{2} = -\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}{6} = \\ &= -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6}. \end{aligned}$$

Третий инвариант девиатора имеет вид

$$J_{3d} = \frac{\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}}{3}.$$

В теории пластичности широко используется понятие *интенсивности тензора напряжений*, которое было введено А. А. Ильюшиным. Оно формально определяется через второй инвариант девиатора

$$\sigma_u^2 = -3J_{2d} = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Интенсивность тензора напряжений — инвариантная величина, так как выражается через второй инвариант девиатора. Она с точностью до числового множителя совпадает с октаэдрическим касательным напряжением (2.21). Числовой коэффициент в формуле (2.26) выбран так, чтобы в случае простого растяжения или сжатия ($\sigma_{11} = \sigma_1$, все остальные компоненты равны нулю) выполнялось условие $\sigma_u = |\sigma_1|$.

Положительная величина

$$s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.27)$$

называется *модулем девиатора напряжений*.

Назовем *направляющим тензором напряжений* девиатор напряжений, каждый компонент которого разделен на модуль девиатора (2.27):

$$\bar{D}_\sigma \equiv (\bar{s}_{ij}) = \frac{D_\sigma}{s} = \begin{pmatrix} (\sigma_{11} - \sigma)/s & \sigma_{12}/s & \sigma_{13}/s \\ \sigma_{21}/s & (\sigma_{22} - \sigma)/s & \sigma_{23}/s \\ \sigma_{31}/s & \sigma_{32}/s & (\sigma_{33} - \sigma)/s \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Так как первый инвариант девиатора равен нулю, то и

$$\bar{s}_{ii} = \bar{s}_{11} + \bar{s}_{22} + \bar{s}_{33} = 0.$$

В то же время $\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij} = 1$. Следовательно, направляющий тензор полностью характеризуется заданием четырех чисел, поскольку шесть его компонент уже связаны двумя приведенными соотношениями. Отметим, что главные оси направляющего тензора совпадают с главными осями тензора напряжений и девиатора тензора напряжений.

С помощью направляющего тензора компоненты тензора напряжений могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + s \bar{s}_{ij}.$$

Два модуля σ и s определяют скалярные свойства материала. Его векторные свойства определяет направляющий тензор $(\bar{s}_{ij})$.

Нагружение в данной точке тела называется *простым*, если все компоненты тензора напряжений в ней изменяются пропорционально одному общему параметру λ , т. е. $\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^0$. В этом случае компоненты направляющего тензора остаются неизменными. В противном случае нагружение будет *сложным*¹.

Несколько слов о дополнительном физическом параметре — *параметре Надаи* — *Лодэ* μ_σ , характеризующем объемное напряженное состояние в трехмерных деформируемых телах. При разработке механико-математических моделей, описывающих механику больших деформаций и начала процессов разрушения в условиях объемного напряженного состояния, данному параметру уделяется особое место. Восполь-

¹ Понятия простого и сложного нагружения введены А. А. Ильюшиным.

зовавшись параметром Надаи – Лодэ, многообразие объемного напряженного состояния можно свести к нескольким типам обобщенного напряженного состояния.

Параметр Надаи – Лодэ μ_σ связывает компоненты главных напряжений и равен:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad -1 \leq \mu_\sigma \leq 1.$$

Напомним, что для компонент главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ выполняется неравенство $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Напряжения сжатия приняты стандартно, как в МСС, со знаком «минус». Так, если максимальное усилие сжатия действует по вертикальной оси, то этой оси присваивают номер «3» и максимальное напряжение сжатия по ней обозначают σ_3 .

Параметр Надаи – Лодэ изменяется от «-1» до «1» и характеризует вид объемного напряженного состояния:

- если $\mu_\sigma \in [-1; -0,5[$ – соответствует состоянию обобщенного растяжения;
- если $\mu_\sigma \in [-0,5; +0,5]$ – соответствует состоянию обобщенного сдвига;
- если $\mu_\sigma \in]0,5; +1]$ – соответствует состоянию обобщенного сжатия.

Используя параметр μ_σ , тензор напряжений (2.17) можно разложить на несколько составляющих.

2.9. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ

Ни один из существующих в природе материалов не является абсолютно твердым. Под действием внешних сил все тела в большей или меньшей мере меняют свою форму (деформируются). Точки тела меняют свое положение в пространстве непрерывно. Первоначально непрерывно распределенный материал не содержит после деформации разрывов и пустот (т. е. не возникает трещин).

Вначале определим, что понимается под термином «деформация».

В английском языке русскому слову «деформация» соответствуют два несколько разных понятия – *deformation* и *strain*.

Первое из них обозначает изменение геометрии чего-либо, т. е. то же, что и русское слово «деформация», применяемое в разговорном языке. Это – обобщенное понятие для растяжения, сжатия, скручивания, изгиба, смятия и т. п.

Английское же слово *strain* обозначает меру деформации, или степень деформации.

Рассмотрим, например, образец из какого-либо материала с начальной длиной L_0 . Если этот образец растянуть, т. е. увеличить его длину на величину ΔL до длины $L_1 = L_0 + \Delta L$, то степенью деформации (*strain*) называется безразмерная величина

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_1 - L_0}{L_0}.$$

Величина ε называется деформацией или относительной деформацией (strain).

Следует обратить внимание, что недостатком относительной деформации является то, что она не аддитивна – при сложении относительных деформаций накапливается ошибка.

Например, образец длиной 10 см некий экспериментатор растянул на 1 см, т. е. получил деформацию $\varepsilon_1 = 1/10$. Теперь образец имеет длину 11 см. Другой экспериментатор, не зная о прошлой истории образца, растянул его еще на 1 см, т. е. получил деформацию $\varepsilon_2 = 1/11$. Но тогда суммарная относительная деформация

$$\varepsilon = 1/10 + 1/11.$$

Это явно меньше деформации $\varepsilon = 2/10$, полученной этим образцом изначально.

Для рассматриваемого класса задач, когда ограничиваемся только малыми деформациями, корректно использовать «классическое» определение относительной деформации.

Теперь введем понятие «перемещение» для твердого деформируемого тела.

Вектор $\vec{u}$, имеющий начало в точке A недеформированного тела, а конец — в соответствующей точке A' деформированного, называется *вектором полного перемещения* точки (рис. 2.10). Его проекции на оси координат

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad u_i \equiv u_i(x), \quad x \equiv (x_1, x_2, x_3).$$

Как правило, в механике деформируемого твердого тела рассматриваются кинематически неизменяемые системы, т. е. не допускающие перемещения тела в пространстве как жесткого целого. В противном случае из перемещений всех точек исключается составляющая такого переноса. Введенные таким образом перемещения для большинства рассматриваемых систем являются малыми по сравнению с геометрическими размерами тела.

На основе общих положений теории тензорных полей приращение вектора перемещений $d\vec{u}$ можно представить в виде

$$d\vec{u} = (E \cdot d\vec{r}) + [\text{rot} \vec{u} \times d\vec{r}]/2, \quad (2.29)$$

где E — симметричный тензор деформаций, компоненты которого связаны с компонентами вектора перемещения $\vec{u}$ по известным формулам.

Второе слагаемое в (2.29) описывает ту часть перемещения точек A' относительно A , которое происходит при повороте вокруг точки A как единого целого малого элемента среды, содержащего точку A . Действительно, известно (курс теоретической механики), что $\text{rot} \vec{u}/2 = \vec{\omega}$, где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Тогда второе слагаемое в (2.29) $[\vec{\omega} \times d\vec{r}] = \vec{v}$ — это линейные скорости точек на расстоянии $d\vec{r}$ от мгновенной оси вращения.

Чистая деформация описывается первым слагаемым в выражении (2.29), т. е. симметричным тензором E .

Метод определения деформаций заключается в том, что по перемещениям вычисляются изменения длин линейных элементов, а также изменение углов между двумя линейными элементами.

Чтобы связать перемещения точки A и деформации в ее окрестности, рассмотрим вначале плоскую задачу, т. е. примем, что

$$u_3(x) \equiv 0, \quad u_1 \equiv u_1(x_1, x_2), \quad u_2 \equiv u_2(x_1, x_2).$$

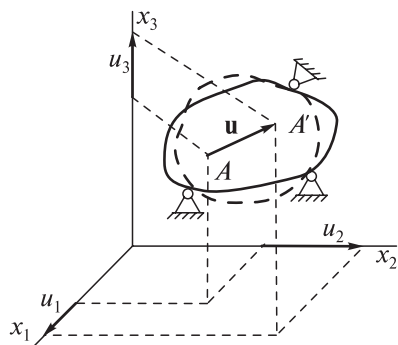


Рис. 2.10. К определению вектора полного перемещения

В процессе деформации отрезок AB с проекциями dx_1, dx_2 займет положение $A'B'$ (рис. 2.11). Полное перемещение точки A вдоль оси x_1 есть u_1 . Точка B переместится вместе с точкой A на величину u_1 плюс дополнительное перемещение du_1 за счет деформации отрезка вдоль оси x_1 . Так как приращение перемещения мало и $du_1 = du_1(x_1, x_2)$, то с точностью до членов более высокого порядка малости

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_j} dx_j \equiv u_{1,j} dx_j \quad (j=1, 2).$$

Здесь первое слагаемое соответствует удлинению составляющей dx_1 вдоль оси x_1 . Второе слагаемое в силу малости деформаций описывает перемещение за счет поворота отрезка относительно оси x_2 на угол α_1 :

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \equiv u_{1,2}.$$

Рассматривая перемещение точки B вдоль оси x_2 , по аналогии получаем

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \equiv u_{2,j} dx_j, \quad \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \equiv u_{2,1} \quad (j=1, 2).$$

Величины, описывающие линейные удлинения вдоль осей, называются *линейными деформациями* и обозначаются

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2}.$$

Для описания *сдвиговых деформаций* используют величину, равную половине суммарного изменения прямого угла между осями координат:

$$\varepsilon_{12} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 = (u_{1,2} + u_{2,1})/2.$$

Если деформирование окрестности точки A является пространственным ($u_i(x) \neq 0$, $i=1, 2, 3$), то приращение перемещений будет

$$du_i = u_{i,j} dx_j \quad (i, j=1, 2, 3)$$

и добавляются деформации

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3}, \quad \varepsilon_{32} = (u_{2,3} + u_{3,2})/2, \quad \varepsilon_{31} = (u_{3,1} + u_{1,3})/2.$$

В результате получаем, что в общем случае компоненты малых деформаций ($u_{i,j}^2 \ll u_{i,j}$) связаны с перемещениями соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2} \quad (i, j=1, 2, 3). \quad (2.30)$$

Замечание 1. В случае конечных деформаций (геометрически нелинейная теория упругости), когда сопоставимы $u_{i,j}^2$ и $u_{i,j}$, компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями следующими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})/2 \quad (i, j, k=1, 2, 3).$$

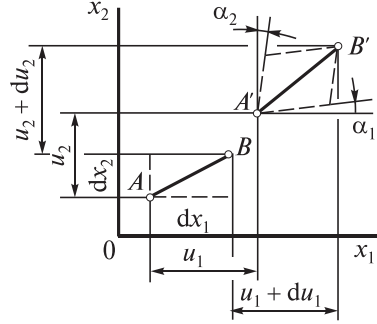


Рис. 2.11. К определению деформаций в теле

Замечание 2. В задачах изгиба мембран и тонких пластин поперечной нагрузкой могут быть конечными только прогибы. Тогда сопоставимы только $u_{3,j}^2$ и $u_{3,j}$. Соотношения связи деформаций с перемещениями принимают вид

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{3,i} u_{3,j}) / 2 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Компоненты деформаций (2.30) образуют тензор второго ранга E , который, как и тензор напряжений, симметричен ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$):

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что с его помощью полностью описывается деформирование окрестности рассматриваемой точки.

2.10. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ

Аналогично тому, как это было выполнено при рассмотрении тензора напряжений, можно изучить, в каких направлениях имеются только линейные относительные деформации и отсутствуют сдвиги. Можно показать, что эти направления соответствуют экстремальным значениям относительных деформаций. Эти значения называют *главными относительными деформациями* и обозначают через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Для определения главных направлений и главных относительных деформаций могут быть использованы соответствующие выражения для тензора напряжений из раздела 2.6. Справедливы равенства

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) l_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Условия разрешимости этих уравнений приводят к характеристическому уравнению для главных значений тензора деформаций:

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2 I_1 + \varepsilon I_2 - I_3 = 0.$$

Коэффициентами в этом уравнении будут три инварианта, не зависящие от ориентации системы координат:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{ii} \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2 &= (\varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}) / 2 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ I_3 &= \|\varepsilon_{ij}\| \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Матрица тензора деформаций в главных осях принимает диагональный вид. Первый инвариант I_1 имеет простой геометрический смысл — это относительное изменение объема:

$$\theta = u_{i,i} = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta V - \Delta V_0}{\Delta V_0} = \operatorname{div} u.$$

Направление главных осей тензора деформаций получают из соотношений, аналогичных (2.11), (2.12). В рамках теории упругости главные оси тензоров напряжений и деформаций для изотропной среды совпадают.

2.11. ДЕВИАТОР И ШАРОВАЯ ЧАСТЬ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ

Тензор деформаций (ε_{ij}) можно представить в виде двух составляющих тензоров:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.32)$$

Здесь $\varepsilon = \theta/3 \equiv (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3$ — шаровая часть тензора деформаций, δ_{ij} — символы Кронекера (2.4), ε_{ij} — компоненты девиатора тензора деформаций. Они выражаются через деформации соотношением

$$D_\varepsilon \equiv (\varepsilon_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Шаровой тензор деформаций (2.32) описывает объемную деформацию θ в точке тела. Его первый инвариант совпадает с первым инвариантом тензора деформаций (2.31):

$$I_{1s} = 3\varepsilon \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Девиатор деформаций характеризует деформацию изменения формы. Его первый инвариант равен нулю, так как

$$I_{1d} = \varepsilon_{ii} \equiv (\varepsilon_{11} - \varepsilon) + (\varepsilon_{22} - \varepsilon) + (\varepsilon_{33} - \varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\varepsilon = 0.$$

Второй инвариант девиатора деформаций получим по аналогии с девиатором напряжений:

$$\begin{aligned} I_{2d} &= \frac{-\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}{2} = -\frac{(\varepsilon_{11} - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon)^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}{6} = \\ &= -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}{6}. \end{aligned}$$

Третий инвариант девиатора имеет вид

$$I_{3d} = \frac{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}}{3}.$$

Фундаментальную роль в теории пластичности играет второй инвариант девиатора деформации I_{2d} . Положительную величину

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

называют *модулем девиатора деформаций*.

Используя выражение для I_{2d} , можно ввести определение интенсивности тензора деформаций ε_u по А. А. Ильюшину:

$$\varepsilon_u^2 = -\frac{4}{3} I_{2d} = \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},$$

$$\begin{aligned}
 \text{или} \quad \varepsilon_u &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация интенсивности деформаций следующая: ε_u с точностью до числового множителя совпадает с октаэдрическим сдвигом — относительным сдвигом площадки, равно наклоненной к главным осям деформации.

В случае простого растяжения или сжатия $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_1$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$ (ν — коэффициент Пуассона). Тогда из (2.34) следует

$$\varepsilon_u = \frac{2}{3}(1 + \nu)|\varepsilon_1|,$$

а для несжимаемого материала ($\nu = 0,5$) $\varepsilon_u = |\varepsilon_1|$. Интенсивность деформаций согласно (2.34) является инвариантной величиной.

Направляющим тензором деформаций называют девиатор, у которого компоненты

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} / \varepsilon,$$

причем $\bar{\varepsilon}_{ii} = 0$, $\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} = 1/2$.

Следовательно, направляющий тензор полностью характеризуется заданием четырех чисел, поскольку шесть компонент уже связаны двумя приведенными соотношениями. С его помощью компоненты тензора деформаций могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon \delta_{ij}.$$

Два модуля — ε и $\bar{\varepsilon}$ — определяют скалярные свойства, а направляющий тензор ($\bar{\varepsilon}_{ij}$) — векторные свойства материала. Деформацию в материальной частице тела называют *простой*, если все компоненты $\bar{\varepsilon}_{ij} = \text{const}$ в процессе деформирования. В противном случае деформация является *сложной*.

В ряде моделей МСС рассматриваются не деформации, а скорости деформации.

Тензор скоростей деформации имеет вид

$$\dot{E} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix},$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Здесь v_i — составляющие скоростей.

2.12. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТИНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

По известным трем дифференцируемым компонентам поля перемещений $u_i(x)$ с помощью формул Коши (2.30) легко определяются шесть независимых компонент тензора деформаций. Обратная операция затруднена, так как не всегда шести непрерывным компонентам $\varepsilon_{ij}(x)$ соответствует какое-либо непрерывное поле пе-

ремещений. Если такое поле существует, то деформации называют *совместными*, в противном случае — *несовместными*.

Совместные деформации связаны между собой соотношениями, которые называются *уравнениями совместности деформаций*. Их вывод возможен различными способами.

С одной стороны, они могут рассматриваться как условия интегрируемости шести дифференциальных уравнений $\varepsilon_{ij}(x) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ относительно трех неизвестных функций $u_i(x)$.

С другой стороны, они выражают физический факт, что все тело до и после деформации — непрерывное и сплошное, и частицы материала связаны друг с другом. Впервые эти соотношения были получены Сен-Венаном в 1860 г.

Для вывода первой группы уравнений совместности, устанавливающей связи между деформациями, действующими в одной плоскости, выпишем соотношения Коши в компонентах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3}, \\ \varepsilon_{12} &= (u_{1,2} + u_{2,1})/2, \quad \varepsilon_{23} = (u_{2,3} + u_{3,2})/2, \quad \varepsilon_{31} = (u_{3,1} + u_{1,3})/2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Используя (2.35) и свойство перестановки порядка дифференцирования, составим выражение

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = u_{1,122} + u_{2,211} = (u_{1,2} + u_{2,1})_{,12} = 2\varepsilon_{12,12},$$

так как $2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}$.

По аналогии получаем еще два подобных уравнения в других плоскостях. В результате

$$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} - 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta) \quad (2.36)$$

без суммирования, как и ранее, по повторяющимся греческим индексам.

Для вывода второй группы из трех уравнений сплошности, устанавливающих связи между деформациями, действующими в разных плоскостях, составим выражение

$$(\varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2})_{,1} = (u_{1,23} + u_{2,13} - u_{2,31} - u_{3,21} + u_{3,12} + u_{1,32})_{,1}/2 = u_{1,231} = \varepsilon_{11,23}.$$

Отсюда

$$(\varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2})_{,1} - \varepsilon_{11,23} = 0.$$

Аналогично с помощью круговой перестановки индексов можно формально получить еще два подобных уравнения. В итоге

$$(\varepsilon_{\alpha\alpha,\gamma} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha} + \varepsilon_{\gamma\alpha,\beta})_{,\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\gamma} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta \neq \gamma). \quad (2.37)$$

Таким образом, чтобы по шести непрерывным компонентам тензора деформаций найти соответствующее поле перемещений, необходимо выполнение шести дифференциальных уравнений совместности (2.36), (2.37) в частных производных относительно шести компонент тензора деформаций ε_{ij} . В случае односвязной области они необходимы и достаточны, для многосвязной же — только необходимы.

Геометрический смысл уравнений совместности состоит в следующем. Представим, что тело до деформации было разбито на множество материальных частиц, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда. Допустим, что каждая частица подвергалась произвольной деформации ε_{ij} , после чего материальные частицы приняли форму косоугольных параллелепипедов, которые уже могут не составить сплошного деформированного тела. Чтобы этого не произошло, компоненты деформации должны удовлетворять уравнениям (2.36), (2.37).

Введем наряду с перемещениями другие кинематические характеристики деформируемой среды. Дифференцированием по времени определим векторы скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{u}}.$$

Следует указать, что при решении задачи теории упругости в перемещениях уравнения совместности удовлетворяются автоматически. При решении задачи в напряжениях уравнения совместности будут входить в число основных уравнений, которые должны быть удовлетворены.

2.13. ОБ ИНВАРИАНТАХ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Обычно в качестве инвариантов симметричного тензора второго ранга для напряженного состояния в деформируемых сплошных средах выступают величины

$$J_1 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i, \quad J_2 = \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^3 \sigma_i \sigma_j, \quad J_3 = \prod_{i=1}^3 \sigma_i, \quad (2.38)$$

где σ_i ($i = \overline{1,3}$) – главные значения тензора напряжений. Следует подчеркнуть, что главные значения и триэдр главных направлений симметричного тензора напряжений определяют напряженное состояние среды в малом объеме сплошной среды.

Относительно инвариантов J_i , определяемых по (2.38), следует отметить, что они не зависят от типа сплошной среды (твердое тело, жидкость и т. д.).

Как правило, существенным считается изменение второго инварианта. Влиянием первого (особенно для несжимаемой среды) и третьего инвариантов часто пренебрегают.

Замечание. По своей механической сущности третий инвариант связан с видом напряженного состояния.

В связи с пренебрежением первым и особенно третьим инвариантами отпадает необходимость в наличии информации о главных направлениях (триэдре главных направлений), так как выбор первого и второго инвариантов (для девиатора напряжений) не требует информации о главных направлениях.

Для симметричного тензора деформаций или тензора скоростей деформаций (в зависимости от рассматриваемого материала) используются аналогичные (2.38) представления инвариантов:

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 e_i, \quad I_2 = \sum_{\substack{i=1; \\ i \neq j}}^3 e_i e_j, \quad I_3 = \prod_{i=1}^3 e_i.$$

Здесь e_i – главные значения тензора деформаций, или тензора скоростей деформаций.

Существенным является то, что для связи инвариантов напряженного и деформированного (или скоростей изменения деформаций) состояний принимается подобие тензора напряжений и деформаций (скоростей деформаций). Хотя, как отмечает Е. И. Шемякин¹, в реальных ситуациях отклонение от подобий возможно и закономерно.

Е. И. Шемякин предложил использовать наряду с классическим иной набор инвариантов, особенно для моделей пластических и вязких сред.

В качестве нового набора инвариантов предложены такие величины:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \text{максимальное касательное напряжение;} \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \text{нормальное напряжение на рассматриваемой площадке;} \\ \mu_\sigma &= \frac{\sigma_2 - \sigma_n}{T} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{T} \quad (T \neq 0) - \text{параметр Лодэ – Надаи.} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Физическая суть инвариантов (2.39) базируется на интерпретации процессов диссипации энергии в моделях пластических и вязких сред. Новый набор инвариантов связан с площадками максимальных касательных напряжений T и главными сдвигами Γ (или скоростями деформаций сдвига).

Шемякиным показано, что для нового набора инвариантов (2.39) справедлива следующая теорема: для характеристики напряженного состояния в элементе сплошной среды необходимо и достаточно введение трех инвариантов T , σ_n , μ_σ .

Использование первого и второго инвариантов из (2.38) не требует учета ориентации триэдра главных направлений тензора напряжений. Набор первых двух инвариантов из (2.38) независим (изотропен) от направления главных осей.

Замечание. При введении инвариантов (2.38) случаи учета третьего инварианта весьма редки.

В случае же введения набора инвариантов (2.39) значения показателей из этого набора существенно зависят от направления главных осей. Так, инвариант T связан с площадками максимальных касательных напряжений, разделяющих углы между первым и третьим главными направлениями пополам. Инвариант μ_σ так-

¹ Шемякин Евгений Иванович (1929–2009), советский и российский ученый в области механики деформируемого твердого тела, механики горных пород, академик Академии наук СССР.

же существенным образом связан с ориентацией главных осей и указывает на влияние двух других экспериментальных касательных напряжений $T_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ и $T_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ (параметр μ_σ можно представить как $\mu_\sigma = (T_{23} - T_{12})/T$).

В качестве эффективности использования набора новых инвариантов можно привести следующий пример из геомеханики.

В последние годы в геомеханике большое внимание уделяется изучению упорядоченных блочных структур в породных массивах, причем такие структуры образуют определенную иерархию. Важно то, что блоки существуют и развиваются практически в соответствии с площадками максимальных касательных напряжений и главных сдвигов. Поэтому предлагаемый набор инвариантов (2.39) с физической точки зрения наиболее точно описывает деформирование массива под действием техногенных и тектонических нагрузок.

Замечание. Е. И. Шемякин отмечает, что перспективным является использование этой гипотезы и в МДТТ, что подтверждается результатами, полученными школой В. В. Панина¹ в исследованиях прочности твердых деформируемых тел.

Использование новых инвариантов эффективно при изучении поведения материала в запредельном состоянии, при изучении поведения горных материалов на больших (запредельных) глубинах.

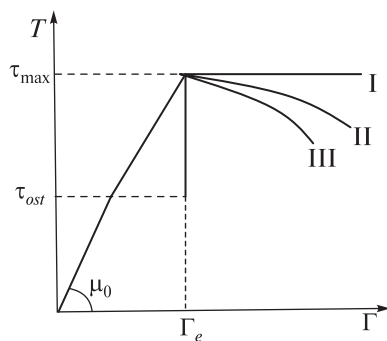


Рис. 2.12. Ниспадающие ветви максимального касательного напряжения на основной диаграмме деформирования (при одноосном растяжении или двухосном сжатии)

После достижения касательным напряжением максимального значения для рассматриваемого материала в конкретном напряженном состоянии фактически образуется новый материал, поведение которого требует иного описания. Вместе с тем законы механики (закон сохранения масс, количества движения, энергии) имеют силу и в этом случае. Поэтому для описания поведения материала в запредельном (послепиковом) состоянии удобно использовать инварианты (2.39). При достижении главным сдвигом предельной для данного тела величины ($\Gamma = \Gamma_e$) это значение сдвига в элементе среды сохраняется, а рост области необратимых деформаций (и разрушения) происходит только за счет увеличения количества таких элементов. Остаточная прочность материала определяется вступлением в работу других экстремальных площадок по тому же закону $T = T(\Gamma)$ (рис. 2.12).

Замечание. Более подробно описанные в данном разделе вопросы изложены в следующих работах: Шемякин Е. И. // ДАН России. 2000. Т. 373. № 5. С. 632–634; Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. // ФТПРПИ. 1974. № 3. С. 130–133; Ревуженко А. Ф. // ФТПРПИ. 1974. № 2. С. 9–15; Шемякин Е. И. // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2. № 6.

¹Панин Виктор Евгеньевич (1930–2020), советский и российский ученый, академик РАН, специалист в области физики и механики деформируемого твердого тела, физическо-го материаловедения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое тензор? В чем отличие тензора от матрицы и вектора?

2. Каково количество независимых компонент у тензора деформаций и тензора напряжений?

3. Что такое главные площадки тензора напряжений? На главных площадках тензора равны нулю напряжения:

- 1) нормальные;
- 2) касательные;
- 3) и те и другие.

4. В главных осях тензора напряжений экстремальны напряжения:

- 1) нормальные;
- 2) касательные;
- 3) октаэдрические.

5. Октаэдрические площадки равно наклонены:

- 1) к осям координат;
- 2) к главным осям;
- 3) к первой и третьей главным осям.

6. На косых площадках компоненты тензора напряжений:

- 1) $\sigma_{vi} = \sigma_{ji} l_j$;
- 2) $\sigma_i = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j$;
- 3) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

7. Нормальные напряжения на октаэдрических площадках:

- 1) $\sigma_{\text{oct}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / 3$;
- 2) $\sigma_{\text{oct}} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / 3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$;
- 3) $\sigma_{\text{oct}} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j$.

8. Касательные напряжения на октаэдрических площадках:

- 1) $\tau_{\text{oct}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / 3$;
- 2) $\tau_{\text{oct}} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$;
- 3) $\tau_{\text{oct}}^2 = |\sigma_v|^2 - \sigma_n^2$.

9. Максимальные касательные напряжения:

- 1) $\tau_{\text{max}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / 3$;
- 2) $\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$;
- 3) $\tau_{\text{max}} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

10. Касательные напряжения максимальны на площадках:

- 1) главных;
- 2) октаэдрических;
- 3) равнонаклоненных к первой и третьей главным осям.

11. Уравнения равновесия справедливы:
 - 1) внутри тела;
 - 2) на поверхности тела;
 - 3) везде.
12. Уравнения равновесия:
 - 1) $S^3 - S^2 J_1 + S J_2 - J_3 = 0$;
 - 2) $\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0$;
 - 3) $\sigma_i = \sigma_{ij} e_j$.
13. Граничные условия задаются:
 - 1) внутри тела;
 - 2) на поверхности тела;
 - 3) везде.
14. Граничные условия в напряжениях:
 - 1) $\sigma_{ij} l_j = R_{vi}$;
 - 2) $\sigma_{vi} = \sigma_{ij} l_j$;
 - 3) $\sigma_{-v} = -\sigma_v$.
15. Что такое абсолютные деформации и относительные деформации, математические выражения для абсолютных и относительных деформаций?
16. Инварианты тензора напряжений/деформаций сохраняются при замене:
 - 1) системы координат;
 - 2) нагрузки;
 - 3) граничных условий.
17. Первый, второй, третий инварианты тензора напряжений:
 - 1) $J = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$;
 - 2) $J = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$;
 - 3) $J = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.
18. Первый, второй, третий инварианты тензора деформаций:
 - 1) $I = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1$;
 - 2) $I = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$;
 - 3) $I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
19. В главных осях линейные деформации:
 - 1) равны нулю;
 - 2) экстремальны;
 - 3) совпадают с угловыми.
20. Главные оси тензоров напряжений и упругих деформаций:
 - 1) совпадают;
 - 2) взаимно перпендикулярны;
 - 3) составляют угол 45° .
21. Интенсивность напряжений:
 - 1) $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$;
 - 2) $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$;
 - 3) $\sigma_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$.

22. Девиатор тензора напряжений:

1) $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3;$

2) $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij};$

3) $\sigma_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$

23. Шаровая часть тензора напряжений:

1) $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij};$

2) $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3;$

3) $\sigma_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$

24. Шаровая часть тензора напряжений характеризует:

1) равномерное всестороннее растяжение (сжатие);

2) сдвиг;

3) изгиб.

25. Девиаторная часть тензора напряжений характеризует:

1) равномерное всестороннее растяжение (сжатие);

2) сдвиг;

3) изгиб.

26. Девиатор тензора деформаций:

1) $I = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1;$

2) $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij};$

3) $\varepsilon = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3.$

27. Шаровая часть тензора деформаций:

1) $I = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1;$

2) $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij};$

3) $\varepsilon = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3.$

28. Интенсивность тензора деформаций:

1) $I = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1;$

2) $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij};$

3) $\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$

29. В напряжениях/деформациях равен нулю первый инвариант:

1) девиатора;

2) тензора;

3) шаровой части тензора.

30. Соотношения Коши для малых деформаций:

1) $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2;$

2) $\gamma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})/2;$

3) $\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$

31. Соотношения Коши связывают:

- 1) напряжения и деформации;
- 2) деформации и перемещения;
- 3) главные оси тензоров.

32. Уравнения совместности деформаций:

- 1) $\gamma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})/2$;
- 2) $\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} - 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0, (\varepsilon_{\alpha\alpha,\gamma} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha} + \varepsilon_{\gamma\alpha,\beta})_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\gamma} = 0$;
- 3) $\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. В точке P твердого тела тензор напряжений в осях координат $Px_1x_2x_3$ имеет компоненты σ_{ij} . Элементарная площадка $dS^{(1)}$ имеет единичную нормаль $\hat{n}_1$, вектор напряжений на этой площадке — $\mathbf{t}^{(\hat{n}_1)}$. Соответственно на элементарной площадке $dS^{(2)}$ нормаль — $\hat{n}_2$ и вектор напряжений — $\mathbf{t}^{(\hat{n}_2)}$.

Показать, что компонента вектора $\mathbf{t}^{(\hat{n}_1)}$ в направлении $\hat{n}_2$ равна компоненте $\mathbf{t}^{(\hat{n}_2)}$ в направлении $\hat{n}_1$.

2. Выписать результат, установленный в задании 1 для элементарных площадок с нормальми

$$\hat{n}_1 = (2\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 6\hat{e}_3)/7 \text{ и } \hat{n}_2 = (3\hat{e}_1 - 6\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3)/7.$$

При этом напряжения в точке P в осях $Px_1x_2x_3$ заданы следующим образом:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 21 \\ 0 & 49 & 0 \\ 21 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

3. Тензор напряжений в точке P относительно осей $Px_1x_2x_3$ имеет следующее представление (в МПа):

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

где значение σ_{11} неопределенное.

Определить направление $\hat{n}$ в точке P , для которого плоскость, перпендикулярная $\hat{n}$, будет свободна от напряжений, т. е. $\mathbf{t}^{(\hat{n})} = 0$ на этой плоскости. Какое требование предъявляется к значению σ_{11} для выполнения этого условия?

Ответ: $\hat{n}_1 = (2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3)/3$, $\sigma_{11} = 2$ МПа.

4. Тензор напряжений в точке P имеет следующие значения (в технической системе единиц СГС, кг-сила):

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -6 & 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

Определить:

а) вектор напряжений в точке P на плоскости, нормаль к которой $\hat{n} = (\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3)/9$;

б) величину (модуль) этого вектора напряжений;

в) компоненты вектора напряжений в направлении нормали;

г) угол между вектором напряжений и нормалью.

Ответ: а) $\mathbf{t}^{(\hat{n})} = (-5\hat{e}_1 + 11\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3)/3$; б) $t^{(\hat{n})} = \sqrt{150}$; в) $23/9$; г) $77,96^\circ$.

5. Компоненты тензора напряжений в точке P заданы выражением $\sigma_{ij} = \pm \sigma_0 n_i n_j$, где σ_0 — положительная константа.

Показать, что это напряженное состояние представляет собой одноосное напряженное состояние с величиной напряжения $\pm \sigma_0$, действующего в направлении n_i .

6. Показать, что сумма квадратов величин векторов напряжений на координатных плоскостях — величина, не зависящая от ориентации координатных осей, т. е. сумма

$$t_i^{(\hat{e}_1)} t_i^{(\hat{e}_1)} + t_i^{(\hat{e}_2)} t_i^{(\hat{e}_2)} + t_i^{(\hat{e}_3)} t_i^{(\hat{e}_3)}$$

представляет собой инвариант.

7. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ напряженное состояние имеет следующее представление:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & x_2x_3 & x_3^2 \\ 0 & x_3^2 & x_3x_1 \end{bmatrix}.$$

Определить:

а) компоненты внешней массовой силы как функции координат, если уравнения равновесия удовлетворяются везде;

б) вектор напряжений в точке $P(1, 2, 3)$ на плоскости, для которой внешняя единичная нормаль составляет одинаковые углы с положительным направлением координатных осей.

Ответ: а) $b_1 = -3x_2/\rho$, $b_2 = -3x_3/\rho$, $b_3 = -x_1/\rho$; б) $\mathbf{t}^{(\hat{n})} = (6\hat{e}_1 + 19\hat{e}_2 + 12\hat{e}_3)/\sqrt{3}$.

8. В декартовых координатных осях $Ox_1x_2x_3$ тензор напряжений задан следующим образом:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} (1-x_1^2)x_2 + \frac{2}{3}x_2^3 & -(4-x_2^2)x_1 & 0 \\ -(4-x_2^2)x_1 & -\frac{x_2^3-12x_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & (3-x_1^2)x_2 \end{bmatrix}.$$

Показать, что:

- а) при отсутствии массовых сил уравнения равновесия удовлетворяются;
- б) вектор напряжений исчезает во всех точках на поверхности цилиндра (рис. 2.13).

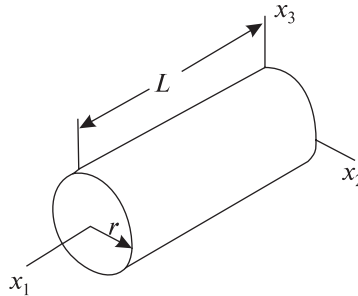


Рис. 2.13

9. Система координат $Px'_1x'_2x'_3$ действует при «правостороннем вращении» системы координат $Px_1x_2x_3$ вокруг линии PQ , в результате получаются равные углы с осями $Px_1x_2x_3$ (рис. 2.14).

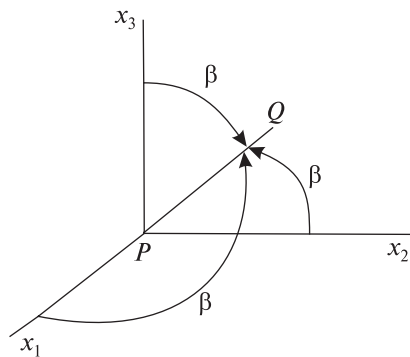


Рис. 2.14

Определить компоненты тензора напряжений для начального тензора напряжений (МПа)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

если угол вращения составляет: а) 120° ; б) 60° .

Ответ: а) $[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ МПа; б) $[\sigma'_{ij}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 10 & 10 \\ 10 & -11 & -2 \\ 10 & -2 & 16 \end{bmatrix}$ МПа.

10. Точка P – точка вращения осей $Px'_1x'_2x'_3$ относительно осей $Px_1x_2x_3$ согласно матрице преобразований:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & b & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & c \end{bmatrix},$$

где a , b и c — определяемые величины.

Определить тензор напряжений $[\sigma'_{ij}]$, если тензор напряжений в системе координат $Px_1x_2x_3$ равен (в МПа):

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } [\sigma'_{ij}] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 11+2\sqrt{3} & 5+\sqrt{3} & -1 \\ 5+\sqrt{3} & 5 & 5-\sqrt{3} \\ -1 & 5-\sqrt{3} & 11-2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

11. Напряжения в точке P относительно осей $Px_1x_2x_3$ заданы следующим образом (в МПа).

$$\text{Вариант 1: } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \text{ вариант 2: } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определить для каждого из предложенных вариантов:

- а) значения главных напряжений;
- б) направления главных напряжений.

Ответ:

а) вариант 1: $\sigma_1 = 10$ МПа, $\sigma_2 = 2$ МПа, $\sigma_3 = -2$ МПа;

вариант 2: $\sigma_1 = 4$ МПа, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ МПа;

б) вариант 1: $\hat{n}^{(1)} = \pm(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$, $\hat{n}^{(2)} = (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$, $\hat{n}^{(3)} = (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3)/\sqrt{6}$.

вариант 2: $\hat{n}^{(1)} = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)/\sqrt{3}$, $\hat{n}^{(2)} = (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$, $\hat{n}^{(3)} = (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3)/\sqrt{6}$.

12. В главных осях в точке P тензор напряжений имеет представление

$$[\sigma^*_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Матрица преобразований между главными осями $Px_1x_2x_3$ имеет вид

$$[a_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -\frac{3}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Здесь величины a_{21} , a_{22} , a_{23} определяются.

Определить вид $[\sigma_{ij}]$ в системе координат $Px_1x_2x_3$.

Ответ:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

13. Напряженное состояние относительно осей $Px_1x_2x_3$ имеет вид (в МПа)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{bmatrix}.$$

Определить:

а) главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 ; б) направления главных напряжений.

Ответ:

а) $\sigma_1 = 23$ МПа, $\sigma_2 = 0$ МПа, $\sigma_3 = -47$ МПа; б) $\hat{n}^{(1)} = -0,394\hat{e}_1 + 0,788\hat{e}_2 + 0,473\hat{e}_3$,
 $\hat{n}^{(2)} = 0,913\hat{e}_1 + 0,274\hat{e}_2 + 0,304\hat{e}_3$, $\hat{n}^{(3)} = 0,110\hat{e}_1 + 0,551\hat{e}_2 - 0,827\hat{e}_3$.

14. Напряженное состояние в точке P относительно осей $Px_1x_2x_3$ имеет вид (МПа)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & a & -a \\ a & 0 & b \\ -a & b & 0 \end{bmatrix},$$

где a и b не определены.

В той же точке относительно координатных осей $Px'_1x'_2x'_3$

$$[\sigma_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Если величина максимальных касательных напряжений в точке P равна 5,5 МПа, определить σ_1 , σ_3 .

Ответ: $\sigma_1 = 7$ МПа, $\sigma_3 = -4$ МПа.

15. Напряженное состояние в точке P относительно координатных осей $Px_1x_2x_3$ имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Определить:

а) значения и направления главных напряжений в точке P ;

б) величину максимальных касательных напряжений в точке P ;

в) нормаль $\hat{n} = n_i \mathbf{e}_i$ к плоскости в точке P , в которой максимальные касательные напряжения действуют.

Ответ:

а) $\sigma_1 = 2$ МПа, $\sigma_2 = 1$ МПа, $\sigma_3 = -3$ МПа; $\hat{n}^{(1)} = (2\hat{e}_1 + \hat{e}_3)/\sqrt{5}$, $\hat{n}^{(2)} = \hat{e}_2$, $\hat{n}^{(3)} = (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3)/\sqrt{5}$; б) $\tau_{\max} = \pm 2,5$ МПа; в) $\hat{n} = (\hat{e}_1 + 3\hat{e}_3)/\sqrt{10}$.

16. Тензор напряжений в точке P в системе координат $Px_1x_2x_3$ имеет вид (в МПа)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & b & b \\ b & 7 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

где значение b не определено.

Если $\sigma_3 = 3$ МПа и $\sigma_1 = 2\sigma_2$, определить:

- а) значения главных напряжений;
- б) значение b ;
- в) направление главного напряжения σ_2 .

Ответ: а) $\sigma_1 = 8$ МПа, $\sigma_2 = 4$ МПа, $\sigma_3 = 3$ МПа; б) $b = 0$, в) $\hat{n}^{(2)} = \hat{e}_1$.

17. Напряженное состояние в точке P относительно координат $Px_1x_2x_3$ имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Определить:

- а) значения главных напряжений в точке P ;
- б) единичную нормаль $\hat{n}^* = n_i \hat{e}_i^*$ плоскости, на которой $\sigma_n = 12$ МПа и $\sigma_\tau = 3$ МПа.

Ответ:

а) $\sigma_1 = 18$ МПа, $\sigma_2 = 12$ МПа, $\sigma_3 = 6$ МПа; б) $\hat{n}^* = (\hat{e}_1^* + \sqrt{6}\hat{e}_2^* + \hat{e}_3^*)/2\sqrt{2}$.

18. Изобразить круги Мора для напряженного состояния, заданного следующим образом:

$$\text{а) } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & 2\sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix}.$$

Определить максимальные касательные напряжения в каждом из двух случаев.

Ответ: а) $\tau_{\max} = \sigma_0$; б) $\tau_{\max} = 1,5\sigma_0$.

19. Относительно осей $Ox_1x_2x_3$ напряженное состояние в точке O имеет вид (в МПа)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Показать, что в главных осях $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ напряженное состояние имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Показать, что главные оси получаются вследствие вращения на 45° вокруг оси x_3 .
Верифицировать эти результаты, воспользовавшись следующими формулами:

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta,$$

$$\sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta,$$

$$\sigma'_{12} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta.$$

20. Тензор напряжений в точке P имеет вид (в МПа)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 29 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Представить это напряженное состояние в виде суммы шарового тензора и девиатора напряжений. Определить значения главных напряжений девиатора напряжений.

Ответ: $s_1 = 25$ МПа, $s_2 = 6$ МПа, $s_3 = -31$ МПа.

21. Напряженное состояние в точке P твердого тела относительно осей $Px_1x_2x_3$ задано следующим образом (в МПа):

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

Определить:

а) главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и направления главных напряжений;

б) инварианты напряженного состояния $J_i, i = 1, 3$;

в) максимальное касательное напряжение и нормаль к плоскости, в которой оно действует;

г) значения главных напряжений девиатора напряжений.

Ответ: а) $\sigma_1 = 6$ МПа, $\sigma_2 = 2$ МПа, $\sigma_3 = -2$ МПа; $\hat{n}^{(1)} = (\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3)/2$, $\hat{n}^{(2)} = (\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \sqrt{2}\hat{e}_3)/2$, $\hat{n}^{(3)} = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$;

б) $J_1 = 6$, $J_2 = -4$, $J_3 = -24$;

в) $\tau_{\max} = 4$ МПа, $\hat{n}_{\max} = ((1 + \sqrt{2})\hat{e}_1 - (1 - \sqrt{2})\hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3)/2\sqrt{2}$;

г) $s_1 = 4$ МПа, $s_2 = 0$ МПа, $s_3 = -4$ МПа.

22. Напряженное состояние в твердом теле относительно осей $Ox_1x_2x_3$ задано следующим выражением:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1^2x_2 & x_1(1-x_2^2) & 0 \\ x_1(1-x_2^2) & (x_2^3-3x_2)/3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Определить:

а) распределение массовых сил, если уравнения равновесия выполняются;

б) главные напряжения в точке $P(a, 0, 2\sqrt{a})$;

в) максимальные касательные напряжения в точке P ;

г) главные напряжения девиатора напряжений в точке P .

Ответ: а) $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = -4x_3/\rho$; б) $\sigma_1 = 8a$, $\sigma_2 = a$, $\sigma_3 = -a$; в) $\tau_{\max} = \pm 4,5a$;

г) $s_1 = 16a/3$, $s_2 = -5a/3$, $s_3 = -11a/3$.

23. Пусть компоненты тензора напряжений σ_{ij} получаются от симметричного тензора φ_{ij} в соответствии с уравнением:

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jpm} \varphi_{km, qp}.$$

Показать, что при отсутствии массовых сил уравнения равновесия выполняются.

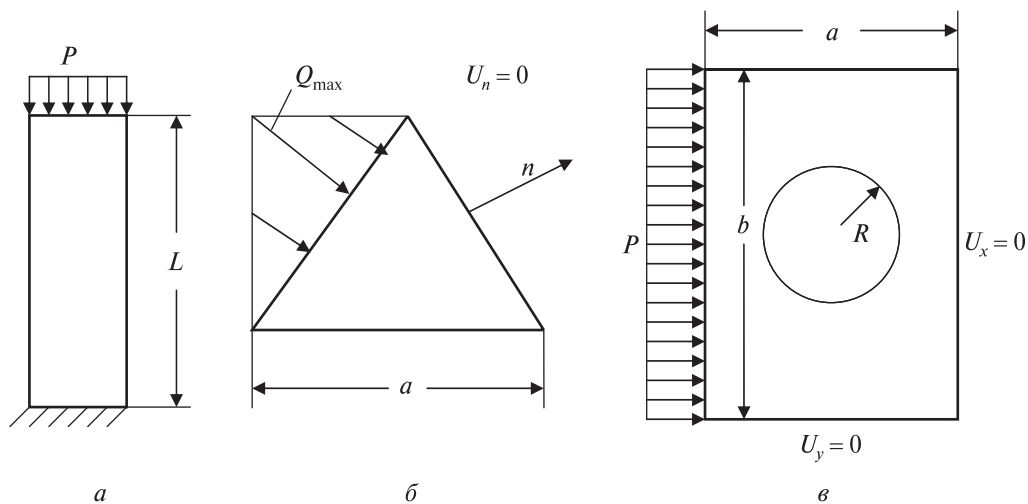


Рис. 2.15

24. Сформулировать граничные условия для схем, изображенных на рис. 2.15.

Глава 3

О МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ МДТТ

Математическим условием физического (in-situ) существования сплошной среды является *уравнение неразрывности (сплошности)*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.1)$$

где ρ — плотность среды; $\vec{v}$ — скорость движения среды.

Замечание. $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z.$

Дифференциальные уравнения равновесия (движения) сплошной среды ($\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0$) выполняются при любых непрерывных деформациях (движениях) *всех сплошных сред*. Однако различные реальные деформируемые тела при одних и тех же внешних условиях ведут себя по-разному. Таким образом, одних этих уравнений, даже с добавлением соответствующих граничных условий, недостаточно для описания движения конкретной сплошной среды.

Данная система уравнений не является полной.

Для определения напряжений, деформаций и перемещений в твердом деформируемом теле, находящемся под воздействием внешней нагрузки, установленных ранее соотношений (уравнения равновесия, граничные условия, уравнения совместности деформаций, уравнения Коши) все же недостаточно. Чтобы построить замкнутую систему разрешающих уравнений, необходимы еще физические определяющие соотношения между напряжениями и деформациями, учитывающие те либо иные особенности поведения материалов.

Замечание. Наряду с фундаментальной гипотезой о сплошности в МДТТ для большого круга задач представляется целесообразным и обоснованным использование *гипотезы о малости деформаций*. Эта гипотеза позволяет ограничиться геометрически линейной постановкой задач, т. е. исключить из уравнений вторые и более

высокие степени деформаций, что значительно упрощает аналитические исследования. Вместе с тем гипотеза о малости деформаций не противоречит действительности, если учесть, что перемещения в большинстве случаев пренебрежимо малы по сравнению с размерами самих тел.

Важным для широкого класса задач механики является *принцип Сен-Венана*, состоящий в том, что система сил, приложенных к малой поверхности тела, приводит к появлению одних лишь местных напряжений и деформаций. Если, например, на части поверхности тела, малой по сравнению со всей поверхностью, действуют каким-то образом распределенные нагрузки и пусть на этой же самой поверхности действует другое распределение нагрузок, статически эквивалентное первому, то принцип Сен-Венана гласит, что деформации и напряжения, вызванные этими распределениями нагрузок, мало отличаются в точках, достаточно удаленных от области приложения нагрузок.

Статическая эквивалентность понимается в смысле совпадения главного вектора и главного момента для двух распределений нагрузок.

Таким образом, *полная система уравнений* для построения механико-математической модели состояния объекта МДТТ включает:

- уравнения движения или равновесия сплошной среды;
- граничных условий;
- физических соотношений, связывающих напряженное и деформируемое состояние среды.

Кроме того, необходимо следить за соблюдением условий совместности деформаций.

3.2. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОВЕДЕНИЕ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Поскольку имеется огромное количество различных материалов, то возможно и множество физических законов, описывающих их поведение при разнообразных условиях воздействия и нагружения. К сожалению, установить универсальный физический закон, описывающий поведение всех материалов, не представляется возможным. В этом случае общие уравнения получились бы слишком сложными и неудобными для практического применения. Поэтому стремятся установить такие соотношения, которыми можно было бы описать важнейшие типы и виды поведения материалов при определенных условиях нагружения и деформирования. В результате вводится определенная математическая модель. Тип и вид модели существенным образом определяется экспериментально устанавливаемыми соотношениями между напряженным и деформируемым состояниями в точках деформируемой среды. Кроме того, достоверность и корректность модели, описывающей состояние и поведение реального материала, проверяется экспериментально.

Для описания поведения деформируемых твердых тел и построения на их основе математических моделей часто используются *структурные схемы*. В настоящее время известно большое число моделей. В качестве примера на рис. 3.1 приведены наиболее часто используемые.

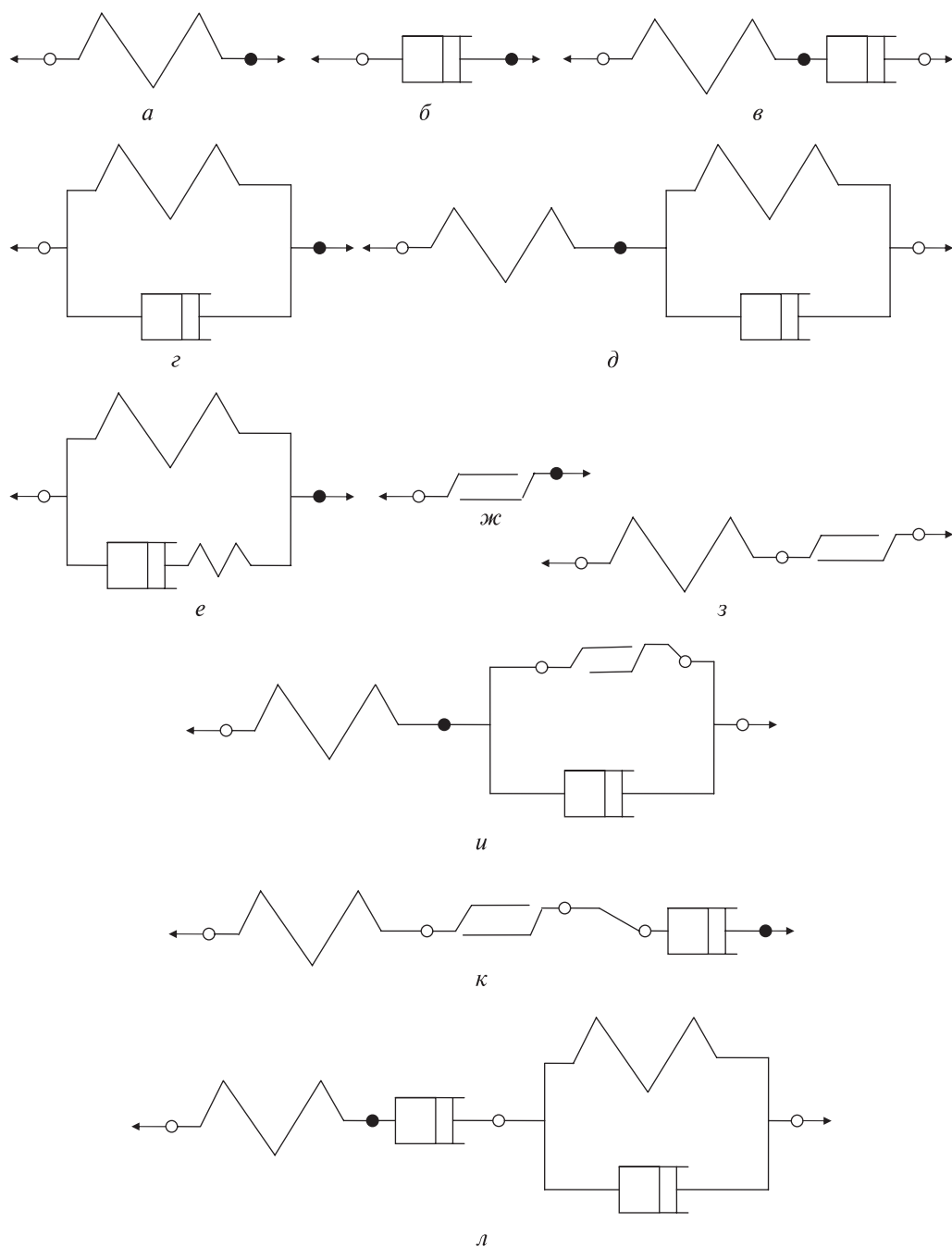


Рис. 3.1. Некоторые структурные модели твердых деформируемых тел:
 а – упругая модель Гука; б – вязкая модель; в – вязкоупругая релаксирующая модель;
 г – вязкоупругая модель Кельвина – Фойгта (линейная упруго-запаздывающая;
 д – модель Гогенемзера – Прагера; е – модель Пойнтинга – Томпсона;
 ж – жесткопластическая модель; з – упругопластическая модель;
 и – вязкоупругопластическая модель Шведова – Бингама;
 к – модель с последовательным соединением элементов;
 л – модель с упругим запаздыванием и релаксацией напряжений

Итак, процесс поведения материалов при их нагружении может быть математически описан путем абстрактного схематического представления деформируемых материалов в виде некоторых моделей, состоящих из элементарных структурных единиц, каждая из которых представляет собой определенный (упругий, пластичный или вязкий) элемент.

Структурные единицы, обладающие упругими свойствами, могут быть уподоблены пружинам с *законом деформирования Гука*:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

где σ — напряжения; ε — деформации; E — коэффициент пропорциональности (модуль упругости).

Структурные единицы с вязкими свойствами подчиняются *закону деформирования Ньютона*:

$$\sigma = \eta \cdot d\varepsilon/dt,$$

где $d\varepsilon/dt$ — скорость деформирования; η — коэффициент вязкости.

Замечание. В модели они могут быть представлены поршнем со сквозными отверстиями в цилиндре с вязкой жидкостью.

Пластические свойства структурных единиц моделируются сухим трением. В этом случае деформирование может иметь место лишь при напряжениях, превышающих некоторое значение σ_m , называемое *пределом текучести*. Жесткопластический элемент может в качестве исходных данных характеризоваться *сцеплением* (C) и *углом (коэффициентом) внутреннего трения* ($\operatorname{tg} \varphi$).

Деформирование материалов по различным законам может быть отражено посредством соответствующего сочетания указанных элементов в структурной модели.

Обычно вид структурной модели и параметры ее элементов устанавливают по данным специальных экспериментов, получая семейство кривых, соответствующих различным уровням действующих напряжений.

Однако вследствие сложности и трудоемкости таких экспериментов этот путь определения свойств материалов используется все же редко. Однако по мере развития техники и методики эксперимента он получает более широкое применение благодаря наглядности и определенности физического смысла основных параметров.

Рассмотрим некоторые принципиальные моменты, касающиеся описания поведения деформируемых сред в рамках различных подходов и моделей.

В основе модели упругой среды предполагается, что можно выделить некоторое «естественное» состояние среды, в котором тензор напряжений тождественно равен нулю. Для всех других состояний этой среды в любой точке и в любой момент времени тензор напряжений — взаимно однозначная функция тензора деформаций (исходным состоянием при определении тензора деформаций является «естественное» состояние среды).

Важно отметить, что напряженное состояние упругой среды в данный момент времени зависит только от ее деформированного состояния и не зависит от способа перехода от естественного состояния к изучаемому и скорости этого перехода.

В *линейной теории упругости* предполагается, что каждая точка совершает малые перемещения относительно некоторого естественного состояния. Если рассматри-

ваемая среда к тому же является однородной и изотропной, то мы приходим к классической теории упругости.

Классическая теория упругости основывается на линейной связи между напряжениями и деформациями и представляет собой линеаризованную теорию поведения упругих сред в окрестности естественного состояния, когда для любой точки вещества смещения и их градиенты относительно некоторого естественного состояния малы.

Связь между напряжениями и деформациями описывается законом Гука.

Так, например, закон Гука при условии, когда упругая среда определяется параметрами λ, μ (упругие константы Ламе), имеет вид

$$\sigma_{ii} = 2\mu e_{ii} + \lambda\theta; \sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (i \neq j), \quad (3.2)$$

где $\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \text{div } \vec{u}$ — объемное расширение.

Распространенной в приложениях является простейшая *теория малых упруго-пластических деформаций*. Эта теория относится к числу *деформационных теорий пластичности*. Пластическое деформирование возникает при достижении напряжениями необходимого предельного значения и является процессом необратимым.

Основные законы, определяющие эту теорию, сводятся к следующему:

- закон упрочнения (интенсивность напряжений является функцией интенсивности деформаций);

- закон упругости объемной деформации;

- закон пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций.

В этой модели закон, устанавливающий связь между напряжениями и деформациями, имеет вид

$$\sigma_{xx} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i}(e_{xx} - e); \sigma_{xy} = \frac{\sigma_i}{3e_i}e_{xy} \text{ и т. д.} \quad (3.3)$$

Здесь

$$\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3; e = (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})/3;$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} -$$

интенсивность напряжений;

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)} -$$

интенсивность деформаций.

Аналогично упругому деформированию в этой модели в области пластических деформаций величины напряжений и деформаций связаны между собой однозначными зависимостями.

При упругопластическом деформировании приращение деформации складывается из двух частей — упругой и пластической: $de_{ij} = de_{(ij)} + de_{[ij]}$.

Квадратными скобками у индексов будем отмечать величины, относящиеся к пластической области, а круглыми скобками — к упругой; там, где это не требуется, скобки будем опускать.

В рассматриваемом случае упругие деформации и напряжения связаны с законом Гука. Считается, что упругие и пластические свойства материала проявляются независимо. Однако имеются в литературе данные, указывающие на связь параметров упругих и пластических свойств материала. При достаточно малых деформациях элементы твердых тел ведут себя как упругие тела. Пластические (остаточные) деформации возникают при достижении напряжениями некоторого предельного значения.

Для *идеально пластических тел* существует некоторое фиксированное соотношение между компонентами напряжений, называемое *условием пластичности*:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \text{const.} \quad (3.4)$$

Упрочняющиеся материалы характеризуются изменением пластических свойств в процессе деформирования (изменением пределов текучести, приобретением анизотропии и т. д.).

В общем виде функция нагружения может быть записана так:

$$\Phi(\sigma_{ij}, e_{[ij]}, T, f_m, k_n) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, r; n = 1, 2, \dots, s), \quad (3.5)$$

где T — температура; f_m — параметры, связанные с пластическими деформациями или процессами нагружения с помощью голономных конечных или неголономных дифференциальных соотношений; k_n — постоянные материалов.

Функция $\Phi(\sigma_{ij})$ в выражении (3.4) и (3.5) обосновывается экспериментально. Приведем некоторые виды соотношений типа (3.4).

1. Условие Треска¹:

$$|\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $k = \text{const}$.

2. Условие Мизеса:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2.$$

3. Условие состояния сыпучей среды:

$$\max |\sigma_{nt}| = k + \sigma_{nn} \tan \varphi,$$

где σ_{nn}, σ_{nt} — нормальное и касательное напряжения соответственно; k, φ — механические параметры материала.

4. Условие, учитывающее анизотропию материала (плоский случай):

$$\begin{aligned} & \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - C(e_{[xx]} - e_{[yy]}) \right]^2 + 4(\sigma_{xy} - C e_{[xy]})^2 = \\ & = \sin^2 \varphi \left[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - C(e_{[xx]} + e_{[yy]}) + 2H \right]^2, \end{aligned}$$

где C — параметр упрочнения; $H = k \tan \varphi$.

¹ Треска Анри Эдуард (Tresca H. E.), французский ученый в области механики; заложил основы теории пластичности, основной цикл работ по течению твердых тел опубликован в 60-х гг. XIX в.

Соотношения связи между напряжениями и деформациями могут быть представлены или в форме *ассоциированного закона пластического течения*

$$de_{[ij]} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.6)$$

или в форме *деформационной теории*

$$e_{ij} = \mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.7)$$

К задачам упругопластичности обычно относят случаи, когда упругие и пластические деформации, возникающие в теле при нагружении, имеют одинаковый порядок.

Постановка таких задач должна учитывать соотношения в упругой и пластической зонах и на границе между ними.

1. Упругая зона:

связь между напряжениями и деформациями в форме (3.2) — закон Гука;
граничные условия, сформулированные относительно напряжений или/и перемещений;

условия совместности;

уравнения равновесия (в форме Коши или Ламе).

2. Пластическая зона:

связи между напряжениями и приращениями деформаций $de_{ij} = de_{(ij)} + de_{[ij]}$
в виде (3.3), (3.6), (3.7);

условие совместности полных деформаций;

условие пластичности;

граничные условия на границе (если она существует) пластической области;

уравнения равновесия (в форме Коши, т. е. относительно компонент напряжений).

3. Граница между упругой и пластической зонами:

напряжения и перемещения изменяются непрерывно, т. е. на границе зон должны выполняться условия сопряжения.

Распространенными являются *вязко-упругие линейные среды*. Встречаются среды, в которых после приложения постоянных внешних сил наблюдается такое постепенное изменение деформации, что скорость деформации затухает со временем. Если в такой среде соотношение между напряжениями и деформациями описывается линейными дифференциальными (относительно времени) операторами, то она называется *линейной упруго-вязкой*, или *упруго-запаздывающей средой*.

Большому числу естественных материалов, как показывают эксперименты, присуща практически линейная зависимость между приращениями деформаций и приращениями напряжений в любой момент времени, т. е. проявление *линейной ползучести*. Это позволяет применять для описания их деформирования во времени *теорию деформирования линейных наследственных сред*. Полная деформация в любой момент времени складывается из двух составляющих: упругой деформации в момент приложения нагрузки и собственно деформации ползучести. Математически это можно выразить в следующем виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\sigma(t) + \frac{1}{E} \int_0^t L(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

где $L(t, \tau)$ — функция, выражающая свойства наследственности материала.

В прикладных исследованиях функция $L(t, \tau)$ удовлетворительно описывается, например, степенной функцией вида $L(t, \tau) = \delta(t - \tau)^{-\alpha}$. Здесь δ, α — константы, определяются типом пород и видом напряженно-деформированного состояния.

Замечание. Реологические характеристики δ, α представляют собой параметры, физический смысл которых не установлен. При этом α — величина безразмерная, δ имеет размерность «время в степени $(\alpha - 1)$ ».

Для моделирования процессов ползучести и релаксации служат *реологические модели*.

Вязкоупругими (релаксирующими) называются среды с преобладающим вязким элементом, которые ведут себя так, что при постоянных напряжениях деформации неограниченно растут. Если удастся в такой среде создать деформации и поддерживать их в дальнейшем, то возникшие вначале напряжения будут со временем затухать (релаксировать).

Реологические модели обладают памятью о предыдущих состояниях. Реологических моделей много. Большинство из них изучено крайне мало из-за сложности их математического описания. Наиболее простыми являются среды, в которых деформации, напряжения и скорости их изменения связаны линейными соотношениями.

Реологические среды можно представить различными соединениями упругих пружин и вязких ньютоновских тел (поршень, движущийся в цилиндре с вязкой жидкостью). Например, если параллельно соединить пружины и поршень (модель Кельвина — Фойгта) и наложить постоянное внешнее усилие (например, растяжение), то начальных мгновенных деформаций не будет, а затем вязкий поршень будет двигаться до тех пор, пока позволит пружина. Эта модель наглядно объясняет явление ползучести. Если к этой модели добавить пружину, соединенную с поршнем последовательно, то в начальный момент появятся мгновенные упругие деформации. Другой простейшей моделью является среда Максвелла, которая представляет собой последовательное соединение пружины и поршня (или упругую сжимаемую вязкую жидкость с линейной зависимостью сопротивления сдвига от скорости). В этом случае если в начальный момент приложить внешнюю силу, то пружина мгновенно растянется (мгновенные упругие деформации). Если в дальнейшем общее растяжение системы сохранять (постоянные деформации), то пружина, сокращаясь, будет постепенно подтягивать поршень. При этом необходимое внешнее усилие должно, очевидно, падать. Модель Максвелла иллюстрирует явление релаксации напряжений.

Итак, тело по Кельвину (Фойгту) (см. рис. 3.1, з) является примером простейшей линейной упруго-запаздывающей среды. Девиаторам напряжений и деформаций в таком теле соответствуют силы и деформации в механической модели, состоящей из пружины и вязкого демпфера, соединенных параллельно.

Для среды Кельвина имеют место следующие тензорные соотношения:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + 2\mu\tau \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \delta_{ij} \left(\lambda\theta - \frac{2}{3}\mu\tau \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \quad (3.8)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$); τ — постоянная, называемая временем релаксации напряжений.

Замечание. При $\tau = 0$ из (3.8) следует закон Гука.

Аналогом *тела по Максвеллу* является механическая модель, в которой пружина и демпфер соединены последовательно (см. рис. 3.1, в). Тензорное описание такой модели следующее:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ij} = 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \delta_{ij} \left[\frac{1}{\tau} \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \theta + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} \right].$$

Комбинируя, например, эти простейшие тела (соединяя последовательно или параллельно механические аналоги), можно получить среды с разнообразными свойствами.

«Стандартное» линейное твердое тело строится с помощью «параллельного соединения» упругого тела с максвелловским или соединения «последовательно» тела по Кельвину с упругим телом (см. рис. 3.1, д). Описывается такое тело соотношениями

$$a \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} S_{ij} = 2\mu \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \varepsilon_{ij} \right); \quad a_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1} \sigma = 3k \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1} \varepsilon \right),$$

где ε_{ij} и S_{ij} — компоненты девиаторов деформаций и напряжений; μ и k — упругие модули сдвига и объемного расширения в покоящейся среде; a , a_1 — реологические коэффициенты ($a \geq 0$, $a_1 \leq 1$); τ , τ_1 — времена релаксации сдвиговых и средних напряжений.

Если тела по Максвеллу и Кельвину соединить последовательно или два тела по Максвеллу соединить параллельно, то получается среда, обладающая как свойством упругого запаздывания, так и свойством релаксации напряжений — ползучести (см. рис. 3.1, л), которая описывается уравнением

$$a \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + b \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial t^2} = S_{ij} + c \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + d \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial t^2}, \quad a, b, c, d > 0.$$

В общем случае для описания линейных упруго-вязких сред применяются линейные дифференциальные операторы различного порядка.

Аналогом *модели жидкого тела* является сплошная среда, обладающая способностью неограниченно деформироваться без разрушения.

Рассмотрим, например, частицу вязкой жидкости, текущей в трубе. Из-за разных скоростей точек частицы она (частица) со временем будет становиться сколь угодно длинной. Считается, что жидкость не может работать на растяжение, иначе говоря, бесконечно малые растягивающие напряжения разрушают жидкость (иногда в некоторых моделях при более тонких исследованиях от этого предположения отказываются).

Большое число сплошных сред, в том числе и газы, подходят под модель «жидкость». Под обычной *вязкой*, или *ньютоновской*, жидкостью подразумевается жидкость, у которой сдвиговые напряжения в частицах пропорциональны скоростям сдвиговых деформаций. Эта жидкость описывается зависимостью девиатора напряжений D_H от тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}$ вида

$$D_H = 2\mu\dot{\epsilon} + \lambda\theta I, \quad (3.9)$$

где $\theta = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$; $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ — скорость точек жидкости; λ, μ — коэффициенты вязкости.

Уравнение (3.9) формально может быть получено из закона Гука (вида $T_H = 2\mu\epsilon + \lambda\theta I$), если заменить тензор напряжений на девиатор, а тензор деформаций — на тензор скоростей деформаций.

Уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса¹) могут быть получены из уравнений движения среды (в виде $\rho(\vec{F} - d\vec{v}/dt) - \text{grad } p + \text{div } D_H = 0$) с учетом граничных условий ($\vec{P}_n = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z$) и в векторной форме имеют вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho} (\mu + \lambda) \text{grad div } \vec{v}, \quad (3.10)$$

здесь p — давление.

Уравнения (3.10) вместе с уравнением неразрывности сплошной среды ($\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$) представляют систему четырех уравнений для определения пяти величин $\vec{v} = \vec{v}(u, v, w)$, ρ , p . Система является незамкнутой. Однако она замыкается, если добавить уравнение состояния жидкости $f(\rho, p, T) = 0$, где T — температура точек среды.

Для идеального газа уравнение состояния можно записать в таком виде: $p = \rho RT$, где R — универсальная газовая константа.

Так как при добавлении уравнения состояния вводится новая переменная величина T , то в общем случае необходимо привлекать уравнение баланса механической и тепловой энергии. Для газов во многих приложениях эту трудность можно обойти, если сделать предположение о политропичности газа, т. е. что его внутренняя энергия пропорциональна температуре. С учетом последнего получаем зависимость вида

$$p = C\rho^\gamma,$$

где γ — показатель адиабаты, принимающий значения от 1 до 5/3 для большинства встречающихся сред (так, для воздуха при умеренных температурах $\gamma = 1,4$). Множитель C зависит от энтропии и во многих случаях принимается постоянным (изменением энтропии пренебрегают).

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть $\rho = \text{const}$ — случай несжимаемой жидкости. Уравнение Навье — Стокса (3.10) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v}.$$

Учтено, что в этом случае, согласно уравнению неразрывности, $\text{div } \vec{v} = 0$.

В случае невязкой (идеальной) жидкости (сжимаемой или несжимаемой), в которой все сдвиговые напряжения равны нулю ($\mu = 0, \lambda = 0$) и внутренние силы сводятся только к давлению, уравнения (3.10) принимают вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

¹ Стокс Джордж Габриэль (Stokes G. G., 1819–1903), английский математик, механик и физик-теоретик; внес значительный вклад в гидро- и газодинамику, оптику и математическую физику.

Уравнение предельного равновесия в модели предельного состояния в компонентах главных напряжений можно записать следующим образом:

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (3.11)$$

Как указывалось в гл. 1, предельное состояние и разрушение твердых тел из различных материалов может осуществляться по различным сценариям, что зависит от большого количества факторов. Вследствие этого имеет место широкий диапазон явного представления уравнений предельного состояния.

В качестве *примера* рассмотрим горные породы, для которых актуально описание проявлений нарушения равновесного состояния из-за невыполнения условия контактного взаимодействия по линиям скольжения. В соответствии с этим рассмотрим уравнение (3.11).

Известно, что сопротивление сдвигу τ_n на площадке с нормалью $\vec{n}$ может быть выражено через нормальное напряжение σ_n на данной площадке зависимостью вида

$$|\tau_n| = f(\sigma_n). \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) имеет место при нарушении равновесного состояния деформируемой среды. Как известно, в рассматриваемой точке можно провести бесконечное множество площадок, на которых не выполняется условие (3.12). Рассмотрим первую площадку из данного множества, определяемую условием

$$\max(|\tau_n| - f(\sigma_n)) = 0. \quad (3.13)$$

Наиболее часто в качестве функции f , определяющей зависимость между касательными и нормальными напряжениями на площадке с нормалью $\vec{n}$, используют линейную функциональную зависимость вида (см. разд. 1)

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + C, \quad (3.14)$$

где φ — угол внутреннего трения (соответственно $\operatorname{tg} \varphi$ — коэффициент внутреннего трения); C — сцепление.

Подставив (3.14) в (3.13), получим следующее уравнение предельного равновесия сплошной деформируемой среды:

$$\max(|\tau_n| - (\sigma_n \operatorname{tg} \varphi + C)) = 0, \quad (3.15)$$

которое соответствует геометрической модели предельного равновесия линейно связанного массива.

Замечание. Частные случаи уравнения (3.15) соответствуют: $\varphi = 0$ — модель предельного равновесия идеально пластичной среды $\max(|\tau_n| - C) = 0$; при $C = 0$ — модель предельного равновесия идеально сыпучей среды $\max(|\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi) = 0$.

Запишем уравнение предельного равновесия (3.15) в компонентах главных напряжений для случая плоской деформации:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + C \operatorname{ctg} \varphi \right] \sin \varphi = 0. \quad (3.16)$$

С учетом того что для случаев прямолинейной огибающей кругов Мора $\sigma_{press} = (2C \cos \varphi) / (1 - \sin \varphi)$, уравнение (3.16) можно записать следующим образом:

$$\sigma_1 - (2\lambda + 1)\sigma_3 = \sigma_{press},$$

где $\lambda = \sin \varphi / (1 - \sin \varphi)$.

Частным случаем уравнений (3.16) является их представление при осесимметричной деформации относительно оси z . Полагая, что $\sigma_1 > \sigma_3$ и деформации породного массива направлены главным образом по оси z , получим следующую запись физического уравнения предельного равновесия:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\cos \varphi} - (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{tg} \varphi = \sigma_{press}, \quad \sigma_2 = \sigma_1.$$

Для того чтобы записать уравнения равновесия в компонентах тензора напряжений, необходимо воспользоваться формулами, выражающими главные напряжения через компоненты тензора напряжений.

Например, в случае плоского деформированного состояния формулы преобразования имеют вид

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \right)^2 + \tau_{r\theta}^2}. \quad (3.17)$$

Если одновременно с плоской деформацией имеет место и осевая симметрия, то $\tau_{r\theta} = 0$, а в соответствии с (3.17) $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_3 = \sigma_r$. Тогда уравнения предельного равновесия записываются следующим образом:

$$\sigma_\theta - (2\lambda + 1)\sigma_r = \sigma_{press}. \quad (3.18)$$

В случае моделирования породного массива идеально пластичной средой с уравнением предельного равновесия $\max(|\tau_n| - C) = 0$ уравнение (3.18) приобретает вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_{press}.$$

Если же массив рассматривается в приближении сыпучей среды с уравнениями предельного равновесия $\max(|\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi) = 0$, то (3.18) записывается в виде

$$\sigma_\theta - (2\lambda + 1)\sigma_r = 0.$$

Особенностью поведения подземных сооружений является то обстоятельство, что наступление предельного равновесия породных массивов еще не означает полной потери несущей способности подземного сооружения. Несущая способность последних существенным образом зависит от запредельного деформированного состояния. Таким образом, для описания поведения горных пород за пределом прочности необходимо использовать деформационную теорию прочности.

Геомеханическим моделям породных массивов, отражающим их запредельное деформированное состояние, соответствует физическое уравнение общего вида

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, e_1, e_2, e_3) = 0. \quad (3.19)$$

Если в плоскости $or\theta$ имеет место плоская деформация, то физическое уравнение (3.19) на запредельной стадии деформирования записывается в виде (см. разд. 2.4)

$$\sigma_1^* = (2\lambda + 1)\sigma_3 + \sigma_{press} - E^* e_1'. \quad (3.20)$$

Здесь σ_1^* — величина главного напряжения σ_1 на запредельной стадии деформирования; e_1' — величина приращения главных деформаций e_1 на запредельной стадии деформирования по отношению к предельным деформациям e_1^{lim} ; E^* — модуль деформации нисходящего участка полной диаграммы на запредельной стадии деформирования.

В случае осесимметричной деформации относительно оси z уравнение (3.20) записывается как

$$\sigma_\theta^* = (2\lambda + 1)\sigma_r + \sigma_{\text{press}} - E^*e_\theta'. \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) отражает геомеханическую модель линейно-разупрочняющегося породного массива. Проанализируем данную модель. Для этого выпишем на основании (3.21) выражение для запредельной деформации:

$$e_\theta' = \frac{1}{E^*} \left[(2\lambda + 1)\sigma_r + \sigma_{\text{press}} - \sigma_\theta^* \right]. \quad (3.22)$$

При $E^* = 0$ величина деформации e_θ' неограниченно возрастает (т. е. $e_\theta' \rightarrow \infty$), а уровень напряжений σ_1^* на основании (3.22) остается неизменным. Это соответствует геомеханической модели идеально пластичного породного массива.

При $E^* = \infty$ величина деформации $e_\theta' = 0$, описывающая поведение геомеханической модели идеально хрупкого породного массива.

Необходимо отметить, что рассмотренные здесь подходы исходят из предположения, что предельное состояние практически не зависит от среднего по величине главного напряжения σ_2 . Но, например, многочисленными экспериментальными исследованиями в условиях трехосного сжатия установлено упрочняющее действие σ_2 (при увеличении значения σ_2 при постоянном значении σ_3 величина наибольшего напряжения σ_1 возрастает). Установлена также зависимость σ_2 от анизотропии горных пород.

Величина σ_2 определяет вид объемного напряженного состояния. Данный факт хорошо прослеживается по значению параметра Надаи — Лоде μ_σ (см. гл. 2). Существует много рекомендаций по учету величины среднего главного напряжения σ_2 . Так, М. Филоненко-Бородич предложил вместо (3.19) использовать предельное условие для октаэдрических напряжений:

$$\tau_{\text{oct}} = f(\sigma_{\text{oct}}). \quad (3.23)$$

Так как в выражения для октаэдрических напряжений входит величина σ_2 , то предельное условие (3.23) зависит от напряжения σ_2 .

А. И. Боткин рассмотрел предельное условие вида

$$\tau_{\text{oct}} = T_0 + \varphi \sigma_{\text{aver}}, \quad (3.24)$$

где T_0 — сопротивление чистому сдвигу; φ — коэффициент внутреннего трения; σ_{aver} — среднее напряжение.

По аналогии с формой записи предельного условия Кулона — Мора уравнение (3.24) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ & = \frac{2\sqrt{2}\sigma_{\text{press}}\sigma_{\text{ext}}}{\sigma_{\text{press}} + \sigma_{\text{ext}}} + \frac{\sqrt{2}(\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}})}{\sigma_{\text{press}} + \sigma_{\text{ext}}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Выполним сравнение уравнения (3.25) с классическим условием Кулона – Мора в форме $\sigma_1 - (\sigma_{press} / \sigma_{ext}) \sigma_3 = \sigma_{press}$.

Рассмотрим случай $\sigma_2 = \sigma_3$. Тогда предельное условие (3.25) принимает вид

$$\sigma_1 - \frac{3\sigma_{press} - \sigma_{ext}}{2\sigma_{ext}} \sigma_3 = \sigma_{press}.$$

Сопоставляя полученное выражение с классическим условием Кулона – Мора, видим, что напряжение σ_2 действительно оказывает упрочняющее действие.

Замечание. Глубокие исследования по построению теории прочности, учитывающей все главные компоненты объемного напряженного состояния, изложены в работах И. В. Баклашова, Е. И. Шемякина, Б. К. Нореля, С. Е. Чиркова¹ и др.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Раскройте принцип Сен-Венана статической эквивалентности нагрузок.
2. Расскажите о полной системе уравнений для описания НДС твердого деформируемого тела.
3. Приведите примеры структурных схем для описания поведения твердых тел под нагрузкой.
4. Что такое структурная единица упругой среды, обобщенный закон Гука?
5. Структурные единицы с пластическими свойствами. Приведите основные положения теории малых упругопластических деформаций.
6. Условие пластичности. Примеры.
7. Постановка задач упругопластичности.
8. Структурные единицы с вязкими свойствами. Закон деформирования Ньютона. Модель вязкоупругой линейной среды.
9. Базовые реологические модели. Модели Кельвина – Фойгта и модель Максвелла.
10. Приведите примеры записи уравнений предельного состояния.

¹Чирков Сергей Ефимович, доктор технических наук, профессор; автор работ в области механики горных пород.

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория упругости является частью механики сплошной среды, в том числе и механики деформируемого твердого тела, и занимается определением деформаций и внутренних сил в упругих телах при заданных нагрузках. При этом принимаются следующие основные гипотезы и допущения относительно свойств материала, нагрузок и характера деформаций:

- *гипотеза однородности и сплошности* — предположение дает возможность изучать механические свойства тел на образцах сравнительно малых размеров и позволяет использовать для исследования деформации аппарат дифференциального исчисления;

- *допущение о малости деформаций* — деформации в точках тела считаются настолько малыми, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок, приложенных к телу, что позволяет при составлении уравнений равновесия считать геометрию тела неизменной;

- *принцип напряжений Эйлера и Коши* — в каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела, имеет место взаимодействие сил по типу распределенных по поверхности тела нагрузок, т. е. применяя метод сечений, можно действие одной части тела на другую заменять поверхностными усилиями, действующими в сечении;

- *аксиома отвердевания* (замороженности) — в любой фиксированный момент времени t материальное тело рассматривается как абсолютно твердое, и для него справедливы законы теоретической механики, в том числе законы Ньютона, при этом используются аксиоматические понятия *силы* и *массы*.

Справедливость введенных допущений может быть установлена лишь опытным путем. Дополнительные аксиомы и определения будут вводиться по мере необходимости.

При рассмотрении определяющих соотношений теории упругости необходимо дополнительно к принятым ввести следующие гипотезы:

- *гипотеза об идеальной упругости материала* — под идеальной упругостью понимается способность тела восстанавливать первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших его деформацию (снятие внешней нагрузки, температурных, электромагнитных и радиационных полей и т. п.);

• *допущение о линейной зависимости между деформациями и нагрузками* (закон Гука) – предполагается, что для большинства материалов перемещения, являющиеся результатом деформации тела, прямо пропорциональны вызвавшим их нагрузкам.

Будем полагать, что в своем начальном состоянии тело свободно от напряжений, имеет постоянную температуру и находится в термодинамическом равновесии со средой.

В основе упругой модели предполагается, что можно выделить некоторое «естественное» состояние среды, в котором тензор напряжений тождественно равен нулю. Для всех других состояний этой среды в любой точке и в любой момент времени тензор напряжений является взаимно однозначной функцией тензора деформаций (исходным состоянием при определении тензора деформаций является «естественное» состояние среды).

Важно отметить, что напряженное состояние упругой среды в данный момент времени зависит только от ее деформированного состояния и не зависит от способа перехода от естественного состояния к изучаемому и скорости этого перехода.

В *линейной теории упругости* предполагается, что каждая точка совершает малые перемещения относительно некоторого естественного состояния. Если рассматриваемая среда к тому же однородна и изотропна, мы приходим к классической теории упругости.

Классическая теория упругости основывается на линейной связи между напряжениями и деформациями и представляет собой линеаризованную теорию поведения упругих сред в окрестности естественного состояния, когда для любой точки вещества смещения и их градиенты относительно некоторого естественного состояния малы.

Таким образом, у упругого тела напряжение в каждой точке есть однозначная функция деформации:

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij}(\varepsilon_{km}). \quad (4.1)$$

Путем нагружения или соответственно *путем деформирования* называется процесс изменения тензора напряжений или тензора деформаций в зависимости от некоторого монотонно возрастающего параметра, который назовем «временем». Как было сказано ранее, реальное время при определении модели упругого тела никакой роли не играет. Употребляя этот термин, мы говорим лишь о последовательности событий, но не об их временной протяженности.

Для наглядности тензор напряжений или тензор деформаций можно изобразить векторами, составляющие которых равны компонентам соответствующих тензоров:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}).$$

Данные векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ служат изображениями тензоров напряжений и деформаций в шестимерных пространствах напряжений и деформаций соответственно. Такое изображение не единственно. Можно было бы ввести не шестимерное, а девятимерное пространство, если не обращать внимания на симметрию тензоров σ_{ij} и ε_{ij} . А. А. Ильюшин ввел пятимерные пространства для девиаторов напряжений и деформаций, так как среди их компонентов только пять независимых.

Пути нагружения или деформирования таким образом могут быть представлены как кривые, описываемые концами векторов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ в соответствующих простран-

ствах. Закон упругости, т. е. уравнение (4.1), устанавливает, в частности, что замкнутому пути деформирования соответствует замкнутый путь нагружения, и наоборот.

Рассмотрим теперь класс упругих материалов, для которых работа, произведенная над элементарным объемом в замкнутом цикле по деформациям или напряжениям, равна нулю (идеально упругое тело). При этом немеханические потери энергии отсутствуют. Влияние термических эффектов также исключается.

Удельной потенциальной энергией деформации называется величина, определяемая как работа, совершаемая при деформации единицы объема тела:

$$U = \int_{\varepsilon_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Изменение внутренней энергии (ввиду симметрии тензоров ε_{ij} и σ_{ij}) можно записать в развернутом виде:

$$dU = \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}d\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12}d\varepsilon_{12} + \sigma_{23}d\varepsilon_{23} + \sigma_{31}d\varepsilon_{31}). \quad (4.2)$$

Условие равенства нулю работы на произвольном замкнутом цикле можно представить так:

$$\int dU = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0.$$

Для выполнения выписанного соотношения необходимо, чтобы подынтегральное выражение представляло полный дифференциал:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (4.3)$$

Удельная потенциальная энергия деформации $U(\varepsilon_{ij})$ является однозначной функцией деформаций, она называется также *упругим потенциалом*.

Но, с другой стороны, выражение

$$dU^* = \varepsilon_{11}d\sigma_{11} + \varepsilon_{22}d\sigma_{22} + \varepsilon_{33}d\sigma_{33} + 2(\varepsilon_{12}d\sigma_{12} + \varepsilon_{23}d\sigma_{23} + \varepsilon_{31}d\sigma_{31})$$

также является полным дифференциалом, так как $dU + dU^* = d(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$.

Поэтому

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U^*}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.4)$$

Величина $U^*(\sigma_{ij})$ называется *дополнительной удельной энергией деформации* и является *упругим потенциалом по напряжениям*. Для введенных энергий справедливы общие соотношения

$$dU(\varepsilon) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}, \quad dU^*(\sigma) = \frac{\partial U^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}.$$

Значение величин U и U^* для *нелинейно-упругого материала* можно наглядно пояснить на примере одноосного напряженного состояния (рис. 4.1).

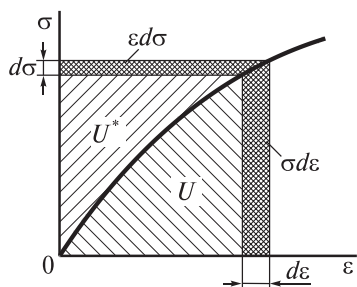


Рис. 4.1. Наглядное представление для понятий дополнительной удельной энергии деформации и упругого потенциала по напряжениям

Из рисунка видно, что величины

$$U(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon, \quad U^*(\sigma) = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma$$

дополняют друг друга до прямоугольника площади « $\sigma\varepsilon$ » под кривой диаграммы «напряжения – деформации» и над этой кривой.

Следует подчеркнуть, что допущение о существовании удельной потенциальной энергии деформации находится в соответствии с допущением об обратимости рассмотренных процессов деформации и определяет упругое поведение материалов. Но оно не означает обязательно линейную связь между напряжениями и деформациями. Линейность вводится лишь законом Гука.

4.2. ЗАКОН ГУКА

Связь между напряжениями и деформациями для упругого тела описывается законом Гука.

Из опытов с проволокой Гук установил линейную связь между нагрузкой и полными деформациями. Соответствующий закон он сформулировал в виде *Ut tensio sic vis* – «Какова сила, такова деформация» и опубликовал его в 1676 г. в форме анаграммы *ceiinoosssttuv*¹.

Обобщенный закон Гука в тензорном представлении имеет вид

$$\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E} T_H - \frac{\nu \Sigma_1}{E} \mathbf{I}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{e}$ – тензор главных деформаций, соответствующий главным напряжениям σ_i ; Σ_1 – первый инвариант тензора напряжений T_H ; $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Замечание. Соотношения (4.5) равносильны трем векторным:

$$e_i = \frac{\sigma_i}{E} (1+\nu) - \frac{\nu \Sigma_1}{E}.$$

Тензоры, входящие в (4.5), могут быть записаны в любой системе координат. С точки зрения классической теории упругости константы E и ν полностью характеризуют среду, однако можно задавать и другие две константы. Важно, чтобы между каждой парой констант существовала связь.

Для изотропных тел соотношения обобщенного закона Гука известны из курса сопротивления материалов. Так, в принятых обозначениях компонентов тензоров напряжений и деформаций они следующие:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], \\ \sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹ Этот же закон был независимо открыт в 1680 г. французским физиком Э. Мариоттом (Mariotte E., 1620–1684).

Здесь E и G — соответственно модули Юнга и сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Они связаны известной зависимостью $2G = E/(1 + \nu)$.

В ходе решения задач теории упругости возникает необходимость в обратных соотношениях, когда напряжения выражены через деформации. Воспользовавшись соотношениями (4.6), получаем

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}. \quad (4.7)$$

Здесь

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad (4.8)$$

введенная ранее объемная деформация; λ и μ — новые константы материала, называемые параметрами Ламе, связанные с G , ν и E -зависимостями:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Следовательно, из пяти упругих постоянных λ , μ , K , ν , E независимы только любые две. Размерности величин λ , μ , K , E совпадают с размерностью напряжения или давления. Эти параметры положительны. Коэффициент Пуассона — величина безразмерная. Ограничение его возможных значений для классического упругого материала следует из условия $K > 0$ и $\mu > 0$: $-1 \leq \nu \leq 1/2$. Значение $\nu = 1/2$ соответствует несжимаемому материалу. Опыт показывает, что для всех известных изотропных материалов $\nu > 0$. Было сделано много экспериментальных попыток доказать, что нижняя граница для ν равна нулю, а не -1 , но достичь этого не удалось (см. гл. 1).

Уравнения (4.7), разрешенные относительно ε_{ij} , представляют собой обратную форму закона Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1 + \nu} \sigma \delta_{ij} \right]. \quad (4.9)$$

При $\nu \rightarrow 0,5$ параметр Ламе $\lambda \rightarrow \infty$, что, согласно выражению (4.8), соответствует несжимаемому материалу ($\theta = 0$). В этом случае использование соотношений (4.7) затруднительно. Поэтому целесообразно записать два отдельных соотношения, в которых объемная деформация была бы выделена в явном виде. Это достигается, например, использованием выражения закона Гука через шаровые и девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций:

$$s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = K\theta, \quad (4.10)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

Здесь K — модуль объемной деформации. Для несжимаемых материалов вместо второго из уравнений (4.10) используется условие $\theta = 0$.

Из закона Гука, представленного в виде (4.10), следует возможность разделения удельной потенциальной энергии деформации на две независимые друг от друга части:

$$U_d = \frac{1}{2} s_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{4G} \left(\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\sigma^2}{3} \right), \quad U_v = \frac{1}{2} \sigma \theta = K \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (4.11)$$

где U_d называется удельной энергией формоизменения, а U_v — удельной энергией изменения объема. Удельную энергию формоизменения можно записать и через октаэдрическое касательное напряжение. В развернутом виде формулы (4.11) принимают вид

$$U_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2, \\ U_d = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2) + \frac{1}{2G} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2).$$

Обе величины играют важную роль, например при формулировании критериев прочности и законов течения при пластическом деформировании.

Замечание. Потенциальная энергия деформации была введена в 1839 г. Дж. Грин¹ при построении теории распространения света.

Соотношения (4.7) можно обобщить для случая произвольного анизотропного материала, предполагая линейную связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций в виде

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (4.12)$$

Равенство (4.12) можно рассматривать как линейный член разложения в ряд общей нелинейной зависимости $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$, в которой отсутствует постоянное слагаемое ввиду условия $\sigma_{ij} = 0$ при $\varepsilon_{ij} = 0$. Отметим, что в (4.12) содержится, вообще говоря, девять уравнений, имеющих по девять слагаемых каждое.

Компоненты E_{ijkl} для однородного материала не зависят от координат. Но так как напряжения и деформации зависят от ориентации системы координат, то этой зависимости должны подчиняться и упругие постоянные E_{ijkl} . Они образуют матрицу из 81 упругой константы и преобразуются как компоненты тензора четвертого ранга, который называют *тензором модулей упругости*. Только для изотропного материала упругие постоянные не зависят от ориентации системы координат.

Ввиду симметрии тензоров σ_{ij} и ε_{kl} тензор модулей упругости также симметричен относительно индексов i и j , k и l : $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{jilk}$. Таким образом, независимых компонент остается 36. Матрица его компонент следующая:

$$\begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ E_{1311} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1312} & E_{1313} & E_{1323} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2312} & E_{2313} & E_{2323} \end{bmatrix}.$$

¹ Грин Дж. (Green J., 1793–1841), английский математик, физик, автор трудов по интегральному исчислению, теории упругости.

Дальнейшее уменьшение числа независимых компонент получается из термодинамических соображений, если предположить существование удельной потенциальной энергии деформации. Подставляя поочередно соотношения (4.12) и (4.3) в выражение дифференциала удельной потенциальной энергии (4.2), имеем

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij}, \quad dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}.$$

Отсюда $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$

После повторного дифференцирования и с учетом возможности изменения порядка дифференцирования получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = E_{ijkl}, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = E_{klij}.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl} = E_{klij}.$

Поэтому число независимых постоянных для анизотропного тела становится равным 21.

Если упругое тело имеет одну плоскость симметрии упругих свойств, то для него число независимых постоянных сокращается до 13.

Для тела, имеющего три взаимно ортогональные плоскости симметрии (ортотропное тело), число постоянных сокращается до 9.

Число независимых постоянных для изотропного тела, как было показано ранее, равно двум.

Обобщенный закон Гука можно обратить, выразив деформации через напряжения. Тогда

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (4.13)$$

Тензор 4-го ранга D_{ijkl} (тензор упругих податливостей) обладает такими же свойствами симметрии, как и тензор модулей упругости E_{ijkl} .

Необходимо подчеркнуть, что число постоянных упругости, фигурирующих в законе Гука, сокращается лишь тогда, когда плоскости симметрии приняты за координатные. В других системах координат по-прежнему уравнения будут содержать 21 константу, которые выражаются через девять независимых констант.

Замечание. Теории анизотропных и неоднородных тел подробно изложены, например, в монографиях [24; 25].

4.3. ФОРМУЛА КЛАПЕЙРОНА. ТЕОРЕМА КЛАПЕЙРОНА. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

4.3.1. Формула Клапейрона

Для вычисления удельной потенциальной энергии деформации исходим из выражения (4.2). Рассмотрим произвольный элемент объема упругого тела, напряженно-деформированное состояние которого задано величинами σ_{ij} и ε_{ij} . Введем

местную систему главных осей для напряжений и деформаций и дадим главным напряжениям приращения, одинаковые по отношению к их конечным значениям (пропорциональное нагружение). Тогда совершаемая работа, отнесенная к единице объема, определяется как

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3).$$

Она не зависит от пути нагружения и в силу закона сохранения энергии равна удельной потенциальной энергии деформации U . В произвольных координатных осях соответственно этому получаем

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (4.14)$$

Это выражение называется *формулой Клапейрона*. Ее можно записать в развернутом виде:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33}) + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{31} \varepsilon_{31}.$$

С учетом обобщенного закона Гука в форме (4.12) или (4.13) формула Клапейрона (4.14) принимает вид

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \text{ или } U = \frac{1}{2} D_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}.$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (D_{mnkl} \sigma_{mn} \sigma_{kl}) = \frac{1}{2} D_{mnkl} (\delta_{im} \delta_{jn} \sigma_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} \sigma_{mn}) = \\ &= \frac{1}{2} (D_{ijkl} \sigma_{kl} + D_{mnij} \sigma_{mn}) = D_{ijkl} \sigma_{kl}, \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}. \quad (4.15)$$

Подчеркнем, что полученное соотношение не следует смешивать с очень похожим соотношением (4.4), которое, однако, вместо U содержит U^* . При этом (4.15) предполагает справедливость закона Гука и потому линейно-упругое поведение материала. В то же время соотношение (4.4) следует из общих законов термодинамики.

Замечание. Формулы (4.4) и (4.15) представляют собой частные формулировки теоремы Кастильяно¹, с которой мы ознакомимся далее.

4.3.2. Теорема Клапейрона

Пусть линейно-упругое тело под действием объемных f_i и поверхностных сил R_i находится в состоянии равновесия. Тогда скалярное умножение уравнений равновесия на перемещения u_i и последующее интегрирование по объему V тела (с поверхностью S) дают

$$\int_V u_i \sigma_{ij,j} dV + \int_V u_i \rho F_i dV = 0.$$

¹ Кастильяно К. А. (Castigliano C. A., 1847–1884), итальянский ученый-механик.

Подынтегральная функция в первом интеграле преобразуется с помощью формулы $(u_i \sigma_{ij}),_{,j} = u_{i,j} \sigma_{ij} + u_i \sigma_{ij,j}$, и, следовательно,

$$\int_V (u_i \sigma_{ij}),_{,j} dV + \int_V u_i \rho F_i dV = \int_V u_{i,j} \sigma_{ij} dV.$$

Первый интеграл в левой части переходит в поверхностный интеграл с помощью известной формулы Гаусса¹ – Остроградского. В правой части в силу симметрии тензора напряжений будет выполняться равенство $u_{i,j} \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$. В результате получаем соотношение

$$\int_S u_i \sigma_{ij} l_j dS + \int_V u_i \rho F_i dV = \int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV.$$

Подынтегральное выражение в правой части в соответствии с формулой Клапейрона (4.14) равно удвоенной удельной потенциальной энергии деформации. Следовательно,

$$\int_S u_i R_i dS + \int_V u_i \rho F_i dV = 2 \int_V U dV. \quad (4.16)$$

Таким образом, работа упругой деформации равна половине работы, которая совершается внешними поверхностными и объемными силами на перемещениях из исходного состояния равновесия в конечное (теорема Клапейрона).

4.3.3. О существовании и единственности граничных задач теории упругости

Используя теорему Клапейрона, можно рассмотреть вопрос о существовании и единственности граничных задач теории упругости.

С точки зрения физики очевидно, что каждое упругое тело, находящееся под воздействием внешней нагрузки, при соответствующих связях находится по меньшей мере в одном равновесном состоянии. Поскольку математические формулировки задач теории упругости базируются на фундаментальных физических принципах, то следует ожидать, что выводимые из них соотношения не могут привести к абсурдным результатам. Это говорит о существовании решения краевой задачи теории упругости. Вместе с тем этот вопрос представляет собой одну из труднейших математических задач, которая решена в настоящее время при достаточно общих условиях. Приводить здесь довольно сложные и громоздкие доказательства нецелесообразно. Будем просто строить соответствующие решения, удовлетворяющие как дифференциальным уравнениям, так и граничным условиям задачи.

Доказательство *единственности решения* краевых задач статики упругого тела строится на том, что предположение о неединственности приведет к противоречию. Единственность впервые была доказана Г. Кирхгофом (1859) и основывалась на положительной определенности потенциальной энергии деформации. Предположим, имеются два решения: $u_i^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$, которые удовлетворя-

¹ Гаусс К. Ф. (Gauss C. F., 1777–1855), немецкий математик, физик, автор трудов в области алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии.

ют одним и тем же граничным условиям и основным уравнениям (4.1)–(4.3) при одинаковых объемных силах. Тогда из уравнений равновесия и граничных условий для напряжений получаем

$$\sigma_{ij}^{(1)},_{,j} = \sigma_{ij}^{(2)},_{,j} = -\rho F_i, \quad \sigma_{ij}^{(1)} l_j = \sigma_{ij}^{(2)} l_j = R_i. \quad (4.17)$$

Ввиду линейности задачи разности

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}, \quad u_i^* = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$$

также являются решением основных уравнений теории упругости для случая нулевых объемных и поверхностных сил $F_i^* = 0$, $R_i^* = 0$, поскольку

$$\sigma_{ij}^*,_{,j} = \sigma_{ij}^{(1)},_{,j} - \sigma_{ij}^{(2)},_{,j} = -\rho F_i + \rho F_i = 0, \quad \sigma_{ij}^* l_j = \sigma_{ij}^{(1)} l_j - \sigma_{ij}^{(2)} l_j = R_i - R_i = 0.$$

Теорема Клапейрона (4.16) для величин со звездочками в силу выражений (4.17) принимает вид

$$\int_V U dV = 0.$$

Из-за положительной определенности удельной потенциальной энергии упругой деформации это равенство может быть выполнено только для $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} = 0$.

Отсюда следует $\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$, что и доказывает единственность решения краевой задачи.

Для первой краевой задачи на границе перемещения обращаются в нуль. В случае смешанной задачи справедлива та же аргументация, только предполагается при необходимости, что перемещения являются однозначными функциями координат точки.

Следует подчеркнуть, что теорема единственности здесь доказана для геометрически линейной теории упругости. Для нелинейной теории и больших деформаций приведенный способ доказательства недействителен, так как тогда положительная определенность энергии деформации может нарушаться. Последнее означает одно из двух: либо принятая модель сплошной среды некорректна, либо материал неустойчив. Примером неустойчивого материала служит материал с падающей диаграммой растяжения, когда одному и тому же значению напряжения соответствуют два разных значения деформации [26]. Для геометрически нелинейных систем теорема единственности несправедлива: нарушение единственности соответствует потере устойчивости упругого тела (подобного рода задачи в этой книге не рассматриваются).

Замечание. Интересующихся проблемами устойчивости направляем к изданиям по теории упругости, например [5; 27–29].

4.4. ТЕРМОУПРУГОСТЬ

Предположим, что исследуемое тело находится в неоднородном и нестационарном температурном поле $T(x_i, t)$. Температура отсчитывается от некоторого начального значения T_0 . Согласно гипотезе Неймана¹ полная линейная деформация

¹ Нейман Франц Эрнст (Franz Ernst Neumann, 1798–1895), немецкий физик.

ε_{ii} складывается из деформаций от силовой нагрузки ε'_{ii} и температурного расширения $\varepsilon''_{ii} = \alpha T$:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon'_{ii} + \varepsilon''_{ii}.$$

Температурные добавки для сдвиговых деформаций равны нулю. Поэтому закон Гука с учетом температуры принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right] + \alpha T \delta_{ij}. \quad (4.18)$$

Величину α называют коэффициентом линейного температурного расширения материала. Выражая напряжения через деформации из (4.18), получаем

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu\theta}{1-2\nu} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \delta_{ij} \right].$$

Соотношение между девиаторами в термоупругости остается тем же, что и в случае идеальной упругости (4.10). Иную форму принимает только связь шаровых частей тензоров напряжений и деформаций

$$s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = K(\theta - 3\alpha T).$$

Компоненты деформаций в формуле (4.18) связаны с перемещениями соотношениями Коши (2.35). В сложных задачах термоупругости в общем случае предварительно нужно решить задачу о распределении тепла.

Температура $T(x_i, t)$ в каждой точке тела должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = B\Delta T + \frac{Q}{c\gamma}, \quad (4.19)$$

где B – температуропроводность материала; Δ – оператор Лапласа¹; $Q(x_i, t)$ – функция, показывающая количество тепла, которое производится источником тепловой энергии в единице объема и за единицу времени; c – удельная теплоемкость; γ – удельный вес.

К уравнению (4.19) следует добавить начальные условия распределения температуры $T(x_i, 0) = f(x_i)$. Кроме этого, на границе твердого тела должны выполняться условия теплообмена с окружающей средой (три типа условий теплообмена, см. [30]).

Величина Q в уравнении (4.19) для деформируемых тел в общем случае зависит от напряженного и деформированного состояний. В этом случае говорят о связанных задачах термоупругости.

Для упругого анизотропного тела закон Гука (4.12) с учетом температуры принимает вид

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}T),$$

где α_{kl} – тензор коэффициентов термического расширения материала.

¹ Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (Pierre-Simon de Laplace, 1749–1827), французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений.

Постоянные E_{ijkl} определяются в изотермических условиях при $T = T_0$. Если приращение температуры не мало, то E_{ijkl} и α_{kl} должны рассматриваться как функции температуры.

4.5. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для решения *прямых* задач математической теории упругости, т. е. для определения 15 неизвестных функций $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), имеется система уравнений, включающая:

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad (4.20)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4.21)$$

закон Гука

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}. \quad (4.22)$$

Система (4.20)–(4.22) включает 15 линейных уравнений в частных производных. В тех случаях, когда перемещения не входят явно в число неизвестных, уравнения (4.21) заменяются условиями совместности деформаций (без суммирования по повторяющимся индексам):

$$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} - 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0, (\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\gamma} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha\alpha} + \varepsilon_{\gamma\alpha,\beta\beta}),_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\gamma} = 0. \quad (4.23)$$

Для замыкания системы разрешающих уравнений необходимо добавить *условия на границе (граничные условия)*. Наиболее распространенной ситуацией является случай, когда поверхность тела S можно представить состоящей из двух частей: $S = S_\sigma + S_u$. При этом считается, что граничные условия в каждой точке поверхности заданы следующим образом:

$$u_i = u_{i0}(x) \text{ на } S_u, \quad R_{vi} = \sigma_{ij}l_j \text{ на } S_\sigma. \quad (4.24)$$

Данный простейший случай не исчерпывает всех возможностей задания граничных условий. Так, при вдавливании жесткого штампа в упругое тело часто принимается отсутствующим трение в области контакта. Тогда если направить ось x_3 по нормали к поверхности тела, то граничные условия под штампом будут следующими:

$$u_i = u_{i0}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Вместе с тем при формулировке положений общей теории выделять задание подобных типов граничных условий (задание на одном участке поверхности и перемещений, и напряжений) не имеет смысла. Приводимые далее рассуждения легко трансформируются и на такие случаи.

Итак, в общем случае задача теории упругости состоит в решении уравнений (4.20)–(4.23) при граничных условиях (4.24).

Очевидно, что возможны и другие комбинации граничных условий. Например, если тело содержит бесконечно удаленную точку, то к граничным условиям необхо-

димо добавить требование регулярности решения на бесконечности, которое, как правило, сводится к условию ограниченности.

Отметим, что во всех этих случаях массовые силы предполагались известными. В зависимости от постановки при решении задачи теории упругости искомыми функциями являются либо перемещения, либо напряжения.

Возможна также постановка обратной задачи теории упругости. В этом случае задаются напряжения, деформации или перемещения для всех внутренних точек тела как функции координат. Требуется определить условия на границах тела, которым соответствует заданное напряженно-деформированное состояние.

4.6. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Если в уравнение равновесия (4.20) подставить закон Гука (4.22) и исключить деформации с помощью соотношений Коши (4.21), получим систему из трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями u_i (уравнения Ламе):

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu\Delta u_i + \rho F_i = 0, \quad (4.25)$$

где $\theta = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = u_{i,i}$ — объемная деформация; Δ — оператор Лапласа.

Полученная система уравнений является эллиптической по Петровскому¹ в области V , занимаемой телом, при всех значениях коэффициента Пуассона, кроме $\nu = 0,5$ и $\nu = 1$.

Для построения замкнутой системы разрешающих уравнений к трем уравнениям (4.25) следует присоединить граничные условия.

На одной части S_u граничной поверхности могут быть заданы перемещения u_{0i} как известные функции координат:

$$u_i = u_{i0}(x) \text{ на } S_u. \quad (4.26)$$

На другой части S_σ граничной поверхности могут быть заданы внешние поверхностные силы $R_i = R_i(x_j)$. Причем поскольку задача решается в перемещениях, то значения R_i следует связать с искомыми величинами u_i с помощью закона Гука и соотношений Коши. В итоге на S_σ должны выполняться следующие граничные условия в перемещениях:

$$\lambda\theta\delta_{ij}l_j + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})l_j = R_i. \quad (4.27)$$

В общем случае различают три типа граничных задач.

Первая из них заключается в определении напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если на поверхности ($S = S_u$) тела известны перемещения точек.

Математическая постановка первой граничной задачи формулируется следующим образом.

Определить упругостатическое состояние $[\bar{u}, \sigma]$ среды $[D^+(\rho, \lambda, \mu)]/[D^-(\rho, \lambda, \mu)]$, соответствующее массовой силе $\bar{X}$ и удовлетворяющее уравнениям Ламе

$$\mu\Delta\bar{u} + (\lambda + \mu)\text{grad div } \bar{u} + \rho\bar{X} = 0$$

¹ Петровский Иван Георгиевич (1901–1973), русский математик, ректор МГУ (1951), академик АН СССР.

по граничному условию

$$\forall y \in S: \lim_{x \rightarrow y} \bar{u}^{\pm}(x) = \bar{f}(y) \quad (x \in D^{\pm}). \quad (4.28)$$

Здесь μ, λ – постоянные Ламе; $f = (f_1, f_2, f_3)$ – заданный вектор; S – граница области D .

Замечание. Если область содержит бесконечно удаленную точку, то искомое решение задачи должно удовлетворять условиям регулярности на бесконечности

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\bar{u}(x)| = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} (\partial u_j / \partial x_i) R = 0, \quad (i, j = 1, \dots, m), \quad (m = 2, 3),$$

где R – расстояние от точки x до начала координат.

Во второй граничной задаче известно распределение сил на поверхности ($S = S_{\sigma}$). Математическая постановка второй граничной задачи следующая.

Определить упругостатическое состояние $[\bar{u}, \sigma]$ среды $[D^+(\rho, \lambda, \mu)] / [D^-(\rho, \lambda, \mu)]$, соответствующее массовой силе $\bar{X}$ и удовлетворяющее уравнениям Ламе (4.25) по граничному условию вида

$$\forall y \in S \quad \lim_{x \rightarrow y} (T(\partial x, n_x) \bar{u}(x))^{\pm} = f(y) \quad (x \in D^{\pm}), \quad (4.29)$$

где $T(\partial x, n_x)$ – оператор напряжения, определяемый формулой

$$T(\partial x, n_x) = \|T_{ij}(\partial x, n(x))\|,$$

где, в свою очередь,

$$T_{ij}(\partial x, n(x)) = \lambda n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n(x)}.$$

В условии (4.29) нормаль в точке x выбирается таким образом, чтобы в пределе $n(x) \rightarrow n(y)$, где $n(y)$ – внешняя нормаль к поверхности S .

Замечание. Во второй граничной задаче перемещения определяются из интегральных уравнений с точностью до смещения тела как жесткого целого. Для устранения этой неопределенности следует обратить внимание на условия существования единственного решения. Например, при построении разрешающей системы следует учесть или неподвижность окрестности некоторой фиксированной точки M , или неподвижность плоскости в случае симметрично деформируемых тел, вытекающую из равенства перемещений граничных точек, и т. д.

Сформулированная ранее постановка граничной задачи (с граничными условиями (4.24)) относится к *третьей*, или *смешанной*, граничной задаче.

Очевидно, что смешанная задача характеризуется заданием на части граничной поверхности условий вида (4.28), а на остальной части – условий вида (4.29).

Замечание. Во второй и смешанной задачах теории упругости для конечной области краевые условия должны быть дополнены условиями разрешимости этих задач, которые состоят в требовании самоуравновешенности приложенной нагрузки. Для смешанной задачи к приложенной нагрузке на S_{σ} необходимо добавлять неизвестные усилия, действующие на S_u :

$$\int_S f(y) dS = 0; \quad \int_S r \times f(y) dS = 0.$$

При наличии нескольких граничных поверхностей необходимо требовать самоуравновешенности приложенной нагрузки в целом, а не для каждой поверхности.

Несмотря на простой вид уравнений Ламе, их решение представляет сложную математическую проблему. Тем не менее они широко используются во многих методах решения задач теории упругости, так как при этом не нужны уравнения совместности деформаций, которые в данном случае удовлетворяются тождественно.

Особое значение имеет *однородная задача*, когда объемные силы можно принять равными нулю. Нахождение решения этой системы при заданных граничных условиях типа (4.26), (4.27) и составляет основную трудность. При действии объемных или массовых сил (например, силы тяжести или центробежной силы) частные решения всегда можно найти. Они не должны удовлетворять граничным условиям и из-за линейности основных уравнений могут быть просто сложены с решением однородной задачи с измененными граничными условиями.

Сделаем некоторые заключения о свойствах искомым перемещений u_i , вытекающих из (4.25). Полагая $F_i^* = 0$, продифференцируем каждое из уравнений (4.25) по соответствующей координате x_i и выполним свертку (суммирование по индексу i). Получаем

$$(\lambda + \mu)\theta_{,ii} + \mu\Delta u_{i,i} = 0. \quad (4.30)$$

Так как

$$\theta_{,ii} = \theta_{,11} + \theta_{,22} + \theta_{,33} = \Delta\theta, \quad \Delta u_{i,i} = \Delta(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) = \Delta\theta,$$

то из (4.30) следует

$$\Delta\theta = 0. \quad (4.31)$$

Таким образом, объемная деформация в упругом изотропном теле при отсутствии массовых сил является *гармонической функцией*, т. е. функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа (4.31).

Возьмем теперь оператор Лапласа от левой части уравнения Ламе, полагая $F_i^* = 0$:

$$(\lambda + \mu)\Delta\theta_{,i} + \mu\Delta\Delta u_{i,i} = 0.$$

Отсюда с учетом (4.31) получим, что $\Delta\theta_{,i} = (\Delta\theta)_{,i} = 0$, следовательно,

$$\Delta\Delta u_{i,i} = 0. \quad (4.32)$$

Таким образом, каждая из компонент вектора перемещений представляет собой *бигармоническую* (удовлетворяющую двойному уравнению Лапласа) *функцию* от координат.

Однако не следует думать, что задача теории упругости может быть сведена к интегрированию системы (4.32) или величина θ может быть найдена с помощью известных методов решения уравнения Лапласа.

Чтобы определить бигармоническую функцию, на границе области необходимо задать два условия, например u_i и $\partial u_i / \partial n$, т. е. нормальную производную от u_i , тогда как для решения системы (4.25) достаточно задать только величины u_i в каждой точке поверхности. Кроме того, относительно легко построить три бигармонические функции, принимающие на границе заданные значения, но они могут не удовлетворять уравнениям (4.25). И наконец, система (4.32) имеет двенадцатый порядок, тогда как исходная система (4.25) — шестого порядка.

Величина θ никогда не бывает задана на границе. Определить ее, решая задачу Дирихле¹, не удастся.

Замечание. Порядок системы можно определить как произведение порядка максимальной производной на количество уравнений.

Следует отметить, что рассмотренная краевая задача для несжимаемых материалов ($\nu = 0,5$) теряет свою эллиптичность и ее решение может быть не единственным.

4.7. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Задача теории упругости может быть поставлена не только в перемещениях, но и в напряжениях. Это удобно, когда на границе тела заданы нагрузки.

4.7.1. Задача в напряжениях как краевая задача для переопределенной системы и ее упрощения

Разрешающая система уравнений задачи в напряжениях состоит из трех уравнений равновесия в форме Коши, шести уравнений совместности деформаций и шести соотношений закона Гука — всего 15 уравнений относительно 12 неизвестных σ_{ij} , ε_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$, к которым присоединяются три граничных условия. Поскольку в эту систему явно перемещения не входят, то естественно ожидать, что в такой формулировке задача в напряжениях имеет единственное решение. В самом деле, теорема единственности задачи в напряжениях при таком подходе доказана А. Н. Коноваловым², а существование решения есть следствие общих теорем теории упругости.

Исключая деформации из уравнений совместности деформаций с помощью закона Гука, получаем для определения неизвестных компонент тензора напряжений такую систему [31, 32]:

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (4.33)$$

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \partial_i \partial_j \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \partial_k f_k - (\partial_i f_j + \partial_j f_i), \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (4.34)$$

Система (4.33)–(4.34), как и ранее, является переопределенной системой уравнений (шесть неизвестных $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = \overline{1,3}$, удовлетворяют девяти уравнениям — трем уравнениям равновесия (4.33) первого порядка и шести уравнениям Бельтрами³ — Мичелла⁴ (4.34) второго порядка.

¹Дирихле Петер Густав (Dirichlet P. G., 1805–1859), немецкий математик. Задача Дирихле — отыскание функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа внутри области и заданной на ее границе. В задаче Неймана на границе задается производная искомой функции.

²Коновалов Анатолий Николаевич, советский и российский ученый, академик РАН; одно из основных направлений его исследований — обоснование математических моделей и численных методов для задач механики сплошной среды.

³Бельтрами Эудженио (Beltrami E., 1835–1900), итальянский математик; известен работами по дифференциальной геометрии и математической физике.

⁴Мичелл Джон Генри (Michell J. H., 1724–1793), видный английский естествоиспытатель.

При выводе уравнений Бельтрами – Мичелла использовались уравнения равновесия (4.33), и потому уравнения (4.34) всегда удовлетворяются, если в качестве σ_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$ взять решения системы (4.33). Обратное не всегда справедливо, поскольку использованное при выводе уравнений Бельтрами – Мичелла дифференцирование уравнений (4.33) привело к расширению класса функций σ_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$. В самом деле, если объемные силы отсутствуют $f_i \equiv 0$, $i = \overline{1,3}$, $a_{ijk} \equiv \text{const}$, тогда любая линейная функция $\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ijk} x_k$ будет решением однородной системы Бельтрами – Мичелла. В то же время однородная система уравнений равновесия (4.33) будет удовлетворена только при условии, что коэффициенты таких линейных комбинаций будут связаны условиями $\sum_{k=1}^3 a_{ijk} = 0$, т. е. $i = \overline{1,3}$ на более узком классе функций. Этот и другие очевидные примеры показывают, что уравнения равновесия (4.33) обязательно должны привлекаться к решению задач теории упругости в напряжениях для того, чтобы выделять из класса решений уравнений Бельтрами – Мичелла те, которые приводят к физически оправданным напряженно-деформированным состояниям твердых тел.

Переопределенность системы (4.33)–(4.34) порождает две важные для теории упругости проблемы, первая из которых заключается в исследовании ее на совместность, а вторая – в выделении из нее основной системы шести уравнений, приводящей к решению задачи в напряжениях.

4.7.2. Выделение базовой системы уравнений

Обратимся к проблеме выделения из (4.33)–(4.34) базовой системы уравнений. Поскольку уравнения Бельтрами – Мичелла имеют второй порядок, а уравнения Коши – первый, то Е. Треффц¹ сделал такой вывод: «Последние в известной степени заменяют недостающие граничные условия (для уравнений (4.34)), так как при шести уравнениях второго порядка с частными производными мы могли бы ожидать, вообще говоря, не трех, как здесь, а шести граничных условий». Таким образом, выбирая в качестве базовой (разрешающей) системы уравнения (4.34) и удовлетворяя уравнениям (4.33) на границе, приходим к такой формулировке задачи в напряжениях.

Определить в области D , занятой упругим телом, решение системы

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \partial_i \partial_j \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \partial_k f_k - (\partial_i f_j + \partial_j f_i); \quad i, j = \overline{1,3},$$

удовлетворяющее на ее границе S следующим условиям:

$$\sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ij} = P_{n_i}, \quad \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} = -f_i; \quad i = \overline{1,3}.$$

В такой формулировке задачи в напряжениях уравнения равновесия используются для выделения единственного решения системы (4.33)–(4.34) на границе.

¹Треффц Эрих (Trefftz E., 1888–1937), немецкий математик, механик.

Замечание. Глубокое и перспективное развитие этой постановки предложено Б. Е. Победрей¹ [31].

Подробно о проблеме решения задач МДТТ в напряжениях изложено в работе [32]. Здесь же отметим, что в качестве базовой системы уравнений для задачи в напряжениях можно взять, помимо указанной ранее, еще и систему, состоящую из трех уравнений равновесия и трех уравнений Бельтрами — Мичелла относительно касательных компонент тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0, \\ \Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \partial_i \partial_j \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} = -(\partial_j f_i + \partial_i f_j); i \neq j = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Итак, для задач МДТТ в напряжениях физически достоверны следующие две формулировки краевых задач: первая состоит в решении системы уравнений Бельтрами — Мичелла при заданных на границе поверхностных силах и уравнений Коши в качестве дополнительных граничных условий, а вторая — в решении системы шести уравнений, состоящей из трех уравнений Коши и трех уравнений Бельтрами — Мичелла относительно касательных компонент тензора напряжений.

4.8. ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Если за искомые неизвестные функции принять компоненты тензора напряжений, то дифференциальные уравнения равновесия при $f_i = 0$ принимают вид

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (4.36)$$

Этих трех уравнений недостаточно для определения напряженного состояния в упругом теле (шести независимых компонент тензора напряжений). В качестве дополнительных уравнений можно использовать уравнения Бельтрами — Мичелла (уравнениями совместности в напряжениях) при отсутствии массовых сил:

$$(1+\nu)\Delta \sigma_{ij} + 3\sigma_{,ij} = 0. \quad (4.37)$$

Напряжения при отсутствии массовых сил, также как компоненты вектора перемещения, обладают свойствами (4.31) и (4.32).

Действительно, суммируя уравнения (4.37) при $i = j$, приходим к уравнению

$$\Delta \sigma = 0, \quad (4.38)$$

где $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ — среднее гидростатическое напряжение.

С учетом (4.38) после применения к уравнениям (4.37) оператора Лапласа следует, что напряжения в статической задаче при отсутствии массовых сил являются бигармоническими функциями:

$$\Delta \Delta \sigma_{ij} = 0. \quad (4.39)$$

¹ Победрей Борис Ефимович (1937–2016), советский и российский ученый в области механики; работы в области теории упругости, вязкоупругости, пластичности, численных методов.

Система уравнений (4.37) имеет 12-й порядок. Производя дифференцирование при их выводе (в уравнениях совместности деформаций), мы искусственно повысили порядок исходной системы. В результате оказывается, что возможные решения уравнений Бельтрами – Мичелла порождают класс функций более широкий, чем решения задач теории упругости. И, как уже было сказано, эти решения могут не удовлетворять уравнениям равновесия.

Для пояснения рассмотрим следующий пример. Пусть напряжения являются произвольными линейными функциями координат $\sigma_{ij} = \alpha_{ijk}x_k$. Так как уравнения (4.37) содержат лишь вторые производные от σ_{ij} , они будут выполняться тождественно при любых значениях α_{ijk} . Но, подставляя напряжения в уравнения (4.36), видим, что при отсутствии массовых сил эти постоянные связаны тремя условиями $\alpha_{ijj} = 0$.

Если по всей поверхности тела заданы усилия, то константы определяются из граничных условий типа (4.24). Но если заданы перемещения точек поверхности (4.26), то сформулировать граничные условия в напряжениях в общем виде невозможно. Иногда, например, в плоской задаче теории упругости, это удается сделать.

4.9. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Достаточно большой класс модельных задач теории упругости удобно решать не в декартовой, а в системах координат, учитывающих особенности, например геометрии исходного объекта исследований. К таким особенностям в первую очередь относится наличие различной симметрии формы. В связи с этим постановку задач теории упругости осуществляют в полярной, цилиндрической или сферической системах координат.

Приведем основные соотношения теории упругости в цилиндрической и сферической системах координат.

Цилиндрические координаты r, φ, z связаны с декартовыми следующим образом (рис. 4.2):

$$x_1 = x = r \cos \varphi, \quad x_2 = y = r \sin \varphi, \quad x_3 = z = z.$$

Линейный элемент задается квадратичной формой

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2.$$

Компоненты вектора перемещений

$$u_1 = u_r, \quad u_2 = u_\varphi, \quad u_3 = u_z.$$

Компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\varphi}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\varphi z}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{zr}.$$

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

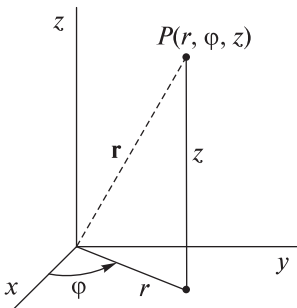


Рис. 4.2. Связь цилиндрических и декартовых координат

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, τ_{rz} связаны с деформациями законом Гука через постоянные Ламе:

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda\theta, \quad \dots, \quad \tau_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, \quad \dots,$$

где относительная объемная деформация $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$.

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \rho F_r = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \rho F_\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho F_z = 0,$$

причем ρf_r , ρf_φ , ρf_z — компоненты вектора объемных сил.

В *сферических координатах* справедливы такие формулы преобразования (рис. 4.3):

$$x_1 = x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = z = R \cos \vartheta$$

с квадратом линейного элемента $(ds)^2 = (dR)^2 + R^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 + R^2 (d\vartheta)^2$.

Перемещения $u_1 = u_R$, $u_2 = u_\varphi$, $u_3 = u_\vartheta$.

Компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{RR}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{R\varphi}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\varphi\vartheta}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{R\vartheta}.$$

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_R}{R} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{u_\varphi}{R}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_R}{R},$$

$$\varepsilon_{R\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R} \right),$$

$$\varepsilon_{R\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial R} - \frac{u_\vartheta}{R} \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{u_\varphi}{R} \operatorname{ctg} \vartheta \right).$$

Компоненты тензора напряжений σ_{RR} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\tau_{R\varphi}$, $\tau_{\varphi\vartheta}$, $\tau_{\vartheta R}$ связаны с деформациями законом Гука так же, как и в цилиндрической системе координат:

$$\sigma_{RR} = 2\mu\varepsilon_{RR} + \lambda\theta, \quad \dots, \quad \tau_{R\varphi} = 2\mu\varepsilon_{R\varphi}, \quad \dots,$$

где $\theta = \varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}$.

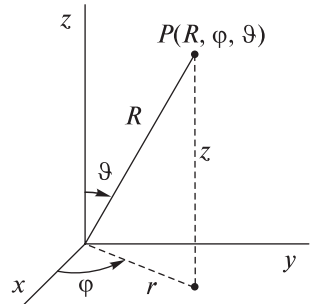


Рис. 4.3. Связь сферических и декартовых координат

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(R^2 \sigma_{RR})}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial(\tau_{R\varphi} \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{R\vartheta}}{\partial \vartheta} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\vartheta\vartheta}}{R} + \rho F_R = 0,$$

$$\frac{1}{R^3} \frac{\partial(R^3 \tau_{R\varphi})}{\partial R} + \frac{1}{R \sin^2 \varphi} \frac{\partial(\tau_{\varphi\vartheta} \sin^2 \vartheta)}{\partial \varphi} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \rho F_\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{R^3} \frac{\partial(R^3 \tau_{R\vartheta})}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial(\sigma_{\vartheta\vartheta} \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R} \sigma_{\varphi\varphi} + \rho F_\vartheta = 0.$$

Приведенные соотношения существенно упрощаются в случае осевой симметрии (тогда исчезают производные $\partial/\partial\varphi$, а также все смешанные производные, содержащие φ).

4.10. ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Большое значение для приложений имеют задачи, в которых искомые функции зависят только от двух координат — плоские задачи теории упругости. Различают два случая, математическое описание которых совпадает: плоское деформированное состояние и плоское напряженное состояние.

4.10.1. Плоское деформированное состояние

Этот случай соответствует формированию напряженно-деформированного состояния в длинном призматическом теле (с продольной осью координат z), нагруженном поверхностными силами, не зависящими от z и не имеющими составляющей вдоль этой оси.

В качестве примера на рис. 4.4 показано нагружение цилиндра линейно распределенными вдоль его образующей усилиями p_1, p_2, p_3 . Упругое тело может быть или бесконечно длинным, или иметь конечную длину, а его края соответствующим образом должны быть закреплены. Тогда в каждом поперечном сечении тела определяющим является плоское деформированное состояние.

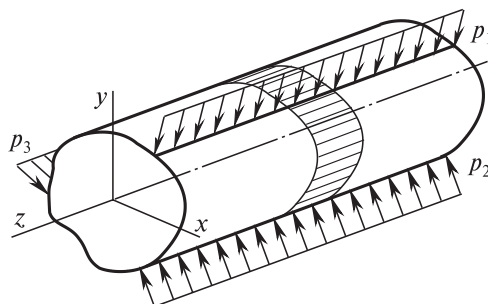


Рис. 4.4. Пример плоско-деформированного состояния

В дальнейшем будут применяться упрощенные соотношения, поэтому индексная (тензорная) форма записи будет использоваться лишь для компактности формул. Перемещения в декартовой системе координат x, y, z обозначим соответственно через u, v, w .

Для плоского деформированного состояния они имеют вид

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = \text{const или } w = 0. \quad (4.40)$$

Кроме того, обращаются в нуль все производные по z (по x_3). Деформации, в том числе и объемная θ , будут следующими:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Остается только одно из условий совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.42)$$

Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$. Формулы обобщенного закона Гука примут вид

$$\sigma_{xx} = 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda \theta, \quad \sigma_{yy} = 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda \theta, \quad \sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \theta. \quad (4.43)$$

Деформации выражаются через напряжения формулами, следующими из (4.6):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}.$$

Легко показать, что при плоской деформации тела число независимых компонентов тензора напряжений равно трем. В самом деле, из закона Гука при условии $\varepsilon_{zz} = 0$ следует

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (4.44)$$

Из уравнений равновесия остаются только следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (4.45)$$

причем объемные силы здесь не учитываются.

Граничные условия для напряжений, если на краю цилиндра заданы напряжения R_x и R_y (первая граничная задача), имеют вид

$$\sigma_{xx} \cos(\nu, x) + \sigma_{xy} \cos(\nu, y) = R_x, \quad \sigma_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_{yy} \cos(\nu, y) = R_y. \quad (4.46)$$

Если речь идет о призматическом теле длиной l , концевые сечения которого оперты, то для них справедливы такие граничные условия:

$$w(x, y, 0) = w(x, y, l) = 0.$$

Тогда силы, действующие в концевых поперечных сечениях:

$$P_z = \int_S \sigma_{zz} dS,$$

причем напряжения интегрируются по поперечному сечению призматического тела.

Уравнения равновесия в перемещениях (уравнения Ламе) (4.25) принимают вид

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad \Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

Соответственно, уравнения совместности в напряжениях (уравнения Бельтрами – Мичелла) (4.37) становятся следующими:

$$\Delta \sigma_{xx} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0,$$

$$\Delta \sigma_{yy} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0,$$

$$\Delta \sigma_{xy} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = 0.$$

Здесь среднее напряжение с учетом выражения (4.27) для σ_z

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1+\nu}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Если у рассмотренного призматического тела конечной длины торцы свободны от нагрузки, то условия плоской деформации нарушаются. Однако и в этом случае для сечений, достаточно удаленных от торцов, можно на основании принципа Сен-Венана полагать деформированное и напряженное состояния соответствующими условиям плоской деформации.

4.10.2. Плоское напряженное состояние

Речь идет о плоском упругом теле малой толщины (пластине), которое нагружается только силами в своей плоскости, причем нормальные напряжения в направлении толщины отсутствуют (рис. 4.5). Приложенные силы равномерно распределены по толщине и, следовательно, не зависят от z (что с хорошим приближением всегда выполняется для тонких пластин). Они также могут быть распределены симметрично относительно срединной плоскости (воображаемая поверхность, которая делит пополам толщину) пластины. Тогда может быть введено их среднее по толщине пластины значение.

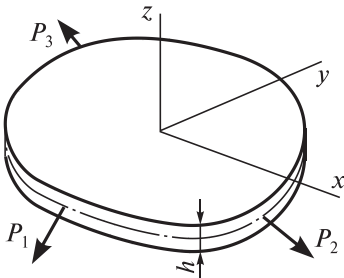


Рис. 4.5. Пример
плосконапряженного
состояния

При плоском напряженном состоянии в плоскости x, y имеются следующие ненулевые компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y).$$

Остальные компоненты являются нулевыми:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Компоненты перемещений u, v и w здесь вообще не зависят от координаты z . При этом кинематические уравнения соответствуют уравнениям (4.41) для плоского деформированного состояния, условия со-

вместности – уравнению (4.42), уравнения равновесия – уравнениям (4.45), а краевые условия – условиям (4.46).

Различие между плоским деформированным и плоским напряженным состояниями проявляются при рассмотрении деформаций, например в законе Гука. Так как $\sigma_{zz} = 0$, то из него следует

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}], \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}], \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}.\end{aligned}\quad (4.47)$$

Обращение (4.47) дает выражения напряжений через деформации

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy},$$

что отличается от соответствующих формул (4.43), (4.44).

Как уже упоминалось, плоское напряженное состояние реализуется не точно, а лишь приближенно в достаточно тонких пластинах.

Файлоном¹ было показано, что можно рассмотреть обобщенный случай и модифицировать приведенные соотношения. При этом предполагается симметричное распределение приложенных сил относительно срединной плоскости пластины. Если предположить, что напряжения σ_{zz} в пластине отсутствуют, а σ_{zx} и σ_{zy} на внешних поверхностях пластины равны нулю, то для перемещений и напряжений вычисляются их средние значения по толщине пластины, например

$$\sigma_{xx}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{xx} dz,$$

где $2h$ – толщина пластины. В результате задача сводится к предыдущей.

Возникающее в такой пластине напряженное состояние часто встречается в приложениях и является важным для практики случаем. Следуя Ляву, его называют *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

4.10.3. Уравнения совместности в напряжениях для плоских задач в напряжениях

Для решения плоской задачи в напряжениях необходимо уравнение совместности деформаций (4.42) представить в напряжениях, воспользовавшись законом Гука (4.47). В результате этой операции получаем

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] - 2 \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Далее выразим производные от касательных напряжений с помощью уравнений равновесия (4.45):

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}$$

¹ Файлон Л. Н. Г. (Filon L. N. G., 1875–1937), английский математик, физик.

и подставим их в предыдущее соотношение. После замены модуля сдвига G выражением $2G = E/(1+\nu)$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] + (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) = 0.$$

После сокращений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0,$$

или, используя оператор Лапласа в плоской системе координат $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, получим

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (4.48)$$

Следовательно, сумма напряжений является гармонической функцией.

4.10.4. Функция напряжений Эри¹

При отсутствии массовых сил уравнения равновесия (4.45) тождественно удовлетворяются введением функции напряжений в соответствии с формулами:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (4.49)$$

Искомую функцию $\Phi(x, y)$ называют *функцией Эри*. Просуммируем нормальные напряжения:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta \Phi.$$

Возьмем оператор Лапласа от обеих частей полученного равенства. Так как должны удовлетворяться уравнения совместности деформаций в напряжениях (4.48), то это приводит к основному дифференциальному уравнению для определения функции Эри:

$$\Delta \Delta \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.50)$$

Уравнение (4.50) впервые получено Максвеллом. Его называют *бигармоническим уравнением*, а его решения — *бигармоническими функциями*.

Появление бигармонического уравнения характерно для теории упругости. Известны его многочисленные частные решения, каждое из которых соответствует определенному напряженному состоянию, удовлетворяющему уравнениям равновесия и совместности.

¹ Эри Джордж Бидделл (Airy G. B., 1801–1892), английский математик и астроном, в 1863 г. опубликовал знаменитую работу, посвященную исследованию напряжений в прямоугольных балках, где ввел функцию напряжений, удовлетворяющую граничным условиям.

Например:

$$x^2, y^2, xy, x^3, y^3, x^2y, xy^2, x^4 - y^4, \cos(\lambda x) \operatorname{ch}(\lambda y), \cos(\lambda y) \operatorname{ch}(\lambda x), \dots$$

Основная трудность процесса построения решения состоит в подборе функций, удовлетворяющих граничным условиям. Наложением их были решены многочисленные задачи теории упругости, имеющие большое практическое значение. Однако общего решения бигармонического уравнения не существует, отсутствуют также общие методы его решения.

Для того чтобы замкнуть математическую краевую задачу по определению функции Эри, необходимо выразить через нее граничные условия и перемещения.

Замечание. Для получения точного решения задачи теории упругости надо найти такие функции, которые помимо удовлетворения дифференциальным уравнениям задачи, например бигармоническому уравнению (4.50), так же строго удовлетворяли бы граничным условиям в каждой точке поверхности твердого тела. Часто это сделать не удастся. Тогда смягчают граничные условия, требуя их выполнения не в каждой точке поверхности, а интегрально. Например, если известно, что на данной грани пластины напряжения отсутствуют, то вместо требования равенства нулю этих напряжений в каждой точке составляют более простое достижимое условие равенства нулю их главного вектора и главного момента. В результате действительная система напряжений на рассматриваемой грани тела заменяется другой системой, статически эквивалентной первой. В соответствии с принципом Сен-Венана эта замена существенно скажется лишь в окрестности рассматриваемого участка поверхности тела, а в достаточном удалении от него решение практически не будет зависеть от упомянутой замены поверхностных нагрузок.

Подробно плоская задача теории упругости рассмотрена во многих учебниках, учебных пособиях. Здесь следует отметить классический труд Н. И. Мусхелишвили [33].

4.11. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НДС ПРОСТЕЙШИХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Пример 1. Предполагаем, что для точки упругого тела известен тензор напряжений (в МПа):

$$T_s = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Требуется:

1) нанести исходные компоненты тензора напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности рассматриваемой точки;

2) определить значения нормального и касательного напряжений на площадке с внешней нормалью ν , если заданы косинусы углов между нормалью и координатными осями $l_i = \cos(\nu, x_i)$: $l_1 = l_2 = 1/2$, $l_3 = \sqrt{2}/2$;

3) разложить заданный тензор напряжений на шаровую и девиаторную части и показать их компоненты на гранях элементарного параллелепипеда;

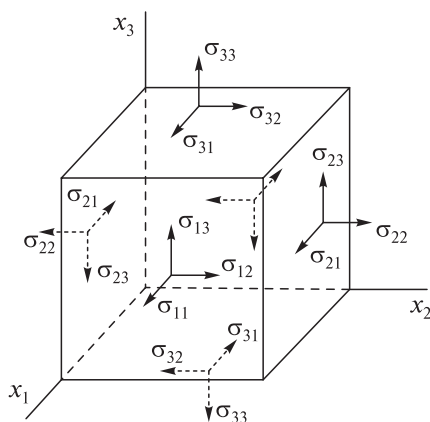


Рис. 4.6. Иллюстративный рисунок к примеру 1

4) вычислить компоненты тензора деформаций, объемную деформацию и интенсивность напряжений и деформаций в этой точке, если $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$;

5) вычислить главные напряжения и максимальные касательные напряжения, приняв в исходном тензоре напряжений $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$.

Решение.

1. Расположение компонент заданного тензора напряжений на гранях выделенного в окрестности точки элемента показано в общем виде на рис. 4.6. Так как все компоненты положительные, то их направление на видимых гранях совпадает с направлением соответствующих координатных осей. На невидимых гранях аналогичные напряжения направлены в проти-

воположные стороны. Для отрицательных напряжений направления необходимо заменять противоположными.

2. Для определения нормального σ_n и касательного τ_n напряжений на заданной косоугольной площадке предварительно вычисляем координатные проекции вектора напряжения σ_v на этой площадке, воспользовавшись формулами $\sigma_{vi} = \sigma_{ij}l_j$. В развернутом виде получаем следующую проекцию вектора напряжения на ось x_1 :

$$\sigma_{v1} = \sigma_{1j}l_j = \sigma_{11}l_1 + \sigma_{12}l_2 + \sigma_{13}l_3 = 2 \cdot (1/2) + 1 \cdot (1/2) + 3 \cdot (\sqrt{2}/2) = 3,62 \text{ МПа.}$$

Вдоль осей x_2, x_3 по аналогии

$$\sigma_{v2} = \sigma_{21}l_1 + \sigma_{22}l_2 + \sigma_{23}l_3 = 1 \cdot (1/2) + 9 \cdot (1/2) + 6 \cdot (\sqrt{2}/2) = 9,24 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{v3} = \sigma_{31}l_1 + \sigma_{32}l_2 + \sigma_{33}l_3 = 3 \cdot (1/2) + 6 \cdot (1/2) + 4 \cdot (\sqrt{2}/2) = 7,33 \text{ МПа.}$$

Модуль вектора полного напряжения на этой площадке получаем через сумму квадратов координатных напряжений:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{v1}^2 + \sigma_{v2}^2 + \sigma_{v3}^2} = \sqrt{3,62^2 + 9,24^2 + 7,33^2} = 12,34 \text{ МПа.}$$

Нормальное напряжение можно вычислить как сумму проекций координатных напряжений на нормаль к площадке:

$$\sigma_n = \sigma_{vi}l_i = 3,62 \cdot (1/2) + 9,24 \cdot (1/2) + 7,33 \cdot (\sqrt{2}/2) = 11,61 \text{ МПа.}$$

Искомые касательные напряжения определяем теперь, используя теорему Пифагора¹:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_v^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{12,34^2 - 11,61^2} = 4,18 \text{ МПа.}$$

¹ Пифагор Самосский (Πυθαγόρας, VI в. до н. э.), древнегреческий мыслитель, математик; занимался изучением целых чисел, доказал известную теорему.

3. Разложение тензора напряжений на девиаторную и шаровую части $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij}$ выглядит в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Шаровое (среднее) напряжение:

$$\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = (2 + 9 + 4)/3 = 5 \text{ МПа}.$$

Подставим это значение и компоненты заданного тензора напряжений в (4.51). Тогда

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Графически это разложение можно показать на гранях элементарного параллелепипеда (рис. 4.7).

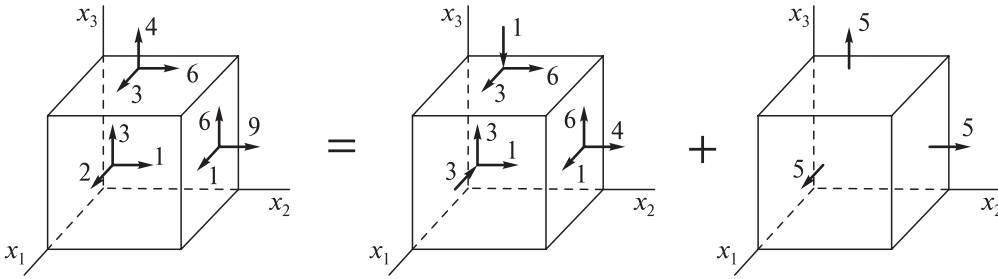


Рис. 4.7. Графическая иллюстрация разложения тензора напряжений

4. Компоненты тензора деформаций вычислим, используя соотношения обобщенного закона Гука. Значения напряжений и модуля Юнга подставляем в мегапаскалях:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [2 - 0,3(9 + 4)] = -9,5 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [9 - 0,3(4 + 2)] = 36 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [4 - 0,3(9 + 2)] = 3,5 \cdot 10^{-6},$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0,3)} = 0,769 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{3(1 - 0,6)} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} = \frac{1}{2 \cdot 0,769 \cdot 10^5} = 0,65 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} = \frac{6}{2 \cdot 0,769 \cdot 10^5} = 3,9 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G} = \frac{3}{2 \cdot 0,769 \cdot 10^5} = 1,95 \cdot 10^{-5}.$$

Определяем объемную деформацию:

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = (-9,5 + 36 + 3,5) \cdot 10^{-6} = 30 \cdot 10^{-6} = 0,003 \, \%.$$

Интенсивности напряжений и деформаций вычисляем по формулам (2.26) и (2.39):

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(2-9)^2 + (9-4)^2 + (4-2)^2 + 6(1^2 + 6^2 + 3^2)} = 13,3 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(-9,5-36)^2 + (36-3,5)^2 + (3,5-(-9,5))^2 + 6(6,5^2 + 39^2 + 19,5^2)} \cdot 10^{-6}, \\ \varepsilon_u &= 0,576 \cdot 10^{-4} = 0,00576 \, \%. \end{aligned}$$

5. Рассмотрим случай плоского напряженного состояния. Для этого примем в исходном тензоре напряжений $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$. Матрица тензора напряжений в этом случае имеет вид

$$T_s = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления главных напряжений составим вековое уравнение

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0.$$

Коэффициентами здесь являются инварианты тензора напряжений

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 2 + 9 + 0 = 11 \text{ МПа,}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \\ &= 2 \cdot 9 + 9 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 1^2 - 0 - 0 = 17 \text{ (МПа)}^2, \end{aligned}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Кубическое уравнение для определения главных напряжений становится следующим:

$$\sigma^3 - 11\sigma^2 + 17\sigma = 0.$$

Отсюда получаем один корень $\sigma = 0$, два других удовлетворяют квадратному уравнению

$$\sigma^2 - 11\sigma + 17 = 0.$$

Его решения: $\sigma = \frac{11 \pm \sqrt{53}}{2}$.

Следовательно, главными напряжениями будут величины

$$\sigma_1 = 9,14 \text{ МПа}, \sigma_2 = 1,86 \text{ МПа}, \sigma_3 = 0.$$

Максимальные касательные напряжения вычисляем по формуле (1.21):

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = (9,14 - 0)/2 = 4,57 \text{ МПа}.$$

Таким образом, по заданному тензору напряжений произведен расчет напряженно-деформированного состояния в точке упругого тела.

Пример 2. Исследовать, какой внешней нагрузке на кромках пластины (рис. 4.8) соответствует функция напряжений Эри

$$\Phi(x, y) = 2x^3, \quad L = 20h.$$

Проверяем пригодность заданной функции для решения предложенной задачи. Подставляем ее в уравнение совместности деформаций плоской задачи теории упругости (4.50):

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0.$$

В результате получаем тождество $0 = 0$. Рассматриваемая функция удовлетворяет бигармоническому уравнению.

По формулам (4.49) вычисляем напряжения, соответствующие заданной функции $\Phi(x, y) = 2x^3$:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(2x^3)}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(2x^3)}{\partial x^2} = 12x, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2(2x^3)}{\partial x\partial y} = 0.$$

Используя граничные условия (4.46)

$$\sigma_{xx}l_x + \sigma_{xy}l_y = R_x, \quad \sigma_{xy}l_x + \sigma_{yy}l_y = R_y, \quad l_x = \cos(\nu, x), \quad l_y = \cos(\nu, y)$$

и вычисляя направляющие косинусы нормалей к граням, определим внешнюю нагрузку на кромках пластины.

Грань BC: нормаль ν_1 параллельна оси y :

$$l_{1x} = \cos(\nu_1, x) = \cos 90^\circ = 0, \quad l_{1y} = \cos(\nu_1, y) = \cos 0^\circ = 1.$$

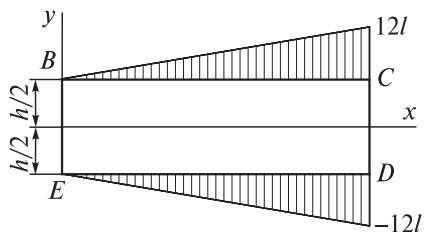


Рис. 4.8. Иллюстративный рисунок к примеру 2

На этой грани выполняется условие $y = h/2$. Тогда

$$R_{1x} = (\sigma_{xx}l_{1x} + \sigma_{xy}l_{1y})\big|_{y=h/2} = 0 + 0 = 0, \quad R_{1y} = (\sigma_{xy}l_{1x} + \sigma_{yy}l_{1y})\big|_{y=h/2} = 0 + 12x \cdot 1 = 12x.$$

Грань CD . Нормаль v_2 параллельна оси x :

$$l_{2x} = \cos(v_2, x) = \cos 0^\circ = 1, \quad l_{2y} = \cos(v_2, y) = \cos 90^\circ = 0.$$

На данной грани $x = 20h$. Следовательно,

$$R_{2x} = (\sigma_{xx}l_{2x} + \sigma_{xy}l_{2y})\big|_{x=20h} = 0, \quad R_{2y} = (\sigma_{xy}l_{2x} + \sigma_{yy}l_{2y})\big|_{x=20h} = 0.$$

Грань DE . Нормаль v_3 параллельна оси y , но направлена в противоположную сторону:

$$l_{3x} = \cos(v_3, x) = 0, \quad l_{3y} = \cos(v_3, y) = \cos 180^\circ = -1.$$

На грани $y = -h/2$. Поэтому

$$R_{3x} = (\sigma_{xx}l_{3x} + \sigma_{xy}l_{3y})\big|_{y=-h/2} = 0, \quad R_{3y} = (\sigma_{xy}l_{3x} + \sigma_{yy}l_{3y})\big|_{y=-h/2} = -12x.$$

Грань EB . Нормаль v_4 параллельна оси x , но направлена в противоположную сторону:

$$l_{4x} = -1, \quad l_{4y} = 0.$$

На грани $x = 0$. Отсюда

$$R_{4x} = (\sigma_{xx}l_{4x} + \sigma_{xy}l_{4y})\big|_{x=0} = 0, \quad R_{4y} = (\sigma_{xy}l_{4x} + \sigma_{yy}l_{4y})\big|_{x=0} = 0.$$

В результате на всех гранях нагрузка R_x отсутствует. Эпюры вычисленной внешней распределенной нагрузки R_y показаны на гранях пластины (см. рис. 4.8). При наличии обеих ненулевых нагрузок эпюры R_x и R_y нужно строить отдельно.

Пример 3. Проверить пригодность функции напряжений

$$\Phi(x, y) = ax^3 + bx^2y^2 + cy^4$$

для решения плоской задачи теории упругости; внести соответствующие коррективы, если функция окажется непригодной, и записать ее окончательный вид.

Заданная функция $\Phi(x, y)$ должна удовлетворять бигармоническому уравнению (4.50):

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0.$$

Производные, входящие в это уравнение, будут следующими:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(ax^3 + bx^2y^2 + cy^4) = 0,$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = \frac{\partial^4}{\partial y^4}(ax^3 + bx^2y^2 + cy^4) = 24c,$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} = \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}(ax^3 + bx^2y^2 + cy^4) = 4b.$$

Отсюда $\Delta\Delta\Phi = 24c + 8b = 0$.

Следовательно, чтобы функция напряжений была пригодна для решения плоской задачи теории упругости, должно выполняться условие $b = -3c$.

Окончательно функцию напряжений Эри принимаем в виде

$$\Phi(x, y) = ax^3 - 3cx^2y^2 + cy^4.$$

Пример 4. Проверить возможность нахождения тела в условиях плоского деформированного состояния (4.40) при следующих компонентах тензора деформаций:

$$\varepsilon_{xx} = 5(x^2 + y^2), \quad \varepsilon_{yy} = 5y^2, \quad \varepsilon_{xy} = 5xy.$$

Проверяем выполнение уравнения совместности деформаций (4.23):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Для этого вычисляем производные от заданных деформаций и подставляем их в это уравнение: $10 + 0 - 2 \cdot 5 = 0$. Уравнение выполняется, следовательно, заданные функции отвечают плоскому деформированному состоянию.

Сегодня по теории упругости издано много литературы. Отметим некоторые классические издания [34–45].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Обобщенный закон Гука для изотропного тела:

- 1) $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}$;
- 2) $U = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$;
- 3) $\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} - 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0$.

2. Обобщенный закон Гука для анизотропного тела:

- 1) $U = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$;
- 2) $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$;
- 3) $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}$.

3. Формула Клапейрона:

- 1) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right]$;
- 2) $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$;
- 3) $U = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$.

4. Полная потенциальная энергия деформации U :

- 1) $U = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)$;
- 2) $U = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$;
- 3) $U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$.

5. Температура связывает у напряжений и деформаций:

- 1) девиаторы;
- 2) шаровые части;
- 3) интенсивности.

6. При отсутствии массовых сил перемещения функции:

- 1) гармонические;
- 2) бигармонические;
- 3) обобщенные.

7. Потенциальная энергия изменения формы U_f :

- 1) $U_f = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)$;
- 2) $U_f = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$;
- 3) $U_f = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$.

8. Потенциальная энергия изменения объема U_V :

- 1) $U_V = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)$;
- 2) $U_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$;
- 3) $U_V = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$.

9. Уравнения Ламе – это уравнения равновесия:

- 1) в напряжениях;
- 2) деформациях;
- 3) перемещениях.

10. Уравнения Бельтрами – Мичелла – это уравнения:

- 1) равновесия;
- 2) неразрывности;
- 3) выражения для упругого потенциала.

11. Уравнения Ламе:

- 1) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right]$;
- 2) $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$;
- 3) $(\lambda + \mu) \theta_{,i} + \mu \Delta u_i + \rho F_i = 0$.

12. Уравнения Бельтрами – Мичелла:

- 1) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right]$;
- 2) $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$;
- 3) $\Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \partial_i \partial_j \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \partial_k f_k - (\partial_i f_j + \partial_j f_i), i, j = \overline{1,3}$.

13. При отсутствии массовых сил перемещения удовлетворяют уравнениям:
 - 1) гармоническим;
 - 2) бигармоническим;
 - 3) Бесселя.
14. Граничные условия задаются на поверхности:
 - 1) деформированной;
 - 2) недеформированной;
 - 3) на обеих.
15. При простом нагружении направляющий тензор напряжений:
 - 1) постоянен;
 - 2) изменяется;
 - 3) равен нулю.
16. При сложном нагружении направляющий тензор напряжений:
 - 1) постоянен;
 - 2) изменяется;
 - 3) равен нулю.
17. При простой деформации направляющий тензор деформаций:
 - 1) постоянен;
 - 2) изменяется;
 - 3) равен нулю.
18. При сложной деформации направляющий тензор деформаций:
 - 1) постоянен;
 - 2) изменяется;
 - 3) равен нулю.
19. На поверхности тела выполняются:
 - 1) уравнения равновесия;
 - 2) начальные условия;
 - 3) граничные условия.
20. Постановка задачи теории упругости в перемещениях. Первая, вторая и смешанная задачи теории упругости в перемещениях.
21. Постановка задачи теории упругости в напряжениях. Переопределенная система уравнений.
22. Напряжения $\sigma_{zz} = 0$ в случае плоского состояния:
 - 1) деформированного;
 - 2) напряженного;
 - 3) в обоих случаях.
23. При плоском деформированном состоянии:
 - 1) $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$;
 - 2) $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$;
 - 3) $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.
24. При плоском деформированном состоянии:
 - 1) $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$;
 - 2) $\varepsilon_{zz} = \text{const}$, $\varepsilon_{xz} = \text{const}$, $\varepsilon_{yz} = \text{const}$;
 - 3) $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(x, y)$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}(x, y)$, $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz}(x, y)$.

25. Уравнения совместности при плоском напряженном состоянии:

$$1) \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$2) \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$3) \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

26. При плоской деформации число независимых компонентов напряжений:

1) три;

2) четыре;

3) шесть.

27. Уравнения равновесия при плоской деформации:

$$1) \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$2) \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0;$$

$$3) \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

28. При плоском напряженном состоянии:

$$1) \sigma_{xx} = \text{const}, \sigma_{yy} = \text{const}, \sigma_{zz} = \text{const};$$

$$2) \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0;$$

$$3) \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z), \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y, z), \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y, z).$$

29. Функция напряжений Эри вводится соотношениями:

$$1) \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0;$$

$$2) \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$3) \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

30. Функция напряжений Эри удовлетворяет уравнению:

1) гармоническому;

2) бигармоническому;

3) Лапласа.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Показать, что для изотропной упругой среды:

$$a) \frac{1}{1+\nu} = \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu};$$

$$b) \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} = \frac{3k\nu}{1+\nu};$$

$$c) \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu};$$

$$d) 2(1+\nu)\mu = 3k(1-2\nu).$$

2. Пусть ось x_1 — ось симметрии порядка $N = 2$. Определить вид матрицы упругих постоянных $C_{\alpha\beta}$, учитывая, что $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$.

Ответ:

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}.$$

3. Если оси, которые составляют равные углы с координатными осями, являются упругой симметрией порядка $N = 3$, показать, что имеется двенадцать независимых упругих постоянных и матрица упругих постоянных имеет вид

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{13} & C_{11} & C_{12} & C_{16} & C_{14} & C_{15} \\ C_{12} & C_{13} & C_{11} & C_{15} & C_{16} & C_{14} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{43} & C_{41} & C_{42} & C_{46} & C_{44} & C_{45} \\ C_{42} & C_{43} & C_{41} & C_{45} & C_{46} & C_{44} \end{bmatrix}.$$

4. Для упругого тела, у которого ось x_3 является осью упругой симметрии порядка $N = 6$, показать, что только ненулевые упругие константы следующие:

$$C_{11} = C_{22}, C_{33}, C_{55} = C_{44}, C_{66} = 0,5(C_{11} - C_{12}), C_{13} = C_{23}.$$

5. Пусть поле напряжений для среды имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & x_1 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь σ_{12} — функция от x_1 и x_2 .

Если уравнения равновесия удовлетворяются при отсутствии массовых сил и если вектор напряжения в плоскости $x_1 = 1$ задан как $\mathbf{t}^{(e_1)} = (1 + x_2)\mathbf{e}_1 + (6 - x_2)\mathbf{e}_2$, определить σ_{12} как функцию x_1 и x_2 .

Ответ: $\sigma_{12} = x_1 - x_2 + 5$.

6. Поле перемещений задается через некоторый вектор q_i следующим уравнением:

$$u_i = (2(1 - \nu)q_{i,jj} - q_{j,ji})/G.$$

Показать, что уравнения Ламе удовлетворяются, если массовые силы равны нулю и q_i — бигармонические функции такие, что $q_{i,jjkk} = 0$.

Если $q_1 = x_2/r$ и $q_2 = -x_1/r$, где $r^2 = x_i x_i$, определить результирующее поле напряжений.

Ответ:

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = 6Qx_1x_2/r^5; \quad \sigma_{33} = 0; \quad \sigma_{12} = 3QG(x_2^2 - x_1^2)/r^5;$$

$$\sigma_{13} = -\sigma_{31} = 3Qx_2x_3/r^5; \quad \sigma_{23} = 0; \quad Q = 4(1-\nu)/G.$$

7. Показать, что $\Phi(x_1, x_2) = x_1^4x_2 + 4x_1^2x_2^3 - x_2^5$ представляет собой функцию напряжений Эри. Вычислить тензор напряжений для этого случая в предположении плоского деформированного состояния с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$.

Ответ:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 24x_1^2x_2 - 20x_2^3 & -4x_1^3 - 24x_1x_2^2 & 0 \\ -4x_1^3 - 24x_1x_2^2 & 12x_1^2x_2 + 8x_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 9x_1^2x_2 - 3x_2^3 \end{bmatrix}.$$

8. Функция напряжений Эри имеет вид: $\Phi(x_1, x_2) = Dx_1^2x_2^3 + Fx_2^5$.

Показать, что в этом случае $F = -D/5$.

9. Составная функция напряжений имеет вид $\Phi = \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_5$, где $\Phi(x_1, x_2) = D_5(x_1^2x_2^3 - 0,2x_2^5) + 0,5B_3x_1^2x_2 + 0,5A_2x_1^2x_2$.

Показать, что для данной функции напряжений компоненты напряжений определяются так:

$$\sigma_{11} = D_5(6x_1^2x_2 - 4x_2^3); \quad \sigma_{22} = 2D_5x_2^3 + B_3x_2 + A_2; \quad \sigma_{12} = -6D_5x_1x_2^2 - B_3x_1.$$

10. Балка прямоугольного поперечного сечения единичной ширины и длины $2L$ нагружена распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 4.9). По обоим концам балки действуют поперечные силы V .

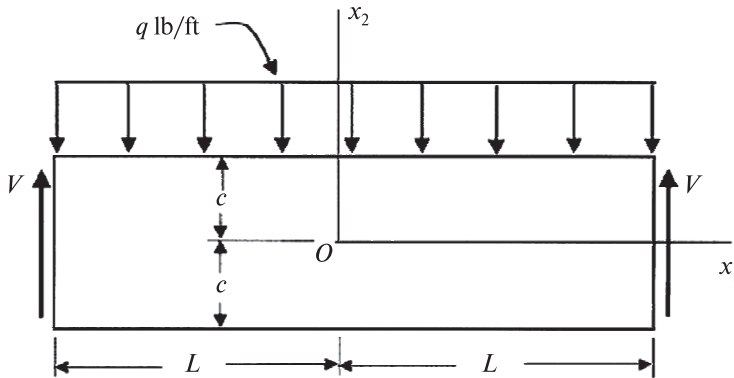


Рис. 4.9

Перечислить шесть граничных условий для этой балки, которым должны удовлетворять напряжения.

Ответ:

1) $\sigma_{22} = -q$, $x_2 = +c$; 2) $\sigma_{22} = 0$, $x_2 = -c$; 3) $\sigma_{12} = 0$, $x_2 = \pm c$;

4) $\int_{-c}^c \sigma_{12} dx_2 = qL$, $x_1 = \pm L$; 5) $\int_{-c}^c \sigma_{11} dx_2 = 0$, $x_1 = \pm L$; 6) $\int_{-c}^c \sigma_{11} x_2 dx_2 = qL$, $x_1 = \pm L$.

11. Используя граничные условия 1, 2 и 3, перечисленные в задании 10, показать, что для выражений напряжений в задании 9 требуется, чтобы

$$A_2 = -q/2; \quad B_3 = -3q/(4c); \quad D_5 = q/(8c^3).$$

В этом случае формулы для напряжений имеют вид

$$\sigma_{11} = \frac{q}{2I} \left(x_1^2 x_2 - \frac{2}{3} x_2^3 \right); \quad \sigma_{22} = \frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} x_2^3 - c^2 x_2 - \frac{2}{3} c^3 \right); \quad \sigma_{12} = -\frac{q}{2I} (x_1 x_2^2 + c^2 x_1).$$

Здесь $I = (2/3)c^3$ — плоский момент инерции поперечного сечения балки.

12. Показать, что, используя напряжения, вычисленные в задании 11, граничные условия 4 и 5 задания 10 удовлетворяются, а граничное условие 6 — нет.

13. Продолжим задания 11 и 12. Для выполнения граничного условия 6 в функцию напряжений необходимо добавить дополнительное слагаемое:

$$\Phi = D_3 x_2^3.$$

Показать, что из граничного условия 6 следует:

$$D_3 = \frac{3q}{4c} \left(\frac{1}{15} - \frac{L^2}{6c^2} \right).$$

Поэтому получаем

$$\sigma_{11} = \frac{q}{2I} \left(x_1^2 - \frac{2}{3} x_2^2 + \frac{1}{15} c^2 - \frac{1}{6} L^3 \right) x_2.$$

Глава 5

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В предыдущих главах мы уже встречались с такими понятиями, как работа и энергия, которые играют важную роль в общей механике. Эти величины определенным образом связаны между собой. Силы в механической системе могут совершать работу, система может обладать энергией. На понятии энергии основаны многие методы механики сплошной среды, в том числе вариационные. Целесообразность их применения следует из того, что энергия представляет собой хорошо изученную инвариантную величину и поэтому не зависит от системы координат. Все различные энергетические принципы взаимосвязаны друг с другом, так как в их основе лежат фундаментальные законы механики сплошной среды.

Кроме того, многие известные численные методы механики, например самый популярный — метод конечных элементов, базируются на вариационных принципах механики.

5.1. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Применительно к твердым телам *начало принципа возможных перемещений* было сформулировано Ж. Лагранжем в его аналитической механике (1788). К упругим телам (стержневой системе) этот принцип впервые был применен, наверное, С. Пуассоном в 1833 г. Подобно тому, как для твердых тел принцип возможных (виртуальных) перемещений позволяет получить уравнения равновесия, так и для упругих тел он может заменить геометрический вывод уравнений равновесия аналитическим (см. гл. 2, 4).

Рассмотрим тело объемом V с поверхностью $S = S_\sigma + S_u$, которое находится в равновесии под действием приложенных внешних поверхностных R_i и объемных F_i сил. В теле возникают перемещения u_i , напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} , являющиеся функциями внешних нагрузок.

Изменяем внешние силы на бесконечно малые величины dR_j, dF_j . Тогда действительное перемещение u_i получает бесконечно малое действительное приращение du_i . Это приращение функции представляет собой перемещения $u_i = u_i(R_j, F_j)$ и произойдет за счет изменения аргументов, которыми являются нагрузки.

Рассмотрим теперь множество перемещений какой-либо произвольной точки, которые могли бы быть сообщены ей в данный момент времени t в соответствии

с наложенными на тело внешними связями, но не совершаются фактически вследствие неизменности внешних сил.

Возможным (виртуальным) перемещением называется любое бесконечно малое воображаемое перемещение, которое может совершить точка в данный фиксированный момент времени в соответствии с наложенными на нее связями.

Возможное перемещение, в отличие от действительного du_i , обозначается как δu_i , где символ δ носит название *вариации* и для него приняты те же правила, что и для оператора-дифференциала d . Следует лишь помнить, что эти правила не распространяются на аргументы R_j, F_j функции $u_i = u_i(R_j, F_j)$. Другими словами, вариация функции (в данном случае u_i) — это изменение вида самой функции при фиксированных координатах рассматриваемой точки.

Пусть перемещения u_i получают виртуальные приращения δu_i , следствием которых являются *виртуальные деформации* $\delta \varepsilon_{ij}$. Предполагаем, что вариации δu_i достаточно малы и не влияют на равновесие внешних сил и внутренних напряжений. Они совместимы с условиями закрепления тела на границах и условиями неразрывности внутри тела. Это означает, что δu_i — *кинематически допустимые функции*, т. е. $\delta u_i = 0$ на S_u . В остальном возможные перемещения могут быть произвольными непрерывными функциями.

Для возможных деформаций справедливо равенство

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} [(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}]. \quad (5.1)$$

В (5.1) применялось правило перестановки

$$\delta(u_{i,j}) = (\delta u_i)_{,j}. \quad (5.2)$$

В соответствии с гипотезой сплошности тело может рассматриваться как система материальных точек. Поэтому к нему можно применить *принцип возможных перемещений Лагранжа*: для равновесия системы материальных точек со стационарными неосвобождающими и идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил на любых возможных перемещениях системы была равна нулю.

Работа поверхностных и массовых сил на виртуальных перемещениях называется *виртуальной (возможной) работой внешних сил* и определяется с помощью следующей суммы интегралов:

$$\delta A = \int_{S_\sigma} R_i \delta u_i dS + \int_V \rho F_i \delta u_i dV. \quad (5.3)$$

При этом следует помнить, что действительные силы уже полностью приложены к телу до появления возможных перемещений и с ними не связаны.

Аналогично *виртуальная работа внутренних сил* определяется как работа действительных внутренних напряжений на возможных деформациях:

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (5.4)$$

Если тело находится в равновесии, то из этого условия следует равенство виртуальных работ внутренних сил. Для доказательства этого первый интеграл в (5.3)

с помощью теоремы Гаусса – Остроградского преобразуется в объемный, учитывая, что $R_i = \sigma_{ij} l_j$:

$$\int_{S_\sigma} R_i \delta u_i dS = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} l_j \delta u_i dS = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV.$$

Тогда

$$\delta A = \int_V [(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} + \rho F_i \delta u_i] dV.$$

Для первого слагаемого подынтегральной функции с учетом правила перестановки (5.2) следует

$$(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}.$$

Отсюда

$$\delta A = \int_V (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV.$$

Первый из интегралов равен нулю, поскольку выполняются уравнения равновесия тела $\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0$.

С другой стороны, вследствие симметрии тензора напряжений и с учетом выражения (5.1) для вариации деформаций имеем

$$\sigma_{ij} \delta(u_{i,j}) = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Поэтому

$$\delta A = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

где интеграл представляет собой виртуальную работу внутренних сил (5.4). Подставляя сюда виртуальную работу внешних сил, окончательно получаем

$$\int_{S_\sigma} R_i \delta u_i dS + \int_V \rho F_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \text{ или } \delta A = \delta W. \quad (5.5)$$

Таким образом, виртуальная работа внешних сил, действующих на тело, находящееся в равновесии, равна работе внутренних напряжений на соответствующих виртуальных деформациях.

Отметим, что уравнение (5.5) справедливо как для упругих, так и для неупругих тел, поскольку при его выводе до сих пор не был использован закон Гука.

Покажем, что из равенства работ (5.5) следуют условия равновесия рассматриваемого тела. Для этого подынтегральную функцию в правой части переписываем в следующем виде:

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta(u_{i,j}) = (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \delta u_i.$$

Тогда уравнение (4.5) примет вид

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} R_i \delta u_i dS.$$

Используя формулу Гаусса – Остроградского преобразования объемного интеграла в поверхностный, получаем

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} (R_i - \sigma_{ij} l_j) \delta u_i dS = 0. \quad (5.6)$$

Поскольку вариации δu_i произвольны, то для выполнения равенства (5.6) нужно приравнять к нулю подынтегральные выражения в скобках. В результате получаем известные дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия в напряжениях, которые в данном случае являются следствием вариационного уравнения Лагранжа (5.5). Поэтому при решении задач с помощью вариационного принципа Лагранжа нет необходимости заранее удовлетворять статические граничные условия в напряжениях, потому что они выполняются автоматически.

Для упругого поведения материалов возможная работа деформаций соответствует возможной энергии деформаций тела δU_0 :

$$\delta W = \delta U_0 = \int_V \delta U dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

где U – удельная энергия упругой деформации тела, обладающая упругим потенциалом $\partial U / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$.

Следствие. Из соотношений (5.5) с учетом того что внешние силы и внутренние напряжения не варьируются, получаем

$$\int_V \delta_\varepsilon (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_\sigma} \delta_\varepsilon (R_i u_i) dS - \int_V \delta_\varepsilon (\rho F_i u_i) dV = 0.$$

Символ δ_ε , показывающий, что варьируются только деформации и перемещения, можно вынести за знак интеграла. Тогда

$$\delta_\varepsilon \left[\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_\sigma} R_i u_i dS - \int_V \rho F_i u_i dV \right] = 0.$$

Первый интеграл в скобках представляет собой потенциальную энергию деформации, а остальные – потенциал внешних сил. Суммарная величина в скобках обозначается через Π и называется потенциальной энергией тела:

$$\Pi = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_\sigma} R_i u_i dS - \int_V \rho F_i u_i dV. \quad (5.7)$$

На основании формулы (5.7) предыдущему уравнению можно придать такой вид:

$$\delta_\varepsilon \Pi = 0. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) выражает так называемый *принцип минимума потенциальной энергии*: при заданных внешних силах и граничных условиях действительные перемещения u_i таковы, что для любых возможных перемещений первая вариация полной потенциальной энергии равна нулю, т. е. полная потенциальная энергия Π имеет стационарное значение.

Можно показать, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимальное значение, т. е. вторая вариация $\delta^2 \Pi \geq 0$ (теорема Лагранжа – Дирихле). Следовательно, из всех перемещений, удовлетворяющих за-

данным граничным условиям, только действительные перемещения, отвечающие состоянию равновесия, дают минимальное значение потенциальной энергии системы.

Таким образом, при заданной нагрузке на тело надо найти такие функции u_i , при которых выполняется уравнение (5.8). При этом будут найдены истинные перемещения тела и решена задача теории упругости в перемещениях. В этом и состоит вариационная формулировка задачи теории упругости с помощью принципа Лагранжа.

Справедлива и обратная теорема: если потенциальная энергия для некоторого поля перемещений достигает абсолютного минимума, удовлетворяющего граничным условиям в перемещениях, то это поле должно удовлетворять уравнениям равновесия внутри тела и граничным условиям в напряжениях [45].

5.2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ СИЛ КАСТИЛЬЯНО

Вместо того чтобы рассматривать возможные перемещения от положения равновесия, можно, как было предложено К. А. Кастильяно, варьировать напряжения. В отличие от принципа Лагранжа, в котором состояние тела характеризуется *функциями перемещений*, в принципе Кастильяно определяющими являются *напряжения*. В соответствии с этим принципом вычисляют возможную работу, которую совершают *виртуальные силы* δF_i , δR_i , и *напряжения* $\delta \sigma_{ij}$ на действительных перемещениях u_i независимо от действительных сил и напряжений, удовлетворяющих равновесию тела. В каждой точке тела заданы перемещения и соответствующее им напряженное состояние, удовлетворяющее уравнениям равновесия внутри тела и граничным условиям на поверхности S_σ .

Виртуальные силы δF_i , δR_i и *виртуальные напряжения* $\delta \sigma_{ij}$ — статически допустимые функции, для которых справедливы уравнения равновесия внутри тела и граничные условия на его поверхности, т. е.

$$\delta \sigma_{ij,j} + \rho \delta F_i = 0 \text{ в объеме } V, \quad \delta \sigma_{ij} l_j = \delta R_i = 0 \text{ на } S. \quad (5.9)$$

Величины $\delta \sigma_{ij}$ и δR_i на S_u являются произвольными. В каждой задаче теории упругости таких систем напряжений существует бесконечно много, поскольку эта задача статически неопределима. Действительно, в три уравнения равновесия (5.9) входит шесть неизвестных функций напряжений. *Принцип Кастильяно из всех статически возможных напряжений выделяет такие, которые обеспечивают не только равновесие, но и совместность деформаций тела* и, таким образом, являются единственным искомым решением задачи теории упругости.

Предположим дополнительно, что вариации δR_i принимают нулевые значения на той части поверхности, где заданы поверхностные силы R_i , т. е. на S_σ .

Для формулировки принципа Кастильяно определяется величина виртуальной дополнительной работы δA^* внешних виртуальных сил и виртуальной дополнительной работы виртуальных внутренних напряжений δW^* :

$$\delta A^* = \int_{S_u} u_i \delta R_i dS + \int_V u_i \rho \delta F_i dV, \quad \delta W^* = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV. \quad (5.10)$$

Покажем, что аналогично, как и при выводе принципа Лагранжа, для тела, находящегося в равновесии, работы (5.10) равны между собой. Это следует, например,

из вариационных уравнений равновесия (5.9). Умножив их на u_i , просуммировав по i и проинтегрировав по объему тела, получаем

$$\int_V u_i (\delta \sigma_{ij,j} + \rho \delta F_i) dV = 0. \quad (5.11)$$

Преобразуем первое слагаемое в подынтегральной функции следующим образом:

$$u_i \delta \sigma_{ij,j} = (u_i \delta \sigma_{ij})_{,j} - u_{i,j} \delta \sigma_{ij}.$$

Тогда на основании теоремы Гаусса — Остроградского и вариационных граничных условий в уравнениях (5.9) из формулы (5.11) следует

$$\int_S u_i \delta R_i dS - \int_V u_{i,j} \delta \sigma_{ij} dV + \int_V u_i \rho \delta F_i dV = 0. \quad (5.12)$$

Для первого слагаемого интегрирование по всей поверхности тела S следует заменить интегрированием по части поверхности S_u , так как возможные поверхностные силы на границе S_σ обращаются в нуль. Благодаря симметрии $\delta \sigma_{ij}$ для второго интеграла в формуле (5.12) следует такое равенство:

$$\int_V u_{i,j} \delta \sigma_{ij} dV = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV.$$

Из (5.12) окончательно получаем выражение

$$\int_{S_u} u_i \delta R_i dS + \int_V u_i \rho \delta F_i dV = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV, \text{ или } \delta A^* = \delta W^*. \quad (5.13)$$

Данное выражение представляет собой математическую формулировку *принципа возможных сил* для любого деформируемого тела: при всяком виртуальном изменении напряженного состояния тела сумма работ приращений всех внешних сил δF_i , δR_i , производимых на действительных перемещениях тела, равна приращению дополнительной работы возможных внутренних напряжений.

Как правило, $\delta F_i = 0$, поскольку объемные силы обычно задаются постоянными. Равенство (5.13) справедливо для любого упругого тела независимо от свойств материала, и если оно выполнено, то тело находится в равновесии.

Следствие. Так как перемещения и деформации не варьируются, то из принципа возможных сил (5.13), вынося знак вариации за скобку, получаем следующее выражение:

$$\delta_\sigma \left[\int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \int_{S_u} u_i R_i dS - \int_V u_i \rho F_i dV \right] = 0. \quad (5.14)$$

Здесь индекс при δ_σ указывает, что варьируются только напряжения и силы. Первый интеграл в скобках представляет собой дополнительную потенциальную энергию деформации, а остальные — дополнительный потенциал внешних сил. Суммарная величина обозначается через Π^* и называется *дополнительной потенциальной энергией тела*:

$$\Pi^* = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_u} R_i u_i dF - \int_V \rho F_i u_i dV. \quad (5.15)$$

С помощью выражения (5.15) уравнению (5.14) можно придать следующий вид:

$$\delta_{\sigma} \Pi^* = 0.$$

Равенство нулю первой вариации дополнительной потенциальной энергии системы означает, что она принимает стационарное значение для тех сил и напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, которые соответствуют истинному деформированному состоянию.

На основании этого принципа можно также заключить, что в случае устойчивого равновесия экстремальное значение Π^* соответствует минимуму (принцип Кастильяно). Следовательно, среди всех напряженных состояний, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, действительным является такое, для которого дополнительная энергия достигает минимума.

5.3. ТЕОРЕМЫ КАСТИЛЬЯНО

На принципе возможной работы (или на минимальных принципах) основаны некоторые важные теоремы о работе, которые имеют большое практическое значение, например в сопротивлении материалов и строительной механике. Они применяются для нахождения деформаций в статически определимых и статически неопределимых системах.

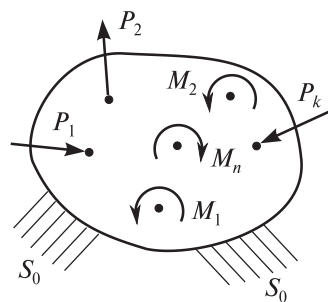
Рассматриваем упругое тело, которое находится в состоянии устойчивого равновесия и неподвижно опирается на две малые части своей поверхности (рис. 5.1). Объемными силами пренебрегаем, нагрузка задается поверхностными силами в виде сосредоточенных сил P_k и моментов M_n , реализуемых, например, парой сил.

Перемещения, соответствующие силам P_k , обозначаем через u_k , повороты φ_n соответствуют крутящим моментам M_n . Тогда напряжения и деформации, а также энергия деформации определяются как функции u_k и φ_n : $U = U(u, \varphi)$.

Первая теорема Кастильяно заключается в том, что

$$\frac{\partial U}{\partial u_k} = P_k, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_n} = M_n. \quad (5.16)$$

Этот вывод следует из принципа возможных перемещений, если рассматривать только одно возможное перемещение δu_k в направлении силы P_k . Тогда справедливо соотношение $\delta U = P_k \delta u_k$, откуда предельным переходом получается первое соотношение (5.16). Второе из этих соотношений получается аналогичным образом.



Первую теорему Кастильяно можно использовать, например, для расчета статически неопределимых систем, но ее значение для практических приложений невелико.

Большое значение имеет *вторая теорема Кастильяно*. Для линейно-упругих материалов она записывается следующим образом:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_k} = u_k, \quad \frac{\partial U^*}{\partial M_n} = \varphi_n,$$

Рис. 5.1. К выводу теоремы Кастильяно

причем теперь $U^* = U^*(P, M)$ означает энергию деформации, выраженную через внешние силы и моменты (в предположении справедливости закона Гука).

Эта теорема позволяет очень просто вычислять деформации в точках приложения сил для статически определимых и статически неопределимых конструкций. Для расчета деформаций в произвольных точках вводятся фиктивные вспомогательные силы (моменты), которые затем полагаются равными нулю.

5.4. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ БЕТТИ

Для приложений полезной является *теорема взаимности Бетти*¹, которая связывает между собой различные состояния равновесия линейно-упругого тела при разнообразных нагрузках. Рассмотрим для упругого тела (с объемом V и поверхностью S) два состояния равновесия, названные соответственно I и II, которые характеризуются величинами $u_i^I, \varepsilon_{ij}^I, \sigma_{ij}^I$, вызванными силами ρF_i^I и R_i^I , а также $u_i^II, \varepsilon_{ij}^II, \sigma_{ij}^II$, вызванными силами ρF_i^II и R_i^II . Тогда справедливо тождество

$$\sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^II = \sigma_{ij}^II \varepsilon_{ij}^I, \quad (5.17)$$

которое непосредственно может быть проверено при линейном соотношении между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij}^I = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^I, \quad \sigma_{ij}^II = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^II.$$

Подставив последние соотношения в равенство (5.17) при симметрии модулей упругости $E_{ijkl} = E_{klij}$, получаем

$$\sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^II = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^I \varepsilon_{ij}^II = E_{klij} \varepsilon_{ij}^II \varepsilon_{kl}^I = \sigma_{kl}^II \varepsilon_{kl}^I = \sigma_{ij}^II \varepsilon_{ij}^I.$$

Из (5.17) следует такое равенство:

$$\int_V \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^II dV = \int_V \sigma_{ij}^II \varepsilon_{ij}^I dV, \quad (5.18)$$

которое уже является одной из форм теоремы взаимности Бетти.

Левая часть равенства (5.18) преобразуется следующим образом:

$$\int_V \sigma_{ij}^I \frac{1}{2} (u_{i,j}^II + u_{j,i}^II) dV = \int_V \sigma_{ij}^I u_{i,j}^II dV = \int_V (\sigma_{ij}^I u_i^II)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j}^I u_i^II dV.$$

С помощью формулы Гаусса – Остроградского и уравнений равновесия $(\sigma_{ij,j}^I = -\rho F_i^I)$ получаем

$$\int_V \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^II dV = \int_S R_i^I u_i^II dS + \int_V \rho F_i^I u_i^II dV.$$

Правая часть (5.18) может быть преобразована аналогичным образом. В результате приходим к теореме Бетти – работа системы внешних сил I на перемещениях, вызываемых системой II, равна работе системы внешних сил II на перемещениях, вызываемых системой I:

$$\int_S R_i^I u_i^II dS + \int_V \rho F_i^I u_i^II dV = \int_S R_i^II u_i^I dS + \int_V \rho F_i^II u_i^I dV. \quad (5.19)$$

¹ Бетти Э. (Betti E., 1823–1892), итальянский математик.

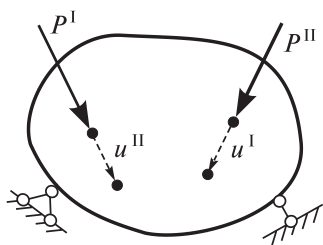


Рис. 5.2. Иллюстративный рисунок к замечанию относительно теоремы Бетти

Значение теоремы Бетти заключается в том, что с помощью произвольно выбранной системы II получают соотношение между приложенными силами и перемещениями системы I. Вспомогательная система II может быть выбрана очень простой. Например, в качестве данной системы может быть взято однородное напряженное состояние. Теорема дает объяснение различных свойств решения I. Она также служит исходной для так называемого метода граничных интегральных уравнений.

Замечание. Теорема Бетти справедлива также, если упругое тело нагружено сосредоточенными силами (рис. 5.2). При отсутствии массовых сил, например, если действуют только две сосредоточенные силы в указанных точках, согласно (5.19) справедливо равенство $P^I u^{II} = P^{II} u^I$, где u^{II} — перемещение точки приложения силы P^I (в направлении P^I) вследствие действия силы P^{II} , соответственно u^I — перемещение точки приложения силы P^{II} (в направлении P^{II}) вследствие действия силы P^I . Если действует множество сил, то

$$\sum_s P_s^I u_s^{II} = \sum_s P_s^{II} u_s^I.$$

Соответствующие зависимости получаются также для сосредоточенных крутящих моментов и углов поворота.

5.5. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЭЛЕЯ – РИТЦА¹

В теории упругости большинство задач сводится к решению дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Их решение часто связано с большими математическими трудностями. Обойти эти трудности позволяют *прямые вариационные методы*. Вместо того чтобы решать основные дифференциальные уравнения теории упругости, ставится задача об определении искомых функций u_i , ε_{ij} , σ_{ij} , удовлетворяющих граничным условиям и минимизирующих некоторый функционал² $\Phi(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij})$, например полную потенциальную энергию П или дополнительную энергию Π^* .

Согласно *методу Рэля – Ритца* перемещения u_i представляются в виде рядов функций, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям.

Пусть, например,

$$u_i = A_{ik} \phi_k^i(x_1, x_2, x_3), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (5.20)$$

¹ Основная идея этого метода уже была использована в 1877 г. лордом Дж. Рэлеем (Rayleigh J. W. S., 1842–1919) для приближенного определения собственных частот механических колебательных систем. Поэтому его часто называют методом Рэля – Ритца (Ritz W.). Ритц Вальтер (Ritz W., 1878–1909), швейцарский физик-теоретик и математик.

² Под функционалом в дальнейшем будем понимать переменную величину, которая каждой искомой функции (кривой, поверхности) из некоторого класса ставит в соответствие определенное число, т. е. функционал — это функция от функций.

где A_{ik} — неопределенные коэффициенты, подлежащие определению из условия (5.8); φ_k^i — известные функции, удовлетворяющие граничным условиям, ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3, \dots$).

Подставляя в (5.7), (5.8) вместо u_i их выражения (5.20) и интегрируя, получаем

$$\Pi = \Pi(A_{ik}). \quad (5.21)$$

Из условия (5.7), которое записываем в виде $\delta\Pi = (\partial\Pi/\partial A_{ik})\delta A_{ik} = 0$, в силу произвольности вариаций δA_{ik} следует

$$\frac{\partial\Pi}{\partial A_{ik}} = 0. \quad (5.22)$$

Если в (5.20) оставить n членов, то условия (5.22) в случае линейной упругости дают систему $3n$ линейных алгебраических уравнений вида

$$\delta_{jk} A_{ik} + \Delta_j = 0, \quad (5.23)$$

которая служит для определения параметров A_{ik} .

Уравнения (5.22) либо (5.23) носят название уравнений Рэлея — Ритца. Подставляя найденные из этих уравнений параметры A_{ik} в выражение (5.20), получаем приближенное решение задачи.

5.6. МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

Впервые идея этого метода была предложена в 1913 г. И. Г. Бубновым применительно к задачам теории упругости. В дальнейшем она была развита в 1915 г. Б. Г. Галеркиным. Если функция φ_k^i в выражениях перемещений (5.20) выбрана так, чтобы заранее удовлетворялись не только геометрические, но и статические граничные условия для напряжений, то в уравнении (5.6) исчезает поверхностный интеграл и оно принимает вид

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) \delta u_i dV = 0.$$

Подставляя сюда выражение $\delta u_i = \delta A_{ik} \varphi_k^i$ и учитывая произвольность вариаций δA_{ik} , получаем систему уравнений Бубнова — Галеркина для определения параметров A_{ik} :

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) \varphi_k^i dV = 0.$$

В тех случаях, когда можно удовлетворить статические граничные условия, метод Бубнова — Галеркина дает значительное упрощение вычислений.

5.7. МЕТОД РИТЦА — ЛАГРАНЖА

Рассматриваемый в этом разделе метод представляет собой комбинацию метода Ритца и метода неопределенных множителей Лагранжа. В методе Ритца функции φ_k^i выбираются таким образом, чтобы каждая из них удовлетворяла геометрическим граничным условиям. В некоторых случаях это требование выполнить трудно. Тог-

да можно использовать неопределенные множители Лагранжа так, чтобы граничные условия удовлетворялись не каждой из функций, а в целом всем выражением для перемещения u_i . В этом случае коэффициенты A_{ik} будут удовлетворять некоторым дополнительным соотношениям вида

$$f_k(A_{ik}) = 0. \quad (5.24)$$

Допустим, что число таких соотношений равно m . Тогда, по Лагранжу, следует составить функцию

$$\Theta = \Pi - \lambda_k f_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

и решить задачу на условный экстремум этой функции, т. е. составить условия экстремума

$$\frac{\partial \Theta}{\partial A_{ik}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.25)$$

Уравнения (5.24) и (5.25) образуют систему $m + n$ уравнений с $m + n$ неизвестными A_{ik} и λ_k . Описанный метод особенно удобен, если функции φ_k^i ортогональны, т. е.

$$\int_0^l \varphi_k^i \varphi_k^j dx = 0.$$

В этом случае каждое из уравнений (5.25) содержит только одно неизвестное A_{ik} и задача сводится к решению системы m уравнений (5.24).

В качестве примера эффективного использования принципа возможных перемещений Лагранжа можно привести вывод уравнений равновесия и граничных условий для упругой круговой трехслойной пластины и трехслойных упругих стержней [11, 17].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Для упругих тел принцип возможных перемещений Лагранжа заменяет геометрический вывод уравнений равновесия аналитическим?
2. Дайте определение возможных (виртуальных) перемещений.
3. Что такое кинематически доступные возможные перемещения?
4. Сформулируйте принцип возможных перемещений Лагранжа, математическую запись принципа для твердых деформируемых тел.
5. Каким образом необходимо учитывать статические граничные условия в напряжениях при решении задач с помощью вариационного принципа Лагранжа?
6. Вариационная формулировка задачи теории упругости с помощью принципа Лагранжа.
7. Дайте определение виртуальных сил и виртуальных напряжений.
8. Принцип Кастильяно из всех статически возможных напряжений выделяет такие, которые обеспечивают выполнение условий равновесия, но и еще какие условия?
9. Что такое виртуальная дополнительная работы δA^* внешних виртуальных сил и виртуальная дополнительная работа виртуальных внутренних напряжений δW^* ?

10. Математическая формулировка принципа возможных сил для любого деформируемого тела.
11. В чем состоит принцип Кастильяно?
12. Приведите формулировку первой и второй теорем Кастильяно.
13. Математическая запись и формулировка теоремы взаимности Бетти.
14. В чем прикладное значение теоремы Бетти?
15. В чем главная идея прямых вариационных методов?
16. Сформулируйте метод и уравнение Рэлея – Ритца.
17. Сформулируйте метод и уравнение Бубнова – Галеркина.
18. Сформулируйте метод Ритца – Лагранжа.

Глава 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД С РЕОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Как неоднократно указывалось, для того чтобы построить математическую модель изучаемой среды, т. е. иметь полную систему уравнений, описывающих поведение сплошной среды, к общим уравнениям состояния сплошной среды необходимо присоединить дополнительные соотношения, описывающие механическое поведение среды, т. е. соотношения между компонентами НДС среды.

Известно, что реакция среды на внешние воздействия зависит от структуры определяющих уравнений, описывающих механическое поведение среды. Если эти уравнения обладают общностью для определенного класса задач, то они носят характер теории. В данном разделе речь пойдет о теориях, описывающих деформационные процессы в твердых деформируемых средах, обладающих реологическими свойствами.

6.1. ПОЛЗУЧЕСТЬ И РЕЛАКСАЦИЯ

В теории упругости предполагается, что при неизменных во времени воздействиях напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тела остается неизменным. Однако многие материалы, например полимеры, бетоны, композиты и т. д., даже при комнатных температурах обладают способностью медленно деформироваться во времени при постоянных напряжениях. Такое свойство материалов называют *ползучестью*.

Таким образом, если в определяющих уравнениях необходим учет фактора времени, предыстории нагружения и зависимости напряжений от скорости деформации, то это можно выполнить методами теории ползучести.

Необходимость учета ползучести в расчетных моделях возникла в середине XX столетия благодаря запросам инженерной практики. Запросы машиностроения привели к резкому увеличению экспериментальных и теоретических исследований в области ползучести.

Ползучесть может приводить с течением времени к значительным изменениям в напряженно-деформированном состоянии конструкций и сооружений. Например, вследствие неравномерной осадки грунтового основания во времени происходит перераспределение усилий между отдельными элементами сооружений. Это ведет ино-

гда к появлению трещин, а при наиболее неблагоприятных условиях наблюдается их разрушение. В качестве другого примера можно сослаться на массивные бетонные плотины современных гидроэлектростанций, в которых существенную роль играют экзотермические процессы, протекающие при затвердевании бетона. Ползучесть в данном случае играет положительную роль, снижая возникающие напряжения.

Заметим, что металлы при нагреве также проявляют в процессе эксплуатации *реомные свойства*. Так называются механические свойства материалов, существенно зависящие от времени.

Ползучесть экспериментально можно исследовать при растяжении цилиндрических образцов. *Графики роста деформаций со временем при постоянных напряжениях называются кривыми ползучести.*

На рис. 6.1 схематически показаны условия испытания и кривая ползучести. Верхний конец образца закрепляется, а к нижнему прикладывается нагрузка. Ведется наблюдение за изменением длины в расчетной части образца, строится кривая изменения деформации ε от времени t . Деформация увеличивается от своего начального значения ε_0 , которое отражает упругие свойства материала и соответствует «мгновенно» приложенной нагрузке P .

На кривой ползучести можно выделить *три характерных участка*. На первом из них (AB) скорость ползучести высока, но монотонно убывает, начиная с некоторого определенного значения. Это участок *неустановившейся ползучести*. Второй участок кривой (BC) почти прямолинеен и соответствует *установившейся ползучести*. Здесь скорость ползучести практически постоянна. Наконец, можно наблюдать участок (CD), предшествующий разрушению, где скорость ползучести монотонно увеличивается.

Необходимо отметить, что ползучесть наблюдается при любых напряжениях и указать какой-либо предел ползучести невозможно.

Явление уменьшения напряжений в теле при постоянной деформации называется *релаксацией*. Предположим, что образец «мгновенно» растянули так, что расчетная длина l_0 стала равной l (рис. 6.2). Для этого потребовалась сила P_1 . Затем образец закрепили в растянутом состоянии на некоторое время. После этого его освободили от закрепления и вновь приложили такую нагрузку, под действием которой расчетная часть образца растянулась до величины l . Оказывается, в этом случае потребовалась нагрузка P_2 , меньшая первоначальной P_1 . Следовательно, напряжение, требующееся для поддержания постоянной деформации, уменьшается, релаксирует.

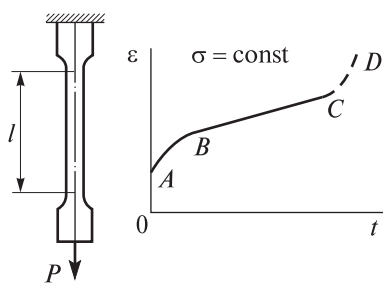


Рис. 6.1. Кривая ползучести

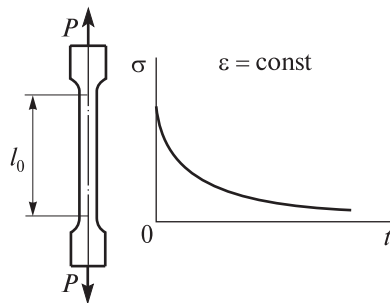


Рис. 6.2. Кривая релаксации

В реальных элементах конструкций ползучесть и релаксация как реономные свойства материала проявляются одновременно, взаимосвязанно. Их можно отразить аналитически, вводя время в связь напряжений и деформаций твердого тела. Предложенный Больцманом способ описания этой взаимосвязи основан на предположении о влиянии всего предшествующего времени действия напряжений на деформацию в данный момент. Подобные среды называются вязкоупругими наследственного типа.

Вязкоупругими (релаксирующими) называются среды с преобладающим вязким элементом, которые ведут себя так, что при постоянных напряжениях деформации неограниченно растут. Если удастся в такой среде создать деформации и поддерживать их в дальнейшем, то возникшие вначале напряжения будут со временем затухать (релаксировать).

Если зависимость между приращениями деформаций и приращениями напряжений в любой момент времени является практически линейной, то такое поведение среды можно описать моделью *линейной ползучести* и позволяет применять для описания деформирования среды во времени теорию деформирования линейных наследственных сред. При этом полная деформация в любой момент времени складывается из двух составляющих: упругой деформации в момент приложения нагрузки и собственно деформации ползучести. Математически это можно выразить в следующем виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{E} \int_0^t L(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

где $L(t, \tau)$ — функция, выражающая свойства наследственности материала.

Например, для большого круга природных материалов (горные породы, почвы) в прикладных исследованиях функция $L(t, \tau)$ удовлетворительно описывается степенной функцией вида $L(t, \tau) = \delta(t - \tau)^{-\alpha}$. Здесь δ, α — константы, которые определяются типом пород и видом напряженно-деформированного состояния.

Замечание. Реологические характеристики δ, α представляют собой параметры, физический смысл которых в настоящее время не установлен. При этом α — величина безразмерная, а δ имеет размерность «время в степени $\alpha - 1$ ».

6.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛ

6.2.1. Структурные реологические модели

Математическое описание поведения деформируемых сред существенным образом зависит от принятой модели поведения материала изучаемой среды. Рассмотрим некоторые принципиальные моменты, касающиеся описания поведения материалов в рамках различных подходов и моделей.

В наиболее общем виде дифференциальное уравнение, связывающее напряжения и деформацию при учете развития деформационных процессов во времени, можно представить в следующем виде [36]:

$$a_0 \sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} + a_2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n\sigma}{dt^n} = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + b_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m\varepsilon}{dt^m}, \quad (6.1)$$

где a_i ($i = 0, 1, \dots, n$), b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) — коэффициенты, определяющиеся свойствами материала.

Наиболее распространенным на сегодня подходом получения реологического уравнения для конкретного материала является обобщение большого количества данных экспериментальных исследований, построение соответствующих кривых ползучести и сравнение их с одноименными кривыми, построенными на основе теоретических моделей.

На практике распространенным является подход, когда для описания экспериментальных данных, полученных в ограниченном временном диапазоне, используют представление, включающее только несколько членов в обеих частях уравнения (6.1), что эквивалентно описанию вязкоупругого поведения материала с помощью механических (реологических) моделей, состоящих из упругих элементов, свойства которых подчиняется закону Гука и вязких демпферов, деформирующихся по закону Ньютона (структурных элементов) (см. рис. 3.1) [46]. Поэтому для описания развития деформационных процессов во времени на базе реологических моделей необходимо знать модули упругости и коэффициенты вязкости входящих в них элементов.

Обычно вид структурной модели и параметры ее элементов устанавливают по данным специальных экспериментов, получая семейство кривых ползучести материалов, соответствующих различным уровням действующих напряжений. Вследствие сложности и трудоемкости таких экспериментов этот путь определения реологических свойств материалов используют достаточно редко. Однако по мере развития и совершенствования методики эксперимента он получает более широкое применение благодаря наглядности и определенности физического смысла основных параметров E_i и η_i .

Элемент Ньютона. Ранее (см. гл. 3) указывалось, что деформирование во времени может быть математически описано путем абстрактного схематического представления материала в виде некоторых моделей из элементарных структурных единиц, каждая из которых представляет собой упругий, пластичный или вязкий элемент.

Напомним, что структурные единицы, обладающие упругими свойствами, могут быть уподоблены пружинам с *законом деформирования Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (6.2)$$

где σ — напряжения; ε — деформации; E — модуль упругости.

Структурный элемент, описывающий вязкое поведение материала, называется *элементом Ньютона*. Он представляет собой поршень со сквозными отверстиями в цилиндре с вязкой жидкостью (демпфер) (см. рис. 3.1). Данному элементу соответствует простейшая модель линейного вязкого поведения материала — *закон линейного вязкого деформирования Ньютона*:

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}, \text{ или } \varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{\eta} d\tau, \quad (6.4)$$

где $d\varepsilon/dt$ — скорость деформирования; η — коэффициент вязкости.

При нагрузке постоянной величины материал обладает ползучестью с постоянной скоростью.

Элемент Ньютона не может воспроизвести мгновенную упругость. Кроме того, для элемента Ньютона не может быть определено понятие первоначальной длины,

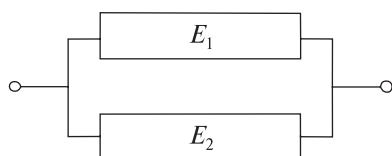


Рис. 6.3. Параллельное соединение элементов

и он может накапливать неограниченно деформации при постоянном воздействии нагрузки.

Замечание. В «чистом виде» это соответствует поведению жидкостей.

Другие линейные вязкоупругие модели могут быть собраны как параллельное или последовательное соединение пружин (модель Гука) и поршней (демпферов) (модель Ньютона). При этом необходимо руководствоваться следующими правилами:

при параллельном соединении элементов (рис. 6.3) общее напряжение равно сумме напряжений в элементах, а деформации в элементах равны и равны общей деформации конструкции:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2; \quad (6.5)$$

при последовательном соединении элементов (рис. 6.4) общие правила таковы:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (6.6)$$



Рис. 6.4. Последовательное соединение элементов

В соответствии с данными правилами можно составлять произвольные реологические модели. Следует отметить, что при этом могут быть ситуации, когда различные модели описывают одно и то же поведение материала (при соответствующем выборе свойств материала).

Рассмотрим более подробно некоторые классические модели. Отметим, что в данном разделе модели описываются для одномерного случая.

Модель Максвелла. Одной из простейших моделей для описания вязкоупругого поведения среды является модель Максвелла, которая представляет собой последовательное соединение пружины и поршня (демпфера) (см. рис. 3.1, в). В этом случае если в начальный момент приложить внешнюю силу, то пружина мгновенно растянется (мгновенные упругие деформации). Если в дальнейшем общее растяжение системы сохранять (*постоянные деформации*), то пружина, сокращаясь, будет постепенно подтягивать поршень. При этом необходимое внешнее усилие должно, очевидно, падать. Таким образом, модель Максвелла иллюстрирует явление релаксации напряжений.

В одномерной модели Максвелла, следуя правилу (6.6), напряжения в элементах одинаковые, а деформации суммируются. Связь между напряжением и деформацией можно получить, проинтегрировав по времени уравнение закона Гука и добавив к полученной скорости деформирования вязкую составляющую:

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_\eta \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_\eta \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_E}{E} + \frac{\sigma_\eta}{\eta}.$$

Так как $\sigma = \sigma_E = \sigma_\eta$, получаем

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (6.7)$$

Рассмотрим процесс действия ограниченных напряжений и соответствующих им деформаций в промежуток времени от 0 до t . Если задан процесс деформирования, то необходимо определить напряженное состояние (или наоборот).

Интегрируя представление (6.7), получаем выражение для деформаций:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \frac{1}{E} [\sigma(t) - \sigma(0)] + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau. \quad (6.8)$$

Чтобы получить выражения для напряжений, умножим (6.7) на $E \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right)$.

В результате получаем выражение, представляющее собой полную производную по времени:

$$E \dot{\varepsilon}(t) \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) = \dot{\sigma}(t) \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) + \frac{E}{\eta} \sigma(t) \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) = \frac{d}{dt} \left(\sigma(t) \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) \right).$$

Интегрируя данное выражение по времени в интервале от 0 до t , получаем

$$\int_0^t E \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta} \tau\right) d\tau = \left(\sigma(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta} \tau\right) \right) \Big|_{\tau=0}^t = \sigma(t) \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) - \sigma(0).$$

Перепишем данную формулу относительно напряжений:

$$\sigma(t) = \sigma(0) \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) + E \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{E}{\eta} (\tau - t)\right) d\tau. \quad (6.9)$$

Интеграл в выражении (6.9) может быть переписан следующим образом:

$$\int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta} \tau\right) d\tau = \varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) \Big|_{\tau=0}^t - \frac{E}{\eta} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta} \tau\right) d\tau.$$

С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sigma(0) \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) + E \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \left[\varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) - \varepsilon(0) \right] - \\ & - \frac{E^2}{\mu} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta} (\tau - t)\right) d\tau, \end{aligned}$$

или

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + [\sigma(0) - E \varepsilon(0)] \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) - \frac{E^2}{\mu} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta} (\tau - t)\right) d\tau. \quad (6.10)$$

Первое слагаемое в (6.10) представляет упругую составляющую напряжений. Второе слагаемое выражает влияние начальных значений, которое убывает со временем согласно экспоненциальной функции. Третье слагаемое — это интеграл свертки, который показывает вес деформаций таким образом, что более отдаленные события имеют меньшее влияние в текущий момент, чем недавние (затухание памяти/*fading memory*).

Для демонстрации описания поведения материала в рамках модели Максвелла приведем данные теста на ползучесть (рис. 6.5, [47]).

Предполагается, что до момента времени $t = 0$ напряжения равны нулю ($\sigma = 0$), а после этого – постоянны, т. е. $\sigma = \sigma_k = \text{const}$, $t > 0$. На основании (6.8) при $\varepsilon(0) = 0$ получаем

$$\varepsilon = \frac{\sigma_k}{E} + \frac{\sigma_k}{\eta} t, \quad t > 0. \quad (6.11)$$

Из (6.11) следует, что имеет место неограниченная линейная ползучесть. Поэтому иногда модель Максвелла называют максвелловской жидкостью.

Кроме того, из (6.11) следует, что деформации от внезапных (быстрых) нагрузок в этом случае гасятся упругими деформациями (мгновенная упругость).

В случае, если модель подвергается постоянным деформациям ε_r (тест на релаксацию), поршень (демпфер) будет мгновенно срабатывать, а пружина упруго растягиваться так, что начальные напряжения равны $\sigma_0 = E\varepsilon_r$. После этого согласно (6.9) имеем

$$\sigma(t) = E\varepsilon_r \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right).$$

Таким образом, напряжения стремятся к нулю до тех пор, пока пружина разгрузится вследствие движения поршня (демпфера).

Константа материала $t_r = \eta/E$ (размерность «время») называется *временем релаксации*.

Для $t = t_r$ получаем $\sigma(t_r) = E\varepsilon_r e^{-1} \approx 0,368\sigma_0$.

Используя (6.7) (в этом случае $\dot{\varepsilon} = 0$), для $t \geq 0$ имеем

$$\sigma(t) = -t_r \dot{\sigma}(t).$$

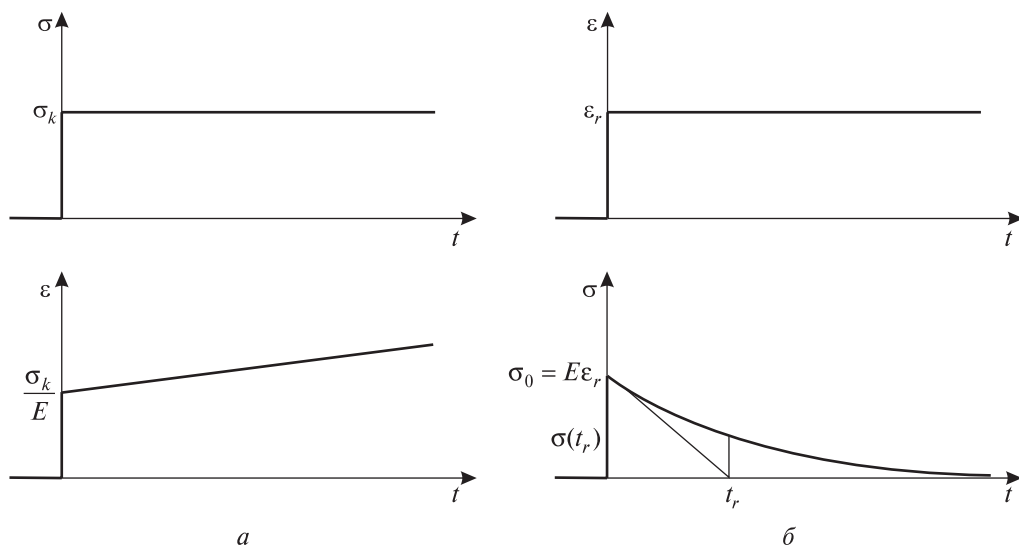


Рис. 6.5. Тесты на ползучесть (а) и релаксацию (б) в рамках модели Максвелла

Для $t = 0$ начальное значение $\dot{\sigma}(t)$ равно: $\dot{\sigma}(0) = -\sigma_0/t_r$.

Следовательно, время релаксации представляет собой обратную величину для скорости релаксации.

Существует множество обобщений линейной модели Максвелла. Например, нелинейная модель Дишингера¹ (Dischinger) для бетона, в которой вязкость представляет собой величину, зависящую от времени и описывающую увеличение жесткости бетона со временем:

$$\eta(t) = R \exp(Ct), \quad R, C > 0 - \text{constants.}$$

Тензорное описание модели по Максвеллу в общем случае может быть представлено и в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \sigma_{ij} = 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \delta_{ij} \left[\frac{1}{\eta} \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \theta + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} \right].$$

Модель Кельвина – Фойгта. Весьма наглядно объясняет явление ползучести модель Кельвина – Фойгта – параллельное соединение пружины и поршня (см. рис. 3.1, *з*). Если к данной модели приложить постоянное внешнее усилие (например, растяжение), то начальных мгновенных деформаций не будет, а затем вязкий поршень будет двигаться до тех пор, пока позволит пружина.

Тело, по Кельвину (Фойгту), является примером простейшей линейной упруго-запаздывающей среды. Девиаторам напряжений и деформаций в таком теле соответствуют силы и деформации в механической модели, состоящей из пружины и вязкого демпфера, соединенных параллельно.

В модели Кельвина согласно (6.5) суммируются напряжения в элементах, а их деформации одинаковы, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_E = \varepsilon_\eta, \quad \sigma_E = E\varepsilon, \quad \sigma = \sigma_E + \sigma_\eta, \quad \sigma_\eta = \eta \dot{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}. \quad (6.12)$$

Для получения выражения для деформаций применяем к (6.12) процедуру, подобную использованной при получении выражений для напряжений в случае модели Максвелла.

Умножаем (6.12) на $\frac{1}{\eta} \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right)$. В результате получаем

$$\frac{1}{\eta} \sigma(t) \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right) = \frac{E}{\eta} \varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right) + \dot{\varepsilon}(t) \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right) = \frac{d}{dt} \left(\varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right) \right).$$

Интегрируя по времени в интервале от 0 до t , имеем

$$\frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta}\tau\right) d\tau = \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta}\tau\right) \Big|_0^t = \varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right) - \varepsilon(0).$$

Перепишем данное выражение относительно деформаций:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(\frac{E}{\eta}(\tau-t)\right) d\tau. \quad (6.13)$$

¹ Дишингер Франс (Franz Dischinger, 1887–1953), немецкий инженер-механик.

Таким образом, для модели Кельвина начальное распределение деформаций затухает со временем экспоненциально, а напряжения вводятся как свертка интеграла с экспоненциальным ядром.

Тест на ползучесть с нагрузкой ползучести σ_k от момента времени $t = 0$ и начальными деформациями $\varepsilon(0) = 0$ (рис. 6.6) и в соответствии с (6.13) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{1}{\eta} \sigma_k \int_0^t \exp\left(\frac{E}{\eta} \tau\right) d\tau \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) = \\ &= \frac{1}{\eta} \frac{\eta}{E} \sigma_k \exp\left(\frac{E}{\eta} \tau\right) \Big|_0^t \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) = \frac{\sigma_k}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right)\right].\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_k}{E} \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right).$$

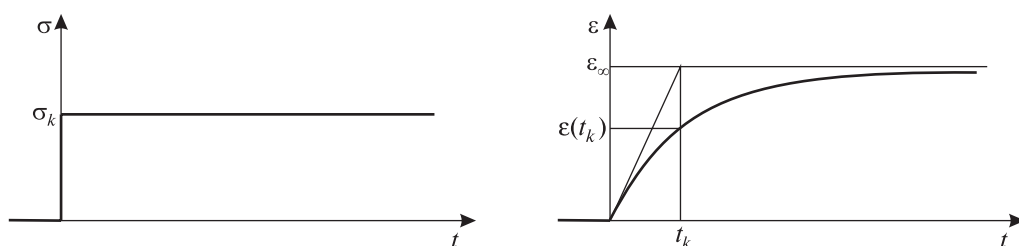


Рис. 6.6. Тесты на ползучесть в рамках модели Кельвина

Следовательно, в этом случае нет мгновенной упругости. Скорость ползучести медленно убывает, и деформации ползучести сходятся к упругим деформациям: $\varepsilon_\infty = \sigma_k / E$.

Время релаксации (или время замедления) для модели Кельвина – Фойгта ($t_k = \eta / E$, размерность «время») – время, в течение которого деформации вырастают до значения

$$\varepsilon(t_k) = \frac{\sigma_k}{E} (1 - e^{-1}) \approx 0,632 \frac{\sigma_k}{E}.$$

Связь времени релаксации с начальным значением скорости деформации $\dot{\varepsilon}(t)$ имеет вид $\dot{\varepsilon}(0) = \varepsilon_\infty / t_k$.

Тест на релаксацию не осуществим для этой модели, так как конечные нагрузки не могут производить разрывные деформации. Однако можно тем не менее изучать поведение при постоянных деформациях после произвольных, но непрерывных деформаций. В этом случае напряжения в пружине постоянны ($\sigma = E \varepsilon_r$), в то время как демпфер (поршень) становится мгновенно свободным от напряжений.

Напряжения, соответствующие свободным гармоническим колебаниям вида $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$, согласно (6.12):

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left[\sin(\omega t) + \eta \frac{\omega}{E} \cos(\omega t) \right].$$

На σ – ε диаграмме это изображается эллиптическим гистерезисом (рис. 6.7).

Работа в течение одного цикла с периодом $T = 2\pi/\omega$ полностью диссипирует:

$$\begin{aligned} a_i &= \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon} dt = \int_0^T \sigma d\varepsilon = \int_0^T \mu \dot{\varepsilon}^2 dt = \varepsilon_0^2 \eta \omega^2 \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \\ &= \varepsilon_0^2 \eta \omega^2 \left[\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^{2\pi/\omega} = \varepsilon_0^2 \eta \omega \pi. \end{aligned}$$

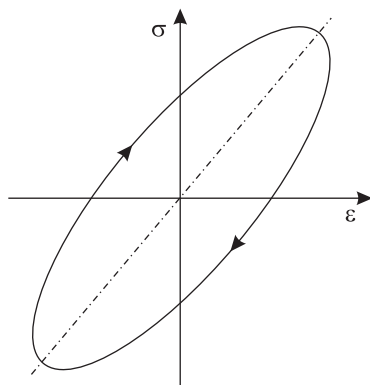


Рис. 6.7. Диаграмма σ – ε свободных гармонических колебаний для модели Кельвина – Фойгта

Максимум упругой энергии пружины $w_{\max} = \frac{1}{2} E \varepsilon_0^2$. Тогда отношение работы диссипации к максимуму запасенной энергии

$$\mu = \frac{\varepsilon_0^2 \eta \omega \pi}{(1/2) E \varepsilon_0^2} = \frac{2\eta \omega \pi}{E}.$$

Величина μ зависит от частоты, но не зависит от амплитуды. Отношение μ/π называется *фактором потерь* (loss factor) и представляет собой критерий способности затухания.

Определяющие соотношения для среды Кельвина – Фойгта можно записать в следующем тензорном представлении:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + 2\mu t_k \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \delta_{ij} \left(\lambda \theta - \frac{2}{3} \mu t_k \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \quad (6.14)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$); t_k – время релаксации напряжений.

Замечание. При $t_k = 0$ из (6.14) следует закон Гука.

Несколько слов более акцентированно о недостатках моделей Максвелла и Кельвина – Фойгта для описания процессов релаксации и ползучести.

Модель Максвелла недостаточна даже для качественного описания вязкоупругих процессов. Элемент Максвелла обладает свойствами, которые противоречат свойствам реальных композитных материалов, а именно неизменностью скорости деформирования в процессе ползучести, необратимостью накапливающегося компонента деформации, полной релаксацией напряжения. Необратимость компонента деформации, который увеличивается со временем как при ползучести, так и при релаксации напряжения, свойственна упругопластичным, а не вязкоупругим телам.

У элемента Кельвина – Фойгта отсутствует упругий компонент деформации, вследствие чего начальное значение модуля упругости $E \rightarrow \infty$.

Из-за отмеченных отрицательных свойств оба рассмотренных элемента в качестве самостоятельных моделей используются редко.

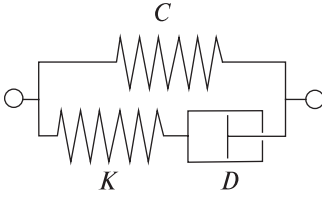


Рис. 6.8. Представление модели Пойнтинга (модели стандартного линейного твердого тела)

Комбинируя модели Максвелла и Кельвина – Фойгта (соединяя последовательно или параллельно механические аналоги), можно получить среды с весьма разнообразными свойствами. Рассмотрим некоторые из наиболее употребляемых моделей.

*Модель Пойнтинга*¹ (другие названия – модель Малверна, модель стандартного линейного твердого тела) представляет собой параллельное соединение упругого тела с максвелловским или соединением последовательно тела, по Кельвину, с упругим телом (см. рис. 3.1, д и 6.8).

Выполним серию преобразований, в соответствии с процедурой, аналогичной использованной для предыдущих моделей:

$$\sigma = \sigma_K + \sigma_C = \sigma_D + \sigma_C, \quad \sigma_C = C\varepsilon_C, \quad \sigma_K = K\varepsilon_K, \quad \sigma_D = D\dot{\varepsilon}_D,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_C = \varepsilon_K + \varepsilon_D, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_C = \dot{\varepsilon}_K + \dot{\varepsilon}_D.$$

$$\text{Следовательно, } \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_C}{C} = \frac{\dot{\sigma}_K}{K} + \frac{\sigma_D}{D} = \frac{\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_C}{K} + \frac{\sigma - \sigma_C}{D}.$$

Выполнив дальнейшие преобразования, получаем

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{K} - \frac{C}{K} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{D} - \frac{C}{D} \varepsilon. \quad (6.15)$$

И на основании (6.15)

$$\sigma + \frac{D}{K} \dot{\sigma} = C\varepsilon + D \frac{C+K}{K} \dot{\varepsilon}. \quad (6.16)$$

Это приводит к следующим точным выражениям для компонент НДС с начальными условиями при $t = 0$ $\sigma(0) = \sigma_0$, $\varepsilon(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (C+K)\varepsilon(t) + \left[\sigma_0 - \frac{K^2}{D} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{K}{D}\tau\right) d\tau \right] \exp\left(-\frac{K}{D}t\right), \\ \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{C+K} + \left[-\frac{\sigma_0}{C+K} + \left(\frac{K}{D(K+C)} - \frac{KC}{D(K+C)^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(\frac{KC}{D(K+C)}\tau\right) d\tau \right] \exp\left(-\frac{KC}{D(K+C)}t\right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Модель Пойнтинга демонстрирует свойства как ползучести, так и мгновенной упругости (рис. 6.9, а) и релаксации (рис. 6.9, б).

В литературе для описания модели Пойнтинга в общем случае часто используются представления следующего вида:

¹ Пойтинг Джон Генри (John Henry Poynting, 1852–1914), известный британский физик.

$$a \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} S_{ij} = 2\mu \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \varepsilon_{ij} \right); \quad a_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1} \sigma = 3k \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1} \varepsilon \right),$$

где ε_{ij} и S_{ij} – компоненты девиаторов деформаций и напряжений; μ и k – упругие модули сдвига и объемного расширения в покоей среде; a , a_1 – реологические коэффициенты ($a \geq 0$, $a_1 \leq 1$); τ , τ_1 – времена релаксации сдвиговых и средних напряжений.

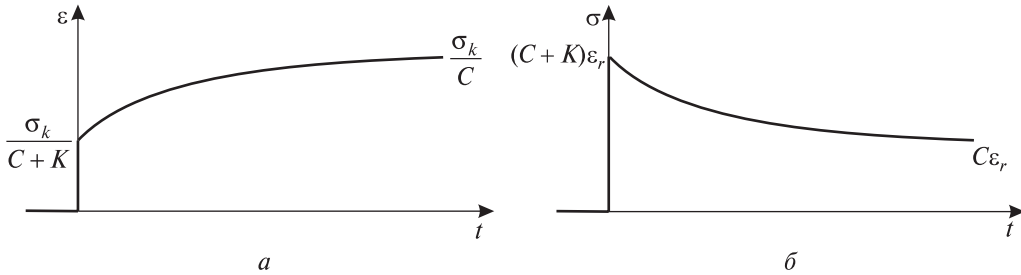


Рис. 6.9. Поведение материала, соответствующего модели Пойнтинга:
а – кривая ползучести; б – кривая релаксации

*Модель Бюргерса*¹. Если тела, по Максвеллу и Кельвину, соединить последовательно или два тела, по Максвеллу, соединить параллельно, то получается среда, обладающая как свойством упругого запаздывания, так и свойствами релаксации напряжений и ползучести (модель Бюргерса) (см. рис. 3.1, л и 6.10).

Модель Бюргерса может быть введена как параллельное соединение двух моделей Максвелла. В соответствии с этим имеем

$$\sigma = \sigma_C = \sigma_D = \sigma_K + \sigma_R, \quad \sigma_C = C\varepsilon_C, \quad \sigma_K = K\varepsilon_K, \quad \sigma_D = D\dot{\varepsilon}_D, \quad \sigma_R = R\dot{\varepsilon}_R, \\ \varepsilon_R = \varepsilon_K, \quad \varepsilon = \varepsilon_C + \varepsilon_D + \varepsilon_{K,R}.$$

Следовательно,

$$\dot{\sigma} = K\dot{\varepsilon}_K + R\ddot{\varepsilon}_R = K(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_C - \dot{\varepsilon}_D) + R(\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_C - \ddot{\varepsilon}_D) = K\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{C} - \frac{\sigma}{D}\right) + R\left(\ddot{\varepsilon} - \frac{\ddot{\sigma}}{C} - \frac{\dot{\sigma}}{D}\right).$$

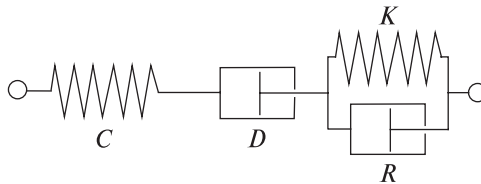


Рис. 6.10. Структурный элемент модели Бюргерса

¹ Бюргерс Иоханнес (Ян) Мартинус (Johannes Martinus Burgers, 1895–1981), нидерландский физик, известный открытием уравнения в гидродинамике, вектора в теории дислокаций и материала в теории вязкоупругости, названных впоследствии его именем.

Окончательно имеем

$$\frac{\ddot{\sigma}}{C} + \left(\frac{1}{D} + \frac{K}{CR} + \frac{1}{R} \right) \dot{\sigma} + \frac{K}{DR} \sigma = \ddot{\varepsilon} + \frac{K}{R} \dot{\varepsilon}. \quad (6.18)$$

Эта модель показывает мгновенную упругость (вследствие наличия пружины C).

Численное интегрирование позволяет трансформировать дифференциальное уравнение второго порядка (6.18) в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка, введя *напряжение в пружине K как внутреннюю переменную*:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{C} + \frac{\sigma}{D} + \frac{\sigma}{R} - \frac{\sigma_K}{R} \quad \text{и} \quad \dot{\sigma}_K = K\dot{\varepsilon} - \frac{K}{C}\dot{\sigma} - \frac{K}{D}\sigma,$$

или в приращениях напряжений:

$$\dot{\sigma} = C \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{D} - \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma_K}{R} \right), \quad \dot{\sigma}_K = \frac{K}{R} (\sigma - \sigma_K).$$

Кривая ползучести для модели Бюргерса под нагрузкой ползучести σ_K (рис. 6.11, а) является *результатом суперпозиции* кривых ползучести моделей Кельвина и Максвелла:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_K}{K} \left[1 - \exp\left(-\frac{K}{R}t\right) \right] + \frac{\sigma_K}{D}t + \frac{\sigma_K}{C}. \quad (6.19)$$

В начале процесса ползучести демпфер (поршень) R осуществляет вклад в деформации ползучести (*первоначальная ползучесть*). Этот вклад тем не менее уменьшается все больше и больше, пока в длительном промежутке времени демпфер D доминирует со стационарной скоростью ползучести σ_K/D . Это называется *второй или установившейся фазой ползучести*. Для многих реальных материалов эта фаза ползучести продолжается до *третьей фазы ползучести*, которая не может быть описана только моделью Бюргерса в противоположность первой и второй фазе ползучести.

В *тесте на релаксацию* (рис. 6.11, б) напряжения в пружине C релаксируют вследствие движения демпфера D и стремятся к нулю.

Модель Бюргерса в общем случае может быть описана таким уравнением:

$$a \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + b \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial t^2} = S_{ij} + c \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + d \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial t^2}, \quad a, b, c, d > 0.$$

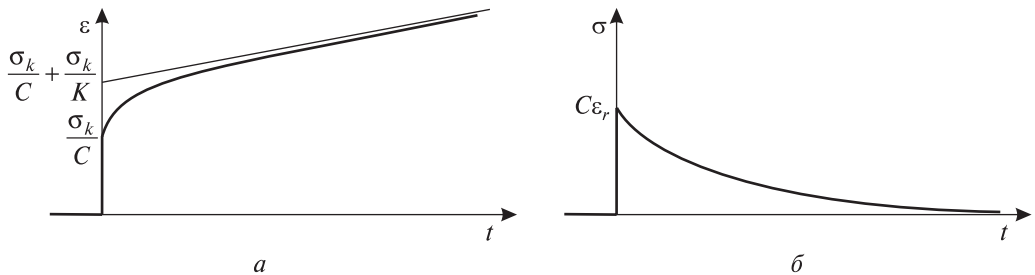


Рис. 6.11. Поведение материала, соответствующего модели Бюргерса:
а — кривая ползучести; б — кривая релаксации

Рассмотрим некоторые характерные черты модели Бюргерса более подробно.

Соотношение между деформациями и напряжением, согласно структурной схемы Бюргерса (см. рис. 6.10), описывается дифференциальным уравнением второго порядка (6.18). Непосредственное интегрирование этого уравнения вызывает некоторые сложности с устойчивостью численного метода, так как вторые производные достигают больших значений, что вызвано сильной осцилляцией системы. Поэтому с точки зрения численной реализации эффективным представляется реализация модели Бюргерса при одноосной нагрузке, но вычислительно устойчивой.

На рис. 6.12 показано удлинение модели Бюргерса при постоянном напряжении (ползучесть). Удлинение при постоянном напряжении σ выражается функцией ползучести вида

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{\eta_1} t + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - \exp \left(-\frac{E_2}{\eta_2} t \right) \right) \right).$$

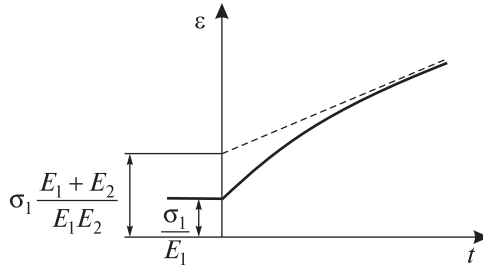


Рис. 6.12. График удлинения модели Бюргерса при постоянном напряжении

Покажем, что ползучесть материала Бюргерса в начале процесса соответствует материалу Кельвина (демпфирование), в конце — материалу Максвелла (выход на прямую равномерного удлинения).

При $t \rightarrow 0$, разлагая в ряд Тейлора, получаем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{\eta_1} t + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - \exp \left(-\frac{E_2}{\eta_2} t \right) \right) \right) = \frac{\sigma}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{\eta_1} t + \frac{E_1}{\eta_2} t + o(t) \right).$$

При этом из физических соображений при $t \rightarrow 0$ «большой вес» имеет вязкий элемент η_1 , т. е. можно считать, что чаще всего $\eta_1 \gg \eta_2$, так что $\varepsilon \approx \frac{\sigma}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{\eta_2} t \right)$. Данное выражение соответствует функции ползучести Кельвина (в данном случае принято $E_1 = E_2$, но это не существенно для приведенных рассуждений): $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_2} \left(1 - \exp \left(-\frac{E_2}{\eta_2} t \right) \right)$.

Аналогично при $t \rightarrow \infty$ получаем $\varepsilon \approx \frac{\sigma}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{\eta_1} t \right)$, т. е. ползучесть начинает соответствовать материалу Максвелла.

Итак, в модели Бюргера можно выделить две составляющие:

1) первая соответствует модели Кельвина (рис. 6.13) и описывается уравнением

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\eta_2} \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta_2}.$$

Она вносит существенный вклад в общее выражение только при больших скоростях деформации ($\dot{\varepsilon}$);

2) вторая соответствует модели Максвелла, представленной на рис. 6.14, описывается уравнением

$$\eta_1 \dot{\varepsilon} = \sigma + \frac{\eta_1}{E} \dot{\sigma}. \quad (6.20)$$

Она вносит существенный вклад при малых скоростях деформации ($\dot{\varepsilon}$).

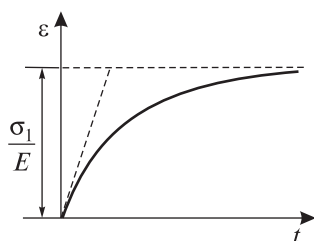


Рис. 6.13. График удлинения по модели Кельвина

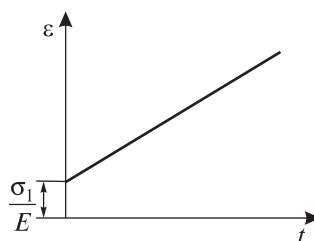


Рис. 6.14. График удлинения по модели Максвелла

При постоянной нагрузке, преобразовав уравнение (6.20) (выразив силу через удлинение), получаем

$$\sigma = \frac{E_1}{1 + (E_1/\eta_1)t} \varepsilon. \quad (6.21)$$

Выражение (6.21) аналогично модели накопленного разрушения (damage masarth) в элементах (в нашем случае в пружинах).

Существует несколько подходов к построению алгоритмов численной реализации процесса «накопленного разрушения».

Первый подход состоит в следующем. Запоминается время, которое пружина находилась под нагрузкой больше значения σ_0 (новый параметр, считаем, что при меньшей нагрузке ползучести его нет). При расчете сил связей считается, что пружина «деградировала» и ее жесткость заменяется следующим образом:

$$k \rightarrow \frac{k}{1 + (k/\eta_1)t}.$$

Второй подход (интегральный). Просто проинтегрируем выражение (6.20). В результате получается следующая формула для приращения напряжения:

$$\dot{\sigma} = E_1 \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \eta_1} \int_0^t \sigma dt \right).$$

Тогда жесткость пружины изменяется следующим образом:

$$k \rightarrow k \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \eta_1} \int_0^t \sigma dt \right).$$

И наконец, можно модифицировать подынтегральную функцию, чтобы суммировать только на нагрузках, больших чем σ_0 .

Вязкоупругие модели дифференциального типа. В таблице далее приводится обобщение дифференциальных уравнений ранее описанных реологических моделей, представленные в общей форме как обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) порядка p при производной по времени от напряжений и порядка q при производной по времени от деформаций.

Модель Гука	$P_0 \sigma = Q_0 \varepsilon$
Модель Ньютона	$P_0 \sigma = Q_1 \dot{\varepsilon}$
Модель Максвелла	$P_0 \sigma + P_1 \dot{\sigma} = Q_1 \dot{\varepsilon}$
Модель Кельвина	$P_0 \sigma = Q_0 \varepsilon + Q_1 \dot{\varepsilon}$
Модель Пойнтинга	$P_0 \sigma + P_1 \dot{\sigma} = Q_0 \varepsilon + Q_1 \dot{\varepsilon}$
Модель Бюргерса	$P_0 \sigma + P_1 \dot{\sigma} + P_2 \ddot{\sigma} = Q_1 \dot{\varepsilon} + Q_2 \ddot{\varepsilon}$
Модель (p, q) -типа	$P_0 \sigma + \dots + P_p \sigma^{(p)} = Q_0 \varepsilon + \dots + Q_q \varepsilon^{(q)}$

Константы $P_0, \dots, P_p$ и $Q_0, \dots, Q_q$ определяются свойствами соответствующих пружин и демпферов. Во всех случаях одна из ненулевых констант должна быть нормирована единицей.

Эти дифференциальные уравнения полностью описывают поведение соответствующих им моделей. Другими словами, для заданных начальных условий предписанное напряженное состояние $\sigma(t)$ может быть однозначно получено интегрированием уравнения для деформированного состояния $\varepsilon(t)$, или наоборот. Для сложных моделей и/или процессов предпочтительнее численное интегрирование.

Существует обобщение ОДУ моделей (p, q) -типа на *модели дробного порядка*. Если рассматривать дробный порядок как параметр аппроксимации, то такие модели нередко хорошо описывают реальное поведение материала для меньшего количества элементов по сравнению с моделями целого порядка.

Интерес, в частности, представляет поведение указанных моделей при вибрационных процессах или демпфировании (затухании). Использование комплексных чисел часто приводит к более компактной модели. Если такая система является в точности гармонической с частотой ω , то решением обыкновенного дифференциального уравнения (p, q) -типа могут быть функции вида

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(i\omega t), \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(i\omega t),$$

где σ_0, ε_0 — комплексные числа.

Подставляя эти функции в ОДУ, получаем

$$\sum_{j=0}^p P_j \sigma_0 (i\omega)^j \exp(i\omega t) = \sum_{k=0}^q Q_k \varepsilon_0 (i\omega)^k \exp(i\omega t).$$

Кроме того, можно выписать следующие псевдоупругие отношения:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sum_{j=0}^p P_j(i\omega)^j}{\sum_{k=0}^q Q_k(i\omega)^k} \sigma_0 = G(\omega) \sigma_0.$$

Как действительная, так и мнимая части $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ являются решением нагружаемой (силовой) вибрации. Коэффициент $G(\omega)$ — комплексная податливость, а ее инверсия — комплексная жесткость.

Так, например, для моделей Кельвина и Максвелла нетрудно получить [62]:

$$G(\omega) = \frac{E - iD\omega}{E^2 + D^2\omega^2} \text{ — для модели Кельвина;}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{E} - \frac{i}{D\omega} \text{ — для модели Максвелла.}$$

Можно также ввести понятие комплексной вязкости и получить псевдовязкие соотношения.

Вязкоупругие модели интегрального типа. Следующий класс моделей для описания процессов линейной вязкоупругости базируется на предположении, представляющем собой *принцип суперпозиции Больцмана*, который характеризует поведение линейной вязкоупругости в общем случае.

Принцип суперпозиции Больцмана (1876) может быть сформулирован так: если следствиями деформационных процессов $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2$ являются напряжения $\sigma_i(t)$, $i = 1, 2$, то суперпозиция $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ приводит к напряжениям $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$.

Приведем процедуру получения модели вязкоупругого поведения среды интегрального типа.

Если рассмотреть постоянную функцию нагружения ползучести $\Delta\sigma_i(t)$, действующую во время t_i , то этот процесс нагружения может быть определен через функцию Хевисайда¹

$$H(t) = 0, t < 0; H(t) = 1, t \geq 0$$

в следующем виде:

$$\sigma_i(t) = \Delta\sigma(t_i) H(t - t_i),$$

где $\Delta\sigma(t_i)$ — напряжение ползучести, которое остается постоянным от момента времени t_i и далее.

Пусть $J(t - t_i)$ — результирующий деформационный процесс от действия единичного нагружения $H(t - t_i)$, начавшегося в момент t_i . Согласно принципу суперпозиции нагрузка $\Delta\sigma(t_i) H(t - t_i)$ инициирует деформационный процесс вида $\varepsilon_i(t) = \Delta\sigma(t_i) J(t - t_i)$.

¹Хевисайд Оливер (Oliver Heaviside, 1850—1925), английский ученый-самоучка, инженер, математик и физик. Разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, независимо от других математиков создал векторный анализ.

Функция $J(t - t_i)$ называется *функцией ползучести*.

Если имеет место произвольный процесс нагружения $\sigma(t)$, то он может быть аппроксимирован как сумма следующих функций:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(t_i) H(t - t_i).$$

Тогда соответствующие деформации имеют вид

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(t_i) J(t - t_i).$$

В пределе $n \rightarrow \infty$ функция деформаций сходится к интегралу вида (интеграл Стильтьеса¹, Stieltjes integral)

$$\varepsilon(t) = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} J(t - \tau) d\sigma(\tau) = \int_0^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau.$$

Изменив роли напряжений и деформаций, получаем аналогично предыдущим рассуждениям такое результирующее уравнение:

$$\sigma(t) = \int_{\varepsilon(0)}^{\varepsilon(t)} R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = \int_0^t R(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau.$$

Здесь $R(t)$ — *функция релаксации*.

Функция релаксации не является независимой от функции ползучести. Между этими двумя функциями существует следующее соотношение:

$$t = \int_0^t R(t - \tau) J(\tau) d\tau = \int_0^t J(t - \tau) R(\tau) d\tau.$$

Так как все реологические модели (p, q) -типа удовлетворяют приведенному принципу суперпозиции, то можно все их представить подобными интегралами Стильтьеса.

Следует отметить, что все вязкоупругие модели такого типа имеют следующие характерные черты (особенности):

- они линейны;
- их поведение является временно-зависимым или вязким (реономным);
- они все описывают поведение с затухающей памятью. Это означает следующее: если событие произошло достаточно длительное время тому назад, то его эффект в настоящем пренебрежимо мал. В пределе лучше начальные условия заменить функционалом истории, который содержит интегралы свертки с функцией ползучести или релаксации экспоненциального типа;
- при очень быстрых или очень медленных процессах эти модели ведут себя упруго до тех пор, пока все демпферы становятся жесткими или податливыми соответственно;

¹ Стильтьес Томас Иоаннес (Thomas Joannes Stieltjes, 1856–1894), нидерландский математик, предложил обобщение определенного интеграла (интеграл Римана — Стильтьеса).

• их поведение представляется обоснованным в том смысле, что в постулате диссипации энергии не происходит противоречия ($\delta \geq 0$), если коэффициенты в ОДУ отклонятся от обоснованных реологических моделей. Но вместе с тем, базируясь на ОДУ, нельзя исключить возможность нефизичного поведения среды.

Ранг всех этих моделей ограничен их линейностью. В действительности поведение ползучести и демпфирования (затухания) многих материалов наподобие металлов или полимеров является строго нелинейным.

В литературе имеется много нелинейных обобщений таких реологических моделей [47]. В общем случае для описания линейных упруго-вязких сред применяются линейные дифференциальные операторы различного порядка.

Весьма важен *принцип Вольтерра*¹, позволяющий результаты решения статических задач теории упругости пересчитывать в состояния наследственной вязкоупругости (о данном принципе речь пойдет далее в соответствующем разделе).

6.2.2. Разрушение (повреждение) при ползучести

Типичная кривая ползучести начинается с *фазы начальной ползучести* с высокими скоростями ползучести. Далее кривая ползучести переходит во вторую фазу ползучести с минимальной и постоянной скоростью ползучести (*фаза установившейся ползучести*). На третьей стадии скорость ползучести увеличивается снова (*фаза нелинейной ползучести*) (рис. 6.15). Эта третичная фаза ползучести заканчивается разрушением.

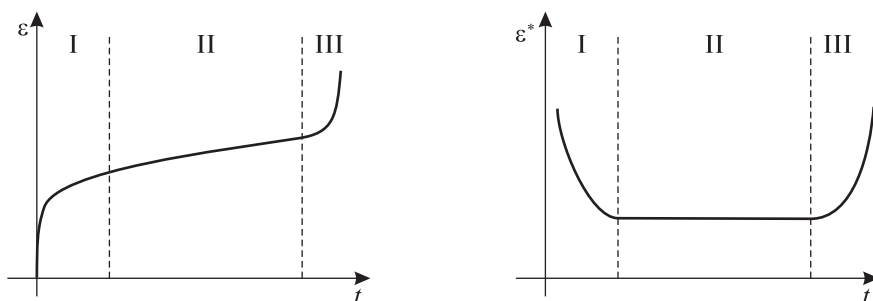


Рис. 6.15. Типичные кривые ползучести с тремя фазами ползучести

В то время как первоначальная и вторая фаза ползучести могут быть описаны реологическими моделями в рамках линейной вязкоупругости, например моделью Бюргерса, такие модели не применимы для третичной фазы ползучести, так как ей присуще нелинейное поведение. Это может быть причиной различных механизмов, таких как:

- сокращение поперечной площади вследствие поперечного сокращения, что приводит к увеличению реальных напряжений;
- зарождение и рост микротрещин и пор;
- изменение микроструктуры и многое другое.

¹ Вольтерра Вито (Volterra V., 1860–1940), итальянский математик; труды по математической физике, интегральным уравнениям, функциональному анализу.

Эффект этих механизмов суммируется в фазу «разрушение при ползучести» (Creep Damage) в качестве феноменологической теории.

Замечание. Термин «разрушение» используется для определения общих деструктивных эффектов разнообразных изменений, происходящих в материале, которые в конечном счете ограничивают его (материала) полноценное использование. Так, видимое разрушение может состоять в накоплении постоянных деформаций от ползучести (вязкое течение), пластического течения, появления коррозионных ям или развития трещин. Эти видимые эффекты являются результатом субмикроскопических изменений в кристаллической решетке или в межкристаллической границе материала.

Эффективный подход для описания разрушения на третьей стадии ползучести предложен Качановым¹ [48]. Его главная идея состоит в том, что только часть поперечного сечения образца S – уменьшенное поперечное сечение S_l – при ползучести выдерживает усилие. Данное поперечное сечение называется эффективным. Это приводит к появлению эффективных напряжений:

$$\sigma_l = F/S_l, \quad (6.22)$$

которые больше, чем истинные напряжения $\sigma = F/S$.

Если эффективные напряжения ввести в закон ползучести, то в этом случае скорость ползучести вырастает.

Замечание. Данная теория разрушения Качанова базируется на *принципе эквивалентности напряжений*, который формулируется следующим образом: поведение разрушенного материала подобно неразрушенному, если напряжения в законе ползучести заменить эффективными напряжениями.

Введем параметр разрушения d , определяемый следующим образом:

$$d = \frac{S - S_l}{S} = 1 - \frac{S_l}{S} \quad \text{или} \quad S_l = (1 - d)S. \quad (6.23)$$

На основании (6.23) следует, что начальное значение $d = 0$ для неразрушенного материала и растет монотонно во время ползучести. Если величина параметра d приближается к единице, то эффективные напряжения возрастают практически неограниченно. В действительности процесс ползучести прекращается и наступает разрушение, когда критическое значение d_{kr} все же меньше единицы: $0 < d_{kr} < 1$. Значение d_{kr} считается постоянной материала.

Параметр разрушения d рассматривается как внутренняя переменная, для которой необходимо эволюционное уравнение.

Так, по аналогии с моделью Бюргерса можно использовать уравнение вида

$$\dot{d} = \alpha \dot{\sigma}_l + \beta \sigma_l + \gamma d$$

с постоянными α , β , γ . Данное выражение определяет показатель d как монотонно возрастающий во время ползучести.

¹ Качанов Лазарь Маркович (1914–1993), российский механик, крупнейший специалист в области теории ползучести и теории прочности.

Ю. Н. Работновым для параметра d предложено уравнение

$$\dot{d} = \left(\frac{\sigma_l}{\mu} \right)^N \quad (6.24)$$

с двумя положительными постоянными μ , N , которые дают хорошие результаты во многих приложениях.

Уравнение (6.24) совместно с (6.22) и (6.23) составляют *теорию разрушения Качанова – Работнова*.

Скорость эффективных напряжений, согласно определению собственно эффективных напряжений (6.22):

$$\dot{\sigma}_l = \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{S_l} \right) = \frac{\dot{F}}{S_l} - \frac{F}{S_l^2} \dot{S}_l.$$

В случае монотонного теста на ползучесть, когда прикладываемая нагрузка F – постоянная, получаем, что $\dot{F} = 0$.

Рост эффективной площади поперечного сечения согласно (6.23)

$$\dot{S}_l = (1-d)\dot{S} - \dot{d}S.$$

Часто предполагают, что деформации ползучести (но не разрушения) происходят изохорически, что является общим предположением для металлов. Если, кроме того, пренебречь изменением объема при упругости, то для деформаций ε , определяемых как $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, следовательно $\dot{\varepsilon} = \dot{l}/l_0$, и текущего объема $V = lS$ получаем, что изменение объема призматического образца

$$\dot{V} = 0 = \dot{l}S + l\dot{S} = \dot{\varepsilon}l_0S + l\dot{S}.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{S} = -\frac{\dot{\varepsilon}l_0S}{l} = -\frac{\dot{\varepsilon}}{1+\varepsilon}S.$$

Окончательно приращение эффективных напряжений

$$\dot{\sigma}_l = \frac{\dot{F}}{S_l} + \frac{F}{S_l^2} \left[\dot{d}S + (1-d) \frac{\dot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} S \right] = \frac{\dot{F}}{S_l} + \frac{F}{S_l} \left[\frac{\dot{d}}{1-d} + \frac{\dot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} \right]. \quad (6.25)$$

На основании (6.25) можно заключить, что рост эффективных напряжений происходит вследствие:

- приращения прикладываемой нагрузки F ;
- роста переменной разрушения d ;
- поперечного сокращения.

Так как деформации в третичной стадии ползучести становятся достаточно большими, то время от времени становится необходимым распознавать отличия между различными измерениями напряжений и деформаций.

6.2.3. Общие замечания к построению математических моделей реологических сред

Постановка задач теории ползучести формулируется обычно следующим образом: на некотором интервале времени $0 \leq \tau \leq t$ тело подвергается воздействию заданной системы сил и температуры. Внутреннее взаимодействие между изотроп-

ными частицами характеризуется тензорами напряжений, деформаций и скоростей деформаций. Требуется «связать» измеряемые параметры с помощью уравнения или системы уравнений конкретной структуры, задать базовый эксперимент для определения материальных констант и найти изменения деформаций по времени.

Традиционным является разделение полной деформации ε_{ij}^f на упругую ε_{ij}^e , пластическую ε_{ij}^p и вязкую ε_{ij}^c (деформация ползучести) компоненты. Определением *деформации ползучести* можно считать соотношение, задающее полную деформацию ε_{ij}^f при изотермическом нагружении:

$$\varepsilon_{ij}^f = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^c \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Замечание. В случае, когда эти переменные используются без индексов, подразумеваем, что они соответствуют продольной составляющей той же деформации при одноосном нагружении.

В настоящее время при построении определяющих уравнений ползучести используются главным образом две альтернативные идеи.

Первая основана на концепции механического уравнения состояния [49]. Исходные соотношения для *скоростей деформации ползучести* $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ в данном случае имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + b_{ij}^n \frac{\partial f}{\partial q_n}, \quad (6.26)$$

где f — потенциал ползучести, задаваемый соотношением

$$f = f[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma), \dot{\varepsilon}_i^c, q_1, \dots, q_r, T], \quad (6.27)$$

включающим для исходно изотропной несжимаемой среды, помимо инвариантов девиатора напряжений $J_2(D_\sigma)$, $J_3(D_\sigma)$ и интенсивности скорости деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}_i^c$, некоторое число внутренних параметров q_n , кинетика изменения которых описывается следующим эволюционным уравнением:

$$dq_n = a_{ij}^n d\sigma_{ij} + b_{ij}^n d\varepsilon_{ij}^c + c^n dt + d^n dT, \quad (6.28)$$

где a^n , b^n , c^n , d^n — некоторые функции от σ_{ij} , ε_{ij} , t , T , а также от параметров q_n ($n = \overline{1, r}$), если число внутренних параметров составляет r .

Остальные обозначения в (6.26)–(6.28) следующие: λ — коэффициент пропорциональности; t — время; T — температура. Суммирование ведется по повторяющимся индексам.

В зависимости от того, какие из внутренних переменных q_n включаются в потенциал ползучести f , получаем ту или иную теорию ползучести.

В частности, в теории течения включается время t , в *теории упрочнения* — работа пластической деформации $\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c$, параметр Одквиста $\int d\varepsilon_i^c$ или величина накопленной деформации ползучести ε_{ij}^c . В теории старения вместо потенциала скоростей ползучести используется потенциал деформаций ползучести, вместо скорости интенсивности деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}_i^c$ собственно интенсивность деформаций ползучести ε_i^c , а в качестве внутреннего параметра задается время t .

Для описания третьей стадии в потенциал ползучести f дополнительно включаются внутренние параметры скалярной, векторной или тензорной природы, отражающие процесс накопления повреждений. Они вводятся таким образом, чтобы увеличение соответствующего параметра влекло увеличение скорости ползучести.

В рамках теории течения, например, для простейшего случая одномерной ползучести принимается

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n, \quad (6.29)$$

где ω — скалярный параметр поврежденности, для которого обобщенно можно записать

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma(1+\varepsilon^c)}{(1-\omega^r)} \right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q} \omega^\beta. \quad (6.30)$$

Здесь C, m, r, q, β — экспериментально определяемые коэффициенты ($C > 0$; $m \geq 1$; $q \geq 0$; $\beta \geq 0$).

Другой подход к построению определяющих уравнений ползучести основан на использовании интегрального представления Вольтерра — Фреше¹ [49]:

$$e = J_1 * d\sigma + J_2 * d\sigma d\sigma + \dots \quad (6.31)$$

В (6.31) принято, что $e = \varepsilon^e + \varepsilon^c$, а J_i — весовые функции времени.

В качестве упрощенных вариантов разложения (6.31) чаще всего используются следующие соотношения:

$$\varepsilon = \psi(\sigma) + \int_0^t J_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \sigma(\tau) d\tau \quad (6.32)$$

и

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t J_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \sigma(\tau) d\tau, \quad (6.33)$$

где J_0 — интегральный оператор Вольтерра с разностным или неразностным ядром специального типа; ψ — функция напряжения.

В рамках уравнений (6.32) и (6.33) в отличие от первого подхода учитывается предыстория нагружения, однако третья стадия ползучести также описывается с привлечением параметра поврежденности.

Конкретизация уравнений (6.27), (6.32) и (6.33) осуществляется на основе определенных концепций (например, старения и упрочнения), реализуемых в экспериментах (чаще всего на одноосное растяжение).

Обобщение на случай сложного напряженного состояния и нестационарного нагружения дается за счет использования гипотезы «единой кривой ползучести». Поэтому все ограничения и недостатки одномерных моделей в таком подходе полностью сохраняются.

¹ Фреше Морис Рене (Maurice Rene Frechet, 1878–1973), французский математик.

Наиболее принципиальным является неадекватность описания третьей стадии ползучести. Используемое, например, для этих целей уравнение (6.29) совместно с (6.30) задачу решает весьма приближенно, поскольку истинный закон влияния поврежденности на скорость ползучести неизвестен. Серьезные трудности возникают также при идентификации характеристик поврежденности в уравнении (6.30). Однозначно они определяются только в случае задания двух коэффициентов C и m ($r = 1$; $\beta = q = 0$), но при этом достоверность восстановления кривых ползучести существенно снижается. Для большего числа коэффициентов базовый эксперимент не определен. В целом же такой подход является решением задачи «постфактум», поскольку предполагает наличие информации о разрушении, уже включающем третью стадию ползучести.

Необходимо также отметить, что используемое в теории ползучести понятие упрочнения относится собственно к процессу ползучести и отражает эффект снижения скорости на начальной стадии. Что же касается особенностей исходного упрочнения среды, определяемого по диаграммам мгновенного деформирования, то существующими теориями они не учитываются.

Реологические уравнения, выражающие точную зависимость между математическими величинами, описывают свойства идеального материала, который заменяет реальный материал при теоретическом анализе его поведения при внешнем воздействии.

При выборе реологического уравнения для конкретного материала в большинстве своем необходимо следовать следующей процедуре.

1. С образцами из исследуемого материала проводят ряд статических и динамических экспериментов, например строят диаграмму одноосного растяжения-сжатия при статическом и динамическом нагружении (с разными скоростями нагружения); записывают как свободные, так и вынужденные колебания нагруженного образца, подвешенного жестко за один конец со свободным вторым концом; исследуют кручение образца как при статическом, так и при динамическом нагружении (т. е. крутильные колебания образца) и т. д.

2. Найденные экспериментальные кривые сравнивают с одноименными теоретическими кривыми, а также с кривыми ползучести. Путем сопоставления одноименных кривых выбирают реологическое тело, теоретические кривые для которого наиболее «близко подходят» к соответствующим экспериментальным кривым. Из сравнения одноименных (теоретических и экспериментальных) кривых делают уточнения значений реологических параметров определенного таким образом реологического уравнения.

Такой путь выбора реологического уравнения является наиболее распространенным. Вместе с тем в последнее время для новых высокополимерных материалов с длинными цепными молекулами при построении механических моделей для этих тел принимают во внимание молекулярную структуру полимеров. В соответствии с этим реологическим параметрам придается конкретный физический смысл.

Итак, в общем случае реологическое уравнение, описывающее локальный процесс деформирования, можно представить функционалом вида

$$F(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots, s, \dot{s}, \ddot{s}) = 0$$

либо в виде функционалов, разрешимых относительно компонент напряжений и деформаций:

$$s(t) = F_1 \left[\varepsilon \left(\begin{smallmatrix} t \\ \tau \\ 0 \end{smallmatrix} \right), t \right], \quad \varepsilon(t) = F_2 \left[s \left(\begin{smallmatrix} t \\ \tau \\ 0 \end{smallmatrix} \right), t \right]. \quad (6.34)$$

Функционалы (6.34) являются непрерывными в области непрерывности функций $s(t)$ и $\varepsilon(t)$. Если обозначить искомые функции как $z(t)$ и $y(t)$, данные функционалы можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} az(t) = & y(t) + b \int_0^t K_1(t, \tau_1) y(\tau_1) d\tau_1 + \frac{b^2}{2!} \int_0^t \int_0^t K_2(t, \tau_1, \tau_2) y(\tau_1) y(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ & \dots + \frac{bb^n}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) y(\tau_1) \dots y(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где a, b – const, а $K_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)$ – известные функции, задаваемые независимо от $y(\tau)$.

Замечание. Данное заключение следует из теоремы Вейерштрасса¹ о том, что любую непрерывную функцию на интервале (c, d) можно аппроксимировать с наперед заданной точностью обычным степенным рядом [50].

Ограничиваясь в правых частях (6.35) двумя слагаемыми и учитывая, что для «нестареющих» линейно-наследственных сред ядра интегральных уравнений могут быть разностными [49], их можно представить в таком виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\mu} \left[s(t) + \int_0^t J(t-\tau) s(\tau) d\tau \right], \quad (6.36)$$

$$s(t) = 2\mu \left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]. \quad (6.37)$$

Представления для $\varepsilon(t)$ и $s(t)$ в виде (6.36) и (6.37) являются очень удобными, так как они дают возможность отойти от явных механических моделей-схем и ввести новые абстрактные модели реологических тел – математические модели реологических тел.

Отметим, что в выражениях (6.36) и (6.37) в общем случае обычно s_{ij} и ε_{ij} – компоненты девиаторов напряжений и деформаций, т. е. $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} e$.

Задавая функции $J(x, t)$ и $R(x, t)$ и ассоциируя с ними новое реологическое тело, можно получить бесконечное множество новых математических моделей реологических тел. Все эти математические модели будут моделями линейного типа. Они характеризуют НДС наследственных упругих тел.

Если рассматривать (6.36), то (6.37) можно считать решением (6.36). Следовательно, $R(t, \tau)$ в (6.37) будет резольвентной $J(t, \tau)$ в (6.36), и наоборот.

¹ Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897), немецкий математик, «отец современного анализа».

Выражение (6.36) можно разбить на две части:

- первое слагаемое — это мгновенная деформация (упругая)

$$\varepsilon^{el}(t) = s(t)/2\mu;$$

- и второе слагаемое — наследственная деформация (тоже упругая)

$$\varepsilon^{sp}(t) = \frac{1}{2\mu} \int_0^t J(t-\tau)s(\tau)d\tau$$

с наследственной функцией $J(t-\tau)$, которая «запоминает» действие нагружения в момент τ на деформацию тела в момент наблюдения t .

Согласно физическому смыслу $J(t-\tau)$ должна быть функцией убывающей и при $\mu, \eta = \text{const}$ быть функцией не t и τ , а $(t-\tau)$, так как она зависит лишь от времени, прошедшего от момента τ приложения нагружения до момента t наблюдения деформации от нагружения.

Если в правой части (6.35) оставить соответственно 3, 4, 5, и т. д. первых членов, то получим нелинейные интегральные уравнения соответственно 3, 4, 5-го ... порядков, которые могут быть математическими моделями соответствующих реологических тел.

Замечание. Следует подчеркнуть, что такой путь построения новых математических моделей реологических тел не является единственным.

Для реологических уравнений, у которых коэффициенты являются постоянными, в соответствующих эквивалентных интегральных уравнениях ядра $K(x, t)$ и $\mathfrak{Z}(x, t)$ можно представить в виде показательных функций, т. е. следующим образом:

$$\sum_j^n \exp(-k_j(t-\tau)), k_j > 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.38)$$

Если же реологические тела с простейшими законами линейного деформирования имеют параметры, являющиеся функциями времени, то реологическое уравнение может быть линейным уравнением с коэффициентами, изменяющимися со временем. Ядро соответствующего интегрального уравнения будет не разностным, а иметь вид

$$J(x, t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \dots + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Замечание. Вместе с тем в [64] показано, что ядра (6.38) для функции $\varepsilon(t)$ (6.36) дают результаты, которые для очень малых деформаций (т. е. для начальных значений деформаций) совсем не согласуются с введенными исходными предположениями.

В (6.35) с усложнением интегральных уравнений за счет удержания большего числа членов появляются большие математические трудности в их решении. Поэтому в этом случае вместо (6.35) чаще рассматривают нелинейные интегральные уравнения следующего вида [36]:

$$\varphi(\varepsilon) = s(t) + \int_0^t J(t-\tau)s(\tau)d\tau \quad (6.39)$$

или такого [51]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\mu} \left[s(t) + \int_0^t J(t-\tau) f[s(\tau)] d\tau \right], \quad (6.40)$$

где $\varphi(\varepsilon)$ и $f[s(t)]$ – определяемые функции, характеризующие нелинейные деформации материала.

Соотношения (6.36), (6.37), (6.40) могут использоваться и для изучения как линейных, так и нелинейных запредельных неупругих деформаций реологических тел.

Феноменологические подходы к построению реологических уравнений современной механики наследственных сред достаточно подробно описаны в многочисленных научных монографиях и учебниках.

6.2.4. Построение реологических уравнений в общем случае пространственной деформации

Как и ранее, рассматриваем деформационные процессы в пределах теории упругости и в рамках малых деформаций.

Напомним, что одно из основных допущений теории малых деформаций состоит в том, что при сложении уравнений равновесия и граничных условий можно не различать координаты точек среды до и после деформации.

Кроме того, считаем, что тело испытывает малые деформации таких значений, что, будучи изотропным до деформации, оно остается таковым и в последующем. Для таких тел при нагружении их с «природного» состояния (при котором у всех элементов механической модели-схемы отсутствуют любые растяжения или сжатия) эллипсоиды напряжений и деформаций должны быть коаксиальными.

Ранее уже было показано, что при построении реологических уравнений удобно общую деформацию рассматривать как сумму объемной деформации и деформации, связанной со сменой формы, (т. е. брать в рассмотрение шаровой и девиаторный тензоры). Так как большинство материалов в широком интервале объемных деформаций очень хорошо следуют классическому закону Гука, то отклонения от линейности наиболее ярко проявляются при деформациях, связанных со сменой формы элемента (компоненты девиаторов напряжений и деформаций s_{ij} и ε_{ij}).

Рассмотрим следующую задачу: как, зная реологические законы, связывающие компоненты девиаторов s_{ij} и ε_{ij} и шаровых тензоров σ и e ($\sigma = (1/3)\sigma_{ii}$, $e = (1/3)e_{ii}$), записать реологический закон для новых компонент σ_{ij} и e_{ij} , характеризующих как объемную деформацию, так и деформацию формы в любой точке тела, т. е.

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + s_{ij}; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} e. \quad (6.41)$$

Следует отметить, что переход от реологических законов, связывающих компоненты s_{ij} с ε_{ij} и σ с e , к закону, связывающему между собой σ_{ij} и e_{ij} на основании (6.41), осуществляется для реологических тел, механические модели-схемы которых не имеют пластических элементов.

Если в схеме есть пластический элемент, то вывод реологического закона, связывающего σ_{ij} и e_{ij} , требует введения некоторых дополнительных гипотез. Например, можно ввести предположение, что если в механическую модель-схему тел вхо-

дит пластический элемент, то при нагружении таких тел, подобно одному параметру, оси эллипсоида нагружения не изменяют своей ориентации в процессе деформирования, т. е. нагружения являются простыми (Ильюшин А. А. [52]).

Рассмотрим общий подход к построению трехмерной теории линейной вязкоупругости.

Замечание. Подход, отличный от приведенного далее, описан в работе Д. Бленда [53].

Рассматривается реологическое тело в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Вокруг произвольной точки M деформируемого тела «вырезаем» малый элемент в виде параллелепипеда, грани которого ориентированы по координатным осям $Ox_1x_2x_3$.

Тензоры напряжений $\{\sigma_{ij}\}$ и деформаций $\{e_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) в рассматриваемой точке M реологического тела представляем в следующем виде:

$$\Pi_\sigma \{\sigma_{ij}\} = \Pi_\sigma^{(\text{ш})} \{\sigma\} + \Pi_\sigma^{(\text{л})} \{s_{ij}\}, \quad \Pi_l \{e_{ij}\} = \Pi_l^{(\text{ш})} \{e\} + \Pi_l^{(\text{л})} \{\varepsilon_{ij}\}, \quad (6.42)$$

т. е. в тензорах напряжений и деформаций выделяются части, связанные с изменением объема и формы.

В (6.42) дополнительно к (6.41) введены следующие обозначения:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij} (\theta^B - \theta^*), \quad 3\theta^B = \sigma_{ii}, \quad \theta^* = (1/3)s_{ii},$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} e = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\theta, \quad \theta = e_{ii} = 3e. \quad (6.43)$$

Величины ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и $\theta = 3e$ полностью и однозначно определяют деформированное состояние в данной точке M сплошного тела.

Сделаем некоторые пояснения к формулам (6.43). В соответствии с принципом возможных перемещений имеем

$$\sigma_{11}\delta e_{11} + \sigma_{22}\delta e_{22} + \sigma_{33}\delta e_{33} + 2\sigma_{23}\delta e_{23} + 2\sigma_{13}\delta e_{13} + 2\sigma_{12}\delta e_{12} =$$

$$= s_{11}\delta \varepsilon_{11} + s_{22}\delta \varepsilon_{22} + s_{33}\delta \varepsilon_{33} + 2s_{23}\delta \varepsilon_{23} + 2s_{13}\delta \varepsilon_{13} + 2s_{12}\delta \varepsilon_{12} + \theta^B \delta \theta. \quad (6.44)$$

Здесь s_{ij} и θ^B — обобщенные силы.

Если в (6.44) согласно (6.43) внести выражение $\delta \varepsilon_{ij} = \delta e_{ij} - \delta_{ij}\delta\theta$ и приравнять коэффициенты при одинаковых вариациях δe_{ij} , то получим

$$\sigma_{11} = \frac{2}{3}s_{11} - \frac{1}{3}s_{22} - \frac{1}{3}s_{33} + \theta^B, \quad \sigma_{12} = s_{12}. \quad (6.45)$$

Остальные компоненты тензора напряжений получаются по аналогии с (6.45).

Складывая три первых выражения из (6.45), имеем $3\theta^B = \sigma_{ii}$. Следовательно, $\theta^B = \sigma$.

Уравнения (6.45) можно записать в таком виде:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij} (\theta^B - \theta^*), \quad (6.46)$$

где

$$\theta^* = (1/3)s_{ii}. \quad (6.47)$$

Если сложить три первых уравнения (6.46), то получим тождество, т. е. величина θ^* останется неопределенной. На самом деле это так и должно быть, так как из (6.43) следует, что

$$\sum_i \varepsilon_{ii} = 0. \quad (6.48)$$

Следовательно, $\delta\varepsilon_{ij}$ при $i = j$ не являются независимыми, а $\delta\varepsilon_{ii} = 0$.

Замечание. Напомним, что по повторяющемуся индексу подразумевается операция сложения.

Таким образом, для определения θ^* необходимо иметь дополнительное соотношение, которое должно быть построено (для каждого материала) на основе использования соответствующего реологического уравнения.

В [49] показано, что все реологические уравнения для тел с простейшим законом линейного дифференцирования представляют из себя обычные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами соответствующего порядка относительно функций $s(t)$ и $\varepsilon(t)$. При этом для упруго-наследственных тел порядок высшей производной в реологическом уравнении для $\varepsilon(t)$ и $s(t)$ одинаковый, а для упруго-вязких тел типа среды Максвелла, тела Бюргера и им подобных порядок старшей производной в соответствующем реологическом уравнении для $s(t)$ на единицу выше, чем для $\dot{\varepsilon}(t) = v(t)$.

Представим соотношения (6.36) и (6.37), являющиеся интегральными уравнениями второго рода и, введенными, как математические модели соответствующих реологических тел, и характеризующиеся функциями $J(t, \tau)$ и $R(t, \tau)$, в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2\mu} \left[s_{ij}(t) + \int_0^t J(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right], \quad (6.49a)$$

$$s_{ij}(t) = 2\mu \left[\varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right]. \quad (6.49b)$$

Из (6.49) и (6.48) имеем

$$s_{11} + s_{22} + s_{33} = 2\mu \left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - \int_0^t R(t-\tau) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) d\tau \right] = 0. \quad (6.50)$$

Для реологических уравнений вида (6.50)

$$\theta^* = 0. \quad (6.51)$$

При выводе реологических уравнений в случае пространственной деформации принимается:

- для реологических тел компоненты напряжений s_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) связаны с компонентами деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) общим законом линейного деформирования (соотношения (6.49));

- зависимость между величинами θ^B и θ , характеризующая объемную деформацию рассматриваемого тела, считается заданной.

Замечание. Эта зависимость может быть задана, вообще говоря, бесконечным числом способов, проверкой адекватности может быть эксперимент, который из бес-

конечно возможных зависимостей позволяет выбрать ту, которая ближе всего соответствует действительному состоянию.

Далее будет показано, что для реологических тел с общим законом линейного дифференцирования зависимость между θ^B и θ , т. е. реологический закон для объемной деформации материала, логично принять в виде (6.49), но со своими реологическими параметрами и со своей функцией наследственности.

Из всех зависимостей наиболее простая будет линейная

$$\theta^B = \chi\theta, \quad (6.52)$$

которая с большой точностью подтверждается экспериментально для большинства как металлических, так и неметаллических материалов в широком интервале давления.

Замечание. По П. Бриджмену¹ [54], плотность металлов при большом всестороннем давлении увеличивается незначительно, причем смена объема является упругой. При гидростатическом давлении порядка 1500 атмосфер и более зависимость между гидростатическим давлением θ^B и относительной сменой объема θ П. Бриджменом получена в следующем виде:

$$\theta = \frac{1}{\chi} \theta^B \left[1 - \frac{1}{\chi_1} \theta^B \right],$$

где $\chi = E/(3(1-2\gamma))$ — модуль объемной упругости; χ_1 — вторичный модуль материала (его значения приведены, например, в работе [54]).

Если деформации реологического тела значительно превосходят величину σ_s , то сменой объема можно пренебречь и предполагать материал несжимаемым. В этих случаях вместо (6.52) можно взять соотношение $\theta = e_{ii} = e_1 + e_2 + e_3 = 0$, представляющее собой условие несжимаемости материала.

Вместе с тем более точные исследования показывают, что наиболее ярко отклонения материала от упругого поведения проявляются при смене формы бесконечно малого элемента, т. е. упругие несовершенства имеют место и при объемной деформации материала. Следовательно, в общем случае для θ следует выбирать такой же вид уравнения реологического закона, что и для измененной формы, но со своими параметрами.

Приведем некоторые примеры сложения реологических уравнений при пространственной деформации.

1. Линейно-упругое тело.

Пусть $s_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij}$, где $2\mu = \text{const}$. Величины θ^B и θ связаны между собой соотношением (6.52).

Так как $\theta^* = 0$, а ϵ_{ij} определяются по формуле (6.43), то из (6.46) следует, что

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\theta^B = 2\mu\epsilon_{ij} + \delta_{ij}\chi\theta = 2\mu \left(e_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \theta \right) + \delta_{ij}\chi\theta,$$

т. е. $\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij} (\chi - 2\mu/3) \theta$, ($i, j = 1, 2, 3$).

¹ Бриджмен Перси Уильямс (Бриджман) (Percy Williams Bridgman, 1882–1961), американский физик, лауреат Нобелевской премии по физике в 1946 г.

Введем следующее обозначение: $\lambda = \chi - (2\mu/3)$. Тогда получаем

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (6.53)$$

Выражение (6.53) представляет собой известную запись закона Гука в форме Ламе.

2. Вязкий несжимаемый (ньютоновский) материал.

Если материал является несжимаемым, то в этом случае

$$\theta = e_{ii} = 0, \quad \dot{\theta} = \dot{e}_{ii} = 0.$$

Реологическое уравнение, характеризующее поведение такого вещества при смене формы, имеет вид $s_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij}$, ($i = 1, 2, 3$), где η – константа, характеризующая вязкость вещества, $\dot{e}_{ij} = d\varepsilon_{ij}/dt$.

Из (6.46) и (6.43) при $\theta = 0$ и $\dot{\theta} = 0$ следует

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij} + \delta_{ij} p, \text{ или } \sigma_{ii} = -p + 2\eta \dot{e}_{ii}, \quad \sigma_{ij} = s_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij}, \quad i \neq j; \quad \theta^B = -p. \quad (6.54)$$

При выводе (6.54) вместо производных по времени от компонент деформации приняты соответственно компоненты скорости деформации, что является корректным лишь в случае малых деформаций.

3. Вязко-пластичное тело.

Если напряжения превосходят предельное значение, т. е. $s_{ij} > s_s = K$, то, как легко видно из механической модели-схемы этого тела, имеет место следующее соотношение:

$$s_{ij} = \pm K + 2\eta \dot{e}_{ij}.$$

Отметим, что знак величины K должен совпадать со знаком скорости деформаций изменения формы $\dot{e}_{ij}$.

Пусть материал несжимаем (т. е. $\theta = 0$), тогда $\dot{\theta} = 0$. Из того что $\theta = \sum_i \varepsilon_{ii} = 0$, следует, что знаки $\dot{e}_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$) должны быть разными. Пусть хотя бы одна из величин $\dot{e}_{ii}$ не равна нулю. Например, примем, что $\dot{e}_{11}$ – положительная и по абсолютной величине является наибольшей. Тогда $\dot{e}_{22}$ и $\dot{e}_{33}$ должны быть отрицательными. Следовательно,

$$s_{11} = +K + 2\eta \dot{e}_{11}, \quad s_{23} = \pm K + 2\eta \dot{e}_{23},$$

$$s_{22} = -K + 2\eta \dot{e}_{22}, \quad s_{13} = \pm K + 2\eta \dot{e}_{13},$$

$$s_{33} = -K + 2\eta \dot{e}_{33}, \quad s_{12} = \pm K + 2\eta \dot{e}_{12}.$$

Сложив три первых представления, имеем $3\theta^* = s_{ii} = -K$.

Подставляя в полученное выражение значения s_{ij} , $\theta^* = K/3$ и величины $\dot{e}_{ij}$, определенные из (6.43), получим реологическое уравнение в случае пространственной деформации вязко-пластического несжимаемого тела в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= s_{11} + \theta - \theta^* = -p + \frac{4}{3}K + 2\eta \dot{e}_{11}, \\ \sigma_{22} &= s_{22} + \theta - \theta^* = -p - \frac{2}{3}K + 2\eta \dot{e}_{22}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\sigma_{33} = s_{33} + \theta - \theta^* = -p - \frac{2}{3}K + 2\eta\dot{e}_{33},$$

$$\sigma_{ij} = \pm K + 2\eta\dot{e}_{ij}, \quad i \neq j.$$

Отметим, что величина p осталась неопределенной. Она находится в процессе решения задачи.

Знак коэффициента K в уравнениях (6.55) для $i \neq j$ тоже неопределен. Знак постоянной K может быть определен во всех реологических уравнениях, если положить, что оси координат $Ox_1x_2x_3$ направлены по главным осям тензора напряжений в рассматриваемой точке M тела. В этом случае для главных напряжений σ_i при условии $\dot{e}_1 > 0$ сохранится вид первых трех уравнений (6.31), а другая тройка для $i \neq j$ перейдет в равенства вида $\sigma_{ij} = 0$.

Теперь реологическое уравнение выбранного материала в произвольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ можно получить, воспользовавшись «обычными» формулами обращения компонент тензора напряжений.

4. Упруго-вязкое тело Кельвина.

Общий вид уравнения, связывающего компоненты НДС тела типа Кельвина, можно представить в виде

$$a\dot{s}_{ij} + s_{ij} = b\dot{e}_{ij} + ce_{ij} \quad (i, j = \overline{1,3}),$$

где $a = \frac{\eta_F}{\mu_F + \mu_H}$; $b = \frac{2\eta_F\mu_H}{\mu_F + \mu_H}$; $c = \frac{2\mu_H\mu_F}{\mu_F + \mu_H}$.

Чтобы записать уравнения для объемной деформации, необходимо задать закон объемной деформации.

Пусть объемная деформация является упругой. Тогда по закону Гука и связи между θ^B и θ в виде (6.52), и условия, что $\theta^* = 0$, следует:

при $i = j$

$$a\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} = \left(a\chi - \frac{b}{3}\right)\dot{\theta} + b\dot{e}_{ij} + \left(\chi - \frac{c}{3}\right)\theta + ce_{ij}, \quad \theta = \sum_{i=1}^3 e_{ii}; \quad (6.56)$$

при $i \neq j$

$$a\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} = b\dot{e}_{ij} + ce_{ij}.$$

Приведем частные примеры общего уравнения.

Одноосное напряженное состояние, т. е. $\sigma_{11} = \sigma$; $e_{11} = e$; $\sigma_{ij} = 0$; $e_{ij} = 0$ в случае, когда i и j не равны нулю одновременно.

Из соотношений (6.56) имеем

$$n\dot{\sigma} + \sigma = Hn\dot{e} + Ee, \quad (6.57)$$

где $n = a$; $Hn = a\chi + \frac{2}{3}b$; $E = \dot{\chi} + \frac{2}{3}c$.

Тогда

$$n = \frac{\eta_F}{\mu_F + \mu_H}; \quad H = \chi + \frac{2}{3}\frac{b}{a} = \chi + \frac{4}{3}\mu_H; \quad E = \dot{\chi} + \frac{4\mu_H\mu_F}{3(\mu_F + \mu_H)}.$$

Выражение (6.57) можно использовать при исследовании НДС тонкого стержня при растяжении (т. е. $P = \sigma F$, F – поперечное сечение стержня).

5. Упруго-вязкое тело Максвелла.

Если в схеме Кельвина взять $\mu_F = 0$, то получим механическую модель-схему реологического тела Максвелла:

при $i = j$

$$a\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} = \left(a\chi + \frac{b}{3}\right)\dot{\theta} + b\dot{\epsilon}_{ij},$$

при $i \neq j$

$$a\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} = b\dot{\epsilon}_{ij}, \quad a = \frac{\eta_M}{\mu_M}, \quad b = 2\eta_M, \quad \theta = \sum e_{ii},$$

где η_M , μ_M – реологические параметры упруго-вязкого тела Максвелла.

6. Реологические тела с общим законом линейного деформирования.

Реологические тела, механические свойства которых можно представить механическими моделями-схемами, складывающимися из трех наипростейших элементов – упругого (У), вязкого (В) и пластичного (П), – называются *реологическими телами с простейшим законом линейного деформирования*.

В случае общего закона линейного деформирования связь компонент девиаторов тензоров напряжений и деформаций можно записать в таком виде:

$$s_{ij}(t) = 2\mu \left[\epsilon_{ij}(t) - \int_0^t \varphi(t-\tau) \epsilon_{ij}(\tau) d\tau \right], \quad (6.58)$$

где μ – модуль сдвига при упругой деформации материала; $\varphi(t-\tau)$ выражает влияние единичного нагружения в момент τ на деформацию в момент времени t . По физической сути функция $\varphi(t-\tau)$ должна при возрастании аргумента $(t-\tau)$ монотонно убывать и асимптотически приближаться к нулю.

К уравнению (6.58) необходимо добавить закон, характеризующий объемную деформацию материала.

Вообще говоря, логично для объемной деформации принимать зависимость между θ^B и θ того же типа, что и для s_{ij} и ϵ_{ij} (6.58), но со своими реологическими параметрами и своей функцией влияния. Следовательно,

$$\theta^B(t) = \chi \left[\theta(t) - \int_0^t \psi(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right], \quad (6.59)$$

где χ – const, характеризующая упругую объемную деформацию материала.

Замечание. В соотношениях (6.58) и (6.59) нижний предел интегрирования может быть « $-\infty$ ».

Таким образом, в общем случае линейного деформирования процесс деформации изотропного материала характеризуется двумя функциями $\psi(t-\tau)$ и $\varphi(t-\tau)$, выражающими соответственно влияние действия одиночного нагружения в момент τ на объемную деформацию и деформацию изменения формы в момент времени t . Обе эти функции должны при возрастании $(t-\tau)$ убывать до нуля.

Следует подчеркнуть, что во многих случаях практически нет необходимости вводить одновременно обе функции $\psi(t-\tau)$ и $\varphi(t-\tau)$. Чаще всего оказывается достаточным введение одной функции $\varphi(t-\tau)$, чтобы с удовлетворительной точностью аппроксимировать кривые процесса деформирования реологического тела со временем.

Подставим ε_{ij} вида (6.43) в (6.58), в результате получаем:
при $i=j$

$$s_{ij}(t) = 2\mu \left[e_{ij}(t) - \frac{\theta(t)}{3} \int_0^t \varphi(t-\tau) \left[e_{ij}(\tau) - \frac{1}{3} \theta(\tau) \right] d\tau \right] \quad (i, j=1, 2, 3); \quad (6.60)$$

при $i \neq j$

$$s_{ij}(t) = 2\mu \left[e_{ij}(t) - \int_0^t \varphi(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right].$$

При подстановке s_{ij} из (6.60) в (6.46) и принимая во внимание (6.51), получают реологическое уравнение при пространственной деформации изотропного тела, подчиняющегося общему закону линейного деформирования [64, 67]:

при $i=j$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = s_{ij} + \theta^B = \lambda \theta + 2\mu e_{ij} - \int_0^t \varphi(t-\tau) 2\mu e_{ij}(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t \left[\chi \psi(t-\tau) - \frac{2\mu}{3} \varphi(t-\tau) \right] \theta(\tau) d\tau; \end{aligned} \quad (6.61a)$$

при $i \neq j$

$$\sigma_{ij} = s_{ij} = 2\mu \left[e_{ij}(t) - \int_0^t \varphi(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right], \quad (6.61b)$$

где $\lambda = \chi - (2/3)\mu$.

Вводим в (6.61) следующие обозначения:

$$\lambda \Psi(t-\tau) = \frac{2}{3} \mu \varphi(t-\tau) - \chi \psi(t-\tau) \quad \text{и} \quad \Phi(t-\tau) = -\varphi(t-\tau).$$

В результате получаем:

при $i=j$

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda \theta(t) + \lambda \int_0^t \Psi(t-\tau) \theta(\tau) d\tau + 2\mu \left[e_{ij}(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right]; \quad (6.62a)$$

при $i \neq j$

$$\sigma_{ij}(t) = 2\mu \left[e_{ij}(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right]. \quad (6.62b)$$

Если в (6.62) для интегральных операторов ввести такие обозначения:

$${}^* \Phi f(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad {}^* \Psi f(t) = \int_0^t \Psi(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

то (6.62) принимают следующий вид:

$$\sigma_{ii} = \bar{\lambda}\theta + 2\bar{\mu}e_{ii}, \quad i = j; \quad \sigma_{ij} = 2\bar{\mu}e_{ij}, \quad i \neq j, \quad (6.63)$$

где

$$\bar{\lambda} = \lambda [1 + {}^* \Psi], \quad \bar{\mu} = \mu [1 + {}^* \Phi]. \quad (6.64)$$

Здесь λ, μ — упругие постоянные.

Отсюда следует важное заключение, состоящее в том, что если в законе Гука теории упругости заменить λ и μ линейными операторами (6.64), то получаем реологическое уравнение для среды с упругой наследственностью, т. е. для среды, подчиняющейся общему закону линейного деформирования (6.58) и (6.59).

Отметим, что соотношение (6.63) является справедливым для реологических тел, в которых при $t = 0$ $\sigma_{ij} = 0$ и $e_{ij} = 0$. Вместе с тем во многих случаях в теле существуют начальные напряжения.

Для продления срока службы конструкций необходимо, чтобы начальные напряжения были противоположного знака с «рабочими» напряжениями. Эти начальные напряжения можно условно считать следствием некоторого фиктивного нагружения рассматриваемого элемента напряжениями $\sigma_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \delta_{ij}\sigma(t)$, приложенными к этому элементу в период времени $-\infty < t < 0$ так, чтобы осуществить начальное напряженное состояние в момент $t = 0$, которое принимается за начальное.

6.3. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

6.3.1. Общие понятия

Вначале напомним некоторые общие базовые понятия, введенные ранее.

Физические соотношения *между девиаторами напряжений и деформаций* ($s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij}e$) и шаровыми тензорами в случае закона линейной вязкоупругости записываются в следующей форме:

$$2\mu\varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int_0^t J(t-\tau)s_{ij}(\tau) d\tau, \quad K\theta(t) = \sigma(t). \quad (6.65)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\theta = e_{kk}$ — относительное изменение объема; $\sigma = \sigma_{kk}/3$ — среднее (гидростатическое) напряжение; μ — мгновенно-упругий модуль сдвига; K — мгновенный модуль объемной деформации. Функция $J(t)$ характеризует реологические свойства материала и называется *ядром ползучести*.

Уравнениям (6.65) можно дать следующую физическую интерпретацию: поле деформаций ε_{ij} в данный момент времени определяется не только мгновенным напряжением s_{ij} (связанным с деформациями обобщенным законом Гука), но и пред-

шествующими значениями напряжений с помощью некоторой наследственной функции.

Объемное деформирование θ обычно принимается упругим, так как *объемная ползучесть мала по сравнению со сдвиговой*. Заметим, что наследственная функция имеет своим аргументом разность $(t - \tau)$, т. е. уравнения (6.65) инвариантны относительно начала отсчета времени.

Ядро $J(t)$ является положительной монотонно убывающей функцией своих аргументов. На бесконечности она асимптотически стремится к нулю. При отрицательных значениях аргумента она тождественно равна нулю.

Предположим, что уравнения (6.65) могут быть разрешены относительно s_{ij} и σ :

$$s_{ij}(t) = 2\mu \left(\varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right), \quad K\theta(t) = \sigma(t). \quad (6.66)$$

Функцию $R(t)$ называют *ядром релаксации* материала. Она является *резольвентой* ядра $J(t)$. Разумеется, функция $J(t)$ в свою очередь является резольвентой ядра $R(t)$.

Подставим $\varepsilon_{ij}(t)$ из (6.65) в первое уравнение (6.66) и потребуем его тождественного выполнения при любых $s_{ij}(t)$. Получим следующее интегральное соотношение, связывающее ядра между собой:

$$R(t) - J(t) = \int_0^t J(t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (6.67)$$

Следовательно, вполне достаточно определить одно из ядер экспериментально, другое можно получить аналитически. В том случае, если из экспериментов определены все ядра, уравнение (6.67) служит для проверки удовлетворительности описания деформаций принятой моделью.

Возможна иная запись девиаторных соотношений (6.65), (6.66):

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t K(t-\tau) ds_{ij}(\tau) d\tau, \quad s_{ij}(t) = \int_0^t F(t-\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) d\tau. \quad (6.68)$$

В приведенных уравнениях $K(t)$ — *функция ползучести* (податливость), $F(t)$ — *функция релаксации*. Между этими функциями и введенными ранее ядрами $J(t)$, $R(t)$ можно установить связь, проинтегрировав, например, соотношения (6.68) по частям. В результате получим

$$s_{ij}(t) = K(t-\tau) s_{ij}(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{dK}{d\tau} s_{ij}(\tau) d\tau.$$

Считая $s_{ij}(0) = 0$ и требуя $K(0) = 1/(2\mu)$, $J(t) = 2\mu dK(t)/dt$, приходим к уравнению (6.65). Аналогично можно установить идентичность уравнений (6.66) и второго из (6.68).

6.3.2. Примеры видов ядер ползучести и релаксации

При определении экспериментально значений функций ползучести $J(t)$ и релаксации $R(t)$ чаще всего определяются в результате обработки данных экспериментальных исследований при чистом сдвиге.

Пусть на основании результатов экспериментов построены кривые ползучести $\varepsilon_{12}(t)/\sigma_{12}^0 \sim t$. В этом случае все остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю. Уравнения (6.65) сведутся к одному:

$$2\mu\varepsilon_{12}(t) = s_{12}(t) + \int_0^t J(t-\tau)s_{12}(\tau)d\tau.$$

Из данного выражения в случае ползучести при постоянном напряжении $\sigma_{12}(t) = \sigma_{12}^0 = \text{const}$

$$2\mu \frac{\varepsilon_{12}(t)}{s_{12}^0} = 1 + \int_0^t J(\xi)d\xi.$$

Полученное соотношение позволяет определить искомую функцию

$$J(t) = 2\mu \frac{dK(t)}{dt}, \quad K(t) = \frac{\varepsilon_{12}(t)}{s_{12}^0}.$$

Величина $K(t)$ называется *податливостью (функцией ползучести) при чистом сдвиге*. Она вычисляется по экспериментальным кривым ползучести.

Аналогично могут быть определены значения ядра релаксации $R(t)$ из опытов на чистый сдвиг.

Для аппроксимации экспериментальных данных на практике в основном используются различные аналитические выражения для ядер ползучести и релаксации.

Простейшим ядром интегрального уравнения теории линейной наследственной ползучести, которое используется наиболее часто, является целая экспонента. Однако интервал времени, в котором реальные кривые ползучести удастся описать одной экспонентой, весьма мал. Поэтому чаще применяются ядра в виде суммы экспонент. Преимущество таких ядер состоит в возможности преобразования исходного дифференциального соотношения между компонентами НДС в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами [55] и его обратимости.

Главный недостаток экспоненциальных ядер заключается в том, что для описания механического поведения реальных материалов требуется большое число параметров материала. Кроме того, для таких ядер скорость деформирования $d\varepsilon/dt$ в начальный момент времени $t=0$ представляет собой конечную величину, а многочисленные эксперименты свидетельствуют о том, что скорость деформирования в начальный момент времени велика и ее конкретное определение весьма затруднительно.

Часто ядро наследственности задается с помощью различных слабосингулярных функций, задающих бесконечно большую скорость ползучести при $t=0$.

1. *Экспоненциальное ядро ползучести:*

$$J(t) = Ae^{-pt} \quad (A > 0, p > 0).$$

Отметим, что наличие в этом представлении только двух констант материала A и p затрудняет его применение для описания экспериментальных данных в широком диапазоне времени, особенно в начальный период нагружения.

Резольвента ядра (ядро релаксации) также представляется в виде

$$R(t) = Be^{-pt}.$$

Подставляя экспоненциальное ядро ползучести и его резольвенту в соотношение (6.67) и требуя, чтобы оно было тождеством по t , получаем: $B = A$, $q = A + p$.

Более точное представление дает ядро и его резольвента, принятые в виде суммы экспоненциальных функций:

$$J(t) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-p_i t}, \quad R(t) = \sum_{i=1}^m B_i e^{-q_i t}.$$

Подставляя эти выражения в интегральное соотношение между ядрами ползучести и релаксации (6.67) и требуя, чтобы оно было тождеством, получаем $2m$ уравнений, связывающих константы резольвенты B_i и q_i и константы ядра A_i и p_i :

$$\sum_{i=1}^m \frac{A_i}{q_j - p_i} = 1, \quad \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{q_i - p_j} = 1 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Полученные уравнения могут оказаться полезными при определении одного из ядер, если другое известно. Например, если мы определили после обработки экспериментальных данных коэффициенты ядра ползучести A_i и p_i . Затем из первой системы уравнений определяются корни q_i . Они должны быть вещественными, неравными между собой и отличными от p_i . После этого из второй системы линейных уравнений определяются коэффициенты B_i .

2. *Степенное ядро ДUFFинга*¹:

$$J(t) = \frac{C}{t^{(1-\beta)}} \quad (0 < \beta < 1).$$

Ограничение на константу β связано с тем, что при $\beta = 0$ скорость деформации и сама деформация в момент приложения нагрузки становятся бесконечно большими.

Ядро ДUFFинга «хуже работает» при достаточно больших временах нагружения. Резольвентой ядра ДUFFинга является следующая функция:

$$R(t) = \sum (-1)^{k+1} \frac{C^k \Gamma_*^k(\beta) t^{k\beta-1}}{\Gamma_*(k\beta)},$$

где $\Gamma_*(1+\beta) = \beta \Gamma(\beta) = \int_0^\alpha S^{\beta-1} e^{-S} dS$; $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция аргумента β .

При указанных ограничениях на величину β этот ряд сходится всюду. Ядра подобного степенного типа называют ядрами со слабой сингулярностью или ядрами со слабой особенностью. Эта особенность состоит в том, что при $t \rightarrow 0$, $J(t) \rightarrow \infty$, что соответствует бесконечно большой скорости деформации в момент приложения нагрузки. Слабое стремление к бесконечности обеспечивается ограничением $0 < \beta < 1$. Ядро ДUFFинга не может удовлетворительно описывать опытные данные для широкого интервала времени вследствие ограниченного числа произвольных постоянных.

¹ ДUFFинг Г. (Duffing G., 1861–1944), немецкий инженер-физик.

3. Ядро Ржаницына¹:

$$R(t-\tau) = \frac{Ae^{-p(t-\tau)}}{(t-\tau)^{(1-\beta)}}, \quad (p > 0, 0 < \beta < 1). \quad (6.69)$$

Это типичное ядро релаксации, в котором объединяются экспоненциальные и слабо сингулярные свойства.

Резольвентой ядра (6.69) является следующая функция:

$$J(t-\tau) = \frac{e^{-p(t-\tau)}}{t-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A^k \Gamma_*^k(\beta) (t-\tau)^{k\beta}}{\Gamma_*(k\beta)}.$$

Она отличается от резольвенты ядра ДUFFинга только множителем e^{-pt} .

Ядро Ржаницына часто применяется и в настоящее время при выполнении прикладных расчетов.

4. Ядро Колтунова².

Ядро более общего представления, чем ядро Ржаницына, было предложено Колтуновым [56]:

$$R(t-\tau) = \frac{Ae^{-p(t-\tau)^\alpha}}{(t-\tau)^{(1-\beta)}}, \quad (p > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1). \quad (6.70)$$

Резольвентой этого ядра является функция

$$J(t-\tau) = \frac{e^{-p(t-\tau)^\alpha}}{(t-\tau)^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left[A \Gamma_* \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} \right) \right]^k (t-\tau)^{k(\alpha + \beta - 1)}}{\Gamma_* \left(k \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} \right)}.$$

5. Ядро типа Абеля³:

$$J_\alpha(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma_*(1+\alpha)}, \quad (-1 < \alpha < 0). \quad (6.71)$$

Ядра Абеля допускают обратимость интегрального соотношения (6.65), причем константа α определяется по экспериментальным кривым ползучести или релаксации. Ядро Абеля соответствует экспериментальным данным только в начальной стадии деформирования, а далее неограниченный рост деформации не подтверждается экспериментом. Однако область применимости ядра Абеля можно существенно расширить, если перейти к нелинейным уравнениям наследственной упругости.

6. Дробно-экспоненциальное ядро Работнова.

Обобщением ядра Абеля является функция, построенная Ю. Н. Работновым (впервые для $\beta = -1$):

$$\varepsilon_\alpha(\beta, t-\tau) = (t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma_*[(n+1)(1+\alpha)]}.$$

¹ Ржаницын Алексей Руфович (1911–1987), крупный советский ученый, механик.

² Колтунов Михаил Андреевич, советский ученый-механик.

³ Абель Нильс Хенрик (Abel Niels Henrik, 1802–1829), норвежский математик.

Ряд $\varepsilon_\alpha(\beta, t - \tau)$ сходится для всех значений t и β .

Очевидно, что $\varepsilon_\alpha(\beta, t - \tau) = J_\alpha(t - \tau)$.

Функцию $\varepsilon_\alpha(\beta, t - \tau)$ Ю. Н. Работнов назвал *дробно-экспоненциальным ядром*. Это ядро получило широкое распространение в литературе благодаря большим возможностям описания реологических свойств материалов и наличию достаточно разработанной специальной алгебры соответствующих операторов [57]. Вместе с тем вычисление ядер типа Работнова является достаточно сложной задачей ввиду наличия большого числа определяемых констант.

Характерной особенностью ядер Работнова является «симметричный» вид уравнения ползучести и релаксации, чего не наблюдается при рассмотрении, например, ядер экспоненциального типа, резольвенты которых имеют вид, отличный от самих ядер.

7. Степенное ядро общего вида.

В этом случае функция ползучести имеет вид

$$J(t - \tau) = (t - \tau)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-\tau)}. \quad (6.72)$$

Замечание. Ядро вида (6.72) очень хорошо описывает ползучесть горных пород.

Замечание. Физический смысл (6.72) следует из следующей формулы для функции ползучести: $J(t) = (E/\sigma)\dot{\varepsilon}(t)$.

Следовательно, $J(t - \tau)$, с точностью до постоянного множителя, представляет собой функцию скорости деформации стержня, изготовленного из испытываемого материала, который находится в состоянии одноосного растяжения (или сжатия) напряжениями постоянной величины: $\sigma = \text{const}$.

8. Обобщением ядер Ржаницына и Работнова является ядро Вульфсона¹ — Колтунова [58, 59]:

$$K(A, \alpha, \beta, t - \tau) = a \exp[-\beta(t - \tau)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)+\alpha}}{\Gamma_*[(n+1)(1+\alpha)]}.$$

9. Перспективным, в особенности применительно к композиционным материалам, представляется способ построения линейных определяющих уравнений, основанный на использовании соотношения Гаврильяка — Негами для *комплексного модуля упругости* [60]:

$$E(i\omega) = E_0 - (E_0 - E_\infty) \left[1 + (i\omega\tau)^{(\alpha+1)} \right]^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

где E_0 — мгновенный модуль упругости; E_∞ — равновесный модуль (при $\omega \rightarrow 0$).

Выражения для функций запаздывания и релаксации включают в себя соответствующие ядра Гаврильяка — Негами:

$$\bar{\Gamma}_{\alpha, \beta, \gamma}(p) = \left(p^{(\alpha+1)} + \beta \right)^{-\gamma}.$$

В целом к настоящему времени предложено достаточно много типов различных ядер наследственности. Преимущества того или другого ядра зависят от фи-

¹ Вульфсон Иосиф Исаакович — доктор технических наук, профессор, ученый-механик, заслуженный деятель науки РФ.

зических свойств материала и вида решаемой задачи. Большую роль здесь играют такие факторы, как наличие явного выражения ядра релаксации для соответствующего ядра ползучести, количество определяемых параметров материала, методика определения этих параметров, математическая сложность ядер, гибкость полученных аналитических выражений при описании экспериментов. Выбор линейных ядер объясняется прежде всего стремлением упрощения интегральных уравнений вязкоупругости, которые в данном случае допускают обратимость, т. е. в аналитическом виде получается решение задачи о резольвенте. Однако следует заметить, что проблема поиска новых ядер продолжает быть актуальной.

6.3.3. Принцип Вольтерра

Рассмотрим более подробно метод Вольтерра, описанный ранее, применительно к решению краевых задач линейной теории вязкоупругости типа (6.66).

Для этого запишем соотношения (6.66) в символической форме, введя обозначение интегрального оператора G^* :

$$s_{ij} = 2G^* \varepsilon_{ij}, \quad \sigma = K\theta, \quad (6.73)$$

где

$$G^* = G(1 - R^*); \quad R^* f = \int_0^t R(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad G - \text{модуль сдвига.}$$

Сравнивая (6.73) с соотношениями закона Гука для линейной теории упругости, можно заключить, что физические соотношения линейной вязкоупругости имеют точно такой же вид, что и уравнения обобщенного закона Гука, только модуль сдвига G заменен оператором G^* .

В операторной форме можно представить и уравнения (6.65):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G^*} s_{ij}, \quad \sigma = K\theta,$$

где оператор

$$\frac{1}{G^*} = \frac{1}{G}(1 + J^*), \quad J^* f = \int_0^t J(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Подставляя сюда из (6.73) выражение $G^* = G(1 - R^*)$, получаем

$$\frac{1}{1 - R^*} = 1 + J^*.$$

Таким образом, становится определенной операция деления на некоторый оператор.

Отсюда приходим к следующей формулировке *принципа Вольтерра*: решение линейной задачи вязкоупругости может быть получено из решения соответствующей задачи линейной теории упругости путем замены в последнем констант упругости некоторыми операторами. В нашем случае следует заменить модуль сдвига G оператором G^* .

Решения задач теории упругости, помимо модуля сдвига, могут содержать и другие упругие константы, например модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Тогда в соответствии с описанным подходом следует сначала в упругом решении E и ν заменить постоянными G и K , а затем уже константу G заменить оператором G^* .

Воспользовавшись принципом Вольтерра, получаем решение, в которое входят алгебраические или трансцендентные функции операторов по времени, кроме того, это решение надо еще расшифровать. В общем случае такая расшифровка связана с определенными трудностями. В ряде случаев эти трудности преодолеваются. Для этого используются, например, интегральное преобразование Лапласа – Карсона¹, метод аппроксимаций Ильюшина [61], операторы Работнова [57].

В частности, изображением Лапласа – Карсона некоторой функции $f(t)$ называют следующую функцию $f^*(p)$ действительного параметра p :

$$f^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Если $f(t) = f_0$, то $f^*(p) = f_0$. Если функция $f(t)$ является сверткой двух функций F и ψ , т. е.

$$f(t) = \int_0^t F(t-\tau) d\psi(\tau), \quad (6.74)$$

то ее изображение равно произведению изображений подынтегральных функций

$$f^*(p) = F^*(p) \psi^*(p). \quad (6.75)$$

В свою очередь, если изображение функции $f(t)$ определяется соотношением (6.75), то сама функция представляется формулой (6.74).

Полная система уравнений теории вязкоупругости включает уравнения линейной вязкоупругости (6.68) при упругой объемной деформации, уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \int_0^t J(t-\tau) ds_{ij}(\tau) d\tau, \quad \sigma = K\theta; \quad \sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0; \\ e_{ij}(t) &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2; \quad \sigma_{ij} l_j = R_i \text{ на } S_\sigma, \quad u_i = u_{0i} \text{ на } S_u. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Применяя теперь к соотношениям (6.76) преобразование Лапласа – Карсона и учитывая (6.75), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^* &= J^* s_{ij}^*, \quad \sigma^* = K\theta^*, \quad \sigma_{ij,j}^* + \rho F_i^* = 0, \\ 2e_{ij}^* &= u_{i,j}^* + u_{j,i}^*, \quad \sigma_{ij}^* l_j = R_i^* \text{ на } S_\sigma, \quad u_i = u_{0i}^* \text{ на } S_u. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Отсюда следует, что задача линейной вязкоупругости в изображениях совпадает с соответствующей задачей для упругого тела. Следовательно, и решения этих задач совпадают с той лишь разницей, что постоянная $(1/2)G$ заменяется изображением G^* .

¹ Карсон Джордан Марк (J. Carson Mark, 1913–1997), канадско-американский математик.

Модуль объемного сжатия в решении сохраняется. Если решение линейной задачи теории упругости для изображений σ_{ij}^* , e_{ij}^* найдем, то по этим изображениям затем найдем оригиналы и определим искомые решения $\sigma_{ij}(x, t)$, $e_{ij}(x, t)$.

Отметим, что общая задача построения оригиналов по изображениям встречается определенные трудности. Для некоторых простейших функций имеются формулы для отыскания оригиналов, они приводятся обычно в справочниках по операционному исчислению. В более сложных случаях нужно применять разработанные специальные приближенные методы. Вместе с тем необходимо сделать следующее замечание. При построении изображений граничных условий в (6.77) мы неявно предполагали, что сама граница тела не меняется в процессе нагружения. Поэтому метод неприменим, например, к контактными задачам о действии штампа и к задачам с выгоранием границы.

Если операции действий операторов $\bar{E}$ и $\bar{v}$ и операции дифференцирования по пространственным координатам x_i ($i = \overline{1,3}$) можно переставлять, то поставленную задачу линейной теории наследственной вязкоупругости следует разрешать так же, как и соответствующую задачу обычной классической теории упругости с модулями упругости $\bar{E}$ и $\bar{v}$. В конечные результаты этих решений должны входить операторы $\bar{E}$ и $\bar{v}$. Данное заключение составляет суть принципа Вольтерра.

Итак, при решении задач для тел, которые подчиняются общему закону линейного деформирования, необходимо или, точнее, достаточно вначале определить решение одноименной задачи классической теории упругости, а затем в найденном решении заменить упругие постоянные E и v операторами $\bar{E}$ и $\bar{v}$.

Следует отметить, что принцип Вольтерра не единственный метод решения задач вязкоупругости (см., например, ч. 3).

Точной классификации задач, которые можно разрешить, используя принцип Вольтерра, сегодня нет. Так, в настоящее время более-менее твердо установлено, что для задач со сменными во времени границами (например, контактных задач о давлении жесткого либо упругого штампа с криволинейным основанием или для аналогичных задач) принцип Вольтерра, вообще говоря, не подходит [49].

По принципу Вольтерра следует, что во всех задачах, в конечные результаты которых не входят постоянные материала, результаты классической теории упругости могут быть справедливыми для любого реологического тела с общим законом линейного деформирования (6.58). К таким задачам относятся:

Первая основная задача теории упругости в напряжениях для односвязных областей, т. е. задача о напряженном состоянии упругого тела при заданных на его поверхности внешних усилиях. В формулы для компонент напряжений (но не деформаций) упругие постоянные материала входить не будут, следовательно, это решение может быть справедливым для реологического тела с общим законом линейного деформирования (6.58).

Задачи о напряжениях при исследовании концентрации напряжений вокруг разнообразных отверстий, контур которых свободен от внешних усилий либо когда главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру отверстия, нулевой.

Это является верным как для односвязных, так и многосвязных областей. В остальных случаях каждый контур отверстия должен быть свободным от внеш-

них усилий либо главный вектор внешних усилий, приложенных к каждому контуру отверстия, должен равняться нулю.

Итак, поскольку для указанных выше задач упругие постоянные в конечные результаты не входят, то в соответствии с принципом Вольтерра для реологических тел с общим законом линейного деформирования можно использовать выводы, полученные при решении соответствующих задач теории упругости. Вместе с тем данное заключение для задач о концентрации напряжений около отверстий необходимо использовать весьма осторожно, ибо могут быть получены ошибочные результаты.

Замечание. Напомним, что под *коэффициентом концентрации напряжений* понимают число, равное отношению определенной компоненты тензора напряжений в какой-либо точке, находящейся в зоне нарушения около концентратора напряжений, к той же компоненте тензора напряжений в той же точке, но без концентратора напряжений. При этом система должна находиться под действием одной и той же системы внешних усилий. Этот коэффициент зависит от формы отверстия и его (отверстия) ориентации относительно внешних усилий. Зона концентрации напряжений может окружать отверстие, но может и занимать лишь небольшую область около отверстия.

Существующие решения упруго-вязких нелинейных задач о концентрации напряжений вокруг криволинейных отверстий показывают, что в формулы для компонентов напряжений около произвольных отверстий входят упругие постоянные нелинейного материала и при этом нелинейно. Таким образом, для вязкоупругих материалов не только перемещения, но и напряжения около отверстия меняются со временем.

Для того чтобы адекватно описывать изменения напряжений около произвольных отверстий в реальных материалах и при этом не выйти из области линейных задач, достаточно отказаться от идеальной изотропной модели и принять за основную анизотропную модель, которая во многих случаях значительно больше соответствует реальному состоянию дела. В этом случае можно использовать соответствующие решения задач теории упругости анизотропной среды. Далее используется принцип Вольтерра, т. е. вместо упругих постоянных вводятся операторы вида (6.73), и получаем закон изменения напряжений около отверстий со временем (см., например, [62, 63]).

К сожалению, на практике не для каждой функции ползучести $K(t - \tau)$ со слабой сингулярностью, т. е. функции, например, вида (6.71), (6.72), можно построить в явном виде ее резольвенту. Следовательно, в этом случае используется приближенный метод.

При решении таких задач в формальном решении вместо операторов $\bar{E}$ и $\bar{\nu}$ подставляют их развернутый вид (6.70) и (6.73) либо (6.76) и (6.77).

Интегральные операторы, входящие в конечный результат, для фиксированных значений времени t выписывают по одной из приближенных формул.

В сложных задачах механики наследственных сред использование этого метода сопровождается очень сложными выкладками. Поэтому в таких случаях более эффективным является выбор другого приближенного метода.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При ползучести деформации с течением времени:
 - 1) увеличиваются;
 - 2) уменьшаются;
 - 3) не изменяются.
2. При релаксации напряжения с течением времени:
 - 1) увеличиваются;
 - 2) уменьшаются;
 - 3) не изменяются.
3. Физические соотношения линейной вязкоупругости:
 - 1) $s_{ij}(t) = 2\mu \left[\varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right];$
 - 2) $2G\varphi(\varepsilon_u) \varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t);$
 - 3) $2G\varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t).$
4. Объемное деформирование вязкоупругих тел:
 - 1) упругое;
 - 2) пластическое;
 - 3) линейно вязкоупругое.
5. Реологические свойства материала характеризует:
 - 1) модуль объемной деформации;
 - 2) функция пластичности;
 - 3) ядра ползучести и релаксации.
6. Ядра ползучести и релаксации связаны зависимостью:
 - 1) линейной;
 - 2) интегральной;
 - 3) дифференциальной.
7. В экспоненциальном ядре ползучести констант материала:
 - 1) одна;
 - 2) две;
 - 3) три.
8. В степенном ядре ползучести Дюффинга констант материала:
 - 1) одна;
 - 2) две;
 - 3) три.
9. В ядре ползучести Ржаницына констант материала:
 - 1) одна;
 - 2) две;
 - 3) три.
10. С увеличением скорости деформирования предел текучести:
 - 1) не изменяется;
 - 2) увеличивается;
 - 3) уменьшается.

11. Принцип Вольтерра: решение задачи вязкоупругости может быть получено из решения соответствующей задачи:

- 1) упругости;
- 2) пластичности;
- 3) разрушения.

12. Модель Максвелла, модель Кельвина – Фойгта?

- 1) $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda}$;
- 2) $\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Четырехпараметрическая модель состоит из структурной модели Кельвина и модели Максвелла (рис. 6.16).

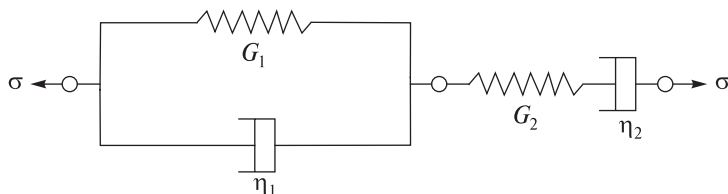


Рис. 6.16

Зная, что $\gamma_{\text{MODEL}} = \gamma_{\text{KELVIN}} + \gamma_{\text{MAXWELL}}$, где γ – деформация, и принимая во внимание операторные уравнения ($\partial_t \equiv \partial/\partial t$),

- для модели Кельвина (рис. 6.17, а) $\sigma_{12} = (G + \eta \partial_t) \gamma_{12}$;
- для модели Максвелла (рис. 6.17, б) $(\partial_t + 1/\tau) \sigma_{12} = (G \partial_t) \gamma_{12}$.

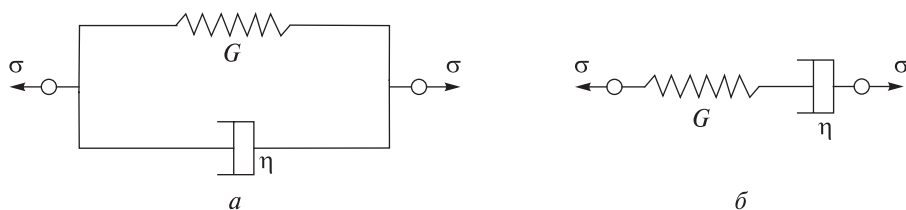


Рис. 6.17

Построить уравнение, описывающее поведение данной модели.

Ответ: $G_2 \eta_1 \ddot{\gamma} + G_1 G_2 \dot{\gamma} = \eta_1 \ddot{\sigma} + (G_1 + G_2 + \eta_1/\tau_2) \dot{\sigma} + (G_1/\tau_2) \sigma$.

2. Построить определяющие уравнения для трехпараметрических моделей, показанных на рис. 6.18.

Ответ:

- а) $\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}/\tau_1 = [(\eta_1 + \eta_2)/\eta_1 \eta_2] \dot{\sigma} + (1/\tau_1 \eta_2) \sigma$;
- б) $\dot{\sigma} + \sigma/\tau_2 = (G_2 + G_1) \dot{\gamma} + (G_1/\tau_2) \gamma$;
- в) $\dot{\sigma} + \sigma/\tau_2 = \eta_1 \ddot{\gamma} + (G_2 + \eta_1/\tau_2) \dot{\gamma}$.

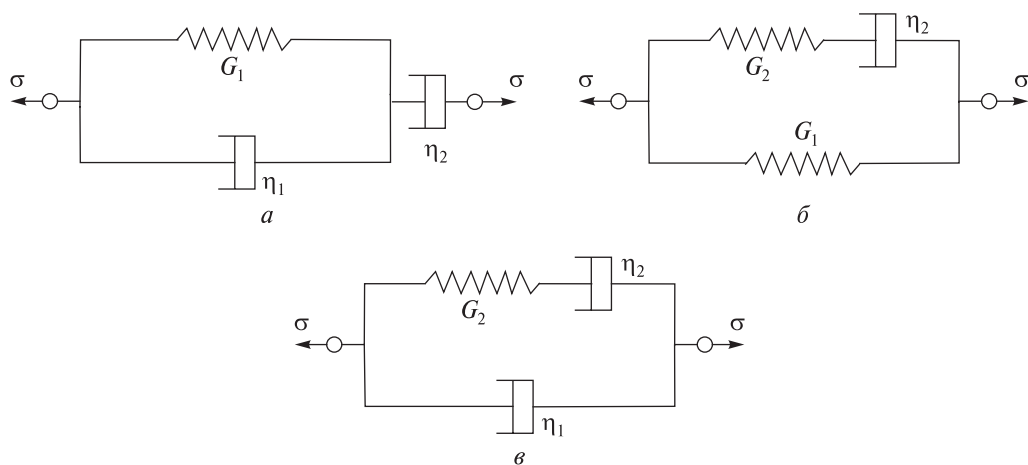


Рис. 6.18

3. Модель состоит из единицы Кельвина, соединенной параллельно с единицей Максвелла (рис. 6.19).

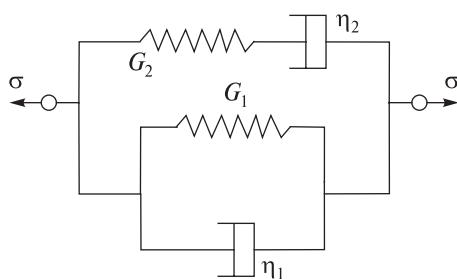


Рис. 6.19

Построить определяющее уравнение для такой модели.

Ответ: $\dot{\sigma} + \sigma/\tau_2 = \eta_1 \dot{\gamma} + (G_1 + G_2 + \eta_1/\tau_2) \dot{\gamma} + (G_1/\tau_2) \gamma$.

4. Для четырехпараметрической модели, показанной на рис. 6.20, определить:

а) определяющее уравнение;

б) функцию релаксации $G(t)$.

Замечание. В данном случае $G(t)$ представляет собой сумму функций $G(t)$ всех параллельно соединенных структурных единиц.

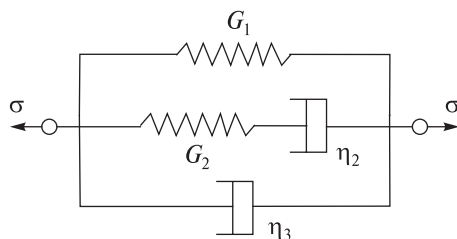


Рис. 6.20

Ответ:

а) $\dot{\sigma} + \sigma/\tau_2 = \eta_3 \ddot{\gamma} + (G_1 + G_2 + \eta_3/\tau_2) \dot{\gamma} + (G_1/\tau_2) \gamma$;

б) $G(t) = G_1 + G_2 \exp(-t/\tau_2) + \eta_3 \delta(t)$.

5. Для изображенной на рис. 6.21 модели история напряженного состояния во времени показана на диаграмме.

Определить деформацию $\gamma(t)$ для данного нагружения во временном интервале:

а) $0 \leq t/\tau \leq 2$;

б) $0 \leq t/\tau \leq 4$.

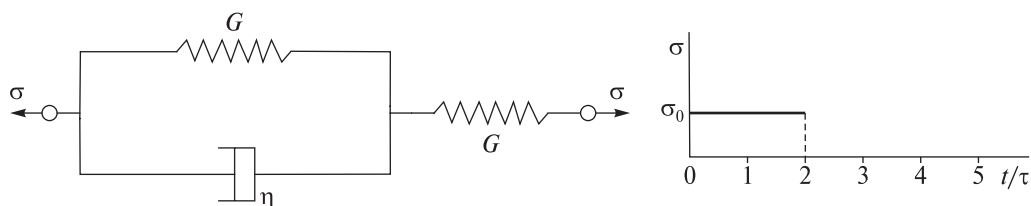


Рис. 6.21

Для получения ответа в пункте б) используйте принцип суперпозиции.

Ответ:

а) $\gamma(t) = \sigma_0 J (2 - \exp(-t/\tau)) U(t)$;

б) $\gamma(t) = \sigma_0 J (2 - \exp(-t/\tau)) U(t) - \sigma_0 J (2 - \exp(-(t-2\tau)/\tau)) U(t-2\tau)$.

6. Для модели, изображенной на рис. 6.22, определить:

а) определяющее уравнение;

б) функцию релаксации $G(t)$;

в) напряжения $\sigma(t)$ для интервала $0 \leq t \leq t_1$, когда деформации заданы соответствующим графиком.

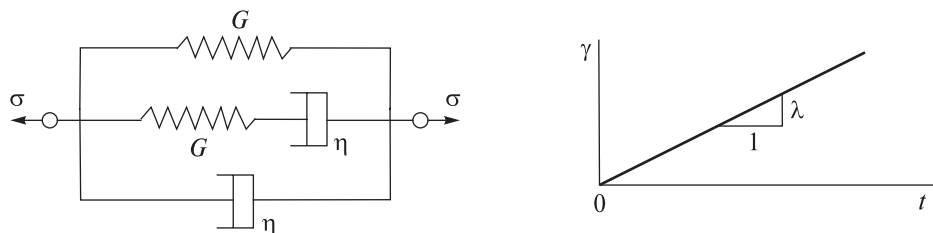


Рис. 6.22

Ответ:

а) $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = \eta \ddot{\gamma} + 3G \dot{\gamma} + (G/\tau) \gamma$;

б) $G(t) = \eta \delta(t) + G(1 + \exp(-t/\tau))$;

в) $\sigma(t) = \lambda (2\eta - \eta \exp(-t/\tau) + Gt) U(t)$.

7. Для модели из предыдущего упражнения определить напряжения $\sigma(t)$ для случая, когда деформация $\gamma(t)$ задана графиком, представленным на рис. 6.23.

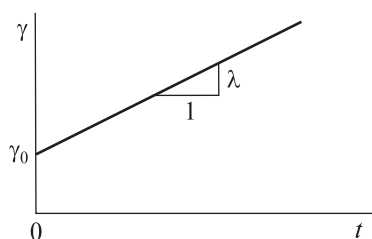


Рис. 6.23

Ответ: $\sigma(t) = \gamma_0 (\eta \delta(t) + G(1 + \exp(-t/\tau)))U(t) + \lambda (\eta(2 - \exp(-t/\tau)) + Gt)U(t).$

8. Трехпараметрическая модель, представленная на рис. 6.24, подвергается режиму деформации, изображенному на графике.

Используя принцип суперпозиции, получить выражение для напряжения $\sigma(t)$ для интервала $t \geq t_1$ на базе выражения для $\sigma(t)$ для интервала $t \leq t_1$. Принять, что $\gamma_0/t_1 = 2$.

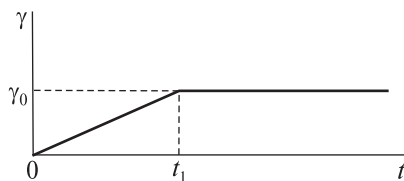
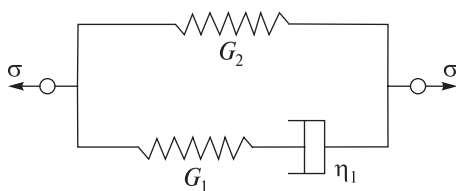


Рис. 6.24

Ответ:

для периода $t \leq t_1$: $\sigma(t) = \lambda (\eta_1 (1 - \exp(-t/\tau_1)) + G_2 t) U(t);$

для периода $t > t_1$: $\sigma(t) = \lambda (\eta_1 (1 - \exp(-t_1/\tau_1)) + G_2 t_1) U(t_1) +$
 $+ \lambda (\eta_1 (1 - \exp(-(t-t_1)/\tau_1)) + G_2 (t-t_1)) U(t-t_1).$

9. Для модели, изображенной на рис. 6.25, определить напряжения $\sigma(t)$ при а) $t = t_1$; б) $t = 2t_1$ и в) $t = 3t_1$ для случая, когда прикладываемые деформации заданы соответствующей диаграммой. Для вариантов б) и в) используйте принцип суперпозиции.

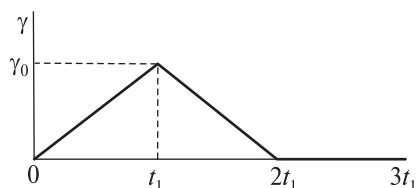
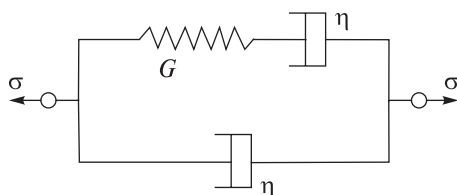


Рис. 6.25

Ответ:

а) $\sigma(t_1) = (\gamma_0 \eta / t_1) (2 - \exp(-t_1/\tau));$

б) $\sigma(2t_1) = (\gamma_0 \eta / t_1) (-2 + 2\exp(-t_1/\tau) - \exp(-2t_1/\tau));$

в) $\sigma(3t_1) = (\gamma_0 \eta / t_1) (-\exp(-t_1/\tau) + 2\exp(-2t_1/\tau) - \exp(-3t_1/\tau)).$

10. Определить функцию напряжений $\sigma(t)$ для модели, изображенной на рис. 6.26, для случая, когда деформации во времени развиваются в соответствии с диаграммой $\gamma(t) = (\gamma_0/2G)(2 - \exp(-t/2\tau))U(t)$.

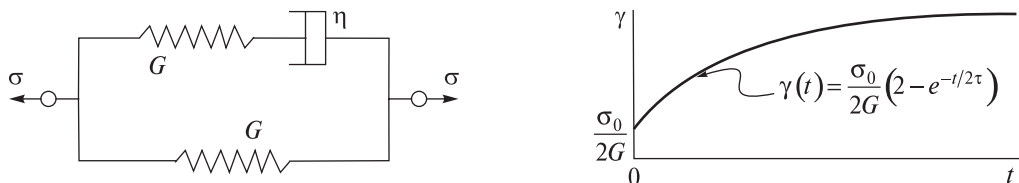


Рис. 6.26

Ответ: $\sigma(t) = \gamma_0 U(t)$.

11. Функция релаксации напряжений задана выражением $G(t) = a(b/t)^m$, где a , b и m — постоянные; t — время.

Показать, что функция ползучести в этом случае имеет вид $J(t) = \frac{1}{am\pi} \sin m\pi \left(\frac{t}{b}\right)^m$ при $m < 1$.

Используйте тождество $\bar{G}(t)\bar{J}(s) = 1/s^2$, где выражения с «крышкой» означают трансформанту Лапласа.

12. Трехпараметрическая модель твердого тела показана на рис. 6.27. Получить определяющие уравнения для такой модели и, используя эти уравнения, определить: а) функцию релаксации и б) функцию ползучести для этой модели.

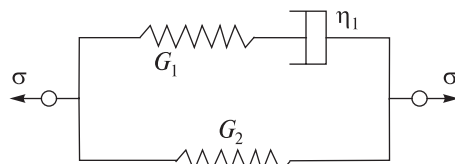


Рис. 6.27

Ответ:

а) $G(t) = G_2 + G_1 \exp(-t/\tau_1)$;

б) $J(t) = (1/(G_1 + G_2)) \exp(-t/\tau_1^*) + (1/G_2)(1 - \exp(-t/\tau_1^*))$, $\tau_1^* = (G_1 + G_2)\tau_1/G_2$.

13. Модель материала представлена на рис. 6.28:

а) для заданного материала определить функцию релаксации $G(t)$;

б) если уклон функции изменения деформаций во времени равен λ , определить напряжения, используя соответствующий наследственный интеграл, содержащий $G(t)$.

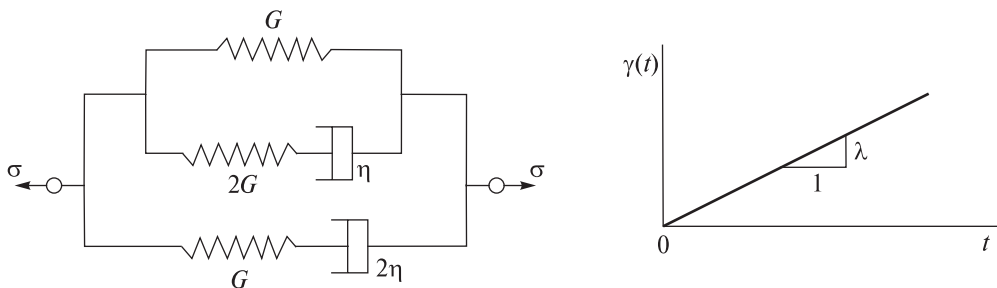


Рис. 6.28

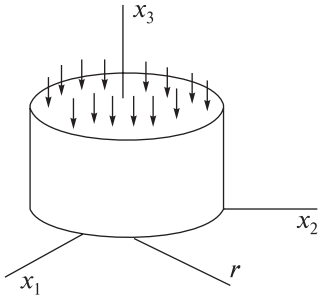


Рис. 6.29

Ответ:

а) $G(t) = G + 2G \exp(-2t/\tau) + G \exp(-t/2\tau)$;

б) $\sigma(t) = G\lambda(t + 3\tau - \tau \exp(-2t/\tau) - 2\tau \exp(-t/2\tau))U(t)$.

14. Цилиндр из вязкоупругого материал плотно помещен в жесткий контейнер так, что $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{rr} = 0$ (нет радиальных деформаций) (рис. 6.29).

Тело проявляет упругие свойства при дилатансии и ползучесть в соответствии с законом $J_s = J_0(1+t)$, где J_0 – постоянная. Определить $\sigma_{33}(t)$, если $\dot{\varepsilon}_{33} = A = \text{const}$.

Ответ: $\sigma_{33}(t) = \left[A \frac{Kt + 4(1 - \exp(-t))}{3J_0} \right] U(t)$.

15. Вязкоупругое тело в форме блока проявляет свойства упругие при дилатансии и вязкоупругие при сдвиге в форме закона Максвелла. Блок подвергается давлению вида $\sigma_{11}(t) = p_0 \delta(t)$, распределенному равномерно по поверхности x_1 . Если деформации блока ограничены таким образом, что $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$, определить $\varepsilon_{11}(t)$ и $\sigma_{22}(t)$.

Ответ:

$$\sigma_{22}(t) = p_0 \left(\frac{(2G - 3K)\delta(t)}{3K + 4G} - \frac{6G}{3K + 4G} \exp\left(\left[-3K/((3K + 4G)\tau)\right]t\right) \right) U(t),$$

$$\varepsilon_{11}(t) = p_0 \left(\frac{3\delta(t)}{3K + 4G} - \frac{4G}{(3K + 4G)K} \exp\left(\left[-3K/((3K + 4G)\tau)\right]t\right) \right) U(t).$$

16. Вязкоупругий цилиндр вставлен плотно в жесткий контейнер. На плоской поверхности $x_1 = 0$ цилиндра прикладывается распределенная вертикальная нагрузка через плунжер, который движется с постоянной скоростью деформаций $\dot{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_0$.

Материал цилиндра моделируется как трехпараметрическое твердое тело, модель которого при сдвиге соответствует схеме, изображенной на рис. 6.30, и которое проявляет упругие свойства при дилатансии.

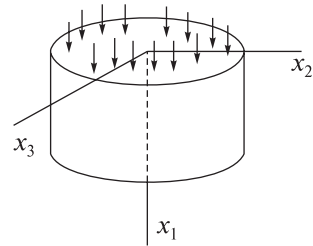
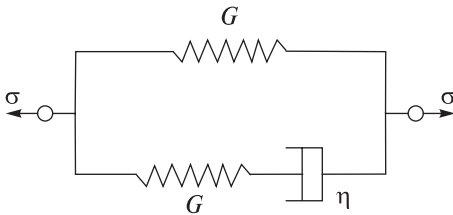


Рис. 6.30

Определить $\sigma_{11}(t)$ и $\sigma_{22}(t)$ во время движения плунжера вниз.

Ответ:

$$\sigma_{11}(t) = -\varepsilon_0 \left((4G\tau/3)(1 - \exp(-t/\tau)) + ((K + 4G)/3)t \right) U(t),$$

$$\sigma_{22}(t) = \varepsilon_0 \left((2G\tau/3)(1 - \exp(-t/\tau)) + ((-K + 2G)/3)t \right) U(t).$$

7.1. МОДЕЛИ ТВЕРДО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СРЕДЫ

Способность твердого тела деформироваться под действием приложенных к нему внешних сил и получать постоянные или временные остаточные (пластические) деформации при снятии нагрузки называется пластичностью. При этом между напряжениями и деформациями, возникающими в теле, не существует взаимно однозначной зависимости, т. е. по данным напряжениям нельзя найти деформации и, наоборот, зная деформации, нельзя определить напряжения.

В теории пластичности изучаются законы, связывающие напряжения с упругопластическими деформациями, и разрабатываются методы решения задач о равновесии и движении деформируемых твердых тел с учетом наличия пластических деформаций. Теория пластичности, являющаяся основой современных расчетов конструкций, технологических процессовковки, прокатки, штамповки и др., а также природных процессов (например, геомеханических при техногенном воздействии на массивы горных пород), позволяет выявить прочностные и деформационные ресурсы материалов. Так, пластические деформации до разрушения достигают значений 10–20 %, в то время как упругие — только 0,3–0,5 %. Поэтому расчеты на прочность, основанные на допустимости только упругих деформаций, часто нецелесообразны технически и экономически. Учитывая пластические деформации, можно снизить концентрацию напряжений в конструкциях, повысить сопротивляемость тел ударным нагрузкам, определить запасы прочности, жесткости и устойчивости, тем самым обеспечить наиболее рациональное функционирование, надежность и безопасность конструкций.

Напомним, что существует принципиальная разница между упругими, пластическими, упругопластическими и реологическими моделями поведения среды (см., гл. 3).

Поведение материала, полностью отличное от упруговязкого, наблюдается при рассмотрении *элемента Кулона* (элемент «сухого трения») (рис. 7.1).

В этом случае скорость (rate) деформаций равна нулю до тех пор, пока абсолютное значение напряжений не достигает *напряжений податливости или текучести (yield stress)*.

$$|\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \dot{\epsilon} = 0. \quad (7.1)$$

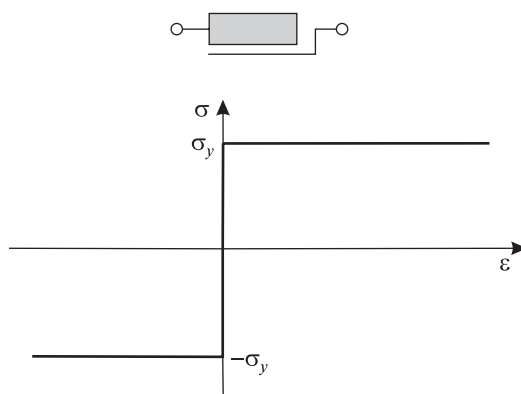


Рис. 7.1. Представление и диаграмма поведения элемента Кулона

После достижения предела текучести/податливости (7.1) в направлении приложенного усилия деформации текучести (yielding deformation) могут достигнуть любой величины, т. е.

$$\sigma = +\sigma_y \Rightarrow \varepsilon \geq 0, \quad \sigma = -\sigma_y \Rightarrow \varepsilon \leq 0.$$

В дальнейшем *предел текучести* будем обозначать σ_y .

Во время текучести внутренняя энергия диссипирует независимо от скорости деформации:

$$\pi_i = \sigma \dot{\varepsilon} = \sigma_y |\dot{\varepsilon}| = \delta \geq 0.$$

Рассмотренное поведение материала называется *идеальной пластичностью* (rigid-perfect plastic). В этом случае нет функционального отношения между текущими напряжениями и деформациями. Кроме того, такое состояние не зависит от скорости деформирования (т. е. склерономное).

7.2. ПЛАСТИЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Проявление свойств упругости и пластичности обнаруживается при достаточно медленном, так называемом статическом или квазистатическом приложении внешних сил. В этом случае проявление свойств деформируемости практически не зависит от времени, скорости возрастания нагрузки, продолжительности действия внешних сил.

Основные свойства пластичности удобно рассмотреть на простейшем примере растяжения-сжатия цилиндрического образца. Для определенности будем предполагать, что материал образца обладает качественно такими же упругопластическими свойствами, как сталь, алюминий, медь, никель и другие металлы, причем до начала опыта он является изотропным и имеет одинаковый предел текучести на растяжение и сжатие. Через σ будем обозначать растягивающее напряжение в образце, а через ε — относительное удлинение.

Как известно, зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ при растяжении образца для большинства материалов имеет прямолинейный начальный участок, пока напряжение не превысит предел пропорциональности σ_{pr} . В этой области справедлив закон Гука. За прямолинейным следует криволинейный участок, на котором нарушается линейная связь между напряжениями и деформациями. При этом некоторые материалы имеют четко выраженную *площадку текучести* (рис. 7.2, а), а некоторые (рис. 7.2, б) — нет. В этом случае принимают *условный предел текучести* — напряжение, при котором пластическая деформация, остающаяся после снятия нагрузки, составляет 0,2 %, или 0,002. Он обозначается $\sigma_{0,2}$.

Точке А диаграммы растяжения образца (см. рис. 7.2, а) соответствует напряжение σ и полная деформация ε , которую, в свою очередь, можно разделить на упругую деформацию ε_e и пластическую ε_p . После разгрузки упругая деформация исчезает, а пластическая остается.

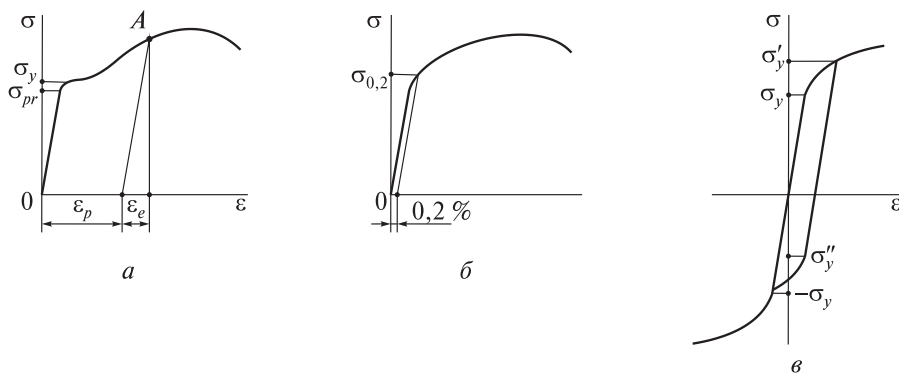


Рис. 7.2. Типовые диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ при растяжении образца

При разгрузке образца зависимость между напряжениями и деформациями носит линейный характер, причем наклон соответствующей прямой такой же, как и первоначального участка. Таким образом, *при разгрузке материал образца ведет себя как упругий*.

Если образец после полной разгрузки снова растянуть, то, как видно из рис. 7.2, в, линейный участок будет продолжаться до больших значений $\sigma = \sigma'_y$, чем это было в первый раз ($\sigma'_y > \sigma_y$). Следовательно, при повторном нагружении образца после пластического деформирования предел пропорциональности материала повышается. *Это явление называется наклепом или упрочнением*.

Таким образом, для реальных материалов *предел текучести не является постоянным*, а развивается во время пластических деформаций. В общем случае предельные напряжения текучести могут увеличиваться при деформировании (это, как сказано ранее, упрочнение), но предельные напряжения текучести могут и уменьшаться. Такое поведение называется размягчением.

Для многих материалов вначале наблюдается упрочнение до некоторых деформаций насыщения, а после этого имеет место размягчение до момента разрушения. При размягчении материал становится неустойчивым и склонным к локализации наподобие полос сдвига или появлению шейки текучести. Вследствие этого в режиме размягчения измерение отношений между напряжениями и деформациями

становится достаточно сложным. Так как трансформация в поведении от упрочнения до размягчения часто имеет место при больших деформациях, то выбор изменений деформаций и напряжений становится весьма важным.

Определение предельной жесткости также становится трудным. Поэтому *обычно ограничиваются рассмотрением режима упрочнения*. При этом могут быть приняты следующие правила упрочнения:

- линейный закон упрочнения $\sigma_y = K|\varepsilon| + \sigma_{y0}$, K – положительная постоянная;
- потенциальный закон упрочнения $\sigma_y = K|\varepsilon|^n + \sigma_{y0}$, K, n – положительные постоянные.

Если необходимо включить в рассмотрение реверс нагрузки, то текущее в противоположном направлении также может иметь место и в этом случае лучше использовать дополнительные законы вида $\dot{\sigma}_y = K|\dot{\varepsilon}|$, K – положительная постоянная.

Если режим деформирования не допускает неограниченного упрочнения, то могут быть использованы правила насыщения, подобные следующему: $\dot{\sigma}_y = K(\sigma_{y\infty} - \sigma_y)|\dot{\varepsilon}|$, K и $\sigma_{y\infty}$ – положительные постоянные, для которых (правил) σ_y ограничено сверху величиной насыщения $\sigma_{y\infty}$.

Другое правило упрочнения с насыщением может быть принято в такой форме [47]:

$$\sigma_y = \sigma_{\infty} - (\sigma_{\infty} - \sigma_0) \exp(-\varepsilon/\varepsilon_0), \quad \sigma_{\infty}, \sigma_0, \varepsilon_0 \text{ – постоянные.}$$

Итак, при повторных нагружениях материала от растяжения до сжатия или наоборот может наблюдаться разница между пределом текучести в обоих режимах, т. е. при повторном нагружении в область пластичности материал может выйти при напряжениях, отличных от первоначального предела пропорциональности σ_y .

Обычно при нагружении образца усилием противоположного знака – сжатием – в область пластичности материал выйдет при напряжениях, меньших первоначального предела пропорциональности, т. е. $\sigma_y'' < \sigma_y$ (рис. 7.2, в). Такое явление подробно было исследовано И. Баушингером¹ и носит его имя – *эффект Баушингера* (рис. 7.2, в). Если при этом выполняется равенство $\sigma_y' + \sigma_y'' = 2\sigma_y$ (насколько увеличивается предел текучести при растяжении, на такую же величину он уменьшается при сжатии), то *материал называют циклически идеальным*.

Таким образом, предварительно растянутый до образования пластических деформаций образец имеет за счет наклепа увеличенный предел пропорциональности при растяжении и уменьшенный при сжатии. Здесь следует заметить, что подобное исследование требует отдельного опыта, поскольку длинные образцы, применяемые при растяжении, теряют устойчивость при сжатии. Обычно из растянутого образца вырезают короткий цилиндрический образец, который и подвергают сжатию. Но вместе с тем результаты его испытаний можно нанести на прежнюю диаграмму и вести все рассуждения так, как если бы образец остался таким же, как и первоначально.

Вообще говоря, как указывает Дж. Белл² в фундаментальной работе [64], каждый аспект явления, которое Баушингер систематически исследовал, был в действительности открыт другими. Так, Г. Х. Видеман³ в 1858 г. изучил остаточные деформации

¹ Баушингер Иоганн (Bauschinger I., 1834–1893), немецкий инженер-механик, специалист по испытанию строительных материалов.

² Белл Джеймс Фредерик (James Frederick Bell, 1914–1995), американский физик, механик.

³ Видеман Г. Х. (Viedemann G. H., 1826–1899), немецкий физик.

ции при кручении как функции от нагрузки обратного знака. Р. Г. Тарстон¹ в 1874 г. первым опубликовал работу об увеличении предела упругости пластически деформированного образца. Впоследствии (1876) он же первым из экспериментаторов предположил, что в пластичности может быть вязкость.

В литературе можно найти описание *двух типов упрочнения*, разница между которыми может наблюдаться при реверсе нагрузки [47] (рис. 7.3):

- *изотропное упрочнение*, для которого предел текучести при растяжении и сжатии изменяется параллельно;
- *кинематическое упрочнение*, для которого предел текучести при растяжении увеличивается иным образом, чем его уменьшение при сжатии.

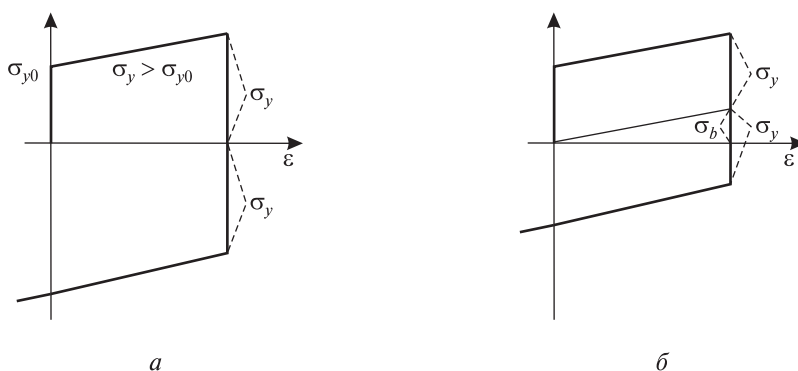


Рис. 7.3. Изотропное (а) и кинематическое (б) упрочнения

В действительности поведение размягчения часто находится между этими двумя экстремумами. Размягчение можно описать, комбинируя две обозначенные модели упрочнения. Для этой цели необходимы две переменные упрочнения, а именно: одна для изотропного упрочнения σ_y и обратное напряжение σ_b для кинематического упрочнения. Для обеих переменных необходимо выполнить оценку уравнений.

Как показывают эксперименты, *определенное влияние на кривую деформирования образца оказывает скорость возрастания нагрузки, или скорость деформации*. В обычных испытательных машинах скорость деформирования образцов изменяется в пределах $\dot{\epsilon} = 10^{-5} - 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Такой режим деформирования называется статическим. Диаграмма статических испытаний не зависит от скорости деформации. Эта зависимость заметно проявляется, начиная со скоростей порядка 10^{-1} с^{-1} . Так, например, результаты испытаний малоуглеродистой стали, проведенные при трех разных уровнях скоростей деформации ($\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$; $\dot{\epsilon} = 0,5 \text{ с}^{-1}$ и $\dot{\epsilon} = 10^2 \text{ с}^{-1}$), показывают, что *модуль упругости при одноосном растяжении практически не изменяется*. Пределы текучести по напряжениям и по деформациям увеличиваются с ростом скоростей растяжений. Это расширение диапазона упругих деформаций связано с инерцией механизма пластического деформирования. Аналитическое представление зависимости величины предела текучести от скорости деформации можно принять линейным: $\sigma_y = \sigma_{y0} + \sigma_0 \dot{\epsilon}$, где σ_{y0} — статический предел упругости, μ_0 — экспериментально определяемая константа материала.

¹Тарстон Р. Г. (Thurston R. H., 1839–1903), американский инженер-механик.

При увеличении скорости деформирования заметно повышается временное сопротивление σ_b (предел прочности) материала (напряжение, соответствующее разрушению), а соответствующая ему деформация ε_b (предельное пластическое удлинение) — сокращается. Это явление называется *охрупчиванием материала*. Ведь хрупкий материал разрушается без заметных пластических деформаций, предшествующих его разрушению.

Для высокопрочных сталей диапазон пластических деформаций, предшествующих разрушению, вообще невелик и сокращается очень резко при динамическом нагружении. Так, охрупчивание углеродистой стали SAE1020, резкое сокращение предельного пластического удлинения начинается со скорости деформаций $2 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$. При возрастании скорости до $3 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ предельная деформация сокращается почти вдвое. Совершенно отчетливо проявляют зависимость от скорости деформаций, начиная с 10^{-1} с^{-1} , высокопрочные титановые сплавы. При повышении скорости наблюдается снижение предельных пластических удлинений и повышение временного сопротивления материалов.

Следует отметить, что до сих пор нет надежных систематических экспериментальных исследований влияния скоростей деформаций для многих материалов. Это связано с тем, что предельные скорости, при которых наблюдаются описанные эффекты, не имеют широкого распространения в технике. Поэтому в подавляющем большинстве случаев статической диаграммы испытаний материала на растяжение оказывается достаточно для характеристики его механических свойств.

Несравненно заметнее проявляется зависимость свойств материала от скоростей испытания металлов в условиях повышенных температур. В этом случае существенно меняются значения не только предельных деформаций, но и временного сопротивления, а также угол наклона кривой деформирования на начальном участке.

В строительной механике, геомеханике пластические свойства пород характеризуются *коэффициентом пластичности*, который представляет собой отношение работы W_p , затрачиваемой на разрушение данного объема материала, к работе W_{el} , необходимой для разрушения такого же объема материала, с тем же значением предела прочности на сжатие в предположении идеальной упругости материала: $K_{pl} = W_p / W_{el}$.

7.3. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Итак, поведение многих реальных материалов вначале является упругим до тех пор, *пока деформации не достигнут предела текучести*. Только когда достигается предел текучести σ_y (который часто называется пределом упругости), материал деформируется пластически (пластическое течение).

Такое поведение можно моделировать расположением в серию элементов Кулона и Гука. Построенная модель называется *моделью Прандтля*¹ или *моделью Генки*² (рис. 7.4).

Рассмотрим одномерный случай.

¹Прандтль Людвиг (Prandtl Ludwig, 1875—1953), немецкий механик и физик.

²Генки Генри (Heinrich Hencky, 1885—1951), немецкий инженер-механик.

Общая деформация в модели Прандтля в этом случае может быть представлена в виде суммы упругой и пластической составляющих: $\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_p$, $\varepsilon_l = \sigma/E$. При упрочнении проявляются только пластические деформации ε_p .

Мощность напряжения для модели Прандтля составляет величину

$$\pi_i = \sigma \dot{\varepsilon} = \sigma (\dot{\varepsilon}_l + \dot{\varepsilon}_p) = E \varepsilon_l \dot{\varepsilon}_l + \sigma_y |\dot{\varepsilon}_p| = \dot{w} + \delta.$$

В этом случае мощность напряжения состоит из упругой и диссипативной частей.

Моделью упругопластичности с кинематическим упрочнением является, например, модель Мэсинга (рис. 7.5).

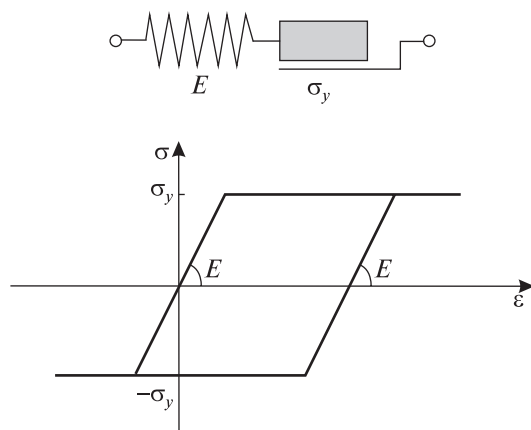


Рис. 7.4. Структурная модель Прандтля (модель Генки)

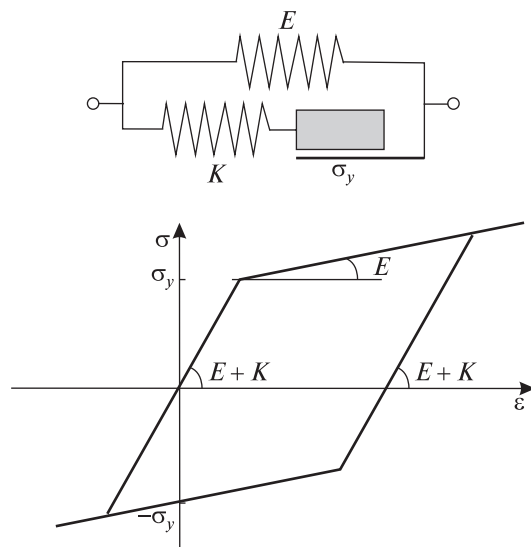


Рис. 7.5. Структурная модель Мэсинга

Для оценки диапазона упругих деформаций по сравнению с общими можно привести следующий пример. Материал – сталь из сплава «хром-никель». Модуль Юнга – 208 МПа. Предел текучести – 120 МПа. Следовательно, деформации текучести составляют 0,058 %. Поэтому для металлов область упругости в пространстве деформаций часто достаточно малая, чтобы обоснованно использовать только законы линейной теории упругости.

Если рассматривать упругопластическое поведение материалов при монотонном нагружении без реверсивного нагружения, то в этом случае весьма трудно отличить их поведение от нелинейного упругого поведения. Этот факт позволил Генки ввести предположение, называемое *правилом конечных деформаций*, которое допускает рассматривать поведение материала в рамках теории упругости (нелинейной) до тех пор, пока не имеет место реверс нагрузки. Похожее допущение присутствует в законе Рамберга – Осгода [47]:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_1} + k_2 \left(\frac{\sigma}{k_3} \right)^N, \quad k_1, k_2, k_3, N - \text{constants.}$$

Теории пластичности устанавливают связь между напряжениями и деформациями (*деформационные теории*) или скоростями изменения деформаций (*теории пластического течения*) в областях пластичности материалов. При этом часто напряжения зависят не только от текущих деформаций, но и от истории (процесса) деформирования. Естественно, что соответствующие задачи в силу нелинейной связи напряжений с деформациями оказываются гораздо сложнее задач теории упругости.

Вследствие сильных ограничений в диапазоне приложений деформационный метод пластичности получил более ограниченную область рассмотрения, чем теория пластического течения.

Помимо нелинейности независимость от скорости является характеристикой всех упругопластических моделей, что исключает ползучесть и релаксацию. В моделях вязкопластичности комбинируется пластичность и вязкое поведение.

7.4. МОДЕЛИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ

Простейший способ включить эффекты вязкости – добавить вязкие элементы наподобие демпферов последовательно (V_1) или параллельно (V_2) к пластическим элементам (рис. 7.6).

Эффект V_1 состоит в том, что проявляется более явно вязкоупругое поведение, чем чисто упругое. При циклах деформации даже ниже предела текучести будет наблюдаться гистерезис (как для модели Максвелла).

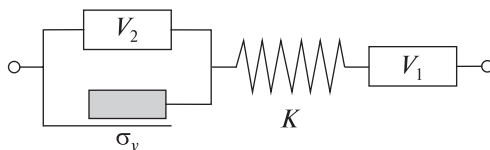


Рис. 7.6. Структурная модель вязкопластичности

Более важным является введение вязкого элемента V_2 при параллельном соединении с моделью Кулона, V_2 активируется только при неупругих деформациях. Поэтому зона упругости и в случае появления неупругих деформаций может все еще быть.

Для моделей вязкопластичности во время текучести напряжения состоят из предела текучести σ_y и дополнительных напряжений вязкости: $\sigma = \sigma_y + \sigma_0$. Как следствие, напряжения могут быть произвольно большими или малыми, что представляется более реалистичным, чем ограничение $\pm\sigma_y$ для чисто пластичных материалов.

Если комбинировать такие модели с механизмами сложного упрочнения, то можно описать поведение материала.

Общим для всех предположений является намерение описать поведение материалов по существу при всех типах нагрузок (ползучесть, циклические нагрузки без и с учетом времени, релаксация и др.) как реально возможное.

7.5. УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Как было сказано ранее, в теории пластичности существует два подхода к построению математических моделей: *деформационные теории*, в которых присутствует связь между напряжениями и деформациями, и *теории пластического течения*, когда математические соотношения устанавливаются между скоростями изменения деформаций и собственно напряжениями (в областях пластичности материалов). При этом часто напряжения зависят не только от текущих деформаций, но и от истории (процесса) деформирования.

С целью упрощения в общем случае нелинейных связей между напряжениями и деформациями зависимости $\sigma \sim \epsilon$ для реального материала часто аппроксимируют в виде кусочно-ломаных прямых, как это показано на рис. 7.7, а–в.

Наиболее простой является *диаграмма Прандтля* для идеально упругопластического материала (мягкие стали, титановые сплавы), показанная на рис. 7.7, а.

Диаграмма с линейным упрочнением приведена на рис. 7.7, в. Эти две аппроксимации наиболее часто используются при решении задач теории пластичности. Например, теория идеальной пластичности применяется для расчетов элементов строительных конструкций по несущей способности.

Кривые $\sigma \sim \epsilon$ при растяжении и сжатии для большинства материалов весьма близки, и будем полагать их в дальнейшем совпадающими.

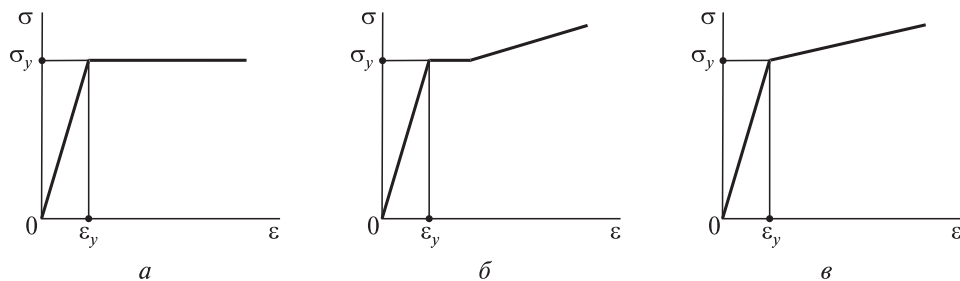


Рис. 7.7. Различные аппроксимации зависимостей $\sigma \sim \epsilon$ для реальных материалов

Более тщательные эксперименты показывают, что закон разгрузки не всегда линеен. В существующих теориях пластичности этими незначительными отклонениями от закона Гука при разгрузке пренебрегают, как и разницей между пределом пропорциональности и пределом текучести.

Отметим, что определяющие уравнения связи напряжений с деформациями не содержат время в явном виде.

Рассмотрим тело произвольной формы, считая, что начальные напряжения и деформации в нем отсутствуют. На начальном этапе нагружения такого тела возникают только упругие деформации и, следовательно, появление пластических деформаций однозначно определяется действующими напряжениями. В связи с этим условие пластичности можно записать в виде некоторой функции компонент тензора напряжений.

Для изотропного материала условие появления пластических деформаций не может зависеть от выбора системы координат. Поэтому соответствующая функция должна определяться тремя инвариантами тензора напряжений, в качестве которых можно взять, например, три главных напряжения:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0. \quad (7.2)$$

Здесь k — некоторая постоянная величина, характерная для данного материала (например, предел текучести σ_y). При одноосном растяжении имеем $\sigma_1 = \sigma_y$.

Пластические деформации, как показывают эксперименты, связаны с явлениями сдвига. Поэтому естественно, что и имеющие широкое распространение теории пластичности в основе своей сравнивают некоторые касательные напряжения с предельными, вызывающими появление текучести.

А. Ж. Сен-Венан, основываясь на опытах А. Э. Треска по истечению металлов через отверстия, высказал предположение, что переход из упругого состояния в пластическое происходит, если максимальное касательное напряжение достигает некоторого предельного значения для данного материала (*условие Треска — Сен-Венана*):

$$|\tau_{\max}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{\sigma_y}{2}, \text{ или } \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y, \quad (7.3)$$

где, как и ранее, главные напряжения пронумерованы в порядке убывания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$; σ_y — предел текучести материала при растяжении. Материал тела предполагается первоначально изотропным.

Заметим, что, например, в курсе сопротивления материалов, в теории прочности критерий Треска — Сен-Венана используется как *критерий максимальных касательных напряжений* ($\sigma_{\text{ред}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$).

Другой критерий пластичности определяет переход из упругого состояния в пластическое первоначально изотропного материала, если

$$\sigma_u = \sigma_y. \quad (7.4)$$

Здесь σ_u — интенсивность напряжений (см. гл. 2), которая пропорциональна октаэдрическому касательному напряжению, а ее квадрат — второму инварианту девиатора напряжений:

$$\sigma_u^2 = -3J_{2d} = \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) / 2.$$

В этом случае не максимальное, а октаэдрическое касательное напряжение достигает предельного для данного материала значения. Этот критерий используется в энергетической теории прочности и носит название *условие пластичности Мизеса* (Хубера¹ – Мизеса – Генки).

Результаты, получающиеся по критериям пластичности (7.3), (7.4), являются достаточно близкими. Однако следует заметить, что большинство опытов, проведенных для плоского напряженного состояния, показывают лучшее согласование с критерием Мизеса. При решении конкретных задач, как правило, пользуются тем критерием, который упрощает решение.

Многочисленные эксперименты свидетельствуют о том, что при всестороннем растяжении или сжатии материал деформируется упруго. Тогда можно принять, что условие пластичности в общем случае определяет не весь тензор напряжений, как в (7.2), а только его девиаторная часть. Как мы уже говорили, переход в пластическое состояние не может зависеть от выбора системы координат, поэтому условие пластичности есть некоторая функция от инвариантов девиатора напряжений. Первый инвариант равен нулю $J_{1d} = 0$, поэтому в общем случае условие появления пластических деформаций определяется вторым и третьим инвариантом девиатора напряжений:

$$f_1(J_{2d}, J_{3d}) = 0. \quad (7.5)$$

Это уравнение в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ описывает некоторую поверхность, которую называют *поверхностью текучести*.

Условие (7.5) содержит инварианты девиатора напряжений и константы материала, например предел текучести.

Приведенные критерии пластичности дают возможность зафиксировать момент появления первых пластических деформаций.

Этих критериев достаточно для решения задач пластичности в том случае, когда деформирование материала при одноосном напряженном состоянии подчиняется диаграмме Прандтля (см. рис. 7.7, а). Объясняется это тем, что при повторном нагружении подобных материалов не происходит изменения условия появления пластических деформаций.

Ситуация изменяется, если рассматриваемый материал обладает *упрочнением* (см. рис. 7.7, б, в). Для таких материалов при повторных нагружениях характерно увеличение предела текучести, значение которого зависит от накопленной пластической деформации. Здесь следует ввести условие упрочнения, которое по виду напоминает условие пластичности (7.5):

$$f_1(J_{2d}, J_{3d}) = \Phi(\eta). \quad (7.6)$$

В условие (7.6) входит некоторая функция $\Phi(\eta)$, зависящая от параметра упрочнения η материала. Это уравнение в пространстве главных напряжений также определяет поверхность текучести, изменение положения, формы и размеров которой в процессе нагружения характеризуют деформационное упрочнение материала.

¹ Хубер Максимилиан Тытус (Huber M. T., 1872–1950), ученый-механик, был президентом Академии технических наук Польши.

Например, если *параметр упрочнения совпадает с интенсивностью деформаций*, то в качестве одного из вариантов критерия (7.6) можно взять обобщение условия Мизеса (7.4) в виде

$$\sigma_u = \Phi(\epsilon_u).$$

Приведем *примеры построения поверхностей текучести* (7.5) для рассмотренных критериев пластичности Треска – Сен-Венана и Мизеса. В случае критерия Мизеса (7.4) ($\sigma_u = \sigma_y$) уравнение поверхности текучести можно записать в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_y^2 = 0.$$

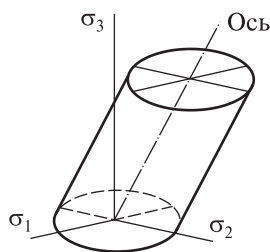


Рис. 7.8. Поверхность текучести для критерия Мизеса

Полученное уравнение в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ описывает цилиндр (рис. 7.8), ось которого равнонаклонена к координатным осям. Если рассечь цилиндр плоскостью $\sigma_3 = 0$, то в сечении будет эллипс, уравнение которого $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2$.

Следовательно, критерию пластичности Мизеса соответствует поверхность текучести в форме кругового цилиндра, радиус которого в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, равен $\sigma_y/\sqrt{2}$.

Если принять критерий Треска – Сен-Венана (7.3) ($\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$) с учетом того, что не всегда нумерация главных напряжений известна заранее, то могут иметь место следующие равенства:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\sigma_y, \quad \sigma_3 - \sigma_2 = \pm\sigma_y, \quad \sigma_2 - \sigma_1 = \pm\sigma_y.$$

Поверхность текучести в этом случае представляется в виде шестигранной призмы с осью, также равнонаклоненной к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 7.9, а). Эта призма, называемая *призмой Кулона*, оказывается вписанной в цилиндр Мизеса. Оси призмы и цилиндра совпадают. Уравнение этой оси будет $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. На рис. 7.9, б показано сечение цилиндра и призмы плоскостью $\sigma_3 = 0$, соответствующее плоскому напряженному состоянию.

Замечание. Для того чтобы воспользоваться условием пластичности Сен-Венана, необходимо заранее знать, какое из главных напряжений является максимальным, а какое – минимальным. При использовании условия Мизеса вообще нет необходимости в определении главных напряжений.

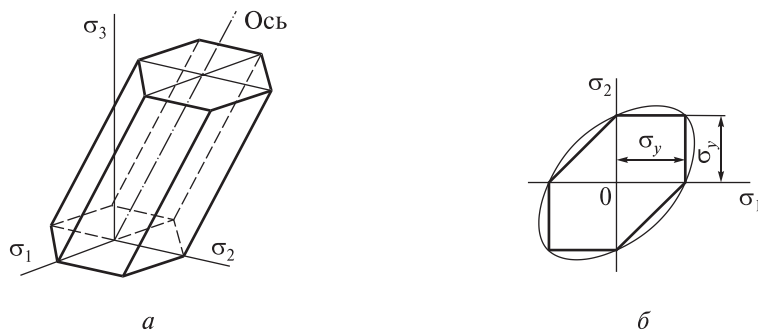


Рис. 7.9. Поверхность текучести для критерия Треска – Сен-Венана

Условие $\sigma_u = \sigma_y$ можно выписать, используя определение интенсивности напряжений, и через напряжения в произвольных координатных осях:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 2\sigma_y^2. \quad (7.7)$$

Во многих случаях использование условия пластичности Мизеса в виде (7.7) при решении прикладных задач оказывается более удобным, чем условия Сен-Венана.

Вместе с тем максимальное отличие расчетов по этим критериям не превышает 13 % (случай чистого сдвига).

7.6. ПРОСТОЕ И СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЯ

В определяющих соотношениях теории пластичности (т. е. зависимости между напряжениями и деформациями), очевидно, должны учитываться не только текущие значения компонент тензора напряжений и деформаций, но и пути их достижения. В теории пластичности различают два вида нагружения тел: *простое* и *сложное*.

Напомним (см. гл. 2), что нагружение называется простым, если все компоненты тензора напряжений возрастают пропорционально одному общему параметру λ (например, времени), т. е. $\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^0$. В этом случае компоненты направляющего тензора (2.28) *остаются неизменными*. В противном случае нагружение называется сложным.

Рассмотрим *примеры простого и сложного нагружений*. Допустим, что цилиндрическая трубка находится под действием равномерного осевого растяжения и кручения (рис. 7.10). Если трубка имеет достаточно тонкую стенку, то напряженное состояние в ней можно считать плоским. Нормальное σ_x и касательное τ напряжения находятся из известных выражений

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi R\delta}, \quad \tau = \frac{m_z}{\pi R^2\delta}.$$

При изменении величин внешних воздействий P и m_z пропорционально одному параметру λ , например времени, осуществляется простое нагружение, так как компоненты тензора напряжений изменяются пропорционально этому же параметру. На рис. 7.11 траектория нагружения показана в осях напряжений σ_x, τ . Простое нагружение соответствует лучу OA .

Таким образом, для простого нагружения справедливы равенства $\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^0$, где σ_{ij}^0 — некоторые начальные значения тензора напряжений при приложении нагрузки.

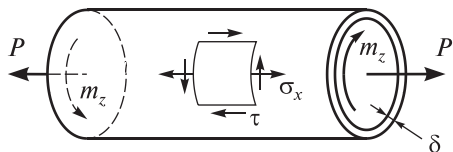


Рис. 7.10. Пример простого нагружения

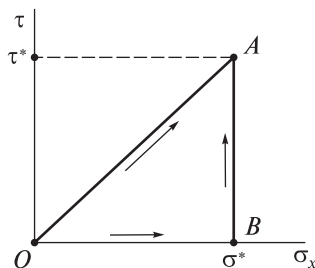


Рис. 7.11. Различные диаграммы нагружений

Тогда среднее напряжение σ , интенсивность напряжений σ_u и модуль девиатора напряжений s в силу формул (2.27), (2.28) также будут линейны относительно параметра λ :

$$\sigma = \lambda \sigma^0, \quad \sigma_u = \lambda \sigma_u^0, \quad s = \sqrt{3/2} \sigma_u = \lambda s^0.$$

В свою очередь, компоненты направляющего тензора напряжений (2.28) не зависят от λ , так как

$$\bar{s}_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}}{s} = \frac{\lambda \sigma_{ij}^0 - \lambda \sigma^0 \delta_{ij}}{\lambda s^0} = \bar{s}_{ij}^0.$$

Теперь рассмотрим пример с *другим нагружением* (см. рис. 7.11), при котором к трубке сначала была приложена осевая нагрузка P , создающая нормальное напряжение. После того как значение последнего достигло величины σ^* , был приложен крутящий момент m_z .

Нормальное напряжение σ^* в процессе приложения крутящего момента оставалось неизменным, а касательное возрастало от нуля до значения τ^* . В результате опять попадаем в точку A , но по ломаной траектории. Такое нагружение будет сложным. К аналогичному результату пришли бы, сначала закручивая трубку до значения τ^* , а затем растягивая до напряжения σ^* .

Для упругого тела последовательность его нагружения какой-либо роли не играет, так как имеет место однозначное соответствие между напряженным и деформированным состояниями независимо от того, каким образом они созданы.

В упругопластических телах ситуация оказывается принципиально отличной. Здесь существенен не только характер напряженного состояния в его точках, но и путь, по которому оно было создано. В зависимости от этого может значительно меняться деформированное состояние в одних и тех же точках тела.

А. А. Ильюшиным доказана *теорема о достаточных условиях простого нагружения*. Для этого необходима пропорциональность внешней нагрузки одному некоторому общему параметру и степенная зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций:

$$\sigma_u = A \varepsilon_u^\alpha,$$

где A и α — постоянные величины. При $\alpha = 0$ это уравнение совпадает с условием пластичности Мизеса $\sigma_u = \text{const}$. При малых значениях α оно дает кривые с малым упрочнением $d\sigma_u/d\varepsilon_u$, а при $\alpha = 1$ — закон Гука. Заметим, что *это условие достаточно, но не является необходимым*. Простое нагружение может иметь место и в некоторых случаях, когда указанное условие нарушается.

В исследованиях пластичности деформируемых тел существенным представляется различать *активные и пассивные процессы деформирования*.

При *активном процессе*, называемом также *нагрузкой*, приращение работы, производимой внешними нагрузками над телом (или силами взаимодействия рассматриваемого элемента материала с окружающими частями среды), положительно. Отрицательное приращение этой работы соответствует *пассивному процессу*, или *разгрузке*.

Рассматривая элементарный объем материала, *условие активного процесса* можно записать в виде следующего неравенства: $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} > 0$, а *условие пассивного процесса* — в виде $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} < 0$.

Иногда за активный процесс принимают такой, при котором пластическая деформация возрастает, а за пассивный — при котором пластическая деформация остается неизменной.

В теориях пластичности предполагается, что в любой момент процесса деформирования тензор полной деформации представляется в виде суммы тензоров упругой и пластической деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (7.8)$$

причем первый тензор изменяется как при активном, так и при пассивном процессе, тогда как *тензор пластической деформации изменяется только при активном процессе*. Представление (7.8) является важным при построении математических теорий пластичности.

Пластическая деформация определяется как совокупность компонентов тензора деформации, сохраняющихся в рассматриваемой точке среды, когда все компоненты тензора напряжений в этой точке обращаются в нуль. Таким образом, пластические деформации отождествляются с остаточными деформациями.

7.7. ГИПОТЕЗЫ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В приложениях весьма распространенной является простейшая теория упрочняющегося пластического материала — *теория малых упругопластических деформаций*. Эта теория относится к числу деформационных теорий пластичности.

Рассмотрим процесс медленного растяжения стержня (рис. 7.12).

Вдоль участка *OAB* происходит нагружение стержня, разгрузке соответствует линия *BC*. Уравнение $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ ветви нагружения *AB* может представлять как пластическую, так и нелинейно-упругую деформацию стержня. В связи с этим замечанием можно попытаться построить уравнения пластической деформации в виде конечных соотношений между напряжениями и деформациями. Подобные уравнения были бы существенно проще уравнений теории пластического течения.

Итак, в теории малых упругопластических деформаций предполагается, что для упругопластических тел можно установить зависимости между напряжениями и деформациями подобно закону Гука для упругих тел.

В основе теории малых упругопластических деформаций лежат гипотезы, предложенные М. Т. Хубером, Р. Мизесом, Г. Генки и обобщенные на случай материала с упрочнением А. Надаи.

Развитие и обоснование теории малых упругопластических деформаций связано с работами А. А. Ильюшина. Поэтому часто теорию малых упругопластических деформаций называют теорией пластичности Ильюшина.

В теории малых упругопластических деформаций принимается, что при простой активной деформации первоначально изотропного материала, свойства которого не зависят от третьего инварианта тензора напряжений, справедливы следующие три гипотезы.

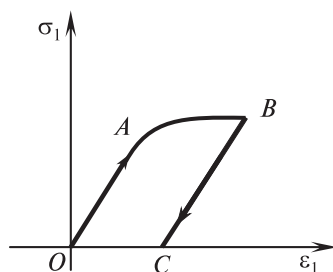


Рис. 7.12. Диаграмма растяжения-сжатия стержня

1. *Упругость объемной деформации.* Объемная деформация тела θ считается упругой, она прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению σ и для нее справедлив закон Гука: $\sigma = K\theta = 3K\varepsilon$.

Это означает, что изменение объема происходит только за счет упругих деформаций, а при пластическом деформировании материал ведет себя как несжимаемый. Иначе эту гипотезу можно сформулировать так: за счет пластической деформации изменение объема тела не происходит.

2. *Соосность девиаторов деформаций и напряжений.* Компоненты девиатора деформаций ε_{ij} пропорциональны компонентам девиатора напряжений s_{ij} . Связь между ними можно представить в форме, предложенной А. А. Ильюшиным:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \varepsilon_{ij}, \quad (7.9)$$

где σ_u, ε_u — интенсивности тензоров напряжений и деформаций.

В компонентах напряжений и деформаций выражение (7.9) принимает вид

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7.10)$$

Здесь $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$; $\varepsilon = (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})/3$;

$\sigma_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$ — интенсивность напряжений;

$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)}$ — интенсивность деформаций.

Аналогично упругому деформированию в модели малых упругопластических деформаций в области пластических деформаций величины напряжений и деформаций связаны между собой однозначными зависимостями.

Экспериментально было показано, что закон, устанавливающий связь между напряжениями и деформациями (7.10), выполняется для случая *пропорционального или простого нагружения*.

3. *Гипотеза упрочнения.* Независимо от вида напряженного состояния для каждого материала имеется универсальная зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций

$$\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u). \quad (7.11)$$

Напомним, что для упругого материала эта связь выражается линейной зависимостью $\sigma_u = 3G\varepsilon_u$.

Экспериментальная проверка приведенных гипотез дала достаточно хорошие результаты для простого или мало отличающегося от простого нагружения. Процесс деформирования при этом должен быть активным, без разгрузок.

Хотя условие пропорционального нагружения в реальных условиях осуществляется редко, однако, как показывают опыты, рассмотренная деформационная теория подтверждается и в тех случаях, когда имеет место некоторое отступление от закона пропорционального нагружения.

Замечание. Теория малых упруго-пластичных деформаций была предложена Генки и, как указывалось, опирается на конечные зависимости между компонентами напряжений и компонентами деформаций, т. е. базируется на гипотезе пропорциональности компонент девиатора деформаций компонентам девиатора напряжений. Вследствие этого уравнения Генки записываются в следующем виде:

$$(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0) = \Psi(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0), \quad (7.12)$$

где $\varepsilon_0 = \sigma_0/3K$, $K = E/(1-2\nu)$.

Функция Ψ определяется так: $\Psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$, где ε_i — интенсивность деформаций; σ_i — интенсивность нормальных напряжений.

Тогда уравнения (7.12) можно представить в виде

$$(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \quad (7.13)$$

Обратные зависимости между компонентами девиатора напряжений и компонентами девиатора деформаций записываются таким образом:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0). \quad (7.14)$$

Как видно, представление (7.14) аналогично (7.10).

При малых упругопластических деформациях для каждого материала между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций существует определенная зависимость $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, подобная зависимости между напряжениями и деформациями при растяжении $\sigma = f(\varepsilon)$. Поэтому зависимость $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, характеризующая диаграмму деформирования, может быть построена по диаграмме растяжения. Для этого необходимо предварительно заменить σ_i на σ , а ε_i — на $(\varepsilon - \varepsilon_0)$.

Поскольку в теории малых упругопластичных деформаций принимается допущение, что при пластических деформациях объем не изменяется ($\theta = 0$), т. е. материал несжимаемый, то в уравнениях (7.13) и (7.14) необходимо положить $\varepsilon_0 = 0$. В этом случае зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций за пределами упругости, $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, определяется диаграммой растяжения. Таким образом, принимается гипотеза о существовании единой кривой деформирования для данного материала независимо от вида напряженного состояния.

Одна из разновидностей записи деформационной теории несжимаемости Генки, характеризующая зависимости между компонентами деформаций и напряжений для упругопластических деформаций, имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\varphi}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\varphi + \frac{3\nu}{1+\nu}}{1+\varphi} \sigma_0 \right).$$

В этих зависимостях величина модуля сдвига как бы уменьшается на $1/(1+\varphi)$, т. е. материал становится менее жестким. Обратные зависимости между компонентами напряжений и деформаций записываются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu}{1+\varphi} \left(\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\varphi + \frac{3\nu}{1+\nu}}{1 - \frac{3\nu}{1+\nu}} \varepsilon_0 \right). \quad (7.15)$$

Если в уравнениях (7.15) деформации выразить по формулам Коши (т. е. $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$) через перемещения, а затем данные формулы подставить в уравнения равновесия в напряжениях $\sum_j \sigma_{ij,j} + X_i = 0$, то получим три дифференциальных уравнения относительно четырех неизвестных (u_i, φ) функций координат. Добавив к данным трем дифференциальным уравнениям четвертое, представляющее условие пластичности Хубера – Мизеса – Генки:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_y^2,$$

и предварительно выразив напряжения через перемещения u_i и функцию φ , найдем четыре уравнения для определения четырех неизвестных функций координат.

Из соотношений (7.13) и (7.14) следует пропорциональность компонент девиатора напряжений компонентам девиатора деформаций, а также пропорциональность главных угловых деформаций главным касательным напряжениям.

А. А. Ильюшин на основании экспериментальных данных показал, что уравнения Генки подтверждаются для простых процессов нагружения или процессов нагружения, близких к простым.

При рассмотрении сложных нагружений в состоянии упрочнения возможны такие деформации, при которых значение σ_i (или ε_i) сохраняется, а компоненты тензора напряжений (или деформаций) изменяются. Поскольку по схеме единой кривой следует считать упрочнение единым для всех направлений, постольку при $d\sigma_i = 0$ надлежит полагать все изменения упругими.

В связи с этим *против деформационной теории пластичности можно выдвинуть следующие возражения*. Рассмотрим, например, два пути нагружения до некоторого состояния $T_\sigma^{(2)}$, характеризуемого значением интенсивности σ_i^0 (рис. 7.13).

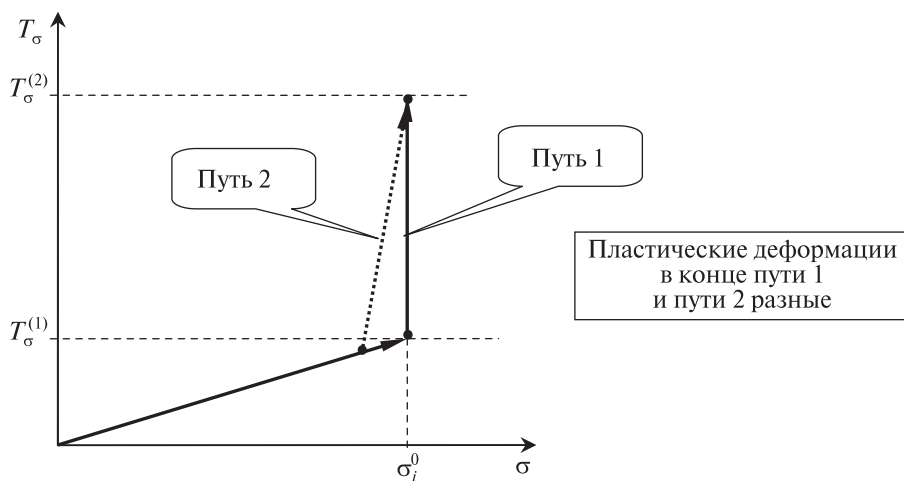


Рис. 7.13. Два возможных пути нагружения упругопластического материала

Один путь состоит в нагружении до состояния $T_{\sigma}^{(1)}$ с той же интенсивностью σ_i^0 и последующем переходе до $T_{\sigma}^{(2)}$ при постоянной интенсивности σ_i^0 . Так как интенсивность напряжений остается постоянной (равна σ_i^0), в конце пути нагружения получим пластические деформации, соответствующие $T_{\sigma}^{(1)}$.

Другой путь следует по первому, но, немного не доходя до состояния $T_{\sigma}^{(1)}$, «сворачивает» и идет к состоянию $T_{\sigma}^{(2)}$ при интенсивности σ_i , которая все время возрастает и приближается к σ_i^0 . Поскольку этот путь может быть сколь угодно близок к первому, естественно ожидать, что и пластические деформации в состоянии $T_{\sigma}^{(2)}$ могут быть прежними, как и при первом пути нагружения. Однако по уравнениям деформационной теории получаем другие значения пластической деформации, соответствующие $T_{\sigma}^{(2)}$, так как все время идет нагружение.

Следует отметить, что уравнения деформационной теории представляют собой уравнения нелинейно-упругого тела. Поэтому использование этих уравнений для описания пластических деформаций при сложных зигзагообразных путях нагружения могут привести к неудовлетворительным результатам.

Можно считать, что при пластической деформации, развивающейся в некотором определенном направлении, уравнения деформационной теории пластичности пригодны.

7.8. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Рассматривается упругопластическое тело, находящееся под воздействием массовых сил ρF_i и поверхностных нагрузок R_i . Для решения задач теории малых упругопластических деформаций (т. е. для определения неизвестных перемещений, деформаций и напряжений $(u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}; i, j = 1, 2, 3)$) имеются уравнения равновесия, соотношения Коши, уравнения совместности деформаций и граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho F_i &= 0; \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2; \\ \varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} - 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta} &= 0, \quad (\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\gamma} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha\alpha} + \varepsilon_{\gamma\alpha,\beta\beta})_{,\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\gamma} = 0; \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$u_i = u_{i0}(x) \text{ на } S_u, \quad \sigma_{ij} l_j = R_i \text{ на } S_{\sigma}.$$

Физические уравнения состояния удобно записывать в виде

$$s_{ij} = 2G\varphi(\varepsilon_u)\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = 3K\varepsilon. \quad (7.17)$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3$.

Сравнивая зависимости (7.10) и (7.17), находим выражение функции пластичности $\varphi(\varepsilon_u)$ через введенную ранее универсальную функцию $\Phi(\varepsilon_u)$ (7.11):

$$\varphi(\varepsilon_u) \equiv \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{3G\varepsilon_u}.$$

Уравнения (7.17) справедливы только при нагружении. В случае упругой разгрузки из обобщенного закона Гука следуют соотношения

$$\sigma_{ij} - \sigma'_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij}) + \lambda(\theta - \theta')\delta_{ij}, \quad (7.18)$$

где σ'_{ij} и ε'_{ij} — напряжения и деформации, существовавшие перед началом разгрузки; λ и μ — постоянные Ламе.

Уравнения разгрузки в форме (7.18) сохраняются до появления в процессе разгрузки новых (вторичных) пластических деформаций.

При решении задач упругопластичности в зависимости от постановки искомыми функциями являются либо перемещения, либо напряжения. Полученное решение должно удовлетворять не только силовым и кинематическим граничным условиям, но и дополнительным условиям на поверхности раздела зон упругих и пластических деформаций.

Задача теории пластичности — нелинейная, поэтому возникает вопрос о ее существовании и единственности. А. А. Ильюшиным доказано [65], что при условии

$$3G \geq \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \geq \frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} > 0$$

система уравнений (7.16), (7.17) — эллиптического типа. При этом решение этой краевой задачи существует, если существует решение соответствующей задачи линейной теории упругости.

Относительно единственности решения А. А. Ильюшиным была доказана следующая *теорема* [65]: «При заданных объемных силах ρF_i , поверхностных силах R_i на части граничной поверхности S_σ и перемещениях u_i на части граничной поверхности S_u напряженное и деформированное состояния тела, т. е. u_i , σ_{ij} , ε_{ij} , определяются единственным образом, если нагружение простое».

7.9. МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Решение задач теории пластичности связано с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, что представляет собой чрезвычайно сложную математическую задачу, которая в аналитическом виде решается, как правило, в исключительных случаях. Поэтому чаще всего используются приближенные методы. Одним из них является *метод последовательных приближений*, предложенный А. А. Ильюшиным для решения задач теории малых упругопластических деформаций при активном нагружении и называемый в теории пластичности *методом упругих решений*. Суть его заключается в рассмотрении последовательности линейных задач теории упругости, решения которых с увеличением порядкового номера сходятся к решению задачи теории пластичности.

Для построения алгоритма метода функция $\varphi(\varepsilon_u)$ представляется в виде

$$\varphi(\varepsilon_u) = 1 - \omega(\varepsilon_u). \quad (7.19)$$

Представление (7.19) подставляется в выражение (7.17), тогда физические соотношения становятся следующими:

$$s_{ij} = 2G(1 - \omega(\varepsilon_u))\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = 3K\varepsilon, \quad (7.20)$$

где $0 \leq \omega < 1$, причем $\omega(\varepsilon_u) = 0$, если $\varepsilon_u \leq \varepsilon_y$.

Таким образом, при $\omega = 0$ уравнения (7.20) совпадают с соотношениями линейной теории упругости.

Дифференциальное уравнение равновесия и граничные условия можно записать, разложив тензор напряжений на девиаторную и шаровую части:

$$s_{ij,j} + \sigma_{,i} + \rho F_i = 0, \\ s_{ij}l_j + \sigma l_i = R_i \text{ на } S_\sigma, \quad u_i = u_{i0}(x) \text{ на } S_u. \quad (7.21)$$

Решаем задачу упругопластичности в перемещениях. С этой целью компоненты (7.20) подставляются в уравнения равновесия и силовые граничные условия (7.21) и учитываются соотношения Коши. В итоге получаются обобщения уравнений Ламе и граничные условия:

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu\Delta u_i + \rho F_i - \rho F_{\omega i} = 0, \\ \lambda\theta l_i + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})l_j = R_i + R_{\omega i}.$$

Здесь $F_{\omega i} = 2G(\omega \varepsilon_{ij})_{,j}$, $R_{\omega i} = 2G\varepsilon_{ij}l_j\omega$.

За нулевое приближение принимается $\omega^{(0)} = 0$. Тогда фиктивные нагрузки $F_{\omega i} = R_{\omega i} = 0$, следовательно, для определения первого приближения $u_i^{(1)}$ имеем обычную задачу линейной теории упругости. По найденным перемещениям $u_i^{(1)}$ определяются величины

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_u^{(1)}, \omega^{(1)} \equiv \omega(\varepsilon_u^{(1)}), \quad F_{\omega i}^{(1)}, \quad R_{\omega i}^{(1)}.$$

Для любого k -го приближения имеют место уравнения равновесия и граничные условия

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i}^{(k)} + \mu\Delta u_i^{(k)} + \rho F_i - \rho F_{\omega i}^{(k-1)} = 0, \\ \lambda\mu^{(k)}l_i + \mu(u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)})l_j = R_i + R_{\omega i}^{(k-1)}, \quad (7.22)$$

причем $F_{\omega i}^{(k-1)}$, $R_{\omega i}^{(k-1)}$ определяются предшествующим $(k-1)$ -м приближением.

Модифицированные уравнения Ламе и граничные условия (7.22) являются линейными относительно неизвестных перемещений $u_i^{(k)}$. Они отличаются от соответствующих уравнений теории упругости тем, что в них к внешним силам ρF_i , R_i добавляются фиктивные силы $F_{\omega i}^{(k-1)}$, $R_{\omega i}^{(k-1)}$. Это позволяет по известному решению соответствующей задачи теории упругости построить решение упругопластической задачи в рекуррентном виде. Пример построения подобного итерационного решения рассмотрен далее.

Для сходимости метода упругих решений необходимо, чтобы параметр ω , связанный с функцией $\phi(\varepsilon_u)$ соотношением (7.19), был малым по сравнению с единицей. При этом должно выполняться следующее условие [65]:

$$1 > \omega + \varepsilon_u \frac{d\omega}{d\varepsilon_u} \geq \omega \geq 0.$$

Сходимость этого метода исследовалась различными авторами. Достаточно подробная библиография по этому вопросу содержится в работах Б. Е. Победри.

На практике при решении конкретных задач обнаружено, что скорость сходимости метода упругих решений весьма высока, так что достаточно несколько приближений, чтобы получить необходимую точность.

Приведем алгоритм решения задач упругопластичности методом последовательных приближений.

Как уже упоминалось, одним из вариантов использования *метода последовательных приближений* применительно к решению нелинейных уравнений теории пластичности является *метод упругих решений*.

Существует *несколько способов его реализации*. Рассмотрим два из них: *метод дополнительных нагрузок* и *метод дополнительных деформаций*. Использование их позволяет решать упругопластические задачи с помощью подходов теории упругости для определения функций $u_i(x)$ и $\sigma_{ij}(x)$ (например, методами интегральных уравнений).

Замечание. Отметим, что речь идет о задачах без зон разгрузки при использовании деформационной теории пластичности.

Рассмотрим подход, основанный на методе дополнительных нагрузок.

Уравнения равновесия, полученные по методу дополнительных нагрузок, имеют следующий вид:

$$\mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \left(\partial \theta / \partial x_j \right) + X_j + X_j^0 = 0, \quad (j = \overline{1, m}), \quad (7.23)$$

где

$$X_j^0 = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(2\mu - \frac{1}{\psi} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \theta \right) \right] - \sum_{k, k \neq j}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu - \frac{1}{2\psi} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right]. \quad (7.24)$$

Здесь $\psi = (3/2)(\varepsilon_i / \sigma_i)$; ε_i и σ_i – соответственно интенсивности деформаций и напряжений.

Граничные условия метода дополнительных нагрузок имеют следующий вид:

$$\lambda \theta(y) n_j + \mu \sum_{k=1}^m \frac{\partial u_j}{\partial x_k} n_k + \mu \sum_{k=1}^m \frac{\partial u_k}{\partial x_j} n_k = X_{v_j} + X_{v_j}^{(0)}, \quad (7.25)$$

где

$$X_{v_j}^{(0)} = \sum_{k, k \neq j}^m \left(\mu - \frac{1}{2\psi} \right) \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) n_k \right] + \left(2\mu - \frac{1}{\psi} \right) \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \theta \right] n_j. \quad (7.26)$$

В соответствии с (7.23) и (7.25) исходная упругопластическая задача может быть сведена к последовательности решения «псевдозадач» теории упругости. Для решения же последних можно использовать какие-либо развитые методы решения (МКЭ, методы интегральных уравнений и др.).

Процедура последовательности решения «псевдозадач» теории упругости представляет собой реализацию метода последовательных приближений с предположением в первом приближении, что все дополнительные объемные и поверхностные нагрузки равны нулю (т. е. $\psi = (1/2)\mu$). Решив задачу теории упругости для заданных сил $X_j^{(k)}$, $X_{v_j}^{(k)}$ ($j = \overline{1, m}$), находим перемещения в k -м приближении $u_j^{(k)}$. Опре-

делив затем деформации $e_j^{(k)}$ и интенсивность деформаций $\varepsilon_j^{(k)}$, по заданной диаграмме деформирования с учетом упрочнения определяем $\sigma_i^k = \Phi(\varepsilon_i^{(k)})$, а затем $\Psi_{(k+1)} = (3/2)\varepsilon_i^{(k)} / \Phi(\varepsilon_i^{(k)})$. По формулам (7.24) и (7.26) находим дополнительные нагрузки $X_j^{(0)}$ и $X_{vj}^{(0)}$ и опять решаем задачу теории упругости.

Решение необходимо продолжать до тех пор, пока два последовательных приближения не будут отличаться между собой на бесконечно малую заданную величину.

Обратимся к подходу, основанному на методе дополнительных деформаций.

Преобразованные уравнения сплошности в случае решения упругопластических задач методом дополнительных деформаций имеют такой вид:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x_i \partial x_j} = - \left[\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \right] - \delta_{ij} \frac{\nu}{1-\nu} \sum_{k=1}^m \frac{\partial X_k}{\partial x_k} + X_{ij}^{(0)},$$

где

$$X_{ii}^{(0)} = 2\mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2\mu} \right) \left(\sigma_{kk} - \frac{\sigma_0}{3} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[\left(\Psi - \frac{2}{\mu} \right) \left(\sigma_{jj} - \frac{\sigma_0}{3} \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{\mu} \right) \sigma_{kj} \right] \right\}; \quad (7.27)$$

$$X_{ij}^{(0)} = \mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{\mu} \right) \sigma_{ij} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{\mu} \right) \sigma_{kj} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{\mu} \right) \sigma_{ki} \right] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2\mu} \right) \left(\sigma_{kk} - \frac{\sigma_0}{3} \right) \right] \right\}, \quad (7.28) \\ (i, j, k = 1, \dots, m); i \neq j \neq k.$$

Как и в предыдущем случае, исходная задача приводится к последовательности решения задач теории упругости на основе метода последовательных приближений с предположением в первом приближении, что $\Psi = (1/2)\mu$. Составляющие тензора деформаций в k -м приближении $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ определяются через k -е приближенное решение $\sigma_{ij}^{(k)}$ по следующим формулам:

$$\varepsilon_{ii}^{(k)} = (1/E) \left[\sigma_{ii}^{(k)} - \nu \sum_{l, l \neq i} \sigma_{ll} \right] + \left(\Psi - (1/2\mu) \right) \left(\sigma_{ii}^{(k)} - \sigma_0 \right); \\ \varepsilon_{ij}^{(k)} = \left((1/\mu) \sigma_{ij}^{(k)} \right) + \left(2\Psi - (1/\mu) \right) \sigma_{ij}^{(k)}.$$

Вычислив далее функцию Ψ , по формулам (7.27) и (7.28) найдем $X_{ii}^{(0)}$ и $X_{ij}^{(0)}$, после чего решаем задачу теории упругости с новыми объемными силами. Вычисления продолжаем до тех пор, пока разница между двумя последовательными приближениями не окажется достаточно малой.

7.10. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Для расчетов в области больших пластических деформаций применяется *теория пластического течения*. Ее основное отличие от деформационной теории состоит в том, что принимается отсутствие однозначной связи между напряжениями и пластическими деформациями как при простых, так и при сложных нагружениях.

Замечание. На практике подобные задачи встречаются при обработке металлов давлением, резанием, в расчетах предельных состояний оснований сооружений и т. д.

Напряжения при пластических деформациях в конечном состоянии зависят от пути деформирования. В связи с этим уравнения, описывающие пластическую деформацию, в принципе не могут быть конечными соотношениями, связывающими компоненты напряжений и деформаций, а должны быть дифференциальными зависимостями.

Уравнения теории пластического течения устанавливают связь между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений, самими напряжениями и некоторыми параметрами пластического состояния. Физические уравнения, соответствующие данной теории, для плоской задачи впервые были получены Сен-Венаном, а для пространственной задачи — М. К. Леви¹ и позже Мизесом.

В теории течения пластическая деформация материала уподобляется течению вязкой жидкости.

Как уже отмечалось ранее, переход в пластическое состояние в окрестности точки тела определяется уравнением вида $f(\sigma_{ij}) = 0$, которое в шестимерном пространстве напряжений описывает поверхность текучести (нагружения). Если материал с упрочнением, то поверхность текучести изменяется с ростом пластической деформации, ее уравнение содержит некоторый параметр упрочнения η .

В основе теории пластического течения лежат следующие гипотезы.

1. *Упругость объемной деформации.* Как и в теории малых упругопластических деформаций (7.5), выполняется соотношение $\sigma = 3K\varepsilon$.

Относительное изменение объема является упругой деформацией, пропорциональной среднему напряжению:

$$\theta = \sigma_0 / K; \quad d\theta = 3(d\varepsilon_{0e} + d\varepsilon_{0p}) = d\sigma_0 / K. \quad (7.29)$$

При этом коэффициент пропорциональности K тот же, что и в соотношениях, применяемых, когда поведение материала находится в пределах упругости: $K = E/3(1 - 2\nu)$.

В (7.29) $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}$ — среднее напряжение; $\varepsilon_{0e} = \frac{1}{3} \sum_i \varepsilon_{iie}$, $\varepsilon_{0p} = \frac{1}{3} \sum_i \varepsilon_{iip}$, где ε_{iie} и ε_{iip} — соответственно упругие и пластические части деформаций ε_{ij} .

Напоминаем, что можно показать, что при пластических деформациях объем тела практически не изменяется. Следовательно, тензор приращения пластических деформаций представляет собой девиатор. Тогда

$$d\varepsilon_{op} = 0, \quad d\varepsilon_{oe} = d\sigma_0 / 3K.$$

Материал в пластическом состоянии несжимаем:

$$\varepsilon^p = (\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p) / 3 = 0.$$

¹ Леви Морис (Maurice Lévy, 1838–1910), французский математик, механик и инженер.

Это условие несжимаемости можно записать и как равенство нулю скорости объемного пластического деформирования, т. е. $d\varepsilon^p/dt = 0$.

2. *Гипотеза градиентальности.* Вектор приращения деформаций полагают направленным перпендикулярно поверхности текучести. Это эквивалентно предположению о пропорциональности компонент приращения деформаций и компонент вектора-градиента к поверхности текучести (частных производных от уравнения поверхности по соответствующим компонентам напряжения)

$$d\varepsilon_{11}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \dots, 2d\varepsilon_{13}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}}. \quad (7.30)$$

Соотношения (7.30) выражают закон течения, ассоциированный с принятым условием пластичности $f=0$. Здесь $d\lambda$ — дифференциально-малый множитель, механическое значение которого устанавливается в связи с рассмотрением элементарной работы внутренних сил на пластических деформациях. По определению имеем $dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$.

Используя соотношение (7.30), получаем

$$dU = d\lambda \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \sigma \operatorname{grad} f. \quad (7.31)$$

Здесь σ — радиус-вектор точки в шестимерном пространстве напряжений, отвечающей компонентам σ_{ij} . На рис. 7.14 показаны часть поверхности текучести и векторы, составляющие скалярное произведение в формуле (7.31). Следовательно, множитель $d\lambda$ пропорционален плотности работы напряжений на пластических деформациях, причем коэффициент пропорциональности отличен от нуля.

Определение приращений пластических деформаций через производные функции f по соответствующим аргументам (7.31) служит основой наименования f *пластическим потенциалом*. Поверхность текучести, или пластический потенциал, определяется экспериментально, согласуясь с некоторыми общими физическими соображениями. Одним из этих требований является критерий упрочнения, сформулированный Д. Друкером и состоящий в следующем.

Представим себе (рис. 7.15) некоторое напряженное состояние σ^* , которому соответствует поверхность текучести S^* . Поверхность текучести делит шестимерное пространство напряжений на две области: переход из точки σ^* в область ее положительных значений сопровождается активной пластической деформацией, приращением вектора пластической деформации; переход из конца вектора σ^* в область отрицательных значений соответствует разгрузке, следующей упругим законам; пластическая деформация при этом неизменна.

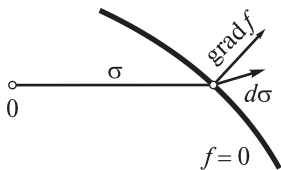


Рис. 7.14. Поверхность текучести

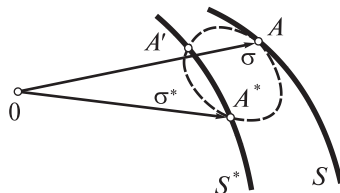


Рис. 7.15. Поверхности текучести в процессе нагрузки

Рассмотрим теперь состояние, определенное вектором σ , конец которого лежит в положительной области; этому состоянию соответствует поверхность текучести S .

Постулатом Друкера утверждается неотрицательность работы приращений напряжений на действительных перемещениях деформаций за цикл, когда состояние из точки σ^* по некоторому пути переходит в σ , затем возвращается в σ^* :

$$\int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} \geq 0. \quad (7.32)$$

Важное следствие из этого постулата можно получить, полагая замкнутый путь интегрирования состоящим из трех участков. На участках A^*A' и AA^* деформация только упругая, а на участке $A'A$ — упругопластическая: $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$.

Вследствие обратимости упругих деформаций соответствующая им часть в интеграле (7.32) обращается в нуль и остается только

$$\int_{A'}^A (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0.$$

Точку A' можно считать в пределе совпадающей с A , а состояния σ^* и σ — бесконечно близкими, поэтому левая часть предыдущего неравенства сводится к скалярному произведению $d\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$.

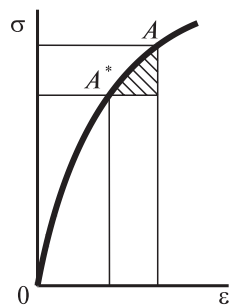


Рис. 7.16. Фрагмент поверхности текучести

Значит, вектор приращения напряжений и вектор приращения пластических деформаций образуют острый угол. Другими словами, *поверхность текучести должна быть выпукла в сторону активных пластических деформаций* (как показано на рис. 7.15 и 7.16). Это требование иногда называют *условием устойчивости процесса пластического деформирования* и демонстрируют его в простейшем случае одноосного растяжения образца. На рис. 7.16 показана диаграмма соответствующего деформирования. Переход от точки A^* в состояние A сопровождается работой приращения напряжения $0,5d\sigma d\varepsilon$.

Работа положительна, когда напряжение возрастает с ростом деформации. Этот процесс не наблюдается после образования шейки на растягиваемом образце, когда образующиеся дефекты материала приводят к интенсивному росту деформации даже при понижении напряжения. Такой процесс деформирования неустойчив, а соответствующая диаграмма называется, как мы уже упоминали ранее (см. гл. 1), *ниспадающей*.

В теории пластического течения предполагается, что для заданного материала интенсивность напряжений является функцией интеграла от интенсивности приращений пластических деформаций:

$$\sigma_i = F\left(\int d\varepsilon_{ip}\right). \quad (7.33)$$

Функция F определяется по диаграмме растяжения материала. Для этого необходимо предварительно преобразовать функцию $\sigma = f(\varepsilon)$ в функцию $\sigma = f^*(\varepsilon_p)$ (рис. 7.17).

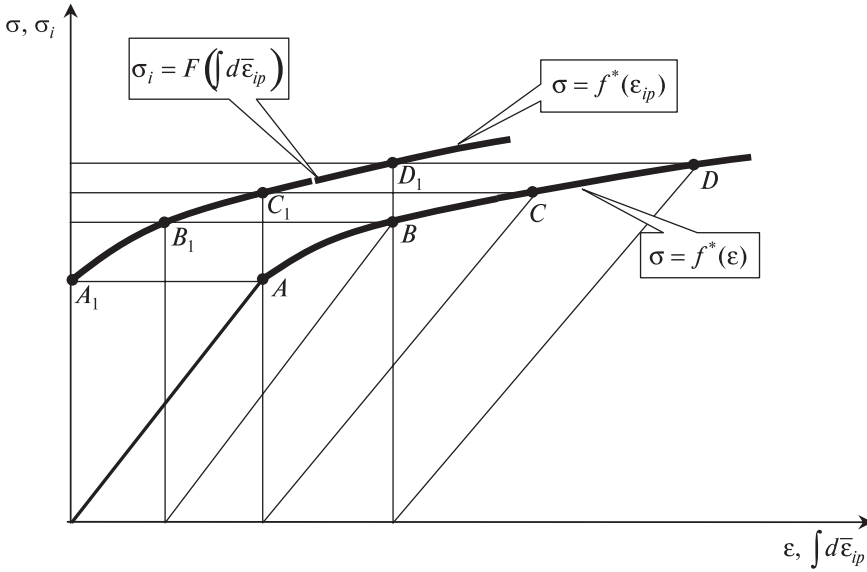


Рис. 7.17. Диаграмма растяжения материала

Действительно, для одноосного растяжения имеем

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = \sigma; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0;$$

$$d\epsilon_{xp} = d\epsilon_{yp} = -\frac{d\epsilon_p}{2}; \quad d\epsilon_{xp} + d\epsilon_{yp} + d\epsilon_{zp} = 0; \quad d\epsilon_{zp} = d\epsilon_p.$$

Тогда с учетом того, что

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$d\bar{\epsilon}_{ip} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times$$

$$\times \sqrt{(d\epsilon_{xp} - d\epsilon_{yp})^2 + (d\epsilon_{yp} - d\epsilon_{zp})^2 + (d\epsilon_{zp} - d\epsilon_{xp})^2 + \frac{3}{2} [(d\gamma_{xyp})^2 + (d\gamma_{yzp})^2 + (d\gamma_{zxp})^2]},$$

получаем

$$\sigma_i = \sigma, \quad d\bar{\epsilon}_{ip} = d\epsilon_p.$$

Кривая $A_1B_1C_1D_1$ выражает зависимость между интенсивностью напряжений и параметром Огквиста, т. е. $\sigma_i = F(q)$.

Замечание. Параметр Огквиста q характеризует накопленную пластическую деформацию: $q = \int d\epsilon_{ip}$.

Приращение компонент пластической деформации можно выразить следующим образом:

$$d(\epsilon_{ij})_p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0). \quad (7.35)$$

Уравнения (7.35) показывают, что компоненты приращения пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений.

Добавляя к компонентам пластических деформаций, определяемых (7.35), компоненты упругих деформаций, определяемых формулами

$$(\varepsilon_{ij})_e = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma_0 \delta_{ij} \right),$$

находим формулы для определения компонент приращений полных деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_0 \right] + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0). \quad (7.36)$$

Уравнения (7.36) являются основными уравнениями теории пластического течения и называются уравнениями Прандтля – Рейса. При этом зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью приращения деформаций принимается в виде (7.33).

Если в уравнениях Прандтля – Рейса пренебречь компонентами упругой деформации (что допустимо для развитой пластической деформации), то получим уравнения теории пластичности Сен-Венана – Мизеса:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0). \quad (7.37)$$

Разделив обе части уравнений (7.37) на dt и с учетом того, что $d\bar{\varepsilon}_i/dt = \xi_i$, получим физические уравнения связи между скоростями деформаций и компонентами девиатора напряжений

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\xi_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (7.38)$$

где ξ_i – интенсивность скоростей деформаций, определяемая формулой

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2} + \frac{3}{2} (\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2).$$

Очевидно, что скорости деформации ξ_{ij} не определяются однозначно при задании напряжений. При задании же скоростей деформаций ξ_{ij} компоненты девиатора напряжений s_{ij} , определяются однозначно. Легко убедиться в том, что компоненты s_{ij} , определяемые формулами (7.38) (так как $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$), тождественно удовлетворяют условию текучести Мизеса. Следует отметить также, что в состоянии текучести (т. е. при выполнении условия текучести Мизеса) неопределенность компонент скорости деформации необходима для возможности выполнения условий совместности деформаций.

Уравнения Сен-Венана – Мизеса широко применяются в математической теории пластичности и различных ее приложениях.

Уравнения Прандтля – Рейса (7.36) связывают компоненты напряжений с бесконечно малыми приращениями компонент напряжений и деформаций, т. е. не являются конечными соотношениями (в отличие от деформационной теории пластичности).

Соотношения (7.36), вообще говоря, не интегрируются, т. е., другими словами, не сводятся к конечным соотношениям между компонентами напряжений и деформаций. Этот математический факт отражает зависимость результатов от истории деформирования.

Если, например, в пространстве напряжений перейти из некоторой начальной точки O (рис. 7.18), характеризуемой нулевыми напряжениями, в точку O_1 (с напряжениями σ_{ij}) двумя путями I и II, то компоненты деформаций в точке O_1 по уравнениям теории пластического течения будут различными.

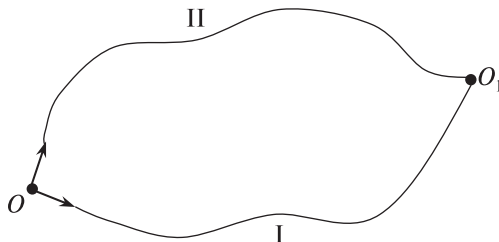


Рис. 7.18. Различные пути деформирования при переходе от точки O к точке O_1

Как видно, уравнения (7.36) не содержат время. Однако, разделив их на dt , можно формально перейти от приращений $d\varepsilon_{ij}$ к скоростям деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$. Тогда полученные уравнения будут внешне напоминать уравнения течения вязкой жидкости. Эта аналогия в какой-то мере оправдывает название теории пластического течения. Следует подчеркнуть, что под переменной t здесь можно понимать время, или монотонно возрастающий параметр нагрузки, или, наконец, какую-нибудь монотонно возрастающую величину (например, характерный размер пластической зоны). Переход к скоростям деформации иногда удобен, так как позволяет применять наглядную терминологию гидравлики.

Полученные уравнения теории пластического течения принципиально отличны от уравнений вязкого течения. В них в отличие от последних всегда можно отбросить dt и вернуться к формулам (7.36), не содержащим времени. В случае упрочнения возможно вычислить деформации при задании пути нагружения, т. е. при задании $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$, где t — некоторый параметр (например, время). Можно также найти, в принципе, напряжения, если задан путь деформирования, т. е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t)$.

Уравнения теории пластичности Сен-Венана — Мизеса имеют значительно более простую структуру и представляют собой конечные зависимости между компонентами напряжений и скоростями деформаций. Следует подчеркнуть, что и в эти уравнения время входит несущественным образом и может быть исключено (сокращением на dt) или заменено каким-нибудь подходящим монотонно изменяющимся параметром.

При решении задач теории пластического течения справедливы уравнения равновесия, соотношения Коши, уравнения совместности деформаций и граничные условия

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0; \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2;$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} - 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0, \quad (\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha} + \varepsilon_{\gamma\alpha,\beta})_{,\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\gamma} = 0;$$

$$u_i = u_{i0}(x) \text{ на } S_u, \quad \sigma_{ij} l_j = R_i \text{ на } S_\sigma.$$

В теории пластического течения доказана теорема о единственности полей приращений напряжений, деформаций и перемещений в упрочняющемся теле. *Гарантировать единственность приращений деформаций и перемещений в случае неупрочняющегося материала нельзя*, хотя в частных задачах может быть доказана единственность указанных приращений и для идеально пластического материала.

Итак, очевидно, что уравнения теории течения оказываются значительно сложнее уравнений теории малых упругопластических деформаций. Вместе с тем показано, что *при простом нагружении обе рассмотренные теории дают одинаковое решение*. В случае сложного нагружения результаты, полученные с помощью теории пластического течения, лучше согласуются с экспериментальными данными. Более подробно теория и задачи пластического течения рассмотрены в многочисленных монографиях и статьях, посвященных различным аспектам данной теории (см., например, [66–72]).

7.11. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОЦЕССА НАГРУЖЕНИЯ

При рассмотрении теории пластического течения удобно исходить из геометрической интерпретации процесса нагружения — поверхности текучести, о которой уже говорилось (см. п. 7.3). Выделяем, как и ранее (см. гл. 2, рис. 2.3), в исследуемом теле элемент в форме параллелепипеда настолько малого размера, что его напряженное состояние допустимо считать однородным. Отнесем этот элемент к осям x_1, x_2, x_3 и обозначим компоненты напряжений, действующие на его гранях, через σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

Тензор напряжений симметричен, поэтому для характеристики напряженного состояния достаточно шести величин σ_{ij} . Теперь возьмем шестимерное пространство напряжений, в котором вдоль каждой из осей будем откладывать какую-либо одну из компонент напряжений. Сопоставим напряженному состоянию элемента точку с декартовыми координатами σ_{ij} в пространстве напряжений. Ненагруженному состоянию элемента отвечает здесь начало координат.

Нагружение образца сопровождается изменением значений σ_{ij} , и, значит, в пространстве напряжений точка, изображающая напряженное состояние исследуемого элемента, вычерчивает некоторую траекторию, называемую *путем нагружения*.

При одноосном напряженном состоянии все компоненты σ_{ij} , кроме одного, например σ_{11} , равны нулю. В этом случае путь нагружения совпадает с осью σ_{11} . Появление пластической деформации, согласно моделям предыдущего параграфа, связано с достижением σ_{11} значения σ_y , характерного для данного материала. Таким образом, на оси σ_{11} можно выделить такую содержащую начало координат область, внутри которой состояние материала при первоначальном нагружении упругое. На рис. 7.19 и 7.20 эта область обозначена Ω ; ее границами являются точки с координатами $\pm\sigma_y$, что соответствует случаю равных пределов текучести при растяжении и сжатии.

Если тело *идеально пластическое* (см. рис. 7.7, а, 7.19), то точки, лежащие вне области Ω , не могут быть реализованы, так как напряжения, большие σ_y , в соответствии с моделью идеально пластического тела недостижимы. Выход изображающей точки на границу Ω означает переход элемента тела в состояние текучести. Деформация при этом является неопределенной. Переход точки с границы внутрь области Ω (разгрузка) соответствует изменению только упругой части деформации.

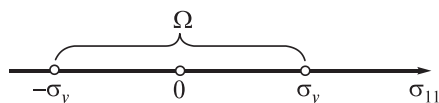


Рис. 7.19. Геометрическая интерпретация идеально пластического тела

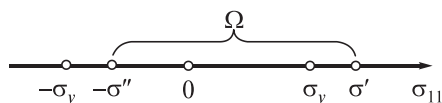


Рис. 7.20. Геометрическая интерпретация упрочняющегося тела

Теперь рассмотрим упрочняющееся тело (см. рис. 7.20). Его модель определяется, в частности, диаграммой на рис. 7.7, в. При выходе изображающей точки за пределы области Ω появляется остаточная деформация. Если достигнуто растягивающее напряжение $\sigma_{11} = \sigma' > \sigma_y$, то предел упругости в данный момент равен σ' . Это означает, что верхняя граница области Ω сместилась вправо по оси σ_{11} от значения σ_y до σ' . Нижняя граница этой области, в силу эффекта Баушингера для циклически идеального упрочняющегося тела, получает такое же смещение вправо, так что изображающая точка увлекает за собой область Ω как жесткое целое. При переходе точки с границы внутрь области Ω меняется только упругая составляющая деформации ε_{ij}^e , пластическая же ее доля ε_{ij}^p остается неизменной.

На рис. 7.21 показано естественное обобщение описанной картины на общий случай напряженного состояния. Здесь основным является предположение о том, что в пространстве напряжений существует такая область Ω , содержащая начало координат, что на всяком пути нагружения, расположенном целиком внутри Ω , деформация элемента остается упругой.



Рис. 7.21. Интерпретация нагружения в общем случае

Если тело — идеально пластичное, то выход точки на границу S области Ω означает переход тела в состояние текучести, деформация при этом становится неопределенной. Таким образом, граница S представляет собой геометрическое место пределов текучести при всевозможных путях нагружения. Для идеально пластического тела точки вне области Ω не реализуются. Переход точки с границы S внутрь области Ω сопровождается изменением только упругой составляющей деформации, т. е. происходит разгрузка, хотя некоторые из компонентов напряжения σ_{ij} могут при этом возрастать.

В случае упрочняющегося тела процесс нагружения, выводящий изображающую точку за пределы области Ω , должен сопровождаться перемещением этой области. Аналогом соответствующей одномерной модели будет модель (см. рис. 7.21, а), в которой область Ω смещается поступательно как жесткое целое, так называемое *трансляционное упрочнение*. При движении точки внутрь области Ω изменяется только

упругая составляющая деформации (разгрузка). Если точка перемещается за пределы Ω (см. рис. 7.21, б), то происходит дальнейшее увеличение пластической составляющей деформации (активный процесс, догрузка). Кроме того, возможны такие изменения напряжений, при которых путь нагружения касателен к границе области Ω (нейтральное нагружение). В упрочняющемся теле при таких нагрузках меняются только упругие деформации.

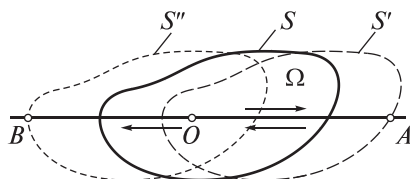


Рис. 7.22. Геометрическая интерпретация процесса нагружения

В случае простого нагружения, когда все компоненты тензора напряжений меняются пропорционально одному общему параметру, процесс нагружения в пространстве напряжений изображается лучом, исходящим из начала координат (рис. 7.22). Можно показать, что этот луч пересекает поверхность текучести не более одного раза.

Пусть после выхода в пластическую область в точке A производится разгрузка и последующее пропорциональное нагружение напряжениями

такой же величины, но противоположного знака, так что процесс проходит вдоль прямой AB. Такой вид деформирования будем в дальнейшем называть знакопеременным простым (циклическим) нагружением. Поверхность течения S , ограничивающая область Ω при нагружении из естественного состояния, переходит в S' в конце первого полуцикла и в S'' после приложения знакопеременной нагрузки.

Граница S области Ω называется *поверхностью течения* или *нагружения*. В случае идеально пластического материала эта поверхность фиксированна. Для упрочняющегося тела поверхность нагружения изменяется по мере накопления пластической деформации. В шестимерном пространстве напряжений она в каждый данный момент нагружения разделяет области упругого и пластического деформирования. При трансляционном упрочнении поверхность текучести смещается поступательно как жесткое целое. Возможны и другие виды упрочнения, например условие (7.6), при которых меняется не только положение этой поверхности в пространстве напряжений, но и ее форма и размеры.

Исследуем, какие физические соотношения между деформациями и напряжениями вытекают, если уравнение поверхности текучести $f=0$ принять в соответствии с условием Мизеса

$$f = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - 2\sigma_T^2 = 0.$$

Рассмотрим частные производные (7.30) от функции f . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = 4\sigma_{11} - 2\sigma_{22} - 2\sigma_{33} = 6(\sigma_{11} - \sigma), \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} = 12\sigma_{13},$$

где $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$.

Будем полагать, что коэффициент $d\lambda$ включает в себя и числовой множитель 6. Тогда предыдущие соотношения можно обобщить и с учетом выражения (7.30) переписать в следующем виде:

$$d\varepsilon_{ii}^p = d\lambda(\sigma_{ii} - \sigma), \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (7.39)$$

Представим приращение компонент пластических деформаций в виде разложения на девиаторную и шаровую части: $d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon^p \delta_{ij}$.

Поскольку объемное пластическое деформирование отсутствует, то

$$d\varepsilon^p = (d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{22}^p + d\varepsilon_{33}^p)/3 = 0$$

и величины $d\varepsilon_{ij}^p$ являются приращениями компонент девиатора пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$. В правой части соотношений (7.39) содержатся компоненты девиатора напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$. Следовательно,

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}. \quad (7.40)$$

Таким образом, при пластическом течении металла предполагается линейная связь между приращениями девиатора пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$ и компонентами девиатора напряжений s_{ij} . Этот вывод можно трактовать также как линейную зависимость между компонентами скоростей пластических деформаций и компонентами напряжений.

По аналогии с величиной интенсивности деформаций вводится понятие *интенсивности приращений пластических деформаций*

$$d\varepsilon_u^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ (d\varepsilon_{11}^p - d\varepsilon_{22}^p)^2 + (d\varepsilon_{22}^p - d\varepsilon_{33}^p)^2 + (d\varepsilon_{33}^p - d\varepsilon_{11}^p)^2 + \right. \\ \left. + 6 \left[(d\varepsilon_{12}^p)^2 + (d\varepsilon_{23}^p)^2 + (d\varepsilon_{31}^p)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (7.41)$$

Заметим, что интенсивность приращений пластических деформаций (7.41) не равна приращению интенсивности пластических деформаций (7.39).

Подставив (7.39) в соотношение (7.41) и проведя некоторые преобразования, получим для $d\lambda$ следующее выражение:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_u^p}{\sigma_u}.$$

Используем найденное выражение $d\lambda$ в формуле приращения компонент девиатора пластической деформации $d\varepsilon_{ij}^p$ (7.40). Тогда компоненты девиатора напряжений будут иметь вид

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{d\varepsilon_u^p} d\varepsilon_{ij}^p. \quad (7.42)$$

Полагая упругие деформации малыми по сравнению с пластическими, можно пренебречь ими и в уравнениях (7.42) всюду отбросить индекс p вверх. При этом принимается, что полные деформации равны пластическим. Кроме того, разделим в правой части компоненты деформаций в числителе и знаменателе на dt . Получим компоненты *скоростей деформации* $\xi_{ij} = d\varepsilon_{ij}/dt$ и *интенсивность скоростей деформации* $\xi_u = d\varepsilon_u/dt$.

В итоге выражения (7.42) примут следующий вид:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\xi_u} \xi_{ij}.$$

Из последнего соотношения следует, что компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам скоростей деформаций.

7.12. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ ТЕЧЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИЕЙ

Теория течения и деформационная теория совпадают только в случае простого нагружения. При сложном нагружении деформационная теория и теория течения приводят к различным результатам.

Отметим, что результаты сближаются в одном важном для приложений случае деформирования. В пространстве деформаций путь деформирования изображается в виде некоторой линии (рис. 7.23).

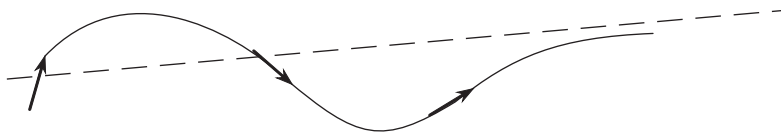


Рис. 7.23. Путь деформирования

Пусть, начиная с какого-то момента, путь деформирования приближается к прямой линии (пунктир). В этом случае будем говорить, что *деформация развивается в определенном направлении*. Если этот случай имеет место, то напряженные состояния, подсчитываемые по обеим теориям, сближаются. При этом влияние сложной истории деформирования быстро ослабевает и устанавливается неизменное напряженное состояние, определяемое теми фиксированными скоростями деформации, которые характерны для прямолинейного участка.

Интересно также отметить, что если исходить из более общих представлений о поверхности нагружения, имеющей особенности, то для некоторых классов путей нагружения уравнения теории течения приводятся к уравнениям деформационной теории.

Опыты подтверждают теорию пластического течения значительно полнее, нежели деформационную теорию. Экспериментальные данные свидетельствуют также о совпадении направлений главных осей тензора напряжений и тензора приращений пластической деформации.

Следует, однако, отметить, что при сложных («зигзагообразных») нагружениях, особенно с промежуточными разгрузками, обнаруживается заметное влияние анизотропии, которую материал приобретает в процессе пластического деформирования.

Описание явлений деформационной анизотропии затруднено малой их изученностью и требует значительного усложнения теории.

7.13. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ВЫВОДЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В случаях идеально пластического материала и материала с упрочнением рассмотрим уравнения теории пластического течения, условие текучести и условия, характеризующие состояние среды: процесс нагрузки, разгрузки, нейтральное состояние.

Идеально пластический материал. В сложном напряженном состоянии текучесть материала определяется условием, представляющим в пространстве напряжений гладкую и выпуклую поверхность, называемую поверхностью текучести. Эта поверхность в каждой точке имеет однозначно определенную касательную плоскость.

Условие текучести можно записать в виде следующего уравнения:

$$F(\sigma_{ij}) = 0, \quad (7.43)$$

где функция F есть четная функция относительно σ_{ij} и выбрана так, что условие $F < 0$ определяет упругое состояние, а равенство $F = 0$ — состояние течения.

Предполагается, что существует определенная в пространстве напряжений функция $F_1 = F_1(\sigma_{ij})$, выполняющая роль потенциала. Обычно функция F_1 , представляющая пластический потенциал, отождествляется с функцией F , представляющей условие текучести. Ввиду этого

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7.44)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ — пластическая часть скорости деформации, λ — параметр ($\lambda > 0$).

Если $F = 0$, то материал находится в состоянии пластического течения. О наличии приращений пластических деформаций судят по условию, является ли данное состояние состоянием нагружения или разгрузки.

Состояние нагружения для идеально пластического материала имеет место, когда

$$(\partial F / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} = 0,$$

а состояние разгрузки — когда

$$(\partial F / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} < 0.$$

Уравнения деформирования упруго-идеально-пластических сред получают путем добавления к (7.44) соотношений для скоростей упругих деформаций ($\dot{\varepsilon}_{ij}^e = s_{ij} / 2\mu$, $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\sigma}_{kk} / 3K$).

Кроме того, учитывается тот факт, что пластические деформации не влияют на изменение объема, т. е. $\dot{\varepsilon}_{kk} = 0$:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2\mu} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk}.$$

Принимая, в частности, условие текучести Губера — Мизеса

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2 = 0,$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге, получаем уравнения

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2\mu} + \lambda s_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk},$$

называемые уравнениями Прандтля — Рейса. При этом параметр λ определяется как $\lambda = \dot{W}^p / (2k^2)$, где $\dot{W}^p$ — мощность пластической деформации в единице объема элемента тела.

Упрочнение материала. Пусть для одноосного напряженного состояния график $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ имеет вид, показанный на рис. 7.24, а. В этом случае учитывается упрочнение материала. Чтобы перенести свойство упрочнения при нагружении на случай

сложного напряженного состояния, вводится представление о существовании последовательности поверхностей нагружения в девятимерном пространстве напряжений (рис. 7.24, б). Последовательность поверхностей нагружения отвечает точкам M'_i на оси $\varepsilon = 0$. Эти поверхности могут быть симметричными и иметь ту же форму, что и начальная поверхность текучести. Тогда в процессе нагружения происходит изотропное расширение поверхности текучести (так называемое изотропное упрочнение). Изменениям напряженного состояния вдоль путей $M'_i M''_i$ отвечают процессы разгрузки, тогда как изменениям вдоль путей $M'_i M''_i$ — нейтральные состояния (когда не происходит никакого изменения пластических деформаций).

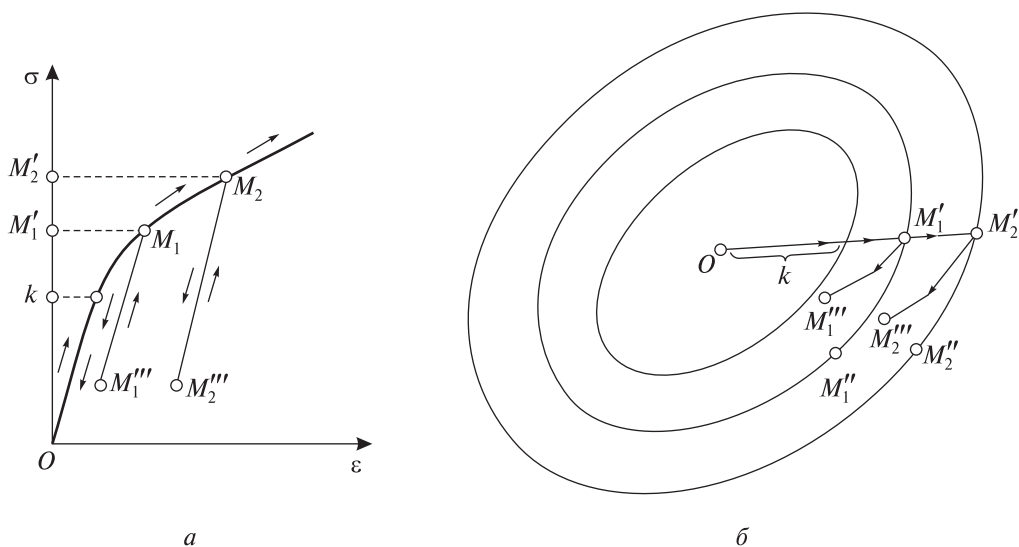


Рис. 7.24. График кривой нагружения (а) и поверхности нагружения (б)

В общем случае условие текучести для материала, обладающего упрочнением, можно записать в виде

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi) = 0,$$

где χ — параметр упрочнения, определяемый через работу пластических деформаций:

$$\chi = W^p = \int_0^t \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p.$$

Определенный таким образом параметр χ не влияет на вид поверхности нагружения в процессе пластического деформирования. Увеличение его значения вызывает постепенное расширение поверхности нагружения. Для материала, который еще не обнаруживает пластических деформаций, очевидно, что $\chi = 0$.

Процессы активного нагружения при переходе от одного пластического состояния к другому сопровождаются увеличением пластической деформации, тогда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) \dot{\sigma}_{ij} > 0, \quad F = 0. \quad (7.45)$$

В процессе разгрузки не происходит роста пластических деформаций, следовательно, $\chi = 0$ и условие разгрузки имеет вид

$$(\partial F / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} < 0, \quad F = 0.$$

Нейтральное состояние характеризуется таким условием:

$$(\partial F / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} = 0, \quad F = 0.$$

Отметим, что все выписанные условия справедливы только в случае устойчивых материалов.

В дальнейшем условие текучести для упрочняющихся материалов примем в виде

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0.$$

Уравнения деформирования имеют следующее представление:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.46)$$

Замечание. Представление (7.46) вытекает из предположения, что направление вектора скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ ортогонально к поверхности нагружения и не зависит от направления вектора скорости изменения напряжения $\dot{\sigma}_{ij}$.

В (7.46) λ — неотрицательная функция, определенная таким образом:

$$\lambda = \left(-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \right) / \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right). \quad (7.47)$$

Отсюда ввиду (7.45) следует, поскольку в процессе нагружки числитель выражения (7.47) положителен, что

$$(\partial F / \partial \varepsilon_{kl}^p) (\partial F / \partial \sigma_{kl}) < 0.$$

В общем случае соотношения, описывающие изотропное упрочнение материала, можно записать в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad \text{или} \quad \dot{\sigma}_{ij} = B_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl},$$

где

$$A_{ijkl} = \begin{cases} H_{ijkl} + h F_{ij} F_{kl}, & \text{если } F = 0 \text{ и } F_{kl} \dot{\sigma}_{kl} > 0, \\ H_{ijkl}, & \text{если } F < 0 \text{ или } F = 0, \text{ но } F_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \leq 0, \end{cases}$$

$$B_{ijkl} = \begin{cases} H_{ijkl}^{-1} - \frac{4\mu^2 F_{ij} F_{kl}}{1/h + 2\mu F_{mn} F_{mn}}, & \text{если } F = 0 \text{ и } F_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} > 0, \\ H_{ijkl}^{-1}, & \text{если } F < 0 \text{ или } F = 0, \text{ но } F_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} \leq 0. \end{cases} \quad (7.48)$$

Здесь введено обозначение $F_{ij} = \partial F / \partial \sigma_{ij}$. Тензор H_{ijkl} имеет вид

$$H_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

Функция h в соотношениях (7.48) есть скалярная функция, которая может зависеть как от действующего напряженного состояния, так и от истории нагружения

$$h = -1 / \left[\left(\partial F / \partial \varepsilon_{ij}^p \right) F_{ij} \right].$$

Развитие теории пластичности упрочняющих сред представляет большой практический интерес, поскольку, например, многие современные конструкционные металлы заметно упрочняются. Как уже отмечалось, изложенные выше теории упрочняющегося тела не дают полного описания поведения металлов в условиях сложного нагружения.

В то же время эти уравнения являются весьма сложными. Использование их для решения конкретных задач вызывает большие математические трудности. Поэтому в приложениях обычно исходят либо из уравнений Прандтля – Рейса при условии изотропного упрочнения, либо из уравнений деформационной теории при законе единой кривой (когда интенсивность касательных напряжений является функцией интенсивности деформаций сдвига).

Закон изотропного упрочнения пригоден при сравнительно несложных путях нагружения. Еще в более узких пределах приемлема схема единой кривой. Поэтому фактически решение краевых задач на основе обеих теорий ограничено рамками достаточно простого нагружения. Более точно сформулировать эти условия не представляется возможным. Сопоставление имеющихся решений, найденных по обеим теориям, обычно свидетельствует о небольших расхождениях.

Весьма важен вопрос о пластических деформациях при циклических нагружениях. Экспериментальные данные по этому вопросу приведены, например, в книге В. В. Москвитина¹ [73]. Там же развита схема использования уравнений деформационной теории для описания таких процессов.

В сложившихся условиях естественными являются попытки выйти из круга выведенных формальных представлений о поверхности нагружения и ассоциированном законе течения и рассмотреть иные аспекты построения теории упрочняющейся среды.

7.14. ОБОБЩЕНИЯ И ВЫВОДЫ.

ПОСТАНОВКА И ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

7.14.1. Постановка задач теории пластичности

Обобщим и систематизируем данные, изложенные в предыдущих разделах, касающиеся постановки задач теории пластичности.

Напомним, что к задачам упругопластичности обычно относят случаи, когда упругие и пластические деформации, возникающие в теле при нагружении, имеют почти одинаковый порядок. Постановка таких задач должна учитывать соотношения в упругой и пластической зонах и на границе между ними.

¹ Москвитин Виктор Васильевич (1923–1983), советский ученый в области механики, доктор физико-математических наук, профессор.

Рассмотрим сплошное деформируемое тело, на которое действуют поверхностные (X_v, Y_v, Z_v) (включая реакции) и объемные (X, Y, Z) силы. Упругопластические свойства материала заданы диаграммой деформирования ($\sigma_i - \varepsilon_i$). При этом следует определить 17 неизвестных функций координат (x, y, z): *шесть компонент* тензора напряжений (σ_{ij}); *шесть компонент* тензора деформаций (ε_{ij}); *три составляющих* вектора перемещений (u, v, w); интенсивность напряжений (σ_i) (*одна*), интенсивность деформаций (ε_i) (*одна*). Для нахождения указанных функций в рамках теории пластичности имеется следующая система уравнений.

1. Уравнения, вытекающие из рассмотрения статического состояния равновесия тела:

а) дифференциальные уравнения равновесия:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0; \quad (7.49)$$

б) граничные условия, которые необходимо рассматривать совместно с уравнениями равновесия:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = X_{vi}. \quad (7.50)$$

2. Уравнения, вытекающие из рассмотрения геометрии задачи:

а) зависимости между компонентами деформаций и компонентами вектора перемещений (уравнения Коши)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}; \quad (7.51)$$

б) уравнения совместности Сен-Венана (как следствие из уравнений (7.51))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \right) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}. \quad (7.52)$$

Следует подчеркнуть, что, как видно из приведенных уравнений, статические уравнения (7.49) и (7.50) и геометрические соотношения (7.51) и (7.52) в теории пластичности имеют тот же вид, что и в теории упругости. Иными являются только физические уравнения, т. е. уравнения связи между напряжениями и деформациями.

Поэтому при решении упругопластических задач необходимо вместо обобщенного закона Гука записать физические уравнения по одной из теорий пластичности.

3. Уравнения, вытекающие из рассмотрения механического поведения среды – физические уравнения, определяющие связь между компонентами НДС:

а) по теории малых упругопластических деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2 \frac{\sigma_i}{3 \varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_0) \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_0) \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_0) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3 \varepsilon_i} \gamma_{xy}, \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3 \varepsilon_i} \gamma_{yz}, \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3 \varepsilon_i} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_0 &= \frac{3 \varepsilon_i}{2 \sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0) \\ \varepsilon_y - \varepsilon_0 &= \frac{3 \varepsilon_i}{2 \sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0) \\ \varepsilon_z - \varepsilon_0 &= \frac{3 \varepsilon_i}{2 \sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0) \\ \gamma_{xy} &= \frac{3 \varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{3 \varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{3 \varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{zx} \end{aligned} \right\}. \quad (7.54)$$

При этом $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, где σ_i, ε_i – интенсивности напряжений и деформаций;

б) физические уравнения по теории пластического течения

$$\left\{ \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [d\sigma_x - \mu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0) \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [d\sigma_y - \mu(d\sigma_x + d\sigma_z)] + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0) \\ d\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu(d\sigma_x + d\sigma_y)] + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0) \\ d\gamma_{xy} &= \frac{d\tau_{xy}}{G} + 3 \frac{d\bar{\varepsilon}_{ip}}{\sigma_i} \tau_{xy} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right. \quad (7.55)$$

При этом $\sigma_i = \Phi\left(\int d\bar{\varepsilon}_{ip}\right)$, где

$$d\bar{\varepsilon}_{ip} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ (d\varepsilon_{xp} - d\varepsilon_{yp})^2 + (d\varepsilon_{yp} - d\varepsilon_{zp})^2 + (d\varepsilon_{zp} - d\varepsilon_{xp})^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \left\{ \left[d(\gamma_{xy})_p \right]^2 + \left[d(\gamma_{yz})_p \right]^2 + \left[d(\gamma_{zx})_p \right]^2 \right\} \right\}^{1/2}.$$

Использование физических уравнений по теории пластического течения в форме (7.55) при решении конкретных упругопластических задач связано с большими математическими трудностями, так как они нелинейны и имеют довольно сложную структуру. Поэтому при решении задач, в которых учитываются значительные по сравнению с упругими пластические деформации, компонентами упругой деформации пренебрегают и пользуются *уравнениями Сен-Венана — Мизеса*, которые для жесткопластического тела имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{3}{2} \frac{\xi_i}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0) \\ \xi_y &= \frac{3}{2} \frac{\xi_i}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0) \\ \xi_z &= \frac{3}{2} \frac{\xi_i}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0) \end{aligned} \right\}, \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{xy} &= \frac{3\xi_i}{\sigma_i} \tau_{xy} \\ \eta_{yz} &= \frac{3\xi_i}{\sigma_i} \tau_{yz} \\ \eta_{zx} &= \frac{3\xi_i}{\sigma_i} \tau_{zx}. \end{aligned} \right. \quad (7.56)$$

В этом случае $\sigma_i = \Psi(\xi_i)$, где

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2} (\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)}.$$

При решении упругопластических задач с использованием физических уравнений (7.56) по теории пластического течения необходимо уравнения Коши (7.51) и, следовательно, уравнения неразрывности деформаций записать соответственно в таком виде:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta_{zx}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \eta_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \eta_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \eta_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \eta_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \eta_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \eta_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y}.$$

Здесь

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \\ \eta_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \eta_{zx} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Таким образом, приведенная система уравнений представляет собой полную систему уравнений для решения упругопластических задач при активной деформации и простом нагружении или нагружении, близком к простому.

7.14.2. Общие методы решения задач теории пластичности

Как и в теории упругости, задачи теории пластичности могут решаться в перемещениях или напряжениях, а также смешанным способом.

Для большинства практических задач решения в замкнутом виде получить трудно, а иногда и просто невозможно из-за нелинейности приведенных дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому для решения нелинейных уравнений теории пластичности в большинстве случаев применяют различные варианты метода последовательных приближений.

Решение задач теории пластичности обычно сводится к решению последовательности линейных задач, каждая из которых может быть интерпретирована как некоторая задача теории упругости (метод упругих решений). Такая идея впервые применена А. А. Ильюшиным, а затем развита И. А. Биргером¹ и др.

Краткие сведения о наиболее общих методах решения задач теории пластичности.

Метод дополнительных нагрузок. Данный метод является одним из вариантов реализации методов упругих решений. Как упоминалось ранее, предложен А. А. Ильюшиным, а затем в несколько иной модификации рассмотрен И. А. Биргером [74].

Если в уравнениях Генки – Надаи

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x - \varepsilon_0 = \Psi(\sigma_x - \sigma_0), \quad \varepsilon_y - \varepsilon_0 = \Psi(\sigma_y - \sigma_0), \quad \varepsilon_z - \varepsilon_0 = \Psi(\sigma_z - \sigma_0) \\ \gamma_{xy} = 2\Psi\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2\Psi\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = 2\Psi\tau_{zx} \end{array} \right\}, \quad (7.57)$$

где в упругой области $\Psi = 1/2G$; в упругопластической $\Psi = 1/2G + \varphi$, принять, что $1/\Psi = 2G - (2G - 1/\Psi)$, а также учесть, что $\varepsilon_0 = \theta/3$, $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$, $K = E/(3(1-2\mu))$, $\lambda = \mu E/((1-2\mu)(1-\mu))$, то уравнения (7.57) приводятся к виду

¹ Биргер Исаак Аронович (1918–1993), советский ученый-механик в сфере прочности и динамики двигателей летательных аппаратов авиационного и космического назначения, доктор технических наук, профессор.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta - \left(2G - \frac{1}{\Psi}\right)(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta - \left(2G - \frac{1}{\Psi}\right)(\varepsilon_y - \varepsilon_0) \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta - \left(2G - \frac{1}{\Psi}\right)(\varepsilon_z - \varepsilon_0) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} - \left(G - \frac{1}{2\Psi}\right)\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} - \left(G - \frac{1}{2\Psi}\right)\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} - \left(G - \frac{1}{2\Psi}\right)\gamma_{zx} \end{aligned} \right\}. \quad (7.58)$$

Уравнения (7.58) отличаются от обобщенного закона Гука дополнительными членами. При $\Psi = 1/2G$ эти уравнения выражают обобщенный закон Гука и определяют напряжения в упругом теле:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^* &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta \\ \sigma_y^* &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta \\ \sigma_z^* &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \tau_{xy}^* &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz}^* &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx}^* &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\}. \quad (7.59)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^* - \sigma_x^{(0)} \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^* - \tau_{xy}^{(0)} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}. \quad (7.60)$$

Здесь $\sigma_x^{(0)}, \dots, \tau_{xy}^{(0)}, \dots$ — дополнительные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= \left(2G - \frac{1}{\Psi}\right)(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{xy}^{(0)} &= \left(G - \frac{1}{2\Psi}\right)\gamma_{xy} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}.$$

Между интенсивностями напряжений в упругом теле и дополнительными напряжениями, как следует из рис. 7.25, существует зависимость вида

$$\sigma_i = \sigma_i^* - \sigma_i^{(0)}. \quad (7.61)$$

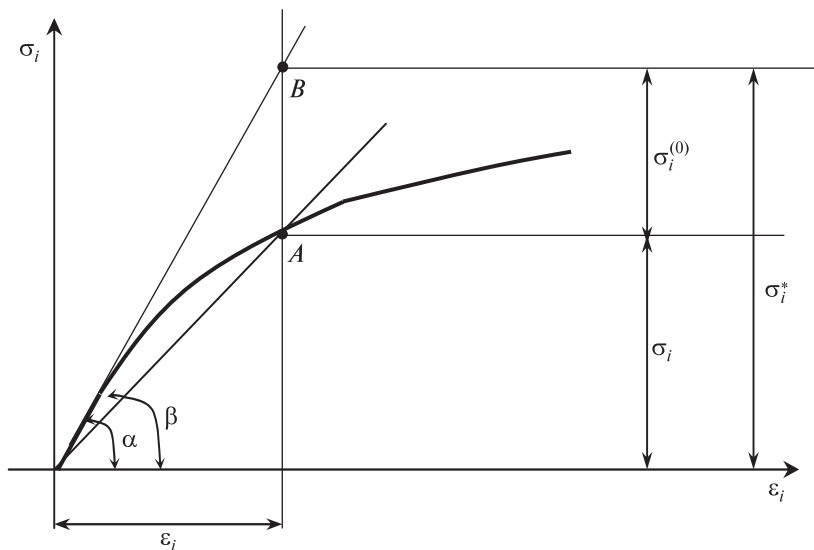


Рис. 7.25. К методу дополнительных нагрузок

Физический смысл равенства (7.61) ясен из обобщенной диаграммы (см. рис. 7.25). Согласно рис. 7.25

$$\sigma_i^{(0)} = \sigma_i^* - \sigma_i = \varepsilon_i (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = 3\varepsilon_i \left(G - \frac{1}{2\Psi} \right).$$

Предполагая, что материал упругий, с помощью обобщенной диаграммы деформирования при данной интенсивности деформаций ε_i находим точку B .

Поправка $\sigma_i^{(0)}$ как бы возвращает расчетную точку на кривую деформирования (точка A). Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ должны удовлетворять уравнениям (7.49), которые с учетом (7.60) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z} + X + X^0 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} + Y + Y^0 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + Z + Z^0 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7.62)$$

где X, Y, Z — компоненты объемной силы, а X^0, Y^0, Z^0 — компоненты дополнительной объемной силы:

$$\left\{ \begin{aligned}
X^0 &= - \left(\frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(0)}}{\partial z} \right) = \\
&= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_x - \varepsilon_0) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \gamma_{xy} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \gamma_{zx} \right] \right\}, \\
Y^0 &= - \left(\frac{\partial \tau_{yx}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(0)}}{\partial z} \right) = \\
&= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \gamma_{yx} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_y - \varepsilon_0) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \gamma_{yz} \right] \right\}, \\
Z^0 &= - \left(\frac{\partial \tau_{zx}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(0)}}{\partial z} \right) = \\
&= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \gamma_{zx} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \gamma_{zy} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_z - \varepsilon_0) \right] \right\}.
\end{aligned} \right. \quad (7.63)$$

На поверхности тела напряжения должны удовлетворять граничным условиям (7.50), которые с учетом (7.60) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x^* l + \tau_{xy}^* m + \sigma_{xz}^* n &= X_v + X_v^{(0)} \\
\tau_{yx}^* l + \sigma_y^* m + \tau_{yz}^* n &= Y_v + Y_v^{(0)} \\
\tau_{zx}^* l + \tau_{zy}^* m + \sigma_z^* n &= Z_v + Z_v^{(0)}
\end{aligned} \right\}, \quad (7.64)$$

где X_v, Y_v, Z_v – составляющие поверхностной нагрузки, а $X_v^{(0)}, Y_v^{(0)}, Z_v^{(0)}$ – составляющие дополнительной поверхностной нагрузки:

$$\left\{ \begin{aligned}
X_v^{(0)} &= \sigma_x^{(0)} l + \tau_{xy}^{(0)} m + \tau_{xz}^{(0)} n = \\
&= \left[\left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_x - \varepsilon_0) \right] l + \left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) (\gamma_{xy} m + \gamma_{xz} n), \\
Y_v^{(0)} &= \tau_{yx}^{(0)} l + \sigma_y^{(0)} m + \tau_{yz}^{(0)} n = \\
&= \left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) (\gamma_{yx} l + \gamma_{yz} n) + \left[\left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_y - \varepsilon_0) \right] m, \\
Z_v^{(0)} &= \tau_{zx}^{(0)} l + \tau_{zy}^{(0)} m + \sigma_z^{(0)} n = \\
&= \left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) (\gamma_{zx} l + \gamma_{zy} m) + \left[\left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_z - \varepsilon_0) \right] n.
\end{aligned} \right. \quad (7.65)$$

Используя уравнения (7.59), (7.60), а также уравнения Коши (7.51), после некоторых преобразований представим дифференциальные уравнения равновесия (7.62) с учетом (7.63) в такой форме:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \Delta u + X = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
& (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \Delta v + Y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\
& (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \Delta w + Z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) \left[\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right].
\end{aligned} \right. \quad (7.66)
\end{aligned}$$

Система уравнений (7.66) представляет собой синтез статистического, геометрического и физического анализа задачи. Уравнения (7.66) отличаются от уравнений Ламе в теории упругости наличием дополнительных членов, расположенных в правой части.

Аналогично можно преобразовать и граничные условия (7.64), которые с учетом (7.65) имеют вид

$$\begin{aligned}
& \lambda \theta l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) = \\
& = X_v + \left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n \right] + \left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] l, \\
& \lambda \theta m + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) = \\
& = Y_v + \left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n \right] + \left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] m, \\
& \lambda \theta n + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) = Z_v + \left(G - \frac{1}{2\Psi} \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) l + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) m \right] + \left(2G - \frac{1}{\Psi} \right) \left[\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] n. \quad (7.67)
\end{aligned}$$

Уравнения (7.66) совместно с уравнениями (7.67) позволяют решать задачу теории пластичности в перемещениях.

Если принять, что слагаемые, возникшие из-за наличия дополнительных членов (7.58) и перенесенные в правую часть (7.66) и (7.67), известны, то получим как бы систему уравнений теории упругости относительно перемещений, но с допол-

нительными объемными ($X^{(0)}, Y^{(0)}, Z^{(0)}$) и поверхностными ($X_v^{(0)}, Y_v^{(0)}, Z_v^{(0)}$) силами. В первом приближении полагаем, что все дополнительные объемные и поверхностные нагрузки равны нулю (т. е. $\Psi = 1/2G$). Тогда приходим к обычной задаче теории упругости в перемещениях. Уравнения (7.66) обращаются в уравнения Ламе теории упругости, а уравнения (7.67) — в граничные условия теории упругости в перемещениях.

Пусть указанная задача теории упругости для заданных сил $X, Y, Z; X_v, Y_v, Z_v$ решена и найдены перемещения (u_0, v_0, w_0), а следовательно, и деформации ($\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \varepsilon_{z0}, \gamma_{xy0}, \gamma_{yz0}, \gamma_{zx0}$), и интенсивность деформаций (ε_{i0}). По заданной диаграмме деформирования (см. рис. 7.25) с учетом упрочнения определяем $\sigma_{i0} = \Phi(\varepsilon_{i0})$, а затем

$\Psi_1 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{i0}}{\Phi(\varepsilon_{i0})}$. Зная перемещения и Ψ_1 , по (7.63) и (7.65) находим дополнительные

нагрузки $X^{(0)}, Y^{(0)}, Z^{(0)}; X_v^{(0)}, Y_v^{(0)}, Z_v^{(0)}$, которые уже в данном случае отличны от нуля. Снова решаем задачу теории упругости с дополнительными нагрузками и определяем u_1, v_1, w_1 , а следовательно, $\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}, \varepsilon_{z1}, \gamma_{xy1}, \gamma_{yz1}, \gamma_{zx1}$ и ε_{i1} . По диаграмме деформирования при данном значении ε_{i1} с учетом упрочнения находим $\sigma_{i1} = \Phi(\varepsilon_{i1})$. Затем

снова определяем $\Psi_2 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{i1}}{\Phi(\varepsilon_{i1})}$ и т. д. Решение необходимо продолжать до тех пор,

пока данное приближение будет отличаться от предыдущего на бесконечно малую, наперед заданную величину.

Рассмотрим реализацию метода упругих решений в виде метода дополнительных нагрузок в несколько иной форме записи.

Если использовать зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций в форме, предложенной А. А. Ильиным (т. е. $\sigma_i = 3G\varepsilon_i[1 - \omega_i(\varepsilon_i)]$), то уравнения (7.58) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \frac{\partial u}{\partial x} + 2G\omega_i \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= 2G \frac{\partial v}{\partial y} + 2G\omega_i \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ &\dots\dots\dots, \\ \tau_{xy} &= G(1 - \omega_i) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (7.68)$$

Тогда уравнения равновесия ((7.49) с учетом (7.68) при условии, что все члены, содержащие функцию ω_i , перенесены в правую часть, записываются таким образом:

$$\left. \begin{aligned} (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G\Delta u + X &= X^{(0)} \\ (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G\Delta v + Y &= Y^{(0)} \\ (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G\Delta w + Z &= Z^{(0)} \end{aligned} \right\}. \quad (7.69)$$

Здесь

$$\left\{ \begin{aligned} X^{(0)} &= G \left[\omega_i \Delta u + \frac{1}{3} \omega_i \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]; \\ Y^{(0)} &= G \left[\omega_i \Delta v + \frac{1}{3} \omega_i \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]; \\ Z^{(0)} &= G \left[\omega_i \Delta w + \frac{1}{3} \omega_i \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right. \quad (7.70)$$

К уравнениям (7.69) необходимо добавить граничные условия, которые в данном случае в перемещениях имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \theta \right) l + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n &= X_v + X_v^{(0)}, \\ \left(2G \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \theta \right) m + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n &= Y_v + Y_v^{(0)}, \\ \left(2G \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \theta \right) n + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) l + G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m &= Z_v + Z_v^{(0)}, \end{aligned} \right. \quad (7.71)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} X_v^{(0)} &= G \omega_i \left[\left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \theta \right) l + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n \right], \\ Y_v^{(0)} &= G \omega_i \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \theta \right) m + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n \right], \\ Z_v^{(0)} &= G \omega_i \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m + \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \theta \right) n \right]. \end{aligned} \right. \quad (7.72)$$

Таким образом, если использовать зависимость Илюшина $\sigma_i = 3G\epsilon_i(1 - \omega_i)$, то решение задачи теории пластичности при активной деформации и простом нагружении сводится к решению уравнений (7.69) при граничных условиях (7.71).

Данный метод упругих решений А. А. Илюшина тоже основан на принципе последовательных приближений. В первом приближении полагают, что $\omega_{j0} = 0$. Тогда согласно (7.70) и (7.72) все дополнительные объемные и поверхностные силы равны нулю ($X_v^{(0)} = Y_v^{(0)} = Z_v^{(0)} = X^{(0)} = Y^{(0)} = Z^{(0)}$). Уравнения (7.69) обращаются в уравнения Ламе теории упругости. Поэтому решение в первом приближении сводится

к решению задачи теории упругости. Предположим, что решение данной задачи при заданных внешних силах известно — u , v , w . С помощью (7.68) находим напряжения как функции координат σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , а следовательно, и интенсивность напряжений σ_i . По диаграмме деформирования определяем ε_i , а из аналитической зависимости А. А. Ильюшина находим ω_i как функцию координат. Зная функцию ω_i и перемещения, по формулам (7.70) и (7.72) находим дополнительные нагрузки $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$, $Z^{(0)}$; $X_v^{(0)}$, $Y_v^{(0)}$, $Z_v^{(0)}$ как функции координат. Далее решаем задачу теории упругости для объемных $(X - X^{(0)}, Y - Y^{(0)}, Z - Z^{(0)})$ и поверхностных $(X_v + X_v^{(0)}, Y_v + Y_v^{(0)}, Z_v + Z_v^{(0)})$ сил.

Решением задачи теории упругости в этом случае являются перемещения u_2, v_2, w_2 во втором приближении и т. д. Вычисления можно закончить тогда, когда разница между результатами двух последовательных приближений будет достаточно малой, т. е. окажется в пределах необходимой точности.

Метод дополнительных деформаций. Одной из разновидностей метода упругих решений является метод дополнительных деформаций. Если в уравнениях Генки — Надаи (7.57) положить $\Psi = (1/2G) + (\Psi - (1/2G))$, а также учесть, что $\varepsilon_0 = [(1 - 2\mu)/(3E)](\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, то после небольших преобразований уравнения (7.57) можно записать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_x - \sigma_0), \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] + \left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_y - \sigma_0), \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_z - \sigma_0), \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} + \left(2\Psi - \frac{1}{G} \tau_{xy} \right), \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} + \left(2\Psi - \frac{1}{G} \tau_{yz} \right), \\ \tau_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} + \left(2\Psi - \frac{1}{G} \tau_{zx} \right). \end{array} \right. \quad (7.73)$$

Данные уравнения отличаются от обобщенного закона Гука дополнительными членами. При $\Psi = (1/2G)$ эти уравнения выражают обобщенный закон Гука и определяют деформации в упругом теле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^* = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y^* = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \varepsilon_z^* = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{xy}^* = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz}^* = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx}^* = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{array} \right.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon_x^* + \varepsilon_x^{(0)}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^* + \varepsilon_y^{(0)}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^* + \varepsilon_z^{(0)}, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^* + \gamma_{xy}^{(0)}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^* + \gamma_{yz}^{(0)}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{zx}^* + \gamma_{zx}^{(0)}. \end{array} \right.$$

Здесь $\varepsilon_x^{(0)}$, $\varepsilon_y^{(0)}$, $\varepsilon_z^{(0)}$, $\gamma_{xy}^{(0)}$, $\gamma_{yz}^{(0)}$, $\gamma_{zx}^{(0)}$ – пластические деформации в упругопластическом теле:

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{(0)} = \left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_x - \sigma_0), \\ \varepsilon_y^{(0)} = \left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_y - \sigma_0), \\ \varepsilon_z^{(0)} = \left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_z - \sigma_0), \\ \gamma_{xy}^{(0)} = \left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz}^{(0)} = \left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx}^{(0)} = \left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{zx}. \end{cases}$$

Интенсивность деформации определяется как

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^* + \varepsilon_i^{(0)}, \quad (7.74)$$

где ε_i^* , $\varepsilon_i^{(0)}$ – интенсивность соответственно упругих и пластических деформаций.

Физический смысл равенства (7.74) ясен из рис. 7.26, где

$$\varepsilon_i^{(0)} = 3\sigma_i \left(\frac{1}{2\Psi} - G \right).$$

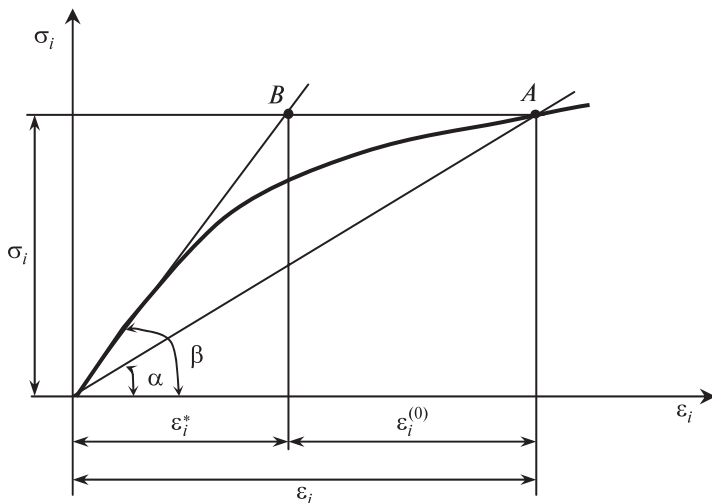


Рис. 7.26. К методу дополнительных деформаций

Рассмотрим задачу теории пластичности в напряжениях. Дифференциальные уравнения равновесия (7.49) и граничные условия (7.50) остаются те же. Уравнения неразрывности деформаций (7.52), вследствие наличия дополнительных чле-

нов в уравнениях (7.73). будут содержать дополнительные слагаемые. Действительно, если (7.73) поставить в уравнения сплошности (7.52) и использовать уравнения равновесия (7.49), то после соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \Delta \sigma_x + \frac{1}{\mu+1} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2G \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2\Psi} \right) \times \right. \right. \\
 & \times \left(\sigma_y - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \left. \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2\Psi} \right) \left(\sigma_z - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{yz} \right] \right\}; \\
 & \Delta \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2G \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2\Psi} \right) \times \right. \right. \\
 & \times \left(\sigma_x - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \left. \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) \left(\sigma_z - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{xz} \right] \right\}; \\
 & \Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial z^2} = -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2G \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) \times \right. \right. \\
 & \times \left(\sigma_x - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \left. \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) \left(\sigma_y - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{xy} \right] \right\}; \\
 & \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial y \partial z} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + G \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{yz} \right] + \right. \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{zx} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{xy} \right] - \\
 & - 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) \left(\sigma_x - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \right] \left. \right\}; \\
 & \Delta \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial z \partial x} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \\
 & + G \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{zx} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{yz} \right] + \right. \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{xy} \right] - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) \left(\sigma_y - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \right] \left. \right\}; \\
 & \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \\
 & + G \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{xy} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{yz} \right] + \right. \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\left(2\Psi - \frac{1}{G} \right) \tau_{xz} \right] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\left(\Psi - \frac{1}{2G} \right) \left(\sigma_z - \frac{1}{3} I_1(T_\sigma) \right) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned} \right. \quad (7.75)$$

Данные уравнения аналогичны уравнениям Бельтрами – Мичелла, но с дополнительными членами. Уравнения (7.75) совместно с граничными условиями (7.50) позволяют решать задачу теории пластичности в напряжениях. Если в уравнениях (7.75) положить $\Psi = (1/2G)$, то все дополнительные члены в правой части обратятся в нуль и получим обычные уравнения теории упругости. Уравнения (7.75) в замкнутом виде не интегрируются. Для этого применяют различные приближенные методы решения.

Различие методов решения задач в дополнительных нагрузках и дополнительных деформациях показано на рис. 7.27. Получив в результате решения задачи теории упругости точку B , дальнейшее движение по методу дополнительных нагрузок осуществляется в направлении A_1 , в то время как по методу дополнительных деформаций – в направлении A_2 . Критерием сходимости указанных методов, безусловно, служит близость напряжений в предыдущем и последующем приближениях.

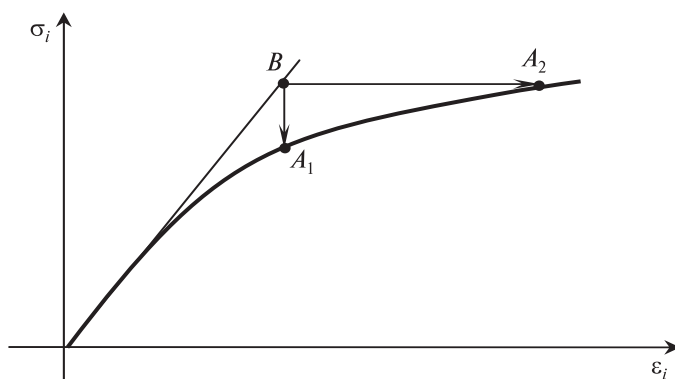


Рис. 7.27. К различию методов решения задач в дополнительных нагрузках и дополнительных деформациях

Метод переменных параметров упругости. Физические уравнения (7.53) и (7.54) теории малых упругопластических деформаций после некоторого преобразования могут быть записаны в форме закона Гука:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E^*} [\sigma_x - \mu^* (\sigma_y + \sigma_z)], \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G^*} \tau_{xy}, \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (7.76)$$

где

$$E^* = \frac{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}; \mu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}; G^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \quad (7.77)$$

Кроме того,

$$\sigma_0 = \frac{E^*}{1 - 2\mu^*} \varepsilon_0. \quad (7.78)$$

Поскольку $3\varepsilon_i/2\sigma_i = \Psi$, то формулы (7.77) можно переписать в виде

$$G^* = \frac{1}{2\Psi}; \quad E^* = \frac{3E}{2E\Psi - 1 - 2\mu}; \quad \mu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{1}{2\Psi}}{1 + \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{1}{2\Psi}}. \quad (7.79)$$

Следовательно, если физические уравнения малых упругопластических деформаций (7.53) и (7.54) заменить соответственно уравнениями (7.76) и (7.78), то решение задачи теории пластичности сводится к решению задачи теории упругости с переменными параметрами теории упругости, определяемыми по формулам (7.77) и (7.79). Согласно (7.77) зависимость между переменными параметрами упругости имеет тот же вид, что и для упругих постоянных E, G, μ , а именно: $G^* = E^*/(2(1 + \mu^*))$.

Замечание. Данный метод впервые был предложен И. А. Биргером.

Задача теории пластичности по методу переменных параметров решается следующим образом: в первом приближении полагают, что $\Psi = 1/(2G)$, тогда переменные параметры упругости равны упругим постоянным: $E^* = E, G^* = G, \mu^* = \mu$. Физические уравнения в этом случае обращаются в обобщенный закон Гука и решение задачи сводится к решению обычной задачи теории упругости, в результате чего определяются напряжения $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \sigma_{z1}, \tau_{xy1}, \tau_{yz1}, \tau_{zx1}$ и деформации $\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}, \varepsilon_{z1}, \gamma_{xy1}, \gamma_{yz1}, \gamma_{zx1}$ в первом приближении. По заданным величинам в каждой точке определяют интенсивности напряжений σ_{i1} и деформаций ε_{i1} .

На плоскости в координатах $\sigma_i - \varepsilon_i$ (рис. 7.28) напряженное и деформированное состояния некоторой точки тела на этапе первого приближения изображаются точкой 1, лежащей на луче OA . При этом $\operatorname{tg} \alpha \cong E \cong 3G$, где α — тангенс угла наклона OA .

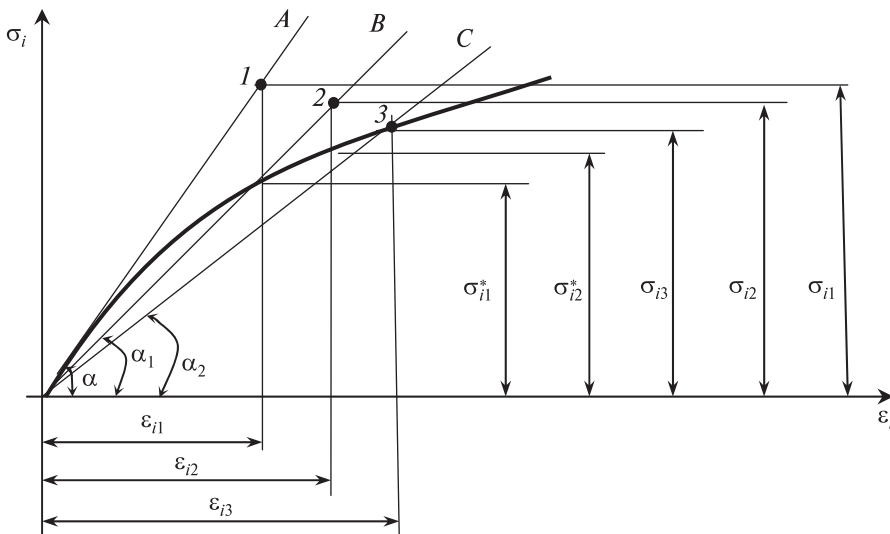


Рис. 7.28. К методу переменных параметров упругости

Во втором приближении для величины $3G$ необходимо внести поправку. В этом случае $\operatorname{tg} \alpha_1 = 3G_1^* = \sigma_{i1}^* / \varepsilon_{i1}$, где σ_{i1}^* — интенсивность напряжений, которая соответствует интенсивности деформаций ε_{i1} , взятой из диаграммы деформирования. По величинам σ_{i1}^* и ε_{i1} находят параметры E_1^* , μ_1^* , G_1^* , которые в разных точках тела различаются. Зная эти параметры, решают задачу теории упругости и определяют напряжения σ_{x2} , σ_{y2} , σ_{z2} , τ_{xy2} , τ_{yz2} , τ_{zx2} и деформации ε_{x2} , ε_{y2} , ε_{z2} , γ_{xy2} , γ_{yz2} , γ_{zx2} во втором приближении. По заданным величинам определяют в каждой точке тела интенсивность напряжений σ_{i2} и интенсивность деформаций ε_{i2} .

На плоскости σ_i — ε_i напряженное и деформированное состояния на этапе второго приближения изображается точкой 2, лежащей на луче OB с тангенсом угла наклона $3G_1^*$.

В третьем приближении $\operatorname{tg} \alpha_2 = 3G_2^* = \sigma_{i2}^* / \varepsilon_{i2}$, где σ_{i2}^* — интенсивность напряжений, которая соответствует интенсивности деформаций ε_{i2} , взятой из диаграммы деформирования. По величинам σ_{i2}^* и ε_{i2} находят параметры E_2^* , μ_2^* , G_2^* . Затем решается задача упругости с заданными параметрами упругости и определяются напряжения и деформации в третьем приближении. По заданным величинам определяются интенсивности напряжений σ_{i3} и деформаций ε_{i3} . На плоскости σ_i — ε_i напряженное и деформированное состояния изображаются точкой 3, лежащей на луче OC с тангенсом угла наклона $3G_2^*$ и т. д.

Расчеты необходимо продолжать до тех пор, пока полученные результаты расчетов n -го приближения будут отличаться от результатов расчетов $(n - 1)$ -го приближения на заданную величину с требуемой точностью. Расчеты показывают, что процесс всегда является сходящимся.

Метод «шагов» в теории пластического течения. Решение задачи теории пластического течения представляет значительные трудности, обусловленные тем, что физические уравнения теории пластического течения (7.55) содержат не только компоненты напряжений, но и их приращения. Не представляется возможным данные уравнения решить относительно напряжений, следовательно, нельзя составить систему уравнений в перемещениях.

Во многих частных задачах обычно применяют численное интегрирование, прослеживая «шаг за шагом» развитие пластической деформации. На каждом этапе внешняя нагрузка получает приращения, по которым затем вычисляют соответствующие приращения напряжений и деформаций [72]. Кроме того, на каждом этапе, как указано в работах И. А. Биргера [74], необходимо решать некоторую задачу для упруго-анизотропного тела с переменными параметрами упругости.

Задача интегрирования уравнений теории пластического течения несколько упрощается, если можно пренебречь приращениями компонентов упругой деформации по сравнению с приращениями компонентов пластической деформации.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. После достижения предела текучести в направлении приложенного усилия деформации текучести:

- 1) остаются постоянными;
- 2) могут достигнуть любой величины;
- 3) исчезают.

2. Условный предел текучести:
 - 1) напряжение при $\epsilon = 0,2 \%$;
 - 2) напряжение при $\epsilon = \epsilon_u$;
 - 3) предел текучести при повторном нагружении.
3. Деформационная теория пластичности связывает:
 - 1) напряжения и деформации;
 - 2) напряжения и скорости деформации;
 - 3) скорость нагружения и деформаций.
4. Теория пластического течения связывает:
 - 1) напряжения и деформации;
 - 2) напряжения и скорости деформации;
 - 3) скорость нагружения и деформаций.
5. При повторном нагружении образца предел текучести:
 - 1) повышается;
 - 2) понижается;
 - 3) не изменяется.
6. При знакопеременном нагружении образца предел текучести:
 - 1) повышается;
 - 2) понижается;
 - 3) не изменяется.
7. Теория идеальной пластичности предполагает постоянство:
 - 1) напряжений и деформаций;
 - 2) деформаций;
 - 3) напряжений.
8. Условие пластичности Треска – Сен-Венана:
 - 1) $\sigma_u = \sigma_y$;
 - 2) $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$;
 - 3) $f_1(J_{2d}, J_{3d}) = 0$.
9. Условие пластичности Хубера – Мизеса – Хенки:
 - 1) $\sigma_u = \sigma_y$;
 - 2) $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$;
 - 3) $f_1(J_{2d}, J_{3d}) = 0$.
10. Поверхность текучести Мизеса в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:
 - 1) цилиндр;
 - 2) призма;
 - 3) сфера.
11. Поверхность текучести Сен-Венана в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:
 - 1) цилиндр;
 - 2) призма;
 - 3) сфера.
12. При простом нагружении компоненты тензора напряжений:
 - 1) пропорциональны общему параметру;
 - 2) экстремальны;
 - 3) не превышают предел текучести.

13. Траектория простого нагружения в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:
 - 1) окружность;
 - 2) парабола;
 - 3) прямая.
14. При простом нагружении зависимость интенсивностей напряжений и деформаций:
 - 1) линейная;
 - 2) степенная;
 - 3) показательная.
15. В деформационной теории пластичности объемная деформация:
 - 1) упругая;
 - 2) пластическая;
 - 3) упругопластическая.
16. В теории пластического течения объемная деформация:
 - 1) упругая;
 - 2) пластическая;
 - 3) упругопластическая.
17. В деформационной теории пластичности девиаторы напряжений и деформаций:
 - 1) пропорциональны;
 - 2) линейно зависимы;
 - 3) не связаны.
18. В теории пластического течения девиатор напряжений связан:
 - 1) с девиатором деформаций;
 - 2) с девиатором пластических деформаций;
 - 3) со скоростью деформирования.
19. В деформационной теории пластичности материал:
 - 1) не упрочняющийся;
 - 2) упрочняющийся;
 - 3) идеально пластический.
20. Гипотеза упрочнения деформационной теории пластичности:
 - 1) $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$;
 - 2) $\sigma_u = \Phi\left(\int \varepsilon_u^p\right)$;
 - 3) $s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\xi_u} \xi_{ij}$.
21. Гипотеза упрочнения теории пластического течения:
 - 1) $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$;
 - 2) $\sigma_u = \Phi\left(\int \varepsilon_u^p\right)$;
 - 3) $s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\xi_u} \xi_{ij}$.
22. В методе упругих решений на первом шаге равна нулю:
 - 1) скорость деформирования;
 - 2) объемная деформация;
 - 3) функция пластичности.

23. С увеличением скорости деформирования предел текучести:

- 1) не изменяется;
- 2) увеличивается;
- 3) уменьшается.

24. Принцип Вольтерра: решение задачи вязкоупругости может быть получено из решения соответствующей задачи:

- 1) упругости;
- 2) пластичности;
- 3) разрушения.

25. Постулат Дракера говорит о критерии:

- 1) упрочнения;
- 2) разупрочнения;
- 3) идеальности материала.

26. Гипотеза градиентальности: вектор приращения деформаций направлен к поверхности текучести:

- 1) по касательной;
- 2) по нормали;
- 3) под углом 45° .

27. Поверхность течения отделяет упругую область:

- 1) от пластической;
- 2) вязкоупругой;
- 3) разрушения.

Глава 8

О ПОСТАНОВКЕ И МОДЕЛИРОВАНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

8.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предмет механики в целом, в том числе и механики деформируемого твердого тела (МДТТ), можно определить по-разному. Все зависит от точки зрения исследователя. Но в любом определении утверждается, что МДТТ и в целом механика сплошной среды (МСС) представляет собой науку феноменологическую [75]. Это означает, что в ее основу положен аксиоматический подход, хотя и не в таком законченном виде, как в математике.

Совершенствование и развитие методов исследования механических процессов и явлений характеризуется стремлением найти решение в самом общем виде. А это естественным образом требует значительного усложнения используемого математического аппарата, что, в свою очередь, приводит к дополнительным требованиям к характеру поведения искомых функций (в результате последние могут вступить в противоречие с основами первоначальной базовой теории, принятой за отправную точку в решении).

Сегодня успехи в решении проблемы качественного соответствия реальных механических процессов и их математического описания впечатляют. Математическое и компьютерное моделирование стало неотъемлемым элементом решения задач механики.

Несмотря на то что общий план решения краевых задач МДТТ достаточно ясен, реализация его связана с большими трудностями. В общем виде решить уравнения, описывающие состояние и поведение деформируемых твердых тел при различных нагрузках, пока не представляется возможным. Лишь для простейших случаев удастся получить аналитические решения. Однако даже они представляют собой большую ценность, так как являются своеобразным эталоном, с которым можно сравнивать приближенные решения, полученные в результате введения определенных упрощающих гипотез.

Очевидно, что задачи механики в большинстве своем не могут быть сформулированы точно. *Механика, по сути, занимается моделированием.* Так, в частности, МДТТ имеет дело с моделированием процессов деформирования твердых тел. Подобно тому, как в геометрии вводятся понятия шара, конуса, куба, независимо от того, существуют ли реально такие объекты в природе, в МДТТ оперируют такими моделями, как упругое тело, пластическое тело и т. д., хотя реальные среды описываются названными моделями лишь при определенных допущениях.

Сплошная среда вводится для описания дискретных физических объектов для того, чтобы можно было воспользоваться известным эффективным аппаратом математического анализа. Сама по себе сплошная среда никакими априорными свойствами не обладает. Подобно тому, как любое множество только после введения некоторой структуры становится пространством, сплошная среда, чтобы стать объектом построения моделей, нуждается во введении аксиом и постулатов.

Как отмечается в упомянутом издании Б. Е. Победри [75], принцип континуализации, используемый для введения сплошной среды, «не решает всех проблем». После постановки задачи МСС ее решение выполняется с привлечением вычислительной математики. Для этого задачу необходимо «преобразовать» в алгебраическую, провести дискретизацию. Далее для анализа полученного решения и сравнения его с экспериментальными результатами требуется вновь континуализировать задачу.

Таким образом, процессы дискретизации и континуализации задач МСС (МДТТ) повторяются несколько раз на различных уровнях.

Вместе с тем достичь высокой количественной точности при рассмотрении математических моделей реальных сложных механических процессов крайне сложно. Одна из причин такого положения заключается, например, в несоответствии механических и прочностных характеристик, используемых для расчетов, и реальных характеристик рассматриваемых объектов. Следующей причиной служит то обстоятельство, что невозможно построить механико-математическую модель, которая бы в точности отражала все особенности реального процесса, и т. д.

Основная задача моделирования заключается в том, чтобы по результатам выполнения модельных исследований можно было дать необходимые ответы о качественных и количественных особенностях и эффектах изучаемого явления в реальных условиях.

Моделирование в общем случае можно разделить на три вида: физическое, математическое и функциональное.

Рассматриваемый курс относится к математическому моделированию физических процессов, а именно механических процессов, имеющих место в твердых деформируемых средах, находящихся в условиях разнообразного силового и кинематического нагружения. Математическое моделирование применяют для изучения тех процессов, которые можно описать математически (т. е. для которых можно построить математические модели), причем таким образом, что построенная модельная математическая задача является решаемой.

В настоящее время в связи с активным внедрением средств вычислительной техники во все сферы научно-исследовательской и производственной деятельности человека коренным образом меняются подходы и идеология выполнения научных исследований и инженерной работы специалистов. Компьютер сегодня представ-

ляет не просто инструмент для работы, а выполняет функцию интеллектуального помощника. В настоящее время специалисты в большинстве своем уже не сосредотачивают внимания на разработке способов и подходов к решению той либо иной задачи, а занимаются проблемой адекватности постановки модельной задачи и реального процесса. При этом методы решения модельной задачи могут быть весьма «громоздкими и тяжеловесными». Так как задачи решаются с привлечением специализированного программного обеспечения, то данное обстоятельство не является определяющим фактором. Такой подход открывает новые возможности в связи с тем, что каждая индивидуальная задача решается в строгой постановке, а не приближенными методами по инженерным формулам.

Одним из элементов построения базовых положений МДТТ является эксперимент. Понятие «эксперимент» весьма многогранно и требует дополнительных пояснений. О понятии эксперимента в механике более подробно будет говориться в дальнейшем. Априорное присутствие этого понятия в формулировке краевых задач МДТТ заставляет исследователей в области механики именовать базовые основы феноменологического подхода не аксиомами, а постулатами.

Как правило, решение большого количества прикладных механических задач требует выполнения пассивного или активного эксперимента.

Основной недостаток *пассивного эксперимента* (под данным термином понимаем натурные исследования или наблюдения) заключается в невозможности достаточного варьирования входными параметрами, что ограничивает использование полученных результатов рамками конкретных условий, в которых были выполнены исследования. Чтобы избежать этого недостатка, прибегают к процедуре замены реального процесса его моделью, с помощью которой и выполняются последующие исследования с широким варьированием входных параметров (будем называть это активным экспериментом).

Наиболее широко используемыми технологиями проведения *активного эксперимента* являются подходы, основанные на использовании физических и математических моделей. До массового внедрения компьютерных технологий методы математического моделирования не имели значительного распространения при изучении сложных прикладных процессов из-за трудоемкости, а порой и невозможности проведения реальных вычислений в соответствии с построенной математической моделью. Предпочтение отдавалось исследованиям на физических моделях. Последние, в свою очередь, помимо положительных моментов, имеют и большое количество отрицательных факторов, препятствующих распространению физического моделирования в качестве универсальной технологии.

Поэтому необходимо четко представлять области эффективного использования и ограничения того либо иного подхода к проведению моделирования реальных процессов.

В настоящее время наличие мощных персональных вычислительных средств позволяет выполнять вычислительный модельный эксперимент на базе математического моделирования без проведения дорогостоящих и долговременных натурных исследований. Сегодня имеет место процедура активного замещения физического моделирования на математическое на базе компьютерных технологий в соответствии с заранее определенными физическими уравнениями, описывающими поведение среды.

Таким образом, сегодня одной из важных задач является разработка, развитие и адаптация современных продвинутых подходов и методов математического моделирования для выполнения компьютерного моделирования широкого класса прикладных механических процессов. Основной упор должен быть сделан на изучение физических (механических) процессов, моделирование которых весьма трудоемко или практически невозможно произвести с помощью иных подходов.

Реальные механические процессы отличаются большим разнообразием и весьма сложны с точки зрения адекватного качественного и тем более количественного их описания на основе математического моделирования. Качественным критерием приемлемого математического решения задач механики является ясная интерпретация, просто и четко объясняющая получаемые числовые и экспериментальные результаты. Это возможно лишь тогда, когда в качестве исходной используется физически обоснованная гипотеза механического поведения, учитывающая сложные граничные условия, гетерогенность строения и состава и т. д.

В естественных и прикладных науках различают два подхода к построению теорий — *феноменологический* и *структурный*. Феноменологические модели строятся на основе эмпирических данных о поведении объекта. При этом не ставится задача объяснения или полной характеристики процессов. Структурный подход состоит в разработке моделей, позволяющих описать и объяснить явления исходя из внутренней структуры рассматриваемых объектов. Эти подходы тесно связаны между собой и должны взаимно обогащать друг друга.

В ряде работ получил распространение подход, названный *структурно-феноменологическим*. Он заключается в том, что общепринятые в механике деформируемого твердого тела феноменологические уравнения и критерии рассматриваются на двух уровнях: микро- (структурном) и макроскопическом, отображающем поведение неоднородного материала как однородного с эффективными свойствами.

Решение прикладной задачи обычно включает цепочку рациональных переходов: физические гипотезы; построение математической модели; «рабочие» гипотезы при ее исследовании, упрощения; выбор, построение и реализацию вычислительного метода и др. Поэтому появление несогласованностей и расхождений между решением модельной задачи и результатами физических экспериментов практически неизбежно. С одной стороны, наличие значительных качественных и количественных расхождений говорит о том, что либо один из совершенных переходов необоснован, либо совокупная погрешность на всех этапах переходов дает ошибку общего результата, выходящую за допустимые рамки. С другой стороны, согласованность решения и эксперимента может быть случайной или явиться результатом бессознательной подгонки.

Вообще, изолированный эксперимент не может дать полной уверенности в правильности теории. Для этого необходима обширная обоснованная цепь экспериментов. Кроме того, никакая теория не имеет абсолютного характера, а обладает определенными рамками применимости (одна из основных целей экспериментов и состоит в уточнении этих рамок). Поэтому рационально включение физического эксперимента в качестве одного из этапов решения прикладной задачи. При решении механических задач часто бывает так, что те или иные зависимости, которые

в принципе поддаются математическому расчету, проще и даже надежнее строить эмпирически (например, измерив ряд соответствующих значений и проведя последующую интерполяцию с учетом предельных ситуаций).

В связи со сказанным важной является проблема получения продуктивного вида формул: формула, предназначенная для непосредственного применения и определяющая искомую величину через другие величины, должна быть такова, чтобы измерение или вычисление этих дополнительных величин осуществлялось не сложнее, чем искомой.

В механике *теоретическое моделирование касается двух главных аспектов:*

- а) построения моделей механического состояния и поведения вещества;
- б) моделирования постановок задач в рамках этих моделей.

Математическая модель исходного объекта представляет собой систему уравнений в широком смысле этого термина. Одна и та же математическая модель может описывать различные физические модели. При изучении одного и того же реального объекта могут появиться принципиально разные модели. Поэтому выбор типа модели существенен для направления всего исследования. Построение различных моделей одного и того же объекта имеет целью различную детализацию описания изучаемых процессов или явлений.

Основным требованием к математической модели является ее адекватность изучаемому реальному объекту (процессу, явлению и т. д.) относительно выбранной системы его характеристик. Причем адекватность должна рассматриваться с двух сторон: правильного качественного описания объекта по выбранным характеристикам и правильного количественного описания объекта по выбранным характеристикам с некоторой разумной степенью точности. Адекватность моделирования определяется собственно объектом исследования, его моделью, видом рассматриваемых воздействий и выбранным классом откликов на них, а также принятым уровнем точности описания.

Нередко из-за сложности объекта изучения модель может оказаться количественно неадекватной. Поэтому модели качественного характера весьма важны, например для понимания природы и роли существенных свойств. Следует помнить, что универсальной адекватности не существует. *Адекватность модели* следует рассматривать только по определенным признакам и характеристикам, принятым в данном исследовании за основные. Вместе с тем при рассмотрении какой-либо модели объекта исследования необходимо выяснить, приводят ли упрощения лишь к допустимой потере точности или же к качественному отличию модели от реального объекта. При этом проверяется также законность применения введенных гипотез к рассматриваемому кругу вопросов.

Причиной неадекватности модели реальному объекту является пренебрежение рядом факторов и идеализация характера поведения других (нелинейная зависимость рассматривается как линейная, навязываются определенные свойства и т. п.). Выбор факторов, которые при построении математической модели можно не учитывать, представляет собой важную задачу, так как неучитываемые факторы могут не только количественно, но и качественно влиять на свойства математической модели.

Так, при изучении устойчивости кровли горных выработок, пройденных в мелкослоистом массиве горных пород, введение допущений об однородности массива искажает не только количественную, но и качественную картину поведения массива пород (пренебрежение фактором слоистости).

Очевидно, что для более адекватного описания объекта по выбранной совокупности параметров требуются более сложные модели, так как в них можно учесть большее факторов, влияющих на изучаемые характеристики. Однако усложнение модели влечет за собой усложнение используемого математического аппарата. Может случиться и так, что построенные системы уравнений для своего решения потребуют неоправданных с точки зрения получаемых выводов временных, материальных и человеческих затрат (случай построения не поддающихся решению систем уравнений рассматривать не будем). Кроме того, как правило, такие сложные системы решаются приближенными методами с определенной степенью точности и при таком переходе может быть существенно потеряна адекватность.

Таким образом, *требование адекватности* необходимо рассматривать в совокупности с требованиями достаточной простоты и оптимальности модели по отношению к выбранной системе ее характеристик. Выбор модели должен производиться таким образом, чтобы количественный или качественный анализ выбранных характеристик и свойств с помощью современных средств исследования можно было провести экономно по затратам времени и труда и с различной точностью. Связь между свойствами адекватности и простоты моделей отображена на рис. 8.1, где степени этих свойств оцениваются числами А (адекватность) и П (простота), принимающими значения от нуля до единицы.

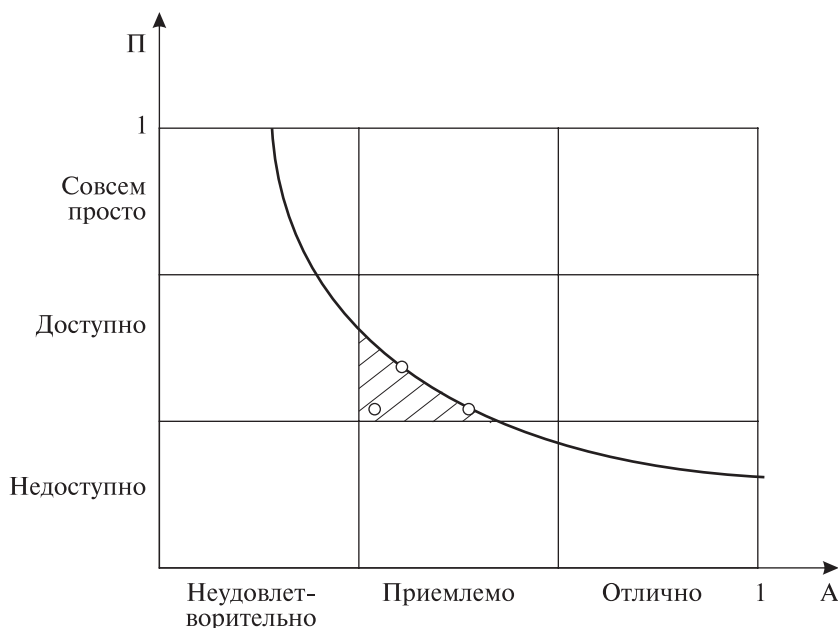


Рис. 8.1. Качественная диаграмма связи свойств адекватности и простоты модели

Очевидно, что практически представляют интерес лишь точки, расположенные в пределах заштрихованного криволинейного треугольника. Необходимо помнить, что в большинстве случаев более эффективным оказывается путь выбора менее адекватной (но все же удовлетворительной) физической модели, но такой, чтобы ее математическая запись не требовала дополнительного упрощения. Такая модель в целом может оказаться более адекватной исходному объекту, так как соответствующая математическая модель может быть такой сложной, что для проведения расчетов ее необходимо существенно упростить.

Для большого класса задач механики важным является *решение проблемы бесконечности*.

С одной стороны, механические процессы под воздействием внешнего нагружения реализуются только в некоторой ограниченной области. Поэтому при построении расчетной схемы обычно рассматривается не вся область тела, а некоторая часть, внешние границы которой выбирают таким образом, что исследуемые механические процессы за их пределами практически затухают.

С другой стороны, изучаемые реальные объекты практически всегда конечны, поэтому бесконечный математический объект (бесконечные размеры, бесконечный интервал и т. п.) появляется в результате упрощения математической модели. В этом случае «далекие» элементы, участки теряют свою индивидуальность. Реальное количество элементов или реальный размер интервала, дающие возможность перехода к математической бесконечности, в различных задачах весьма различны. Этот выбор зависит от многих факторов, и в первую очередь от «скорости затухания» влияния далеких элементов, существенности этого влияния и допустимой погрешности при решении задачи. Поэтому *в прикладных задачах любая бесконечность является счетной, и при модификации задачи бесконечное множество может перейти в конечное, и наоборот*. Бесконечность может появиться и в результате схематизации системы, когда каждый элемент теряет индивидуальное значение. В этом случае дискретность заменяется на непрерывность (например, слоистый композит (дискретно-неоднородный) заменяется непрерывно-неоднородным).

При проведении модельного анализа многих механических процессов важным является и понятие «*бесконечно малое*». В задачах механики правильным следует считать рассмотрение физически бесконечно малых величин, которые определяются классом рассматриваемых задач (понятие «бесконечно малое» при изучении различных процессов меняется). Следует отметить, что каких-либо обоснованных общих соображений и рекомендаций о выборе понятий «бесконечно большие и малые» величины и связанных с ними «существенно больше», «существенно меньше», «заметное изменение» до сих пор нет.

Чрезмерно большие и чрезмерно малые числа имеют и вспомогательное значение. С этими понятиями связана *оценка точности решений*. Очевидно, что нет смысла затрачивать дополнительные усилия для определения в целом в массиве горных пород участков возмущенного напряженного состояния с точностью до 1 Ньютона. В то же время для оценки устойчивости пластин важна разница смещений в 1 мм. К диапазону изменения значений рассматриваемой величины необходимо подходить осторожно. Так, например, при построении графика изменения изучаемой ве-

личины значение 10^{100} практически не имеет приложений. Однако в логарифмических координатах $\lg \lg 10^{100} = 2$, т. е. реальное число.

Важнейшую роль при построении модели играет выбор основных характеристик и их определяющих значений: пространственных и временных характерных протяженностей (основных масштабов).

Эти величины существенно зависят от моделируемого объекта, рассматриваемого окружения, в котором размещен объект, от изучаемых характеристик. После определения основных масштабов все переменные по отношению к ним могут быть выделены как переменные с «нормальным», «медленным» и «быстрым» темпами изменения. Очевидно, что в основных зависимостях ведущую роль должны играть величины, соизмеримые с нормальными темпами изменения. *Медленно изменяющиеся величины могут быть учтены параметрически* (например, приняты за постоянные), а *быстро изменяющиеся учитываются путем осреднения и введения эффективных значений.*

Так, например, если переменная величина — толщина слоя l в слоистом композите — имеет характерный диапазон изменения Δl_* в пределах области исследования композита в целом с характерным размером d_* , то в качестве одного из основных масштабов целесообразно принять величину, равную отношению Δl_* к d_* : $\delta l_* = \Delta l_*/d_*$. В этом случае величины, соотносящиеся с l (например, линейные размеры дефектов и т. п.), будут определяться как *основные*, если их соответствующие параметры, определенные аналогично δl_* , сопоставимы с δl_* ; как *медленные* (если значения этих параметров значительно меньше δl_*); как *быстрые* (если значения параметров значительно больше δl_*).

Если появляется необходимость в построении более точной, чем первоначальная, модели, в этом случае вводятся *уточняющие переменные*.

Например, в геомеханике наиболее распространенными случаями введения уточняющих переменных являются ситуации изучения эффектов в породном массиве, вызванных наличием либо источников возмущения, распределенных по конечной области D , либо пограничного слоя — узкой зоны, разделяющей участки массива с существенно различными свойствами. В достаточной близости от зоны возмущения D или пограничного слоя на процессы и эффекты, происходящие в массиве, влияют все детали распределения возмущений, флуктуаций, которые определяют приграничные процессы и краевые эффекты. Это приводит к необходимости введения уточняющих переменных. При удалении от областей нарушения сплошности и неоднородностей возмущения влияют своими интегральными характеристиками, поэтому при этом можно принять, что возмущение сосредоточено в одной точке области D , а ширина пограничного слоя приравняется к нулю. Если же рассматриваются точки, расположенные достаточно далеко от областей возмущения, то в большинстве случаев влиянием возмущения можно пренебречь. Поэтому вводить уточняющие переменные нет необходимости.

Процесс формирования основных переменных и соотношений можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 8.2.

Аналогичные рассуждения касаются *продолжительности воздействия возмущений на механическую систему*.

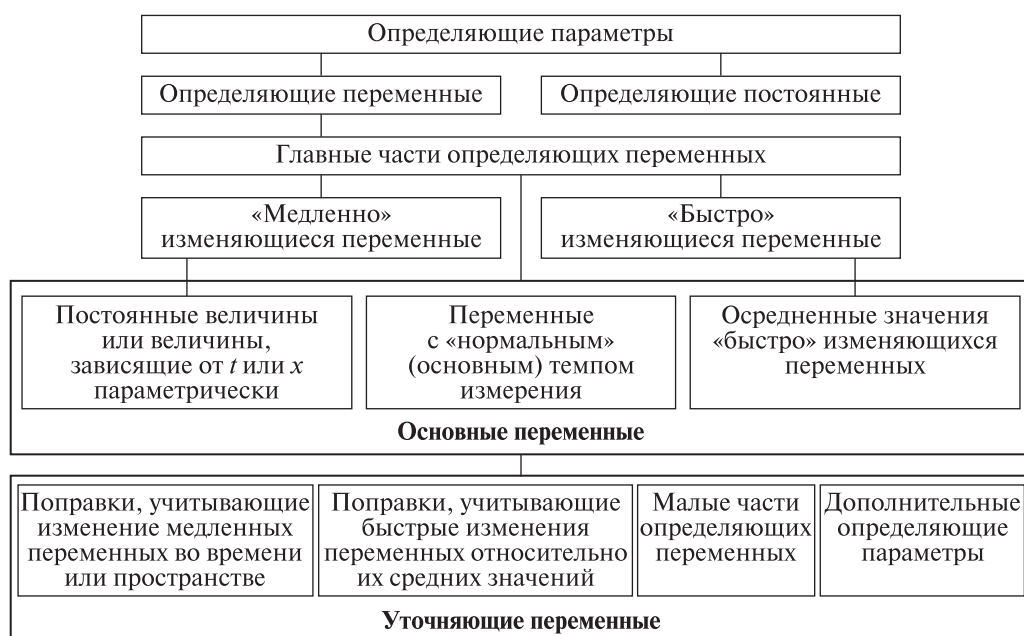


Рис. 8.2. Процесс формирования основных переменных и соотношений

Классификацию возмущений при учете времени воздействия можно произвести так:

- возмущения изменяются во всем временном интервале изучения механического процесса;
- влияние возмущения ощущается только своей интегральной характеристикой (например, динамический удар, взрыв);
- возмущение происходило так давно, что из-за диссипации энергии его эффект в рассматриваемом временном промежутке уже не ощущается.

Хотя большинство задач механики имеют трехмерный характер, однако построение аналитических решений для задач определения НДС в пространственной постановке носит все же эпизодический характер, основные аналитические результаты исследований получены для двухмерных случаев.

В зависимости от постановки задачи результаты исследования НДС по плоскому решению по сравнению с трехмерными можно считать удовлетворительными, если точности результатов моделирования достаточно. Если же поставленная задача требует высокой количественной точности результатов, то исследование НДС по плоскому решению неудовлетворительно и в полученные результаты необходимо вводить соответствующие поправочные коэффициенты либо решать задачу в трехмерной постановке.

Укажем на еще одну особенность постановки задач механики, связанную с анализом геометрических размеров объекта исследования. Поскольку граничные поверхности большого класса исследуемых объектов являются, как правило, многосвязными, то для получения эффективных инженерных решений естественным образом появляется желание привести задачи для многосвязных поверхностей к расчетным схемам с односвязным контуром. В опубликованных работах показано (например,

решая задачу теории упругости для тяжелой полуплоскости с круговым отверстием), что влиянием прямолинейной границы полуплоскости на распределение напряжений в окрестности отверстия можно пренебречь при соблюдении условия $h > 2D$, где h — расстояние от прямолинейной грани до центра отверстия, D — диаметр отверстия. При выполнении этого условия допустимая погрешность в случае замены задачи с двухсвязным контуром в виде грани полуплоскости и контура отверстия на задачу с односвязным контуром (отверстие в тяжелой плоскости) не превышает 10 %. Установлено, что такой же порядок имеет погрешность при замене двухсвязного контура в виде двух соседних отверстий на односвязный, если расстояние между центрами отверстий d более $2,5D$.

Несколько слов о введении гипотезы линейности в задачах механики. Практически для всех задач механики предположение о линейности имеет характер допущения. Однако во многих случаях естественно начинать исследования с рассмотрения линейной модели, особенно если информация об истинном характере изучаемого процесса неполная. Линейные модели для очень широкого класса задач позволяют достичь удовлетворительной степени адекватности. Кроме того, до настоящего времени наиболее развитыми методами решения (точного или приближенного) уравнений являются методы решения линейных задач. Поэтому в некоторых случаях использование линейных схем представляется единственно возможным: нелинейность может быть учтена путем надлежащего подбора коэффициентов в линейной зависимости или дальнейшего уточнения решения (например, введения соответствующих итерационных процедур).

8.2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Одной из центральных в общей задаче механико-математического моделирования механических процессов является проблема построения определяющих уравнений, корректно и адекватно описывающих рассматриваемые процессы и явления. Очевидно, что в настоящее время уже нельзя пользоваться простейшими методами описания механического состояния объекта, так как достижения современной вычислительной техники в значительной степени снизили остроту такой важной проблемы механики сплошных и дискретных сред, как получение конкретных решений. На первое место выдвигается проблема определяющих уравнений с конечной целью — создание строгой теории определяющих уравнений. Эта теория должна включать в себя не только законы запрета, но и законы построения определяющих уравнений, исключать волюнтаризм в формулировке феноменологических теорий и моделей.

Существуют общие требования, вытекающие из общезначимых закономерностей, на основе которых можно конкретизировать допустимые формы определяющих уравнений. Данный вопрос подробно рассмотрен в работе В. Д. Ключникова¹. Ниже приведены некоторые сопутствующие рассуждения.

¹ Ключников Владимир Дмитриевич (1928–2001), советский и российский ученый-механик, автор работ в области теории пластичности.

Математическая модель представляет собой схематизацию реального физического механического процесса или явления. *Для механики доказательство факта существования решения построенной математической задачи явно недостаточно.* Важным является *фактическое конструирование решения.* Доказательство существования служит, например, дополнительным обоснованием к построению приближенных методов для получения решения и повышает уверенность в справедливости качественных выводов. Наличие доказательства о существовании решения не является необходимым для механика-прикладника.

В качестве *отбраковочного критерия* для подавляющего числа задач механики можно использовать *требование относительности отсчета времени.* Явное введение в определяющее соотношение естественного времени недопустимо, так как явным образом может входить только приращение естественного времени или время, отсчитываемое с момента рождения материала. Поэтому теория старения породного массива, в определяющих уравнениях которой присутствует явное время без изменения НДС, и теории наследственности, где момент рождения отнесен в бесконечность, весьма идеализированны.

Для механики в связи с тензорной природой определяющих параметров важную роль играет *требование ковариантности*, которое выражает инвариантность определяющего уравнения по отношению к выбору пространственной сетки координат. Особое значение требование ковариантности приобретает при построении теории структурно-неоднородных сред.

Для сред, результат деформации которых необратимым образом зависит от истории внешних воздействий, перестают быть приемлемыми или действенными классические концепции о функциях состояния. Радикальным здесь является *отказ от концепции функций состояния и переход к концепции функционалов состояния.*

К числу важных требований при построении определяющих уравнений механики следует отнести условие макродетерминизма. Данное условие требует от феноменологической теории, чтобы все предписываемые этой теорией свойства были устойчиво распознаваемы на макроопыте, т. е. малая ошибка в проведении такого опыта должна приводить к малому отклонению результата. Это требование накладывает жесткие ограничения на форму определяющего уравнения. Так, например, феноменологические теории, базирующиеся на теориях пластичности, не включающих концепции поверхности текучести, некорректны, так как такой подход приводит к нарушению принципа макродетерминизма. Можно показать, что упругое тело обязательно должно быть гиперупругим: введение предположения о необязательности потенциальной природы для изотермических процессов приводит к нарушению принципа макродетерминизма.

Перечисленные требования имеют особое значение при выявлении определяющих уравнений для неоднородных сред. Даже если эти требования выполнены для отдельных элементов, в силу неудачных предположений о свойствах взаимодействия или методов осреднения они могут нарушаться для тела в целом.

Кроме всего прочего, математическая модель, описывающая реальный физический процесс, должна удовлетворять и *системе определенных ограничений*, таких, например, как *единственность решения*; при удовлетворении *граничных и начальных*

условий система уравнений должна иметь решение; решение должно быть устойчивым по А. Н. Тихонову¹ и робастным.

Понятие устойчивости для задач механики играет важную роль. Понятие устойчивости в механике рассматривается с нескольких позиций: устойчивость модели и устойчивость механического состояния (положения).

Устойчивость модели следует рассматривать исходя из того, что все параметры, входящие в формулировку любой прикладной задачи, могут быть заданы лишь приближенно. Поэтому, во-первых, при выборе метода решения любой прикладной задачи необходимым требованием к нему должна быть его устойчивость при изменении параметров задачи (хотя бы достаточно малом). Под термином «параметры» подразумевается все, что задается при постановке задачи (скалярные, векторные величины, элементы функциональных пространств). И, во-вторых, важна устойчивость самой математической модели, где под устойчивой понимается такая модель, малые изменения параметров которой не вызывают существенных качественных изменений ее свойств. Устойчивость модели представляет собой одно из важнейших необходимых условий адекватности математической модели реальному механическому процессу.

С помощью привлечения *методов теории робастности* — малой чувствительности к изменению исходных предпосылок — проводится изучение возможной неустойчивости методов и моделей решения прикладных задач.

В механике сплошной среды наряду с задачей о нахождении ее единственного напряженно-деформированного состояния при выполнении определенных условий (система заданных сил, граничные и начальные условия) ставится также задача о *нахождении условий нарушения единственности положения*. Эта задача имеет исключительно важное значение в приложениях, а в ряде случаев является и базовой по сравнению с задачей определения единственного положения равновесия.

Пусть на тело действует внешняя нагрузка P , которая зависит только от одного изменяющегося параметра. В некоторых пределах изменения вышеуказанного параметра решение задачи будет оставаться единственным (напряжения и перемещения в теле будут определяться единственным образом).

При достижении параметром критического значения может появиться еще одна (или более) форма равновесия, которая не учитывается ранее полученным решением. Критическому значению параметра внешней нагрузки P^* будут соответствовать два (или более) мало отличающихся друг от друга положения равновесия тела. Таким образом, получаем аналитическую запись условия устойчивости равновесия тела в виде $P < P^*$. Значение P^* будет зависеть от формы и размеров тела, типа закрепления, физико-механических свойств и характера нагрузки.

Замечание. Если внешняя нагрузка зависит от большего числа параметров, можно провести аналогичного рода рассуждения.

Процедура исследования вопросов *потери устойчивости равновесия* сводится к следующему. Решение задачи представляется в виде суммы двух составляющих: основного (невозмущенного) и дополнительного (возмущенного) состояний.

¹Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993), советский математик и геофизик, академик АН СССР, дважды Герой Социалистического Труда, основатель факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Конечная цель — отыскание таких нагрузок, при которых возможно существование компонент возмущенного состояния. Существуют различные методы отыскания этих нагрузок. Наиболее эффективны те, в которых используются общие соотношения механики сплошных сред. Так, например, во многих случаях используются соотношения, в основу которых положено представление о деформациях как бесконечно малых величинах. Вопросы устойчивости равновесия требуют представления о деформациях как о конечных величинах.

Из рассматриваемых вопросов вытекает проблема *вырожденных и специальных частных случаев*. Дело в том, что методы решения при исследовании вырожденных или специализированных частных случаев могут быть непригодны при решении задачи в общем виде. Так, например, при исследовании кровли горных выработок можно использовать методы теории балок или плит, хотя такой случай будет являться вырожденным (слоистый породный массив представляется весьма идеализированной структурой типа балки или плиты со всеми вытекающими последствиями). Однако при выборе метода решения математической модели может встретиться ситуация, требующая специального рассмотрения. И тогда метод решения, эффективный для рассматриваемой ситуации, совершенно не может быть использован при изменении параметров модели. Такое может быть при специальном выборе системы координат или фиксации некоторых в действительности изменчивых параметров.

Поэтому нельзя ограничиваться анализом только решаемого случая. Анализ специального случая несет в себе определенную информацию о ситуациях, близких к рассмотренному. Специальные решения можно принять за нулевые приближения, можно рассматривать их как характерные решения, особенно в окрестностях точек бифуркаций.

Необходимо всегда отчетливо представлять себе и формулировать характер вырождения при исследовании вырожденных случаев и при получении и анализе выводов исходить из данных допущений.

Процесс выполнения математического моделирования механических процессов и явлений можно условно структурировать следующим образом:

- формулируется конечная цель решения задачи;
- устанавливается тип задачи из геометрических соображений и условий симметрии;
- принимается физическая модель объекта исследований с указанием действующих кинематических и силовых нагрузок;
- приводятся количественные оценки необходимых механических свойств материалов/компонент и структурно-механических особенностей объекта в целом;
- производится математическая формулировка задачи с выбором расчетной схемы и указанием начальных и граничных условий;
- проводится построение математической модели;
- выбирается метод исследования и решения сформулированной математической задачи;
- проводятся непосредственные математические исследования;
- осуществляется анализ и интерпретация полученного математического результата.

Целесообразно отметить, что если формулировка конечной цели исследования обычно не вызывает больших затруднений, так как диктуется запросами прак-

тики, то запись необходимых исходных данных порой требует проведения специальных исследований. Кроме того, при построении математической модели рассматриваемой задачи механики и выборе метода ее исследования и решения необходимо руководствоваться не только принятой физической моделью поведения объекта, но и конечной целью решения задачи.

Итак, еще раз подчеркнем, что для любой выбранной модели реального объекта в рамках МСС (МДТТ) должны выполняться определенные фундаментальные уравнения, включающие уравнения движения или равновесия, условия совместности деформаций и граничные условия. Для замкнутости системы к перечисленным требованиям необходимо присоединить физические соотношения, определяющие связь между напряженным и деформированным состояниями в рассматриваемом объекте (физические соотношения определяют выбранную модель среды). Если процесс нестационарный, то к системе уравнений необходимо добавить начальные условия, определяющие процесс в начальный момент времени.

8.3. О СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Фундаментальные решения механики относятся к классу *сингулярных решений*.

Сингулярные решения, обращающиеся в бесконечность в особых точках, встречаются в задачах механики достаточно часто. Например, в задачах теории упругости при использовании фундаментальных решений, в контактных задачах, в задачах механики трещин и разрушения, в плоских задачах теории упругости со смешанными граничными условиями.

Так, например, в задаче на растяжение и изгиб консольной балки при рассмотрении последней в рамках двумерной теории упругости как длинной полосы с жестким закреплением начального поперечного сечения нормальные напряжения в угловых точках начального поперечного сечения имеют сингулярность и оказываются бесконечно большими [76], что не соответствует ситуации, имеющей место в действительности. Консольные балки широко используются в строительстве и рассчитываются по формулам сопротивления материалов, которые не содержат особенностей. Кроме того, при экспериментальных исследованиях прочности таких балок, для которых решение задачи теории упругости сингулярно, получаются конечные значения пределов прочности.

Сингулярные решения задач теории упругости не подтверждаются экспериментально и нередко противоречат здравому смыслу. Так, если появление бесконечно больших напряжений при воздействии сосредоточенных сил еще допустимо (согласно определению напряжений), то появление бесконечно больших перемещений не согласуется с физическим смыслом.

В общем случае сингулярность решения не имеет физического смысла.

Существуют различные интерпретации сингулярных решений [77]. Применительно к задачам механики (теории упругости) интерпретация сингулярных решений трактуется так, что сингулярное решение справедливо всюду, за исключением особой точки, где оно обращается в бесконечность. В особой точке сингулярные решения не имеют производных, и дифференциальное уравнение, из которого они получены, неверно в данной точке.

В математическом плане сингулярные решения обосновываются с помощью обобщенных решений, представляющих собой предельные функции последовательности регулярных решений [78].

Классической задачей, где используются сингулярные решения, является *задача об изгибе круглой мембраны сосредоточенной силой, приложенной в ее центре*.

Уравнение равновесия мембраны, нагруженной давлением $p(r)$ и усилием предварительного натяжения t , имеет следующий вид [79]:

$$t\Delta w + p(r) = 0, \quad \Delta(\dots) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right).$$

Здесь w – прогиб мембраны (зависит только от радиальной координаты r).

В случае нагружения мембраны сосредоточенной силой P в ее центре и закрепленной по наружному контуру $r = R$ прогиб мембраны определяется следующей формулой [80]:

$$w = \frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R}{r}. \quad (8.1)$$

Из формулы (8.1) следует, что прогиб неограниченно возрастает при $r \rightarrow 0$.

Большой класс сингулярных решений порождают задачи о действии сосредоточенных сил на/в упругом теле, речь о которых шла в предыдущих разделах данной главы. Так, напомним, что если в неограниченном упругом теле в начале координат приложена сила P , направленная по оси z , то перемещения вдоль оси z определяются следующим выражением (задача Кельвина): $u_z = P(1+\nu)/(2\pi Ez)$, где E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно.

Как следует из данной формулы, перемещения u_z обращаются в бесконечность при $z = 0$ (в точке приложения силы).

Сингулярные решения присутствуют в классических задачах о контактном взаимодействии упругих и твердых тел. Так, для *задачи о нагружении упругого полупространства абсолютно жестким штампом* с основанием радиусом a , действующим на полупространство с силой P , распределение контактных напряжений и нормальных перемещений на плоскости контакта описывается следующими соотношениями [6, 35]:

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad w = \frac{P(1-\nu^2)}{2aE} \quad (0 \leq r \leq a), \quad (8.2)$$

$$\sigma_z = 0, \quad w = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi a E} \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}, \quad \frac{dw}{dr} = -\frac{P(1-\nu^2)}{Er \sqrt{r^2 - a^2}} \quad (r > a). \quad (8.3)$$

Из выражения (8.2) следует, что контактное напряжение обращается в бесконечность на границе штампа ($r = a$) при сколь угодно малой силе. Согласно выражению (8.3) производная перемещения на этой границе оказывается при этом бесконечно большой, т. е. элемент граничной поверхности поворачивается на 90° . Такой поворот не может быть описан уравнениями линейной теории упругости.

Фактически можно говорить, что решение (8.2), (8.3) по существу неверно [77].

Еще более некорректное решение получается в случае *классической задачи Фламана для полуплоскости, нагруженной силой P , действующей нормально к ее грани-*

це [6]. Нормальные и тангенциальные перемещения точек границы полуплоскости $x = 0$ для классического решения Фламана имеют вид (см. ч. 2, разд. 9.16):

$$u_x = \frac{P(1+\nu+2\ln y)}{\pi E} + C, \quad u_y = \mp \frac{P(1-\nu)}{2\pi E}.$$

В выписанных выражениях C — смещение полуплоскости как твердого тела, знаки $\mp$ соответствуют правой и левой частям полуплоскости по отношению к линии нагружения.

Замечание. В [6] указывается, что полученное решение весьма спорно.

Для нормального перемещения решение имеет логарифмическую особенность, т. е. это перемещение обращается в бесконечность не только в точке приложения силы, но и на бесконечном удалении от этой точки. Тангенциальное же перемещение не зависит от x и не обращается в ноль на оси симметрии.

Известным является *решение плоской задачи о состоянии трещины длиной $2c$ в неограниченной пластине, которая подвержена растяжению напряжением σ_0 по двум противоположным граням*. При $y = 0$ напряжения и перемещения определяются следующими равенствами [36]:

$$\sigma_y = 0, \quad u_y = \frac{\sigma_0}{G}(1-\nu)\sqrt{c^2 - x^2} \quad (0 < x < c), \quad (8.4)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2 - c^2}}, \quad u_y = 0 \quad (x > c), \quad (8.5)$$

где G — модуль сдвига.

Из выражения (8.5) следует, что напряжения на концах трещины сингулярные. Это обстоятельство не позволяет использовать традиционные критерии прочности для оценки состояния тел с трещинами в рамках классической теории упругости и вызывает необходимость в построении специальной теории разрушения тел с трещинами [81]. Кроме того, согласно выражениям (8.4) при нагружении контур трещины превращается в эллипс. При $x = c$ касательная к деформированному контуру трещины оказывается вертикальной, т. е. поворачивается на угол 90° при сколь угодно малой силе.

Таким образом, решение задачи о трещине обладает таким же недостатком, что и рассмотренное выше решение задачи о штампе.

Следует отметить, что существует концепция равновесных трещин [81], согласно которой трещина принимает форму с плавно смыкающимися краями. Это достигается в результате предположения о том, что в окрестности концов трещины ее края взаимодействуют друг с другом и между ними появляются напряжения адгезионной природы. Но в исходной классической задаче таких напряжений формально нет. Кроме того, указанные формы трещины (с эллипсовидным концом и с плавно смыкающимися краями) не согласуются с экспериментом. Края экспериментальной трещины образуют на ее конце острый угол, который увеличивается при возрастании нагрузки.

По интерпретации, предложенной в [77], сингулярные решения представляют собой «формальные математические результаты, не имеющие физического содержания». По сути, сингулярные решения соответствуют математическому решению

задач, для которых используемые математические модели неадекватно описывают рассматриваемые физические явления. Неадекватность может быть связана с несовершенством не только математической модели, но и физической. В итоге полученные решения по сути лишены физического смысла и некорректны в прикладном плане.

В работе [77] предложен подход к построению регулярных решений задач, которые в рамках классических моделей МДТТ сингулярны. Он основан на обобщении традиционного определения функции и введении *операции обобщенного дифференцирования*. Опишем основные положения предложенного метода.

В классическом выражении для производной (dy/dx) и числитель, и знаменатель представляют бесконечно малые величины. В сингулярных задачах числитель может быть конечной величиной, поэтому производная будет бесконечно большой. Чтобы исключить такую ситуацию, необходимо чтобы и знаменатель был конечной величиной.

Рассматривается функция одной переменной $y(x)$. В окрестности точки x выделяется конечный (но малый) элемент длиной $2a$. Вводится локальная система координат α такая, что $-a \leq \alpha \leq a$.

Примем, что функция $y(x)$ описывает реальный физический процесс и поэтому не может быть сингулярной. Предположим, что в точке x функция $y(x)$ имеет производные любого порядка. В этом случае функцию $y(x, \alpha)$ можно разложить в ряд Тейлора¹ по переменной α :

$$y(x, \alpha) = y + \frac{\alpha}{1!} \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \dots = \sum_{n=0,1,2,\dots} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (8.6)$$

Обобщенная функция $Y(x)$ определяется как среднее значение разложения (8.6) на интервале $[-a, a]$ [77]:

$$Y_a(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a y(x, \alpha) d\alpha = y(x) + \frac{a^2}{3!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a^4}{5!} \frac{d^4 y}{dx^4} + \dots = \sum_{n=0,2,4,\dots} \frac{a^n}{(n+1)!} \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (8.7)$$

Обобщенная производная вводится как разность между значениями функции $y(x)$ на концах интервала, отнесенная к длине интервала. С учетом равенства (8.7) имеем

$$\frac{Dy}{Dx} = \frac{1}{2a} [y(x, a) - y(x, -a)] = \frac{dy(x)}{dx} + \frac{a^2}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{a^4}{5!} \frac{d^5 y}{dx^5} + \dots = \frac{dY_a}{dx}.$$

Таким образом, обобщенная производная функции $y(x)$ равна традиционной производной обобщенной функции $Y(x)$.

В [77] отмечено, что можно получить и другие формы обобщенной функции. Так, например если ввести формально мнимый интервал и замену $s = ia$, где i – мнимая единица. Тогда выражение (8.7) принимает вид

$$Y_s(x) = y(x) - \frac{s^2}{3!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{s^4}{5!} \frac{d^4 y}{dx^4} + \dots \quad (8.8)$$

¹Тейлор Брук (Brook Taylor, 1685–1731), английский математик, именем которого называется известная формула, выражающая значение голоморфной функции через значения всех ее производных в одной точке.

Приведем примеры некоторых конкретных функций. Если $y(x) = 1$ или $y(x) = x$, то в этом случае $Y_a(x) = Y_s(x) = y(x)$. Если исходная функция является либо постоянной, либо линейной, то обобщенная функция совпадает с исходной. Рассмотрим функцию $y(x) = \sin x$. Тогда на основании (8.7) и (8.8) имеем

$$Y_a(x) = \frac{\sin a}{a} \sin x, \quad Y_s(x) = \frac{\operatorname{sh} s}{s} \sin x. \quad (8.9)$$

Из (8.9) следует, что $Y_a(x) < y(x) < Y_s(x)$.

В случае «регулярных» функций при малых параметрах a и s обобщенные функции мало отличаются от исходных.

Совершенно иная ситуация будет иметь место, если исходная функция — сингулярная. Рассмотрим конкретный пример. Пусть $y(x) = 1/x$. Из представлений (8.7) и (8.8) получаем

$$Y_a(x) = \frac{1}{a} \left[\frac{a}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{x} \right)^5 + \dots \right] = \frac{1}{a} \operatorname{arcth} \frac{x}{a} \quad (x > a > 0),$$

$$Y_s(x) = \frac{1}{s} \left[\frac{s}{x} - \frac{1}{3} \left(\frac{s}{x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{s}{x} \right)^5 - \dots \right] = \frac{1}{s} \operatorname{arcctg} \frac{x}{s} \quad (x > s > 0).$$

Важным моментом является то, что обобщенные функции, в отличие от исходной функции, не могут быть сингулярными, так как при $x = 0$ не существуют.

В работе [77] предложена процедура *построения регулярных решений сингулярных задач*. Базируясь на понятии обобщенного дифференцирования при построении разрешающих уравнений для задач прикладной механики, необходимо рассматривать не бесконечно малые элементы среды, а элементы, обладающие малыми, но конечными размерами. В результате получаются *уравнения обобщенной теории упругости следующего вида* [82]:

$$T_{ij,j} + f_i = 0,$$

$$T_{ij} = \lambda U_{k,k} + \mu (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (8.10)$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} - s^2 \Delta \sigma_{ij}, \quad U_i = u_i - s^2 \Delta u_i. \quad (8.11)$$

Граничные условия приводятся к *естественным граничным условиям*:

$$T_i \delta U_i = 0, \quad T_{ij} \delta U_j = 0. \quad (8.12)$$

Система уравнений (8.10)–(8.11) с граничными условиями (8.12) по виду совпадает с соответствующими соотношениями классической теории упругости, но вместо традиционных характеристик напряженно-деформированного состояния — напряжений и перемещений (σ_{ij} , u_i) — данная система включает обобщенные характеристики T_{ij} и U_i . Кроме того, помимо упругих постоянных Ламе λ , μ в системе содержится также коэффициент s , имеющий размерность длины.

Следует подчеркнуть, что в такой постановке закон Гука связывает не традиционные, а обобщенные напряжения и деформации (второе уравнение (8.10)). Классический закон Гука имеет место, если в (8.11) отсутствуют градиенты, т. е. $\Delta \sigma_{ij} = \Delta u_i = 0$.

Как отмечается в [77], экспериментально установлено, что при наличии градиента напряжений традиционный закон Гука нарушается.

Таким образом, задача в терминах обобщенной теории упругости формально сводится к уравнениям Гельмгольца¹ (8.1) для напряжений σ_{ij} и перемещений u_i , в которых левые части T_{ij} и U_i представляют собой решения соответствующей задачи классической теории упругости (8.10).

Решение уравнений (8.11) состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения. Если функции T_{ij} и U_i , определяющие классическое решение, являются сингулярными, то общее решение соответствующего однородного уравнения (8.11) позволяет устранить сингулярность классического решения и получить регулярное решение. Важный момент: это *корректно только для прикладных задач, имеющих физический смысл*.

Так как сингулярные решения порождаются несоответствием между физической и математической моделями рассматриваемого процесса или явления и не соответствуют экспериментальным результатам, то в [77] предлагается определять параметр s из уравнения (8.11) на основе более адекватной физической модели или по результатам анализа соответствующих экспериментов.

В работе [77] эффективность этих подходов продемонстрирована на задаче об изгибе мембраны. При $u_i = w$ (w — прогиб мембраны) второе уравнение (8.11), соответствующее классическому решению для мембраны, и в котором U_i определяется соотношением (8.1), принимает вид

$$w - s^2 \Delta w = \frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R}{r}. \quad (8.13)$$

Общее решение данного уравнения имеет следующее представление:

$$w(\rho) = C_1 I_0(\rho) + C_2 K_0(\rho) + \frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R_s}{\rho}, \quad (8.14)$$

где $\rho = r/s$, $R_s = R/s$, I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя².

Особенностью решения (8.14) является то, что функция Макдональда³ K_0 имеет такую же логарифмическую особенность, что и частное решение, входящее в равенство (8.14). Для устранения этой особенности принимаем $C_2 = -P/(2\pi t)$. Постоянная C_1 определяется из условия отсутствия прогиба мембраны на закрепленном наружном контуре. В результате окончательное выражение для прогиба мембраны имеет вид

$$w(\rho) = \frac{P}{2\pi t} \left[\ln \frac{R_s}{\rho} - K_0(\rho) + \frac{K_0(R_s)}{I_0(R_s)} I_0(\rho) \right].$$

¹ Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (Helmholtz Hermann Ludwig Ferdinand, 1821–1894), немецкий физик, врач, физиолог, психолог, акустик.

² Бессель Фридрих Вильгельм (Bessel Friedrich Wilhelm, 1784–1846), немецкий математик и астроном, ученик Карла Фридриха Гаусса.

³ Макдональд Гектор Манро (Hector Munro Macdonald, 1865–1935), шотландский математик, специалист по теории специальных функций и применению математических методов для решения задач электродинамики.

В соответствие с этим прогиб мембраны в ее центре составляет

$$w_0 = \frac{P}{2\pi t} \left[\ln R_s + \frac{K_0(R_s)}{I_0(R_s)} \right]. \quad (8.15)$$

Как следует из (8.15), величина w_0 конечна и зависит от отношения $R_s = R/s$.

В [77] изложен экспериментальный способ определения параметра s . Этот параметр мал по сравнению с радиусом мембраны R , следовательно, $R_s = R/s$ является величиной больше единицы. Тогда второй член в (8.15) значительно меньше первого и им можно пренебречь. В результате из модифицированного равенства (8.15) имеем

$$\frac{s}{R} = \exp(-2\pi\bar{w}_0), \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{P}. \quad (8.16)$$

В (8.16) прогиб мембраны w_0 — величина, определяемая экспериментально.

Там же (в [77]) рассмотрен и другой способ определения параметра s . Физическая модель мембраны обобщается введением предположения о том, что она имеет изгибную жесткость. Тогда для описания изгиба такой мембраны следует использовать бигармоническое уравнение теории пластин. Как известно, это уравнение можно дважды проинтегрировать и оно принимает следующий вид:

$$w - e^2 \Delta w = -\frac{P}{2\pi t} \ln r + C, \quad \Delta w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (8.17)$$

Здесь $e^2 = D/t$, $D = E\delta^3/[12(1-\nu^2)]$ — изгибная жесткость мембраны, зависящая от толщины δ и упругих постоянных материала, C — постоянная интегрирования.

Решение уравнения (8.17) не является сингулярным. Сравнивая уравнения (8.13) и (8.17), можно заключить, что $s = e$.

Таким образом, параметр s в этом случае приобретает реальное физическое содержание — он равен отношению изгибной жесткости мембраны к усилию натяжения.

Рассмотренная задача является примером некорректной физической модели. Традиционное сингулярное решение (8.1) не зависит от толщины мембраны и свойств материала, из которого она изготовлена. Но жесткость реальной мембраны должна все же зависеть от этих параметров. Поэтому решение (8.1), игнорирующее реальные параметры мембраны, от которых зависит ее прогиб, представляется некорректным с прикладной точки зрения.

В работе [77] получено обобщенное решение контактной задачи, описанной ранее здесь о нагружении упругого полупространства абсолютно жестким штампом с основанием радиуса a , действующим на полупространство с силой P .

Для определения функции напряжений на контактной плоскости используется первое уравнение (8.11), в котором принимается $\sigma_{ij} = \sigma_z$, а вместо T_{ij} подставляется классическое решение, определяемое первым равенством (8.2). В результате имеем

$$\sigma_z - s^2 \Delta \sigma_z = -\frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad \Delta \sigma_z = \frac{d^2 \sigma_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\sigma_z}{dr}.$$

Решение данного уравнения имеет вид [59]

$$\bar{\sigma}_z = C_1 I_0(\rho) + C_2 K_0(\rho) + \frac{\alpha}{2} \left[I_0(\rho) \int_0^\rho \frac{\rho K_0(\rho) d\rho}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} - K_0(\rho) \int_0^\rho \frac{\rho I_0(\rho) d\rho}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} \right],$$

где $\bar{\sigma}_z = \sigma_z / \sigma_0$, $\sigma_0 = P / (\pi a^2)$, $\rho = r/s$, $\alpha = a/s$.

Ввиду того что функция Макдональда K_0 расходится при $\rho = 0$, принимается, что $C_2 = 0$, а постоянная C_1 находится из условия равновесия штампа.

Рассмотрим перемещение контактной поверхности. При $r \leq a$ перемещение постоянно и определяется вторым равенством (8.2). Согласно этому равенству

$$\bar{w} = 1, \quad \bar{w} = 2aEw / (P(1 - \nu^2)). \quad (8.18)$$

При постоянной правой части решение уравнения Гельмгольца также является постоянным, т. е. $\bar{w} = 1$. Таким образом, обобщенное решение для смещения штампа совпадает с классическим.

Для определения перемещения вне области контакта используется второе уравнение (8.11) и классическое решение (8.1). В результате получается следующее уравнение:

$$w - s^2 \Delta w = \frac{P(1 - \nu^2)}{\pi a E} \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию регулярности при $r \rightarrow \infty$ и условию непрерывности перемещения при $r = a$, имеет вид [83]:

$$\begin{aligned} \bar{w} = & \frac{K_0(\rho)}{K_0(\alpha)} + \frac{2}{\pi} I_0(\rho) \left[\int_\alpha^\infty \rho K_0(\rho) \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2} d\rho - \int_\alpha^\rho \rho K_0(\rho) \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2} d\rho \right] + \\ & + \frac{2}{\pi} K_0(\rho) \left[\int_\alpha^\rho \rho I_0(\rho) \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2} d\rho - \frac{I_0(\alpha)}{K_0(\alpha)} \int_\alpha^\infty \rho K_0(\rho) \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2} d\rho \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{w}$ определяется вторым равенством (8.18).

Параметр s или $\alpha = a/s$ определить в рассматриваемом случае, используя более общую физическую модель, как это было выполнено применительно к мембране, в данной ситуации не представляется возможным.

К настоящему времени построено большое количество вариантов теории упругости, обобщающих классическую теорию, в частности моментная, микроструктурная, мультиполярная, градиентная, нелокальная и др. Все эти теории включают дополнительные упругие постоянные среды, которые в то же время не определяются экспериментально. Они не позволяют определить параметр s , поэтому остается использовать только прямой экспериментальный способ [77]. В работе [77] описан один из таких экспериментов. В результате установлено, что параметр s равен радиусу штампа ($s = a$) и имеет физическое содержание.

В качестве следующей задачи в [77] рассмотрена плоская задача о трещине. Пластина с внутренней трещиной размерами $2c$ нагружена на горизонтальных гранях, параллельных оси x , распределенными усилиями растяжения интенсивности σ_0 .

Для определения перемещения граничных поверхностей трещин используется второе уравнение (8.11), в котором принимается $u_i = u_y$, а U_i задается в соответствии с классическим решением (8.4). В результате получается следующее уравнение:

$$u_y - s^2 \frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{\sigma_0}{G} (1 - \nu) \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Решение данного уравнения, удовлетворяющего условию симметрии при $x = 0$ и граничному условию на кончике трещины вида $u_y(x = c) = 0$, имеет вид [84]

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \beta \operatorname{ch} \beta \bar{x} \left(\int_0^{\bar{x}} \sqrt{1 - \bar{x}^2} \operatorname{sh} \beta \bar{x} d\bar{x} - \int_0^1 \sqrt{1 - \bar{x}^2} \operatorname{sh} \beta \bar{x} d\bar{x} \right) - \\ & - \beta \left(\operatorname{sh} \beta \bar{x} \int_0^{\bar{x}} \sqrt{1 - \bar{x}^2} \operatorname{ch} \beta \bar{x} d\bar{x} - \operatorname{th} \beta \operatorname{ch} \beta \bar{x} \int_0^1 \sqrt{1 - \bar{x}^2} \operatorname{ch} \beta \bar{x} d\bar{x} \right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\text{Здесь } \bar{u} = \frac{G u_y}{\sigma_0 (1 - \nu) c}, \quad \bar{x} = \frac{x}{c}, \quad \beta = \frac{c}{s}.$$

Согласно решению (8.19) получаем, что на кончике трещины $\bar{u}(\bar{x} = 1) \neq 0$ и $\bar{u}''(\bar{x} = 1) = 0$. Таким образом, края трещины при $\bar{x} = 1$ оказываются прямолинейными и образуют острый угол, увеличивающийся при возрастании нагрузки, что соответствует картине распространения трещины, получаемой при экспериментальных исследованиях.

Для определения напряжений в плоскости $y = 0$ при $x \geq c$ (т. е. вне трещины) используем первое из уравнений (8.11), в котором принимаем $\sigma_{ij} = \sigma_y$ и T_{ij} в соответствии с классическим решением (8.5). В результате получаются следующие уравнения:

$$\sigma_y - s^2 \frac{d^2 \sigma_y}{dx^2} = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2 - c^2}}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям отсутствия напряжений на кончике трещины и при $x \rightarrow \infty$, имеет вид:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\beta}{2} \left(e^{-\beta \bar{x}} \int_1^{\bar{x}} \frac{\bar{x} e^{\beta \bar{x}} d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}} + e^{\beta \bar{x}} \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{\bar{x} e^{-\beta \bar{x}} d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}} - e^{\beta(2 - \bar{x})} \int_1^{\infty} \frac{\bar{x} e^{-\beta \bar{x}} d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}} \right), \quad (8.20)$$

где $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / \sigma_0$.

Анализ (8.20) показывает, что напряжения, рассчитанные согласно данной формуле, не являются сингулярными ни при каких значениях параметра β . Зная параметр β (или s), можно найти максимальное напряжение и для оценки прочности пластины с трещиной использовать «классические» критерии прочности.

Предложенный в [77] подход к определению предела прочности пластины с трещиной хорошо согласуется с линейной механикой разрушения. Основное различие имеет место в случае отсутствия трещины. Согласно линейной механике разрушения для центральной трещины коэффициент вязкости разрушения определяется как [85]

$$K_{Ic} = \sigma \sqrt{\frac{\pi c}{\cos(\pi c/b)}}. \quad (8.21)$$

Согласно (8.21) при $c = 0$ получается, что $\sigma \rightarrow \infty$. В то же время описанный здесь подход приводит к результату $\sigma = \sigma_{\text{lim}}$, где σ_{lim} — предел прочности материала.

Вместе с тем предложенный подход представляется более простым, так как основан на традиционном критерии прочности и не требует привлечения аппарата механики разрушения.

Итак, сингулярные решения прикладных задач не имеют физической природы и порождаются несоответствием между физической и математической моделями рассматриваемого явления, процесса, объекта. Корректируя соответствующим образом физическую или математическую модели явления или объекта, можно построить регулярные решения задач, которые традиционно считаются сингулярными.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Механика деформируемых твердых тел — наука феноменологическая. Что это означает?
2. Что представляют собой «принципы континуализации и дискретизации» в МДТТ?
3. Что собой представляют «активный и пассивный эксперименты» в МДТТ?
4. Как вы понимаете термины «теоретические модели механического состояния и поведения веществ» и «моделирование постановок задач в рамках моделей поведения вещества»?
5. Как вы понимаете требование адекватности математической модели реальному объекту исследований?
6. Раскройте понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин при моделировании в механике.
7. Перечислите основные характеристики при построении математической модели в механике.
8. Назовите основные критерии и требования к построению математических моделей задач МДТТ.
9. Понятие «устойчивость» в задачах МДТТ.
10. Раскройте понятие «сингулярное решение». Приведите примеры.

ЧАСТЬ

2

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ
ГЛАВЫ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА



9.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При построении математических моделей задач МДТТ в подавляющем большинстве случаев имеем дело с решением краевых задач для эллиптических уравнений. Поэтому представляется логичным рассмотреть в первую очередь *фундаментальные решения для эллиптических уравнений*.

Фундаментальные решения эллиптических уравнений играют большую роль при построении общей теории эллиптических граничных задач, поскольку они позволяют получить интегральные представления решений, исследовать их свойства, свести граничную задачу к интегральным уравнениям.

Классическим примером эллиптического уравнения является уравнение Лапласа

$$\Delta_x u \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad n = 2, 3. \quad (9.1)$$

Фундаментальным решением уравнения Лапласа (9.1) называется функция вида:

$$K_1(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi r}, & n = 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & n = 2, \end{cases} \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (9.2)$$

Решение (9.2) обладает тем свойством, что для всякой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ с компактным носителем имеет место следующее тождество:

$$\varphi(x) = \int (n) \int K_1(x, y) \Delta_y \varphi(y) dy = \Delta_x \int (n) \int K_1(x, y) \varphi(y) dy. \quad (9.3)$$

В операторной записи выражение (9.3) означает, что $K_1(x, y)$ является решением неоднородного дифференциального уравнения:

$$\Delta_x K_1(x, y) = \delta(x, y), \quad (9.4)$$

где $\delta(x - y)$ — функция Дирака¹.

¹ Дирак Поль Адриен Морис (Dirac P. E. M., 1902–1984), английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933 г.

Следовательно, в нашем случае для каждой пробной функции $\varphi(x)$ выполняется соотношение

$$\int (n) \int \varphi(y) \delta(x-y) dy = \varphi(x).$$

Обозначим через L дифференциальный оператор:

$$Lu = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1+\dots+i_k=1}^{2m} a_{i_1\dots i_k} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_k} u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_k^{i_k}}. \quad (9.5)$$

Фундаментальное решение $K(x, y)$ оператора (9.5) определяется следующим равенством:

$$L_x K(x, y) = \delta(x-y). \quad (9.6)$$

Формулу (9.6) следует понимать так:

$$L \int (n) \int K(x, y) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Отталкиваясь от формулы (9.6), легко построить фундаментальное решение для интегрированного лапласиана $L_x = \Delta_x^m$. В самом деле, обозначим его через $K_m(x, y)$. Тогда, согласно формуле (9.6), имеем: $\Delta_x^m K_m(x, y) = \delta(x-y)$. Или по уравнению (9.4):

$$\Delta_x^{m-1} K_m(x, y) = K_1(x, y).$$

Рассматривая случай $n=3$ и переходя к сферическим координатам с центром в точке y , получим для $K_m(x, y) = K_m(r)$ уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \Delta^{m-2} K_m(r)}{dr} \right) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Откуда:

$$\Delta^{m-2} K_m(r) = -r/8\pi.$$

Аналогичным путем приходим к формуле:

$$\Delta^{m-3} K_m(r) = -r^3/96\pi.$$

Продолжая эту процедуру по индукции, получим окончательно при $n=3$:

$$K_m(x, y) = \frac{(-1)^m \Gamma(3/2-m)}{2^{2m} \sqrt{\pi^3} \Gamma(m)} r^{2m-3}, \quad (9.7)$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция Эйлера, причем ее значения от отрицательных значений аргумента вычисляются на основе следующей формулы:

$$\Gamma(m) \Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin \pi m}.$$

В частности, решение (9.7) при $m=2$:

$$K_2(x, y) = -\frac{r}{8\pi}; \quad K_3(x, y) = -\frac{r^3}{96\pi}.$$

Отметим, что для эллиптических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad a_{ij} = \text{const}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (9.8)$$

фундаментальное решение получается с помощью преобразования соответствующей квадратичной формы к каноническому виду. В результате

$$K(x, y) = \begin{cases} c \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \right)^{\frac{2-n}{2}}, & n > 2, \\ c \ln \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \right), & n = 2, \end{cases}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение к a_{ij} в матрице $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$, c — константа, определяемая коэффициентами (9.8).

Для эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами разными авторами получены в квадратурах формулы для фундаментальных решений, трудно реализуемых на практике и представляющих поэтому теоретический интерес.

9.2. ТЕНЗОР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ГРИНА

Функция Грина для эллиптического уравнения определяется следующим образом.

Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m , порожденный дифференциальным полиномом

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ и однородными краевыми условиями $B_j u = 0$, где B_j — граничные операторы с коэффициентами, определенными на границе $\partial\Omega$ области Ω , которая предполагается достаточно гладкой.

Функция $G(x, y)$ называется *функцией Грина оператора A* , если при любом $y \in \Omega$ она удовлетворяет однородным краевым условиям $B_{jx} G(x, y) = 0$ и рассматривается как обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению $A(x, D)G(x, y) = \delta(x - y)$.

В случае операторов с гладкими коэффициентами и при нормальных граничных условиях, обеспечивающих единственность решения однородной краевой задачи, функция Грина существует, и решение краевой задачи $Au = f$ представляется в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy.$$

В этом случае для функций Грина справедливы следующие равномерные оценки при $x \in \Omega$, $y \in \bar{\Omega}$:

$$|G(x, y)| \leq C|x - y|^{m-n}, \quad m < n; \quad |G(x, y)| \leq C + C|\ln|x - y||, \quad m = n.$$

Здесь функция Грина равномерно ограничена при $m > n$.

Для уравнений 2-го порядка функция Грина изучена полнее, поскольку явно выписывается вид особенности фундаментального решения. Так, для оператора Лапласа функция Грина имеет вид:

$$G(x, y) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}|x-y|^{(2-n)} + \gamma(x, y), \quad n > 2,$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| + \gamma(x, y), \quad n = 2,$$

где $\gamma(x, y)$ — гармоническая в области Ω функция, такая, что функция Грина удовлетворяет нулевому краевому условию.

Перейдем теперь к рассмотрению *основных граничных задач теории упругости*. Пусть упругое тело V является заземленным по участку граничной поверхности S_u , т. е. на S_u граничные условия имеют вид $\bar{u}(x) = 0$, $x \in S_u$, и является свободным от нагрузок на поверхности S_σ . Вся поверхность тела $S = S_\sigma \cup S_u$.

Пусть в точке $\xi \in V$ действует *единичная сосредоточенная сила*, направленная параллельно оси x_k . Будем трактовать эту силу как следующее распределение массовых сил:

$$X_i = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik}, \quad (9.9)$$

где $\delta(\bar{x} - \bar{\xi}) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(x_3 - \xi_3)$.

Вследствие свойств символа Дирака δ_{ik} и дельта-функции следует, что сосредоточенная сила равна нулю для $\bar{x} \neq \bar{\xi}$ и что интеграл от массовых сил по объему тела V равен единице:

$$\int_V X_i dV = \int_V \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik} dV(x) = \delta_{ik}.$$

Обозначим поле перемещений, вызываемое в упругом теле V силой вида (9.9), через $U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$. Индекс i обозначает i -ю составляющую вектора перемещений $U^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$, а символ k указывает причину перемещений — сосредоточенную силу, направленную параллельно оси x_k . Переменная x обозначает текущую точку, а ξ — место приложения силы.

Из определения $U_i^{(k)}$ следует, что эти перемещения являются решениями следующей системы уравнений:

$$\mu \Delta U_i^{(k)} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial U_j^{(k)}}{\partial x_j} \right] + \delta_{ik} \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) = 0, \quad (9.10)$$

или

$$\mu \Delta U_i^{(k)} + (\lambda + \mu) U_{j,ji}^{(k)} + \delta_{ik} \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) = 0 \quad i, j, k = \overline{1, 3},$$

с граничными условиями вида

$$\begin{aligned} U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) &= 0 \quad \text{на } S_u, \quad \bar{x} \in S_u; \\ p_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) &= 0 \quad \text{на } S_\sigma, \quad \bar{x} \in S_\sigma. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Здесь через $p_i^{(k)}$ обозначена функция

$$p_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) = \mu(U_{i,j}^{(k)} + U_{j,i}^{(k)})n_j + \lambda U_{j,j}^{(k)}n_j, \quad \bar{x} \in S_\sigma.$$

Если решить уравнение (9.10) с граничными условиями (9.11) для $k = 1$, то в результате получим вектор

$$\bar{U}^{(1)} = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_3^{(1)}).$$

Соответственно для $k = 2$ получаем вектор $\bar{U}^{(2)}$, а для $k = 3$ – вектор $\bar{U}^{(3)}$.

Составляющие этих векторов $U^{(k)}$ можно записать в виде матрицы:

$$\begin{vmatrix} U_1^{(1)} & U_1^{(2)} & U_1^{(3)} \\ U_2^{(1)} & U_2^{(2)} & U_2^{(3)} \\ U_3^{(1)} & U_3^{(2)} & U_3^{(3)} \end{vmatrix}. \quad (9.12)$$

Функции $U_i^{(k)}$ называются *фундаментальными решениями уравнений эластостатики* (статической теории упругости) или *функциями перемещений Грина*.

Функции $U_i^{(k)}$ образуют симметричный тензор:

$$U_k^{(j)}(\bar{\xi}, \bar{\xi}') = U_j^{(k)}(\bar{\xi}', \bar{\xi}). \quad (9.13)$$

Здесь $U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ – поле перемещений, вызванное системой сил X_k , а $U_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi}')$ – соответственно системой сил X'_j .

Замечание. Рассматриваются две системы сил: $X_k = \delta(\bar{x} - \bar{\xi})\delta_{ik}$ – приложенная в точке ξ и направленная параллельно оси x_k и $X'_j = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}')\delta_{ij}$ – приложенная в точке ξ' и направленная параллельно оси x_j .

Уравнение (9.13) представляет собой математическое выражение теоремы Максвелла о взаимности работ для сосредоточенных сил, которая является частным случаем теоремы Бетти.

Опишем «механическое» содержание уравнения (9.13). Если в точке ξ действует единичная сосредоточенная сила, параллельная оси x_k , то она вызывает в точке ξ' перемещения $\bar{U}^{(k)}(\xi', \xi)$. Его проекцию на ось x_j обозначим через $U_j^{(k)}(\xi', \xi)$ (рис. 9.1).

С другой стороны, единичная сосредоточенная сила, действующая в точке ξ' и направленная параллельно оси x_j , вызывает в точке ξ перемещения $\bar{U}^{(j)}(\xi, \xi')$. Проекцию этого перемещения на ось x_k обозначим через $U_k^{(j)}(\xi, \xi')$ (см. рис. 9.1). Равенство проекций $U_j^{(k)}(\xi', \xi)$ и $U_k^{(j)}(\xi, \xi')$ составляет механический смысл уравнения (9.13).

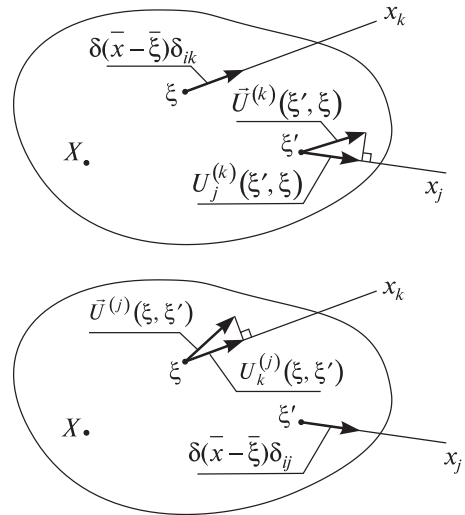


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация теоремы Максвелла о взаимности работ для сосредоточенных сил

Если силы, действующие в точках ξ и ξ' , параллельны (например, направлены по оси x_k), то

$$U_i^{(k)}(\xi', \xi) = U_i^{(k)}(\xi, \xi').$$

Данная формула свидетельствует о симметрии тензора перемещений Грина. Из (9.13) следует, что матрицу (9.12) можно представить так:

$$\begin{pmatrix} U_1^{(1)} & U_2^{(1)} & U_3^{(1)} \\ U_1^{(2)} & U_2^{(2)} & U_3^{(2)} \\ U_1^{(3)} & U_2^{(3)} & U_3^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Тензор второго ранга обычно изображается с двумя индексами внизу (U_{ij}), следовательно, тензор перемещений надо бы обозначить $U_{jk} = U_{kj}$. Однако здесь в дальнейшем для тензора перемещений будем использовать обозначения $U_j^{(k)}$, где нижний индекс относится к составляющей перемещения, верхний индекс характеризует причину, которая вызывает данные перемещения.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения из *теории потенциала*.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(\bar{x}) = X(\bar{x}), \quad x \in V, \quad u(\bar{x}) = f(\bar{x}), \quad x \in S. \quad (9.14)$$

Решение уравнения (9.14) можно выписать в интегральном виде, используя функцию Грина $G(x, \xi)$, которая является решением уравнения

$$\Delta G(\bar{x}, \bar{\xi}) = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}), \quad \bar{x}, \bar{\xi} \in V \quad (9.15)$$

с однородным граничным условием

$$G(\bar{x}, \bar{\xi}) = 0, \quad \bar{x} \in S. \quad (9.16)$$

Умножая уравнение (9.14) на $G(x, \xi)$, а уравнение (9.15) на $u(x)$, затем, почленно вычтя результаты и проинтегрировав по области V , можно получить

$$\int_V [X(\bar{x})G(\bar{x}, \bar{\xi}) - \delta(\bar{x} - \bar{\xi})u(\bar{x})] dV(\bar{x}) = \int_V (G\Delta u - u\Delta G) dV.$$

Из этого уравнения имеем

$$\int_V X(\bar{x})G(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{x}) - u(\bar{\xi}) = \int_S \left[G(\bar{x}, \bar{\xi}) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} - u(\bar{x}) \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial n} \right] dS(x). \quad (9.17)$$

С учетом граничного условия (9.16) уравнение (9.17) значительно упрощается, и функция $u(\xi)$, $\xi \in V$ определяется формулой

$$u(\xi) = \int_V X(\bar{x})G(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{x}) + \int_S u(\bar{x}) \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial n} dS(\bar{x}). \quad (9.18)$$

Так как $X(\bar{x})$ в области V и $u(\bar{x}) = f(\bar{x})$ на поверхности S являются заданными функциями, если будет известна функция Грина $G(x, \xi)$, то по формуле (9.18) мож-

но вычислить функцию $u(\bar{x})$. Например, функция Грина $G(x, \xi)$ в трехмерном случае имеет следующее представление:

$$G(\bar{x}, \bar{\xi}) = v(\bar{x}, \bar{\xi}) - \frac{1}{4\pi R}.$$

Здесь $(-1/4\pi R)$ – решение с особенностью для неограниченного пространства; $v(\bar{x}, \bar{\xi})$ – регулярное решение, которое на поверхности S : $v(\bar{x}, \bar{\xi}) = (1/4\pi R)$, $\bar{x} \in S$.

Рассмотрим *первую задачу эластостатики*. Покажем, что, используя функцию Грина, можно получить формулы, аналогичные формуле (9.18).

Пусть имеется упругое тело V , находящееся в равновесии под действием массовых сил X_i при заданных на поверхности тела S перемещениях. Тогда перемещения будут удовлетворять уравнениям Ламе и граничным условиям:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + X_i = 0, \quad x \in V, \quad u_i(x) = f_i(x), \quad x \in S. \quad (9.19)$$

Введем вспомогательный тензор перемещений $\hat{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$, удовлетворяющий следующей системе уравнений:

$$\mu \Delta \hat{U}_i^{(k)} + (\lambda + \mu) \hat{U}_{j,ji}^{(k)} + \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik} = 0, \quad \bar{x}, \bar{\xi} \in V. \quad (9.20)$$

Граничные условия для него однородные

$$\hat{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) = 0, \quad \bar{x} \in S, \quad \bar{\xi} \in V. \quad (9.21)$$

Таким образом, функция $\hat{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ означает составляющую перемещения точки $\bar{x} \in V$, параллельную оси x_i , вызванную силой $X'_i = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik}$, приложенной в точке $\bar{\xi}$ и направленной параллельно оси x_k . Перемещения $\hat{U}_i^{(k)}(x, \xi)$ относятся к упругому телу, жестко закрепленному на поверхности S (в соответствии с (9.21)).

В основном уравнении теоремы взаимности Бетти

$$\int_V (X_i u'_i - X'_i u_i) dV + \int_S (p_i u'_i - p'_i u_i) dS = 0$$

выполним следующие подстановки: $u'_i = \hat{U}_i^{(k)}$, $X'_i = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik}$.

В результате получим

$$u_k(\bar{\xi}) = \int_V X_i(\bar{x}) \hat{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{x}) - \int_S \hat{p}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) u_i(\bar{x}) dS(\bar{x}), \quad k, i = 1 \dots 3. \quad (9.22)$$

Величины $\hat{p}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ выражаются через функции $\hat{U}_i^{(k)}$, их механический смысл – это реакции, равные $\hat{\sigma}_{ij}^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) n_j(\bar{x})$, на поверхности S . Формула (9.22) представляет собой решение задачи теории упругости (9.24), (9.26), выписанной далее, и позволяет определять перемещения $u_i(\bar{x})$ в случае граничных условий в перемещениях.

Необходимо подчеркнуть, что тензор перемещений $\hat{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ считается известным (как результат решения системы дифференциальных уравнений (9.20) с однородными граничными условиями (9.21)). Отметим, что уравнения (9.22) по структуре аналогичны уравнению (9.18) теории потенциала.

Функции $\hat{U}_i^{(k)}$ являются функциями Грина для первой краевой задачи эластостатики. Они могут быть представлены в виде

$$\hat{U}_i^{(k)} = U_i^{(k)} + \bar{U}_i^{(k)},$$

где $U_i^{(k)}$ – решение соответствующей задачи теории упругости для неограниченного упругого пространства при действии единичной силы (т. е. это тензор перемещений Грина для бесконечного пространства); $\bar{U}_i^{(k)}$ – регулярная функция, выбираемая таким образом, чтобы на поверхности S тела выполнялось $\bar{U}_i^{(k)} = -U_i^{(k)}$.

Отметим, что в литературе более привычна запись уравнения (9.22), где переменная $\bar{x}$ является внешней, а $\bar{\xi}$ – переменной интегрирования. Тогда решение (9.22) принимает вид:

$$u_k(\bar{x}) = \int_V X_i(\bar{\xi}) \hat{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{\xi}) - \int_S \bar{p}_k^{(i)}(\bar{x}, \bar{\xi}) dS(\bar{\xi}). \quad (9.23)$$

Вторая краевая задача эластостатики. В этом случае на поверхности S тела объемом V заданы нагрузки $p_i = \sigma_{ij} n_j$, т. е. строится решение системы уравнений Ламе (9.19) с граничными условиями вида:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \bar{x} \in S.$$

Замечание. Тело под действием нагрузок p_i может совершать вращение как твердое целое, поэтому необходимо вводить дополнительное граничное условие, например, что тело закреплено в точке $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\bar{\eta} \in V$ (т. е. в точке $\bar{\eta}$ перемещения равны нулю и составляющие вектора поворота тоже нулевые). Предполагаем, что тело свободно от нагрузок на границе S и закреплено в точке $\bar{\eta}$.

Итак, функцию Грина $\tilde{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ находим как решение системы уравнений

$$\mu \Delta \tilde{U}_i^{(k)} + (\lambda + \mu) \tilde{U}_{j,ji}^{(k)} + \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik} = 0, \quad \bar{x}, \bar{\xi} \in V. \quad (9.24)$$

Граничные условия в этом случае

$$\tilde{p}_i^{(k)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) n_j(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in S, \bar{\xi} \in V. \quad (9.25)$$

Условия закрепления в точке

$$\tilde{U}_i^{(k)}(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = 0, \quad \tilde{\omega}_{ij}^{(k)}(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = 0, \quad \bar{\eta}, \bar{\xi} \in V. \quad (9.26)$$

В дальнейшем будем считать функции $\tilde{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ известными.

Уравнение теоремы взаимности Бетти для полей перемещений U_i и $\tilde{U}_i^{(k)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_V [X_i(\bar{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) - \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik} u_i(\bar{x})] dV(\bar{x}) + \\ & + \int_S [p_i(\bar{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) - \tilde{p}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) u_i(\bar{x})] dS(\bar{x}) = 0. \end{aligned} \quad (9.27)$$

В поверхностном интеграле в силу граничных условий (9.25) исключается слагаемое, содержащее $\tilde{p}_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) u_i(\bar{x})$. Кроме того, в уравнении (9.27) исключены слагаемые, определяющие работу сосредоточенных сил и моментов в точке $\bar{\eta}$, ибо перемещения и повороты в обеих системах в уравнении Бетти в точке $\bar{\eta}$ равны нулю.

С учетом замечаний из уравнения (9.27) получается следующая формула:

$$u_i(\vec{\xi}) = \int_V X_i(\vec{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dV(x) + \int_S p_i(\vec{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dS(x),$$

или

$$u_k(\vec{x}) = \int_V X_i(\vec{\xi}) \tilde{U}_k^{(i)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dV(\xi) + \int_S p_i(\vec{\xi}) \tilde{U}_k^{(i)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dS(\xi). \quad (9.28)$$

Эти формулы являются интегральным представлением решения второй основной краевой задачи эластостатики, построенным с помощью функций Грина $\tilde{U}_i^{(k)}$.

Третья задача эластостатики. В этом случае на части граничной поверхности S_σ заданы нагрузки p_i , а на остальной границе S_u — перемещения u_i . Здесь требуется найти решение системы уравнений Ламе (9.19) со следующими граничными условиями:

$$u_i = f_i \text{ на } S_u, \quad p_i = \sigma_{ij} n_j \text{ на } S_\sigma, \quad S = S_\sigma + S_u.$$

Введем тензор перемещений Грина $\tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi})$, компоненты которого являются решением системы уравнений

$$\mu \Delta \tilde{U}_i^{(k)} + (\lambda + \mu) \tilde{U}_{j,ji}^{(k)} + \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \delta_{ik} = 0, \quad \vec{x}, \vec{\xi} \in V$$

с граничными условиями

$$\tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) = 0, \quad \vec{x} \in S_u, \quad \vec{\xi} \in V;$$

$$\tilde{p}_i^{(k)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) n_j(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S_\sigma, \quad \vec{\xi} \in V.$$

Применяя теорему взаимности Бетти к полям перемещений u_i и $\tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi})$, получим

$$\begin{aligned} & \int_V [X_i(\vec{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) - \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \delta_{ik} u_i(\vec{x})] dV(\vec{x}) + \\ & + \int_{S_u} [p_i(\vec{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) - \tilde{p}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) u_i(\vec{x})] dS(\vec{x}) + \\ & + \int_{S_\sigma} [p_i(\vec{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) - \tilde{p}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) u_i(\vec{x})] dS(\vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Так как $\tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi})$ на S_u и $\tilde{p}_i^{(k)}$ на S_σ равны нулю, из (9.29) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} u_i(\vec{\xi}) = & \int_V X_i(\vec{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dV(x) + \int_{S_\sigma} p_i(\vec{x}) \tilde{U}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dS(x) - \\ & - \int_{S_u} \tilde{p}_i^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}) u_i(\vec{x}) dS(\vec{x}). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Поменяв в выражении (9.30) местами переменные x и ξ , имеем

$$\begin{aligned} u_k(\vec{x}) = & \int_V X_i(\vec{\xi}) \tilde{U}_k^{(i)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dV(\xi) + \int_{S_\sigma} p_i(\vec{\xi}) \tilde{U}_k^{(i)}(\vec{x}, \vec{\xi}) dS(\xi) - \\ & - \int_{S_u} \tilde{p}_k^{(i)}(\vec{x}, \vec{\xi}) u_k(\vec{\xi}) dS(\xi). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Итак, решения (9.23), (9.28), (9.31) краевых задач теории упругости могут быть получены при помощи построенных соответствующим образом функций перемещений Грина. Очевидно, что главной проблемой решения задач в этом случае является определение функций Грина. Эти функции удастся вычислить лишь для некоторых простых систем (например, для полупространства, мембран, плит и др.). В общем случае для трехмерных ограниченных областей задача определения функции Грина достаточно сложна.

9.3. ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ¹

Формулы Сомильяны в теории упругости являются аналогом подобной формулы, имеющейся в теории потенциала. Поэтому для более четкого выяснения смысла формул Сомильяны приведем упоминаемую формулу из теории потенциала.

Рассматривается граничная задача для уравнения Пуассона

$$\Delta u(\bar{x}) = X(\bar{x}), \quad \bar{x} \in V$$

с заданными граничными условиями типа Дирихле или Неймана на поверхности тела S . Искомая функция $u(x)$, решение сформулированной задачи, в произвольной точке $\bar{x}$ области V определяется как решение следующего интегрального уравнения:

$$u(\xi) = \int_V X(\bar{x}) u'(\bar{x}, \xi) dV(\bar{x}) + \int_S \left[u(x) \frac{\partial u'(x, \xi)}{\partial n} - u'(x, \xi) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] dS(x), \quad \xi \in V,$$

$$u(\xi) = 0 \quad \xi \in V_\infty - V. \quad (9.32)$$

Здесь $u'(x, \xi)$ — решение граничной задачи в неограниченной области V_∞ для уравнения

$$\Delta u'(\bar{x}, \bar{\xi}) = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in V, \quad \bar{x} \in V_\infty.$$

В соответствии с этим $u'(x, \xi)$ имеет вид:

$$u'(\bar{x}, \bar{\xi}) = -\frac{1}{4\pi R},$$

где $R = \sum_i [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2}$ — расстояние между точками $\bar{x}$ и $\bar{\xi}$.

Формула (9.32) является фундаментальной формулой теории потенциала. С ее помощью можно определить функцию $u(\bar{x})$ в области V , если известны функция $X(\bar{x})$ и функции $u(\bar{x})$ и $\partial u(\bar{x}) / \partial n$ на граничной поверхности S .

Теперь приведем процедуру получения *формул Сомильяны*, которые выражают собой интегральное представление решения системы уравнений Ламе

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + X_i = 0, \quad \bar{x} \in V$$

с заданными граничными условиями. При получении решения используется понятие тензора перемещений Грина, введенное в предыдущем разделе.

¹ Сомильяны (Somigliana C., 1860—1955), итальянский физик.

Стандартная запись формул Соммильяны имеет следующий вид:

$$u_k(\bar{\xi}) = \int_S \left[p_i(\bar{x}) U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) - p_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) u_i(\bar{x}) \right] dS(\bar{x}) + \int_V X_i(\bar{x}) U_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{x}). \quad (9.33)$$

Здесь $U_i^{(k)}$ — компоненты тензора перемещений Грина; $p_i^{(k)}$ — компоненты вектора усилий, соответствующего этому тензору, которые, в свою очередь, отвечают напряженному состоянию $\sigma_{ij}^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$,

$$p_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) = \mu \left(U_{i,j}^{(k)} + U_{j,i}^{(k)} \right) n_j + \lambda n_i U_{j,j}^{(k)}.$$

Замечание 1. Формулы Соммильяны (9.33) имеют в основном только теоретическое значение, так как на границе области могут быть отдельно заданы либо перемещения $u_i = f_i$, либо нагрузки $p_i = \sigma_{ij} n_j$.

Замечание 2. Если массовые силы отсутствуют, то уравнение (9.33) можно дифференцировать произвольное число раз по x_i . Следовательно, решения u_k в этом случае являются аналитическими функциями координат и в окрестности произвольной точки $\bar{x} \in V$ их можно разложить в ряд по координатам.

9.4. МЕТОД КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Метод квазифункций Грина был предложен В. Рвачевым¹ и В. Проценко² для решения основных краевых задач, связанных с уравнением Пуассона [86]. Впоследствии он разрабатывался в трудах М. Журавкова и М. Мартыненко³ применительно к решению различных классов задач механики деформируемого твердого тела [32; 87].

Метод квазифункций Грина заключается в редукции дифференциальных граничных задач к интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям, ядрами которых выступают истокообразные функции специального вида — квазифункции Грина. Использование этих функций объясняется тем, что их легче строить по сравнению с классическими функциями Грина (построение функций Грина для различных классов задач представляет собой самостоятельную сложную проблему математической физики). В основу выполнения данной операции положена теория R -функций [88]. Существенным моментом является тот факт, что ядра подынтегральных выражений содержат информацию о границе области на аналитическом уровне. Кроме того, например интегральные и интегро-дифференциальные представления для характеристик НДС $\{u_i, \|\sigma_{ij}\|\}$ имеют эквивалентную структуру при различных подходах к решению той или иной задачи (решение в рамках теории упругости, вязкоупругости, пластичности; учет неоднородности, нелинейности, тепловых эффектов; рассмотрение статики и динамики процесса и т. п.).

¹Рвачев Владимир Логвинович (1926–2005), советский и украинский математик, механик, академик АН УССР.

²Проценко Владимир Сидорович, советский и украинский математик и механик, доктор физико-математических наук, профессор.

³Мартыненко Михаил Дмитриевич (1937–2011), советский и белорусский математик, механик, доктор физико-математических наук, профессор.

Квазифункция Грина в общем виде имеет следующую структуру:

$$F(x, \xi) = \delta^*(x, \xi) + q(x, \xi). \quad (9.34)$$

Здесь $\delta^*(x, \xi)$ – фундаментальное сингулярное решение исходного дифференциального уравнения, являющегося базовым при описании поведения и состояния рассматриваемого класса задач. Структура и вид функции $q(x, \xi)$ существенным образом определяются типом краевых (граничных) условий и аналитической функцией $\omega(x)$, описывающей границу области решения задачи.

Для каждого рассматриваемого класса задач все перечисленные функции и операторы приобретают конкретный явный вид. Так, например, в качестве функции $\delta^*(x, \xi)$ берутся функции [87]:

$$\delta^*(x, \xi) = \begin{cases} \ln(1/r), & m=2 \\ 1/r, & m=3 \end{cases} \quad \text{– для уравнения Пуассона;}$$

$$\delta^*(x, \xi) = \frac{1}{4\pi r} \exp(ikr), \quad m=3 \quad \text{– для волнового уравнения;}$$

$\delta^*(x, \xi) = \frac{1}{16\pi} r^2 \ln r^2, \quad m=3$ – фундаментальное решение бигармонического уравнения;

$$\delta^*(p, N, t - \tau) = \frac{1}{\left(2\sqrt{(\pi\lambda/c\rho)(t - \tau)}\right)^3} \exp\left[-\frac{c\rho r_{pN}^2}{4\lambda(t - \tau)}\right] \quad \text{– фундаментальное решение}$$

уравнения теплопроводности и т. д.;

$\Phi(x, \xi) = \frac{1}{16\pi} r^2 \ln r^2$ – фундаментальное решение бигармонического уравнения на плоскости для тел типа плит.

Основы и многочисленные приложения метода квазифункций Грина (9.34) изложены, например, в [32; 87; 89]. Там же подробно изучены разрешающие системы уравнений задач теории упругости (вывод уравнений, исследование их корректности, существования решения, изучение ядер и т. д.); приведено большое количество систем разрешающих уравнений для задач из различных разделов математической физики и механики деформируемого твердого тела; описаны примеры использования метода для решения сложных прикладных задач.

Примеры. Для задач в компонентах вектора перемещений за исходные выбирались уравнения Ламе

$$\mu \bar{\Delta} \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} + \rho \bar{X} = 0,$$

к которым применялась процедура получения интегральных представлений искомой функции метода квазифункций Грина. В этом случае квазифункция Грина $F(x, \xi)$:

$$F(x, \xi) = \begin{cases} \ln(1/r) - q(x, \xi), & m=2, \\ 1/r - q(x, \xi), & m=3, \end{cases}$$

$$q(x, \xi) = \begin{cases} -(1/2) \ln(r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)), & m=2, \\ (r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi))^{-1/2}, & m=3, \end{cases}$$

а $\omega(x)$ — нормализованное до 1-го порядка уравнение границы области интегрирования S .

В [87] показано, что для непрерывности ядер интегральных уравнений относительно компонент вектора перемещений функцию $\omega(x)$ необходимо строить в виде:

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \left[\Delta \omega_0 - \frac{(\nabla \omega_0)^2 - 1}{\omega_0} \right], \quad m=2,$$

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 X + \omega_0^3 \Psi, \quad m=3,$$

$$X = \frac{1}{8} (2\Delta \omega_0 - 3\Phi_0), \quad \Phi_0 = \omega_0^{-1} [(\nabla \omega_0)^2 - 1],$$

$$\Psi = \frac{1}{3} [2X\Delta \omega_0 - 6X^2 - 4X\Phi_0 - (\nabla \omega_0, \nabla X)].$$

Здесь ω_0 — некоторая нормализованная функция, описывающая рассматриваемую область [88].

9.5. МЕТОД ТРЕФФЦА

Большое значение для построения решений различных классов задач, относящихся к системам уравнений равновесия Ламе (уравнения равновесия упругого тела в перемещениях), имеют частные решения.

Частные решения — это решения, удовлетворяющие системе уравнений Ламе, но не удовлетворяющие граничным условиям или удовлетворяющие только некоторым из них.

Если известны частные решения уравнений Ламе $U_i^{(k)}$, то его общее решение можно представить в виде следующего конечного или бесконечного ряда:

$$u_i = \sum_k a_k U_i^{(k)}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Коэффициенты a_k выбираются так, чтобы были выполнены все граничные условия.

Из определения функций Грина следует, что частные решения важны для их построения. Поэтому среди частных решений системы уравнений Ламе особое место занимают *фундаментальные решения*, например отвечающие действию сосредоточенных сил в неограниченном упругом пространстве. При помощи фундаментальных решений для неограниченного упругого пространства можно найти решения для ограниченной области, применяя формулы Соммильяны и Грина.

Рассмотрим некоторые примеры построения частных решений.

Запишем уравнения Ламе в следующей форме:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = 0. \quad (9.35)$$

Рассмотрим случай отсутствия массовых сил. Тогда, как показано ранее, дилатация $\theta = u_{i,i}$ является гармонической функцией, т. е. $\Delta\theta = 0$, а составляющие вектора перемещений удовлетворяют бигармоническому уравнению:

$$\Delta\Delta u_i = 0. \quad (9.36)$$

Будем строить частные решения уравнений (9.36), используя *теорему Альманси*¹, и назовем их *представлениями Треффца* [45].

Выбор частных решений уравнений (9.36) в форме Треффца зависит в некоторой степени от формы исследуемого тела. Например, в случае упругого полупространства $x_3 \geq 0$ представление Треффца для перемещений u_i имеет следующий вид:

$$u_i = \varphi_i + x_3 \chi_i, \quad \Delta\varphi_i = 0, \quad \Delta\chi_i = 0. \quad (9.37)$$

Представление (9.37) удобно в том смысле, что на границе тела $x_3 = 0$ заданные перемещения равны функции φ_i . В этом случае функцию φ_i можно определить простым способом, решая уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi_i = 0, \quad i = \overline{1,3}. \quad (9.38)$$

Граничные условия в этом случае

$$\varphi_i(x_1, x_2, 0) = U_i(x_1, x_2), \quad (9.39)$$

где U_i — заданные перемещения.

В (9.37) функции φ_i и χ_i связаны между собой посредством уравнений Ламе (9.35). Подставляя (9.37) в (9.35), получаем следующее соотношение:

$$2\chi_{i,3} + k(\chi_3 + \varphi_{k,k} + x_3\chi_{k,k})_{,i} = 0, \quad k = 1 + \lambda/\mu. \quad (9.40)$$

Упростим соотношение (9.40). Примем, что $\chi_i = \psi_{,i}$, где ψ также является гармонической функцией.

В этом случае соотношение (9.40) приводится к виду:

$$2\psi_{,i3} + k(\psi_{,3} + \varphi_{k,k})_{,i} = 0, \quad k = 1 + \lambda/\mu.$$

Проинтегрировав данное уравнение по x_i , и приняв постоянную интегрирования (не нарушая общности при этом) равной нулю, получим:

$$\psi_{,3} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \varphi_{k,k} \quad \text{или} \quad \psi_{,3} = -\frac{1}{3 - 4\nu} \varphi_{k,k}. \quad (9.41)$$

Так как на границе упругого полупространства $x_3 \geq 0$ заданы перемещения $U_i(x_1, x_2)$, то далее выполняем следующие действия.

Решаем уравнения Лапласа (9.38) с граничными условиями (9.39) и находим функции φ_i . Из этих функций образуем дивергенцию $\varphi_{k,k}$ и подставляем в правую часть уравнения (9.41). После интегрирования этого уравнения находим функцию ψ . Теперь, зная функции φ и ψ , определяем поле перемещений согласно (9.37).

Примеры решения задач. Рассмотрим класс граничных задач по определению НДС в неограниченном упругом пространстве при действии сосредоточенных сил, а также по определению деформаций шара и цилиндра.

¹Альманси Эмилио (Almansi Emilio, 1869–1947), итальянский физик и математик.

Принимаем следующие предположения относительно составляющих вектора перемещения:

$$u_i = \varphi_i + (R^2 - a^2)\psi_{,i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (9.42)$$

где a — некоторая постоянная.

В рассматриваемом случае функции φ_i определяются как решение следующей граничной задачи (U_i — заданные перемещения):

$$\Delta\varphi_i = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad \varphi_i|_{R=a} = U_i.$$

Подставляя соотношения (9.42) в уравнения Ламе (9.35), получаем

$$2\psi_{,i} + 4\zeta_{,i} + k(\varphi_{k,k} + 2\zeta)_{,i} = 0, \quad (9.43)$$

где $\zeta = x_j\psi_{,j} = R\partial_R\psi = \vec{R} \text{grad} \psi$, $\partial_R = \partial/\partial R$.

Интегрируя (9.43) по x_i и приравнявая постоянные интегрирования к нулю (это можно делать, так как выполнять граничные условия не надо), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R\partial_R\psi + \frac{\mu}{\lambda + 3\mu}\psi = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}\varphi_{k,k}.$$

Проинтегрируем это уравнение по радиусу R :

$$\psi = -\frac{1}{6-8\nu}R^{-\alpha}\int_b^R R_0^{\alpha-1}\varphi_{k,k}dR_0 + CR^{\alpha-1}, \quad \alpha = \frac{1-2\nu}{3-4\nu} = \frac{\mu}{\lambda + 3\mu}.$$

Здесь постоянную интегрирования C выбираем таким образом, чтобы ψ была гармонической функцией. Если начало координат является регулярной точкой рассматриваемой области, то следует положить $C = 0$, а интегрирование начать с нуля.

Замечание. Удобство метода Треффца построения частных решений состоит в том, что решение задачи частично сводится к решению известных граничных задач теории потенциала.

Метод Треффца используется при построении решения Кельвина (действие массовых сил в неограниченном теле), при решении первой и второй краевых задач для подпространства.

Теорема Альманси формулируется следующим образом: каждая функция вида $\varphi + x_i\psi$, $i = \overline{1,3}$ удовлетворяет бигармоническому уравнению, если функции φ и ψ являются гармоническими в рассматриваемой области V .

Справедлива и *обратная теорема*: для каждой функции f , бигармонической в V , существуют функции φ и ψ такие, что $f = \varphi + x_i\psi$, $i = \overline{1,3}$.

Таким образом, например, если в выражении $f = \varphi + R^2\psi$, $R = x_i x_i$, $i = \overline{1,3}$ функции φ и ψ являются *гармоническими*, то функция f является *бигармонической*. Это можно проверить, используя следующее тождество:

$$\Delta(u \cdot v) = u\Delta v + v\Delta u + 2v_{,i}u_{,i}.$$

Тогда

$$\Delta f = \psi\Delta R^2 + 4x_i\psi_{,i} = 6\psi + 4R\partial_R\psi, \quad \Delta\Delta f = 6\Delta\psi + 8\Delta\psi + 4R\partial_R\Delta\psi = 0.$$

9.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАПКОВИЧА – НЕЙБЕРА

Весьма интересный метод решения уравнений теории упругости в перемещениях предложил Папкович в 1932 г. Аналогичное представление, найденное другим путем, было получено Нейбером¹ в 1934 г. Изложим основные моменты этого подхода.

Перемещение $\vec{u}$ изначально выражается через скалярную функцию φ и векторную функцию $\vec{\psi}$ в следующем виде:

$$\vec{u} = A \operatorname{grad}(\varphi + \vec{R} \cdot \vec{\psi}) + B \vec{\psi}, \quad (9.44)$$

где $\vec{R}$ — радиус-вектор точки; A и B — константы, выбираемые таким образом, чтобы φ и $\vec{\psi}$ удовлетворяли как можно более простым и известным дифференциальным уравнениям.

С учетом представления (9.44) для функции $\vec{u}$ получаем:

$$\operatorname{div} \vec{u} = A \Delta \varphi + A \vec{R} \Delta \vec{\psi} + (2A + B) \operatorname{div} \vec{\psi}. \quad (9.45)$$

Подставляя (9.45) в уравнения Ламе (9.35), получаем

$$A(1+k) \operatorname{grad}[\Delta \varphi + \vec{R} \Delta \vec{\psi}] + [(1+k)(2A+B) - B] \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\psi} + (B \Delta \vec{\psi} + \vec{X}/\mu) = 0. \quad (9.46)$$

Здесь $k = 1 + \lambda/\mu$; константы A и B выбираем так, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось нулю. При этом дополнительно полагаем, что $A = 1$. Следовательно, $B = -2(1+k)/k = -4(1-\nu)$.

Тогда уравнение (9.46) будет верным, если φ и $\vec{\psi}$ будут удовлетворять системе следующих уравнений:

$$\Delta \varphi + \vec{R} \Delta \vec{\psi} = 0, \quad 4(1-\nu) \Delta \vec{\psi} - \vec{X}/\mu = 0. \quad (9.47)$$

Исключая слагаемое $\Delta \vec{\psi}$ из первого уравнения с помощью второго уравнения (9.47), получаем такую систему уравнений:

$$4(1-\nu) \Delta \varphi + \frac{\vec{R} \cdot \vec{X}}{\mu} = 0, \quad 4(1-\nu) \Delta \vec{\psi} - \frac{\vec{X}}{\mu} = 0. \quad (9.48)$$

Для определения функций φ и $\vec{\psi}$ получены уравнения простого вида. Из уравнений (9.48) следует, что при отсутствии массовых сил эти функции являются гармоническими.

Итак, в подходе Папковича – Нейбера определение поля перемещений основано на решении неоднородных уравнений (9.48) при учете заданных условий на границе тела (выраженных через функции φ и $\vec{\psi}$). Поле перемещений определяется по известным функциям φ и $\vec{\psi}$ по следующим формулам:

$$\vec{u} = \operatorname{grad}(\varphi + \vec{R} \cdot \vec{\psi}) - 4(1-\nu) \vec{\psi}. \quad (9.49)$$

Иначе

$$u_i = \varphi_{,i} + (x_j \psi_{,j})_{,i} - 4(1-\nu) \psi_i \quad (9.50)$$

¹ Нейбер Г. (Neuber H.) — немецкий ученый.

Если массовые силы отсутствуют, то, согласно выше приведенному замечанию, получаем, что

$$\operatorname{div} \vec{u} = \theta = -2(1-2\nu) \operatorname{div} \vec{\psi}.$$

Следовательно:

$$\Delta \operatorname{div} \vec{u} = \Delta \theta = 0.$$

Данное тождество является верным (см. гл. 4, часть 1). Тогда для вектора угла поворота $\vec{\omega}$ можно выписать следующее представление:

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u} / 2 = -2(1-\nu) \operatorname{rot} \vec{\psi}.$$

И поэтому

$$\Delta \vec{\omega} = -2(1-\nu) \operatorname{rot} \Delta \vec{\psi} = 0.$$

Таким образом, вектор $\vec{\omega}$ является гармоническим вектором.

Формулы для компонент тензора напряжений σ_{ij} имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\Phi_{,ij} - 2(1-\nu) (\psi_{i,j} + \psi_{j,i}) - \delta_{ij} \nu \Delta \Phi \right],$$

где $\Phi = \varphi + x_j \psi_j$, $\Delta \Phi = 2 \operatorname{div} \vec{\psi}$.

Приведем некоторые общие замечания по использованию подхода Папковича – Нейбера.

1. Метод используется в основном при решении трехмерных задач. Однако он применяется также и для двумерных задач, где его вид аналогичен.

2. Для решения большого класса задач достаточно в представлении (9.49) использовать три функции ψ_i . Например, в случае действия в неограниченном упругом пространстве сосредоточенной силы принимается, что $\varphi = 0$, а ψ_i определяются из (9.48). Если рассматривается задача об упругом полупространстве при нагрузке, перпендикулярной к границе, достаточно использовать такие три функции: $\varphi, \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, 0)$.

Замечание. До настоящего времени вопрос, является ли решение, построенное при помощи только трех функций Папковича – Нейбера, полным, представляется дискуссионным. Существует обширная литература по этому вопросу [6].

9.7. ПОТЕНЦИАЛ УПРУГОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Запись составляющих вектора перемещений через четыре гармонические функции в виде Папковича – Нейбера (9.50) имеет общий характер. В таком виде она используется при сложных формах тела и при неоднородных граничных условиях. В частных случаях («хорошая» форма граничной поверхности тела, стандартные граничные условия и т. п.) представления (9.50) имеют более простой вид. В частности, в них может присутствовать меньше функций. Однако, несмотря на последнее обстоятельство, класс решаемых задач, в которых эффективно использование такой записи вектора перемещений, все же достаточно широк.

В качестве примера рассмотрим простейшую форму соотношения (9.50), когда перемещение выражается через единственную функцию φ :

$$u_i = \varphi_{,i}. \quad (9.51)$$

Определенная таким образом функция (введенная впервые Ламе) называется *потенциалом упругого перемещения*. С помощью этого потенциала φ найдено множество простых решений эластостатики, представляющих собой либо полные решения уравнений в перемещениях (например, в неограниченной области), либо частные решения, которые удовлетворяют основным уравнениям состояния и части граничных условий.

Приведем некоторые классы задач, решение которых удобно строить, используя потенциал упругого перемещения.

1. Действие массовых сил в неограниченном упругом пространстве. Пусть массовые силы обладают потенциалом P (т. е. $X_i = \rho \cdot P_{,i}$) и действуют в ограниченной области V' упругого пространства. Уравнения Ламе в этом случае имеют вид:

$$\Delta u_i + k \theta_{,i} + (\rho/\mu) P_{,i} = 0, \quad k = 1 + \lambda/\mu.$$

Подставим в последнее выражение для u_i через потенциал φ (9.51) и полученное уравнение проинтегрируем по x_i . Получим следующее уравнение Пуассона:

$$\Delta \varphi = -\rho P / (\lambda + 2\mu). \quad (9.52)$$

Частное решение этого уравнения можно записать в такой форме:

$$\varphi(x) = \frac{\rho}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_{V'} \frac{P(\xi) dV(\xi)}{R(x, \xi)}, \quad R(x, \xi) = [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2}. \quad (9.53)$$

Вместе с тем *решение (9.53) является окончательным решением для неограниченного упругого тела*.

Зная функцию φ , можно вычислить перемещения, деформации и напряжения в теле, воспользовавшись следующими формулами:

$$u_i = \varphi_{,i}, \quad \varepsilon_{ij} = \varphi_{,ij}, \quad \theta = \Delta \varphi = -\frac{\rho \cdot P}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varphi_{,ij} - \frac{\rho \lambda \delta_{ij}}{\lambda + 2\mu} P. \quad (9.54)$$

2. Действие массовых сил в упругом теле ограниченных объемов. Если тело является ограниченным, то к решению $u'_i = \varphi_{,i}$ следует добавить решение u''_i соответствующей однородной системы уравнений в перемещениях, выраженное через новые функции φ'' и ψ''_i по формуле (9.50). Перемещения u''_i следует выбирать таким образом, чтобы выполнялись заданные граничные условия.

3. Рассмотрим уравнение (9.52) при отсутствии массовых сил. В этом случае уравнение Пуассона (9.52) переходит в соответствующее уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (9.55)$$

Функция φ является гармонической, а формулы (9.54) переходят в следующие:

$$u_i = \varphi_{,i}, \quad \varepsilon_{ij} = \varphi_{,ij}, \quad \theta = 0, \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varphi_{,ij}.$$

Существует целый ряд частных решений, удовлетворяющих уравнению Лапласа (9.55). Например, такими функциями являются следующие:

$$R^{-1}, \ln r/C, \ln(R + x_3), x_3 \ln r, \vartheta, x_3 \vartheta. \quad (9.56)$$

Здесь ϑ — координата в цилиндрической системе координат, $R = \left[\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right]^{1/2}$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Рассмотрим некоторые из функций (9.56).

Пример 1. Пусть $\varphi = C/R$. Эта функция представляет собой частное решение дифференциального уравнения

$$\Delta\varphi = \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \right) \varphi(R) = 0. \quad (9.57)$$

Как следует из вида уравнения (9.57), функцию $\varphi = C/R$ можно связать с деформационными процессами, характеризующимися центральной симметрией.

В рассматриваемом случае функции перемещения, деформации и напряжения в сферической системе координат (R, ϑ, θ) определяются как функции только радиуса R :

$$u_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{C}{R^2}, \quad \varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R} = \frac{2C}{R^3}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_R}{R} = -\frac{C}{R^3},$$

$$\theta = \sum u_i = 0, \quad \sigma_{RR} = 2\mu\varepsilon_{RR} = \frac{4\mu C}{R^3}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{2\mu C}{R^3}.$$

Если к данному напряженному состоянию добавить всестороннее равномерное растяжение вида:

$$\sigma_{RR} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\theta\theta} = 2\mu D,$$

то суперпозицией этих двух состояний будет такое напряженное состояние:

$$\sigma_{RR} = 2\mu \left(\frac{2C}{R^3} + D \right), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \left(D - \frac{C}{R^3} \right). \quad (9.58)$$

Напряженное состояние вида (9.58) возникает в сплошном или полом шаре под действием его равномерного нагружения радиальным давлением. Постоянные C и D в соотношениях (9.58) определяются из граничных условий.

Например, в случае полого шара внутреннего радиуса a и наружного радиуса b при действии постоянного радиального давления p_a на поверхности $R = a$ и, соответственно, давления p_b на поверхности $R = b$ граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{RR}(a) = -p_a, \quad \sigma_{RR}(b) = -p_b.$$

Если же шар является сплошным, то $C = 0$, так как перемещения u_R в центре шара должны быть равны нулю. Тогда в шаре возникает состояние равномерного давления $\sigma_{RR} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\theta\theta} = -p_b$.

Пример 2. Рассмотрим потенциал вида

$$\varphi = C \ln(r/c), \quad (9.59)$$

который представляет собой частное решение (с особенностью) следующего дифференциального уравнения:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \varphi(r) = 0.$$

Функция φ (9.59) связана с осесимметричным деформированным состоянием тела, не зависящим от угла θ и переменной z .

Для такого деформированного состояния получаем следующие компоненты НДС:

$$\begin{aligned} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C}{r}, \quad u_\theta = u_z = 0, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \\ \theta = \sum u_i = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} = -\frac{2\mu C}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{2\mu C}{r^2}. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Если к напряженному состоянию (9.60) добавить равномерное растяжение $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 2\mu D$, то в результате такого общего воздействия получаем следующее напряженное состояние:

$$\sigma_{rr} = 2\mu \left(D - \frac{C}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \left(D + \frac{C}{r^2} \right). \quad (9.61)$$

Напряженное состояние вида (9.61) возникает в бесконечно длинной толстостенной трубе под действием равномерного давления на внутренней $r = a$ и внешней $r = b$ поверхностях.

Постоянные C и D определяются из граничных условий. Так, если p_a — давление на поверхности $r = a$, а p_b — давление на поверхности $r = b$, то

$$\sigma_{rr}(a) = -p_a, \quad \sigma_{rr}(b) = -p_b.$$

Если цилиндр сплошной и кругового сечения, то $C = 0$, так как перемещения u_r на оси цилиндра должны быть равны нулю. В этом случае в цилиндре формируется напряженное состояние, представляющее собой равномерное давление $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p_b$.

Пример 3. Если потенциал упругого перемещения равен $\varphi = C \cdot \theta$, то нетрудно показать, что он удовлетворяет уравнению Лапласа в цилиндрических координатах и ему отвечает следующее напряженно-деформированное состояние:

$$\begin{aligned} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{C}{r}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{C}{r^2}, \\ \theta = \sum u_i = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \\ \sigma_{r\theta} = 2\mu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\varphi}{r} \right) = -\frac{2\mu C}{r^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, потенциал $\varphi = C\theta$ вызывает в теле только перемещения u_θ и напряжения $\sigma_{r\theta}$.

Такое напряженное состояние можно реализовать в бесконечной толстостенной трубе, нагруженной по внешней и внутренней поверхностям касательными напряжениями $\sigma_{r\theta}$. Эти напряжения уравниваются моментом сил, равным $\pm 2\pi C$ и направленным вдоль оси трубы.

Пример 4. Исследуем потенциал упругого перемещения вида

$$\varphi = C \ln(R + z), \quad R = (r^2 + z^2)^{1/2}. \quad (9.62)$$

Функция (9.62) известна как *решение Буссинеска второго рода*. В этом случае напряжения в прямоугольной системе координат выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu C \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{R^3(R+x_3)} - \frac{x_1^2}{R^2(R+x_3)^2} \right], \quad \sigma_{12} = -2\mu C \frac{x_3 x_1}{R^3} \frac{2R+x_3}{(R+x_3)^2}, \\ \sigma_{22} &= 2\mu C \left[\frac{x_1^2 + x_3^2}{R^3(R+x_3)} - \frac{x_2^2}{R^2(R+x_3)^2} \right], \quad \sigma_{23} = -2\mu C \frac{x_2}{R^3}, \\ \sigma_{33} &= -2\mu C \frac{x_3}{R^3}, \quad \sigma_{13} = -2\mu C \frac{x_1}{R^3}.\end{aligned}\quad (9.63)$$

Представления (9.63) имеют следующую особенность: в плоскости $x_3 = 0$ напряжения σ_{33} равны нулю всюду, кроме начала координат. Таким образом, решение (9.63) имеет особенность порядка $1/R^2$ в начале координат и на отрицательной оси x_3 .

Можно показать, что потенциал $\varphi = C \ln(R+z)$ обуславливает напряженное состояние, возникающее в неограниченном пространстве с цилиндрическим вырезом малого диаметра, простирающимся от $z = 0$ до $z = -\infty$ и наполненный жидкостью, оказывающей на стенки гидростатическое давление.

Данное решение может быть использовано для построения решений в случае более сложных типов нагружений. Так, функция $\varphi = \ln(R+z)$ используется в задаче о действии на упругое полупространство $z \geq 0$ сосредоточенной силы, направленной по оси $+z$.

9.8. ДЕЙСТВИЕ МАССОВЫХ СИЛ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ТЕЛЕ

Рассмотрим *метод Кельвина*, применяемый для построения фундаментального решения в неограниченном теле в случае действия массовых сил.

Пусть в неограниченном упругом теле действуют массовые силы $X_i(\vec{x})$, распределенные в ограниченной области V' . Очевидно, что действие этих сил вызывает деформацию тела, убывающую по мере удаления от области V' и принимающую на бесконечности нулевые значения. Таким образом, решается задача теории упругости для системы уравнений Ламе в неограниченной области:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + X_i, \quad x \in V_\infty. \quad (9.64)$$

При этом предполагается, что $u_i = 0$ на бесконечности.

Частное решение системы (9.64) ищем в форме Кельвина:

$$u_i = \varphi_{,i} + \epsilon_{ijk} \psi_{k,j} \quad \text{или} \quad \vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}. \quad (9.65)$$

В формуле (9.65) ϵ_{ijk} — символ Леви — Чивиты¹ (псевдотензор). Он обладает следующими свойствами:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если подстановка } (i, j, k) \text{ четная;} \\ -1, & \text{если подстановка } (i, j, k) \text{ нечетная;} \\ 0, & \text{если не все индексы } i, j, k \text{ различны.} \end{cases}$$

¹Леви-Чивита Т. (Levi-Civita T., 1873–1941), итальянский математик.

Например, $\epsilon_{112}=\epsilon_{331}=\epsilon_{222}=0$, $\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=1$, $\epsilon_{213}=\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=-1$.

Представляем уравнения (9.64) в виде следующего векторного уравнения:

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{X} = 0. \quad (9.66)$$

Кроме того, разложим массовые силы на потенциальную и соленоидальную части:

$$\vec{X} = \rho(\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \vec{\chi}). \quad (9.67)$$

Подставляем (9.65) и (9.67) в уравнение (9.66). В результате получаем следующую систему уравнений Пуассона:

$$\Delta \varphi + \frac{\rho \vartheta}{\lambda + 2\mu} = 0, \quad \Delta \vec{\psi} + \frac{\rho \vec{\chi}}{\mu} = 0. \quad (9.68)$$

Решения этих уравнений в неограниченном пространстве имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \frac{\rho}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_V \frac{\vartheta(\xi) dV(\xi)}{R(x, \xi)}, \quad \vec{\psi}(x) = \frac{\rho}{4\pi\mu} \int_V \frac{\vec{\chi}(\xi) dV(\xi)}{R(x, \xi)}. \quad (9.69)$$

Здесь $R = [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2}$ — расстояние между точками $\vec{x}$ и $\vec{\xi}$.

В уравнениях (9.69) функции ϑ и $\vec{\chi}$ необходимо выразить через функцию массовых сил $\vec{X}$. Из соотношения (9.67) имеем:

$$\operatorname{div} \vec{X} = \rho \Delta \vartheta, \quad \operatorname{rot} \vec{X} = -\rho \Delta \vec{\chi}.$$

Тогда для определения функций ϑ и $\vec{\chi}$ можно выписать следующие уравнения:

$$\rho \Delta \vartheta = \vec{X}_{i,i}, \quad \rho \Delta \chi_i = -\epsilon_{ijk} X_{k,j}. \quad (9.70)$$

Решение первого уравнения Пуассона из (9.70) имеет вид:

$$\vartheta(x) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V \frac{1}{R(x, \xi)} \frac{\partial}{\partial \xi_i} [X_i(\xi)] dV(\xi),$$

или

$$\vartheta(x) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[X_i(\xi) \frac{1}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi) + \frac{1}{4\pi\rho} \int_V X_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi).$$

Преобразуем первый интеграл с помощью теоремы Гаусса — Остроградского в интеграл по поверхности.

Так как область является бесконечной, то поверхность является настолько удаленной, что массовые силы можно считать равными нулю на поверхности (в соответствии с принципом Сен-Венана):

$$\int_V \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\frac{X_i(\xi)}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi) = \int_A \frac{X_i(\xi) n_i}{R(x, \xi)} dA(\xi) = 0.$$

Кроме того, учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right] = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right]$$

для функции $\vartheta(x)$ получаем следующую формулу:

$$\vartheta(x) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V X_i(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V \vec{X}(\xi) \cdot \text{grad}_x \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi). \quad (9.71)$$

Применяя аналогичную процедуру для второго из уравнений (9.70), приходим к такой формуле:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(x) &= -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V \epsilon_{ijk} X_i(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V \vec{X}(\xi) \cdot \text{grad}_x \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi). \end{aligned} \quad (9.72)$$

Зная функции ϑ и $\bar{\chi}$, можно теперь определить функции φ_i и ψ_i по формулам (9.69).

В качестве приложения рассмотрим частный случай данного общего решения: действие сосредоточенной силы, приложенной в начале координат и направленной параллельно оси x^3 .

Сосредоточенную силу будем трактовать как распределение массовых сил, определенных формулой

$$X_i = \delta_{i3} \delta(\vec{x}), \quad (9.73)$$

где $\delta(\vec{x})$ — функция Дирака.

Подставляя (9.73) в (9.71), получаем:

$$\vartheta(x) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V \delta_{i3} \delta(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{R(x, \xi)} \right] dV(\xi) = -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{1}{R(x, 0)} \right].$$

Здесь $R(x, 0) = (x_i \cdot x_i)^{1/2}$. В дальнейшем $R(x, 0)$ для краткости обозначим как R .

Подставляя (9.73) в формулу (9.72), получаем

$$\chi_i = -\frac{1}{4\pi\rho} \epsilon_{i3k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Следовательно

$$\chi_1 = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{x_2}{4\pi\rho R^3}, \quad \chi_2 = \frac{x_1}{4\pi\rho R^3}, \quad \chi_3 = 0.$$

Теперь для определения φ и $\bar{\psi}$ можно выполнить операцию подстановки найденных функций ϑ и $\bar{\chi}$ в формулы (9.69) и проинтегрировать полученные выражения. Однако в данном случае удобнее решить непосредственно уравнения (9.68).

Тогда первое уравнение в (9.68) приобретает вид:

$$\Delta\varphi + \frac{x_3}{4\pi(\lambda + 2\mu)R^3} = \Delta \left[\varphi - \frac{x_3}{8\pi(\lambda + 2\mu)R} \right] = 0. \quad (9.74)$$

Замечание. При получении данной формулы учтено, что $\Delta(x_3/R) = -2x_3/R^3$.

Очевидно, что частным решением уравнения (9.74) является функция

$$\varphi = \frac{1}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{x_3}{R}. \quad (9.75)$$

Аналогичным образом, решая уравнение (9.74), получаем:

$$\psi_1 = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{x_2}{R}, \quad \psi_2 = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{x_1}{R}, \quad \psi_3 = 0. \quad (9.76)$$

Подставляя выражения (9.75) и (9.76) в соотношения (9.65), будем иметь:

$$u_i^{(3)} = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{x_i x_3}{R^3} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\delta_{i3}}{R} \right). \quad (9.77)$$

Здесь $u_i^{(3)}$ — составляющие перемещений, вызванных действием сосредоточенной силы, направленной по оси x_3 и приложенной в начале координат.

Замечание. Решение типа (9.77) называют *элементарным решением первого рода*. Формулы (9.77) в литературе часто записывают в виде

$$u_i^{(3)} = A \left(B \cdot \frac{\delta_{i3}}{R} - (R)_{,i3} \right), \quad (9.78)$$

где $A = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}$, $B = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$.

Напряжения и дилатация, соответствующие определенной формулой (9.78) перемещениям, задаются такими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu A \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_3} \left[3 \left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], \\ \sigma_{12} &= 6\mu A \frac{\partial R}{\partial x_1} \frac{\partial R}{\partial x_2} \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = 2\mu A \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_1} \left[3 \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], \\ \sigma_{22} &= 2\mu A \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_3} \left[3 \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], \quad \sigma_{23} = 2\mu A \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_2} \left[3 \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], \\ \sigma_{33} &= 2\mu A \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_3} \left[3 \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], \quad \theta = A \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (9.79)$$

Рассмотрим сферу с центром в начале координат и вычислим значения усилий $p_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ на этой сфере.

Предполагаем, что нормаль направлена внутрь сферы (т. е. $n_j = -x_j/R$). Тогда в соответствии с формулами (9.79) будем иметь

$$p_1 = \frac{6\mu A x_1 x_3}{R^4}, \quad p_2 = \frac{6\mu A x_2 x_3}{R^4}, \quad p_3 = \frac{2\mu A}{R^2} \left(\frac{3x_3^2}{R^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right). \quad (9.80)$$

Исследуем, будет ли таким образом вырезанный из тела шар находиться в равновесии. Для этого необходимо проверить выполнение условий равновесия вида:

$$\int_S p_1 dS = 0, \int_S p_2 dS = 0, \int_S p_3 dS - 1 = 0.$$

Подставляя (9.80) в последние выражения и интегрируя по поверхности шара $r = a$, можно убедиться, что условия равновесия выполнены.

Обобщим теперь результаты на общий случай действия сосредоточенных сил в неограниченном пространстве.

Обозначим через $U_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ перемещение, вызванное действием сосредоточенной силы, направленной параллельно оси x_j и приложенной в точке $\bar{\xi}$. По аналогии с функцией (9.77) и выражением (9.78) можно записать:

$$U_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi}) = A \left(\frac{x_i x_j}{R^3} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\delta_{ij}}{R} \right) = A \left(\frac{B\delta_{ij}}{R} - (R)_{,ij} \right).$$

Функции $U_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ образуют тензор перемещений Грина, входящий в формулы Соммильяны (см. раздел 9.1). Напомним, что тензор перемещений Грина симметричен:

$$U_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi}) = U_j^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{x}),$$

и в точке $\bar{\xi}$ его составляющие имеют особенность порядка $1/R$, а их значения уменьшаются с ростом значений R .

Если в точке $\bar{\xi}$ действует массовая сила $X_i(\xi)dV(\xi)$, то перемещения, вызванные этой силой в точке $\bar{x}$, будут:

$$\begin{aligned} u_i &= \left[X_1(\xi)U_i^{(1)}(x, \xi) + X_2(\xi)U_i^{(2)}(x, \xi) + X_3(\xi)U_i^{(3)}(x, \xi) \right] dV(\xi) = \\ &= X_j(\xi)U_i^{(j)}(x, \xi)dV(\xi). \end{aligned}$$

Проинтегрировав по области V' , в которой действуют массовые силы, получаем следующую формулу:

$$u_i(\bar{x}) = \int_{V'} X_j(\bar{\xi})U_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi})dV(\xi) \quad \text{или} \quad u_i(\bar{x}) = \int_{V'} X_j(\bar{\xi})U_j^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{x})dV(\xi).$$

Для определения поля перемещений, вызванных действием массовых сил в неограниченном пространстве (в частности сосредоточенными силами), кроме рассмотренного подхода Кельвина можно применить либо метод Папковича – Нейбера, либо метод Галеркина. При этом процедуры получения окончательных формул будут более простыми, чем по методу Кельвина.

Рассмотрим эти процедуры. Напомним, что в методе Папковича – Нейбера вектор перемещения $\bar{u}$ выражается через потенциальную функцию φ и векторную функцию $\bar{\psi}$ согласно формуле (9.49).

Примем, что $\varphi = 0$, а функция $\bar{\psi}$ определяется из уравнения Пуассона вида (9.48):

$$4(1-\nu)\Delta\bar{\psi} - \bar{X}/\mu = 0.$$

Рассмотрим случай, когда массовая сила приложена в начале координат и действует в направлении оси x_3 , т. е. ее вид соответствует формуле (9.73): $X_i = \delta_{i3}\delta(\vec{x})$. Очевидно, что следует принять, что $\psi_1 = \psi_2 = 0$, а функция ψ_3 находится из уравнения:

$$4(1-\nu)\Delta\psi_3 = \delta(\vec{x})/\mu.$$

Его решением является функция

$$\psi_3 = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R}. \quad (9.81)$$

Подставляя $\varphi = \psi_1 = \psi_2 = 0$, а ψ_3 из формулы (9.81) в выписанное здесь соотношение (9.49) для вектора перемещений, получаем следующую формулу:

$$u_i^{(3)} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{x_i x_3}{R^3} + (3-4\nu) \cdot \frac{\delta_{i3}}{R} \right),$$

которая согласуется с формулой (9.77).

Согласно методу Галеркина в основное уравнение

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\Delta F_i + X_i = 0 \quad (9.82)$$

в соответствии с условиями задачи подставляем значения $X_i = \delta_{i3}\delta(\vec{x})$ и $F_1 = F_2 = 0$. В этом случае из уравнений (9.82) остается только одно уравнение:

$$\Delta\Delta F_3 + \delta(x)/(\lambda + 2\mu) = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид:

$$F_3 = \frac{R}{8\pi(\lambda + 2\mu)}. \quad (9.83)$$

В соответствии с методом Галеркина (9.82) перемещения для случая $F_1 = F_2 = 0$ определяются по формулам:

$$u_1 = -k\partial_1 F_{3,3}, \quad u_2 = -k\partial_2 F_{3,3}, \quad u_3 = (1+k)\Delta F_3 - k\partial_3 F_{3,3}, \quad k = 1 + \lambda/\mu.$$

Используя эти соотношения и (9.83), после некоторых простых преобразований получаем:

$$u_i^{(3)} = A \left(B \cdot \frac{\delta_{i3}}{R} - (R)_{,i3} \right).$$

Данная формула и по структуре, и по значениям коэффициентов полностью согласуется с (9.78).

9.9. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим упругое полупространство $x_3 \geq 0$, на границе которого ($x_3 = 0$) заданы перемещения. Рассматриваемая задача представляет собой первую краевую задачу для системы уравнений Ламе без массовых сил в области $x_3 \geq 0$:

$$\Delta u_i + k\theta_{,i} = 0. \quad (9.84)$$

Искомые перемещения должны удовлетворять граничными условиями на поверхности тела:

$$u_i(x_1, x_2, 0) = U_i(x_1, x_2). \quad (9.85)$$

Как и ранее, запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по следующей за ней переменной.

Проведем построение решения системы (9.84)–(9.85), используя представление Треффца. В этом случае искомое решение представляется как сумма гармонических функций:

$$u_i = x_3 \cdot \psi_{,i} + \varphi_i, \quad (9.86)$$

где ψ и φ_i – гармонические функции, связанные между собой зависимостью вида (9.41):

$$\psi_{,3} = -\frac{1}{3-4\nu} \varphi_{k,k}. \quad (9.87)$$

Из соотношений (9.85) и (9.86) следует, что на границе области $x_3 = 0$ выполняется такое условие:

$$u_i(x_1, x_2, 0) = U_i(x_1, x_2) = \varphi_i(x_1, x_2, 0).$$

Следовательно, функции $\varphi_i(\vec{x})$ определяются как решения краевой задачи

$$\Delta \varphi_i(x) = 0, \quad x_3 \geq 0,$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, 0) = U_i(x_1, x_2). \quad (9.88)$$

В соответствии с механическим смыслом задачи введем следующее дополнительное предположение: функции ψ и φ_i на бесконечности равны нулю (это возможно вследствие того, что представление (9.86) носит общий характер и не накладывает ограничений на функции φ_i).

Для определения функции ψ образуем дивергенцию $\varphi_{k,k}$ и интегрируем уравнение (9.87) по переменной x_3 . Помимо этого учитывается условие, что на бесконечности $\psi \rightarrow 0$ и функция ψ является гармонической.

Итак, *первой задачей* является определение функций φ_i как решение краевой задачи (9.88).

Вторая задача состоит в определении ψ с использованием представления (9.87).

Третья задача – задача определения перемещений u_i на основе формулы (9.86).

Для определения функций ψ и φ_i применяем интегральные преобразования Фурье. Преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2, \quad (9.89)$$

где $\tilde{\varphi}_i$ – трансформанта Фурье.

Обращение Фурье задается формулой:

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Трансформанты производной функции φ определяются такими функциями:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2 = -i\alpha_1 \tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2 = -i\alpha_2 \tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3). \end{cases} \quad (9.90)$$

Умножаем первое из уравнений в (9.88) на множитель $\exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2))$ и проинтегрируем по плоскости $x_1 x_2$. Далее, используя соотношения (9.89)–(9.90), выполняем преобразование этого уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_i}{dx_3^2} - \gamma^2 \tilde{\varphi}_i = 0, \quad \gamma = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}. \quad (9.91)$$

Применяя преобразование Фурье к граничным условиям в (9.88), получаем:

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \tilde{U}_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad (9.92)$$

где

$$\tilde{U}_i(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_i(x_1, x_2) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2.$$

Исходя из физических условий, следует предположить, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U_i(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$$

является величиной ограниченной.

Решением уравнений (9.91) с учетом граничных условий (9.92) и требования, чтобы функции φ_i обращались в нуль на бесконечности, является функция

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \tilde{U}_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3). \quad (9.93)$$

Теперь используем преобразование Фурье для определения функции ψ . Так как ψ является гармонической, то после применения интегрального преобразования Фурье уравнение Лапласа $\Delta \psi = 0$ переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx_3^2} - \gamma^2 \tilde{\psi} = 0. \quad (9.94)$$

Здесь γ то же, что и в (9.91).

Решение уравнения (9.94), стремящееся к нулю на бесконечности (ввиду тех же физических условий, что и для функций φ_i), имеет такой вид:

$$\tilde{\psi}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = B(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3). \quad (9.95)$$

Для определения $B(\alpha_1, \alpha_2)$ используем то, что функции φ_i и ψ связаны между собой уравнением (9.87).

Применив к (9.87) преобразование Фурье, получаем:

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dx_3} = -\frac{1}{3-4\nu} \left(\frac{d\tilde{\varphi}_i}{dx_3} - i\alpha_1 \tilde{\varphi}_1 - i\alpha_2 \tilde{\varphi}_2 \right). \quad (9.96)$$

Подставим в (9.96) соотношение (9.93) и (9.95), определяем величину $B(\alpha_1, \alpha_2)$:

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{\gamma(3-4\nu)} \left[i\alpha_1 \tilde{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_2 \tilde{U}_2(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma \tilde{U}_3(\alpha_1, \alpha_2) \right].$$

Выполняя обратные преобразования Фурье в (9.93) и (9.95), получаем:

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3 - i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (9.97)$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2\pi(3-4\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\alpha_1}{\gamma} \tilde{U}_1 + \frac{i\alpha_2}{\gamma} \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3 \right) \exp(\beta) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (9.98)$$

где $\beta = -\gamma x_3 - i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.

Итак, поставленная задача решена, так как теперь, зная функции φ_i (9.97) и ψ (9.98), можно определить перемещения, воспользовавшись формулами (9.86).

9.10. ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Вторая краевая задача для упругого полупространства $x_3 \geq 0$ заключается в решении системы уравнений Ламе (9.84), при заданных на границе ($x_3 = 0$) внешних нагрузках $p_i(x_1, x_2)$:

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_1, x_2, 0) = -p_1(x_1, x_2), \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, 0) = -p_2(x_1, x_2), \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = -p_3(x_1, x_2). \end{cases} \quad (9.99)$$

Замечание. В записи (9.99) принято, что нагрузки действуют в положительном направлении осей координат.

Как и в случае первой краевой задачи, для определения решения в рассматриваемом случае используем представление перемещений через гармонические функции на основе метода Треффца.

Перепишем граничные условия (9.99) в компонентах перемещений, используя соотношения (9.86) и представления компонент тензора напряжений через перемещения:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \theta = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda \delta_{ij} u_{k,k}.$$

В соответствии с данными операциями граничные условия приобретают вид:

$$\begin{cases} \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} + \psi_{,1} = -p_1/\mu, \\ \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} + \psi_{,2} = -p_2/\mu, \\ 2\varphi_{3,3} + 2(1-2\nu)\psi_{,3} = -p_3/\mu. \end{cases} \quad (9.100)$$

Вводим вспомогательные функции Ω_i , являющиеся гармоническими. Именно функции Ω_i удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\Delta \Omega_i = 0, \quad x_3 \geq 0, \quad (9.101)$$

и для этих функций выполняются граничные условия вида

$$\mu\Omega_i(x_1, x_2, 0) = -p_i(x_1, x_2), \quad x_3 = 0. \quad (9.102)$$

На основании (9.102) соотношения (9.100) переписываются следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} + \psi_{,1} = \Omega_1, \\ \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} + \psi_{,2} = \Omega_2, \\ 2\varphi_{3,3} + 2(1-2\nu)\psi_{,3} = \Omega_3. \end{cases} \quad (9.103)$$

В обеих частях (9.103) находятся гармонические функции. Из курса уравнений математической физики следует, что если на границе некоторой области гармонические функции равны, то они тождественно совпадают во всей области. Следовательно, соотношения (9.103) справедливы и для всех $x_3 > 0$.

С учетом того что соотношения (9.103) справедливы для всего полупространства, применяем к ним серию следующих операций: продифференцируем каждое из (9.103) соответственно по x_i и складываем между собой почленно. Принимая во внимание, что функции φ_i и ψ являются гармоническими и, следовательно, удовлетворяют уравнениям Лапласа, получаем следующее уравнение:

$$\varphi_{k,k3} + (1-4\nu)\psi_{,33} = \Omega_{k,k}.$$

Учитывая (9.87), последнее уравнение приобретает вид:

$$\psi_{,33} = -\frac{1}{2}\Omega_{k,k}. \quad (9.104)$$

Теперь все необходимые элементы решения получены. Тогда общая схема построения решения выглядит следующим образом.

Вначале решается уравнение Лапласа (9.101) для функций Ω_i с граничными условиями (9.102). Из найденных решений Ω_i образуем дивергенцию $\Omega_{k,k}$, которая входит в правую часть уравнения (9.104).

Функция ψ определяется интегрированием (9.104). Фигурирующие в решении постоянные интегрирования приравниваем нулю, так как на бесконечности должны выполняться условия вида

$$\psi|_{\infty} = 0, \quad \psi_{,3}|_{\infty} = 0.$$

Для определения функций φ_i используются соотношения (9.103), справедливые для полупространства $x_3 \geq 0$.

Интегрированием последнего из уравнений (9.103) определяется φ_3 , из второго — φ_2 , а из первого — φ_1 .

Далее, используя формулу (9.86), зная φ_i и ψ , определяют перемещения.

Решим вторую краевую задачу, воспользовавшись преобразованием Фурье и сформулированной схемой решения.

Решение преобразованного уравнения Лапласа (9.101) представим в следующем виде:

$$\tilde{\Omega}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = -\frac{\tilde{p}_i(\alpha_1, \alpha_2)}{\mu} \exp(-\gamma x_3), \quad \gamma = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}. \quad (9.105)$$

Здесь с учетом (9.102):

$$\tilde{p}_i(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_i(x_1, x_2) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2.$$

Из физических соображений следует, что величины $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |p_i(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$ являются ограниченными. Кроме того, в решении (9.105) необходимо считать, что $\Omega_i|_{\infty} \rightarrow 0$.

Так как функции ψ и φ_i — гармонические, то их можно представить в виде, аналогичном (9.105):

$$\tilde{\psi}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = B(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3), \quad \tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = C_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3). \quad (9.106)$$

В (9.106) учитывается, что на бесконечности функции ψ и φ_i стремятся к нулю. Величина $B(\alpha_1, \alpha_2)$ определяется из уравнения (9.104) с учетом (9.105):

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{2\mu\gamma^2} (i\alpha_1 \tilde{p}_1 + i\alpha_2 \tilde{p}_2 + \gamma \tilde{p}_3). \quad (9.107)$$

Далее применяем к уравнениям (9.103) преобразования Фурье:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{1,3} - i\alpha_1 \tilde{\varphi}_3 - i\alpha_1 \tilde{\psi} = \tilde{\Omega}_1, \\ \tilde{\varphi}_{2,3} - i\alpha_2 \tilde{\varphi}_3 - i\alpha_2 \tilde{\psi} = \tilde{\Omega}_2, \\ 2\tilde{\varphi}_{3,3} + 2(1-2\nu)\tilde{\psi}_{,3} = \tilde{\Omega}_3. \end{cases}$$

Подставив в эти уравнения соотношения (9.105), (9.106) и (9.107), получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \gamma C_1 + i\alpha_1 C_3 + i\alpha_1 B = \tilde{p}_1/\mu, \\ \gamma C_2 + i\alpha_2 C_3 + i\alpha_2 B = \tilde{p}_2/\mu, \\ 2\gamma C_3 + 2(1-2\nu)\gamma B = \tilde{p}_3/\mu. \end{cases}$$

Решив эту систему, можно найти величины $C_i(\alpha_1, \alpha_2)$. И, наконец, применив обратные преобразования Фурье к $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$, получаем искомые величины:

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3 - i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (9.108)$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\alpha_1 \tilde{p}_1 + i\alpha_2 \tilde{p}_2 + \gamma \tilde{p}_3}{\gamma^2} \right) \exp(\beta) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (9.109)$$

где, как и ранее, $\beta = -\gamma x_3 - i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.

Теперь, зная функции ψ и φ_i , вычисляем перемещения, подставив (9.108), (9.109) в формулу (9.86).

Рассмотренный способ решения является общим и содержит в себе много частных случаев.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: в плоскости $x_3 = 0$ на границе упругого полупространства действует только вертикальная нагрузка, направленная по оси x_3 .

Так как в этом случае $p_1 = p_2 = 0$, то, следовательно:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad B_1 = -\tilde{p}_3 / (2\mu\gamma).$$

В этом случае формулы для получения решения задачи в конечной форме значительно упрощаются.

Замечание. Эта задача известна как «задача Буссинеска» и будет рассмотрена в следующем разделе.

Рассмотрим еще один способ решения второй краевой задачи, применимый для случая вертикальных нагрузок. Используем представление перемещений с помощью функций Папковича – Нейбера в виде (9.50):

$$u_i = \varphi_{,i} + (x_j \psi_j)_{,i} - 4(1-\nu)\psi_i.$$

Функции φ и ψ_i выбираем следующим образом:

$$\varphi = (1-2\nu)\chi, \quad \psi_i = \delta_{i3} \frac{\partial \chi}{\partial x_3}. \quad (9.110)$$

Так как функции ψ и φ_i – гармонические, то χ также является гармонической функцией.

С учетом (9.110) представление (9.50) для компонент вектора перемещения приобретает вид:

$$u_i = x_3 \chi_{,3i} + (1-2\nu)\chi_{,i} - (3-4\nu)\delta_{i3}\chi_{,i}. \quad (9.111)$$

Подставив (9.111) в соотношения между напряжениями и деформациями (закон Гука), выражаем напряжения через функцию χ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu \left[x_3 \chi_{,113} + (1-2\nu)\chi_{,11} - 2\nu\chi_{,33} \right], \\ \sigma_{22} &= 2\mu \left[x_3 \chi_{,223} + (1-2\nu)\chi_{,22} - 2\nu\chi_{,33} \right], \\ \sigma_{33} &= 2\mu \left[x_3 \chi_{,333} - \chi_{,33} \right], \quad \sigma_{12} = 2\mu \left[x_3 \chi_{,123} + (1-2\nu)\chi_{,12} \right], \\ \sigma_{23} &= 2\mu x_3 \chi_{,233}, \quad \sigma_{31} = 2\mu x_3 \chi_{,133}. \end{aligned}$$

Из последних полученных формул следует, что при $x_3 = 0$ в случае конечных значений производных $\chi_{,223}$; $\chi_{,133}$; $\chi_{,333}$ справедливы следующие выражения: $\sigma_{32} = 0$; $\sigma_{31} = 0$; $\sigma_{33} = -2\mu \chi_{,33}|_{x_3=0}$.

Пример. В плоскости $x_3 = 0$ задана нагрузка $-p_3(x_1, x_2)$ (знак «—» соответствует направлению внешней нормали к границе полупространства). В этом случае функция χ определяется путем решения такой краевой задачи:

$$\Delta \chi = 0, \quad -2\mu \chi_{,33}|_{x_3=0} = p_3(x_1, x_2). \quad (9.112)$$

Замечание. Из физических соображений можно предположить, что на бесконечности функция χ стремится к нулю.

Применяем к уравнениям (9.112) преобразования Фурье. В результате получаем

$$\tilde{\chi}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = -\frac{\tilde{p}_3(\alpha_1, \alpha_2)}{2\mu\gamma^2} \exp(-\gamma x_3), \quad \gamma = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}. \quad (9.113)$$

Применив по отношению к формуле (9.113) обратное преобразование Фурье, будем иметь:

$$\chi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tilde{p}_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right) \exp(-\gamma x_3 - i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Замечание. Представленное здесь общее решение, использующее функции Папковича – Нейбера, Галеркина и Лява, можно применить и для краевой задачи, в которой на плоскости $x_3 = 0$ задано вертикальное перемещение и нулевые напряжения σ_{31} и σ_{32} .

Кроме того, функция Буссинеска (о ней речь пойдет в последующих разделах) также может быть использована для решения приведенных здесь краевых задач.

9.11. ЗАДАЧА БУССИНЕСКА

Задача Буссинеска состоит в определении НДС в упругом полупространстве $x_3 \geq 0$, нагруженном в начале координат сосредоточенной силой $p_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2)$, направленной по оси x_3 .

Как уже указывалось в предыдущих разделах, эта задача является частным случаем рассмотренной ранее общей проблемы (вторая краевая задача). Поэтому в соответствующих выкладках раздела 9.10 следует положить:

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2) = -\sigma_{33}(x_1, x_2, 0).$$

Так как нагрузка симметрична относительно плоскостей $(x_1 x_3)$ и $(x_2 x_3)$, то при решении задачи Буссинеска, используя процедуры, описанные в разделе 9.10, более удобно применять косинус-преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) dx_1 dx_2, \\ f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (9.114)$$

Напомним, что согласно описанному в разд. 9.8 методу перемещения выражаются через потенциальные функции ψ и φ_i . При рассмотрении второй краевой задачи введением вспомогательных функций Ω_i , удовлетворяющих уравнениям (9.101) и граничным условиям (9.102), исходная задача сводится к определению в первую очередь функций Ω_i . В соответствии с этим в данном случае вначале необходимо решить краевую задачу, включающую уравнение Лапласа с граничным условием:

$$\begin{aligned} \Delta \Omega_3(x_1, x_2, x_3) &= 0, \quad x_3 \geq 0, \\ \mu \Omega_3(x_1, x_2, 0) &= -p_3(x_1, x_2), \quad x_3 = 0. \end{aligned} \quad (9.115)$$

Если к уравнению в (9.115) применить косинус-преобразование Фурье, то в результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \tilde{\Omega}_3}{dx_3^2} - \gamma^2 \tilde{\Omega}_3 = 0, \quad \gamma = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\tilde{\Omega}_3 = -\frac{\tilde{p}_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\mu} \exp(-\gamma x_3). \quad (9.116)$$

В случае действия сосредоточенной силы

$$p_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2)$$

согласно представлению (9.114) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_3(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{2P}{\pi} \int_0^\infty \delta(x_1) \cos \alpha_1 x_1 dx_1 \int_0^\infty \delta(x_2) \cos \alpha_2 x_2 dx_2 = \\ &= \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \delta(x_1) \cos \alpha_1 x_1 dx_1 \int_0^\infty \delta(x_2) \cos \alpha_2 x_2 dx_2 = \frac{P}{2\pi}. \end{aligned}$$

Поэтому из (9.116) получаем:

$$\tilde{\Omega}_3 = -\frac{P}{2\pi\mu} \exp(-\gamma x_3).$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, имеем:

$$\Omega_3 = -\frac{P}{\pi^2\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-x_3\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (9.117)$$

Для дальнейшего преобразования выражения (9.117) воспользуемся тем, что

$$I = \int_0^\infty \cos(\alpha_1 x_1) d\alpha_1 \int_0^\infty \frac{\exp\left(-x_3\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_2 = \int_0^\infty K_0(\alpha_1 r) \cos \alpha_1 x_1 d\alpha_1 = \frac{\pi}{2R},$$

где $K_0(\alpha_1 r)$ – функция Бесселя от мнимого аргумента третьего рода нулевого порядка (функция Макдональда), $r = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $R = (r^2 + x_1^2)^{1/2}$.

Тогда:

$$\Omega_3 = -\frac{P}{\pi^2\mu} \left(-\frac{\partial I}{\partial x_3} \right) = -\frac{P}{2\pi\mu} \frac{x_3}{R^3}.$$

Функция ψ связана с Ω_i формулой (9.104), принимающей в данном случае вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2} (\Omega_{1,1} + \Omega_{2,2} + \Omega_{3,3}). \quad (9.118)$$

Так как $p_1 = p_2 = 0$, то $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, поэтому в правой части (9.118) останется только слагаемое с функцией $\Omega_{3,3}$.

Выражаем функцию ψ с помощью интеграла Фурье:

$$\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty B(\alpha_1, \alpha_2) \exp\left(-x_3\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Тогда из уравнения (9.118), принимая во внимание (9.117), получаем следующее соотношение:

$$B = -\frac{P}{4\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}.$$

Итак, установлено, что:

$$\psi = -\frac{P}{2\pi^2\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\exp\left(-x_3 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = -\frac{P}{4\pi\mu R}. \quad (9.119)$$

Следующим шагом является определение функции φ_i . Для выполнения этой процедуры наиболее удобным представляется использование уравнений (9.103), которые справедливы для $x_3 \geq 0$:

$$\begin{cases} \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} + \psi_{,1} = 0, \\ \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} + \psi_{,2} = 0, \\ 2\varphi_{3,3} + 2(1-2\nu)\psi_{,3} = \Omega_3. \end{cases} \quad (9.120)$$

Из последнего уравнения (9.120), с учетом (9.119), имеем

$$\varphi_{3,3} = \frac{\Omega_3}{2} - (1-2\nu)\psi_{,3} = -\frac{P(1-\nu)x_3}{2\pi\mu R^3}.$$

Проинтегрировав данное выражение по x_3 , находим, что

$$\varphi_3 = \frac{(1-\nu)P}{2\pi\mu R} + C.$$

Постоянная интегрирования $C = 0$, так как на бесконечности $\varphi_3 = 0$.

Из второго уравнения (9.120) определяем:

$$\varphi_{2,3} = -(\varphi_{3,2} + \psi_{,2}) = \frac{P}{4\pi\mu} (1-2\nu) \frac{x_2}{R^3}.$$

Интегрируя по x_3 , получаем

$$\varphi_2 = -\frac{(1-2\nu)P}{4\pi\mu} \frac{x_2}{R(R+x_3)}.$$

И, наконец, из первого уравнения (9.120) имеем

$$\varphi_1 = -\frac{(1-2\nu)P}{4\pi\mu} \frac{x_1}{R(R+x_3)}.$$

Теперь, воспользовавшись формулами (9.86), можно определить перемещения

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right], \\ u_i &= \frac{Px_i}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3}{R^3} - (1-2\nu) \frac{1}{R(R+x_3)} \right], \quad i=1, 2. \end{aligned} \quad (9.121)$$

В соответствии с (9.121) в плоскости $x_3 = 0$ перемещения принимают следующие значения:

$$u_i = -\frac{Px_i(1-2\nu)}{4\pi\mu r^2}, \quad i=1, 2, \quad u_3 = \frac{(1-\nu)P}{2\pi\mu r}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Зная перемещения, можно, воспользовавшись соотношениями закона Гука, определить напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{3j} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{x_j x_3^2}{R^5}, \quad j=1, 3, \\ \sigma_{11} &= -\frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x_1^2 x_3}{R^5} + \frac{1}{3}(1-2\nu) \left(\frac{R^2 + Rx_3 + x_3^2}{R^3(R+x_3)} - \frac{x_1^2(2R+x_3)}{R^3(R+x_3)^2} \right) \right], \\ \sigma_{22} &= -\frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x_2^2 x_3}{R^5} + \frac{1}{3}(1-2\nu) \left(\frac{R^2 + Rx_3 + x_3^2}{R^3(R+x_3)} - \frac{x_2^2(2R+x_3)}{R^3(R+x_3)^2} \right) \right], \\ \sigma_{12} &= -\frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x_1 x_2 x_3}{R^5} - \frac{1}{3}(1-2\nu) \frac{x_1 x_2}{R^3} \frac{2R+x_3}{(R+x_3)^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.122)$$

Из представлений (9.122) видно, что компоненты напряжений σ_{3j} ($j=1, 2, 3$) не зависят от упругих констант.

В сферической системе координат (R, ϑ, φ) формулы для компонент перемещений и напряжений принимают вид:

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{P}{4\pi\mu R} [4(1-\nu)\cos\vartheta - (1-2\nu)], \\ u_\vartheta &= \frac{P \sin\vartheta}{4\pi\mu R} \left[-(3-4\nu) + \frac{(1-2\nu)}{1+\cos\vartheta} \right], \quad u_\varphi = 0, \\ \sigma_{RR} &= \frac{P}{2\pi R^2} [(1-2\nu) - (4-2\nu)\cos\vartheta], \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \frac{\cos^2\vartheta}{1+\cos\vartheta}, \\ \sigma_{R\vartheta} &= \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \frac{\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}{1+\cos\vartheta}, \\ \sigma_{R\varphi} &= 0, \quad \sigma_{\varphi\vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (9.123)$$

Так как действие сосредоточенной силы $p_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2)$ в начале координат в упругом полупространстве $x_3 \geq 0$ вызывает осесимметричное относительно оси x_3 поле деформаций, часто представляется удобным решать рассматриваемую задачу в цилиндрических координатах. Компоненты перемещений в цилиндрических координатах имеют вид:

$$u_r = \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{rz}{R^3} - (1-2\nu) \left(\frac{1}{r} - \frac{z}{rR} \right) \right], \quad u_z = \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{z^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right], \quad (9.124)$$

где $R = (z^2 + r^2)^{1/2}$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Построим решение задачи Буссинеска другим способом – путем суперпозиции двух простых решений.

Так как точка приложения сосредоточенной силы является особой точкой, то для построения решения используем известный прием – вместо сосредоточенной силы будем рассматривать действующую в пределах малой площади распределенную нагрузку с главным вектором, равным сосредоточенной силе. Тогда исходная задача приводится к задаче для полупространства $x_3 \geq 0$ с вырезом в виде полушара с центром в начале координат (рис. 9.2), при этом равнодействующая сил, действующих на поверхность полушара, равна модулю сосредоточенной силы P . На остальной части границы $x_3 = 0$ граничные условия соответствуют условиям: $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$.

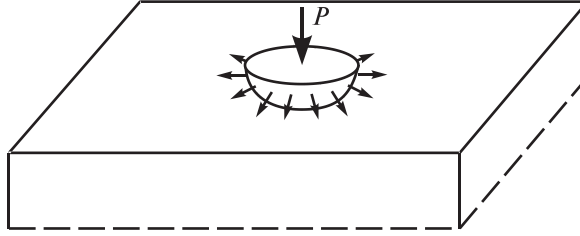


Рис. 9.2. К построению решения задачи Буссинеска методом суперпозиции

Из формулы (9.87) следует, что сосредоточенная сила, действующая в направлении оси x_3 в неограниченном пространстве и приложенная в начале координат, приводит к тому, что везде в плоскости $x_3 = 0$, кроме начала координат, $\sigma_{33} = 0$.

Вследствие этого в качестве первой части решения задачи Буссинеска будем рассматривать решение задачи о действии сосредоточенной силы в неограниченном пространстве. Для этой задачи перемещения (обозначим их через $u_i^{(1)}$) выражаются формулами (9.85), которые в данном случае запишем в следующем виде:

$$u_1^{(1)} = D \left(\frac{x_1 x_3}{R^3} \right), \quad u_2^{(1)} = D \left(\frac{x_2 x_3}{R^3} \right), \quad u_3^{(1)} = D \left(\frac{x_3^2}{R^3} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{R} \right). \quad (9.125)$$

Величину D в (9.125) определим в дальнейшем при рассмотрении общего решения исходной задачи. В плоскости $x_3 = 0$ (за исключением начала координат) напряжения для первой сформулированной вспомогательной задачи имеют следующие значения:

$$\sigma_{31}^{(1)} = -D \frac{2\mu^2}{\lambda + \mu} \frac{x_1}{R^3}, \quad \sigma_{32}^{(1)} = -D \frac{2\mu^2}{\lambda + \mu} \frac{x_2}{R^3}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0. \quad (9.126)$$

На поверхности полушара действует вектор нагрузки $\vec{p}^{(1)}$, компоненты которого равны:

$$p_1^{(1)} = D \frac{6\mu x_1 x_3}{R^4}, \quad p_2^{(1)} = D \frac{6\mu x_2 x_3}{R^4}, \quad p_3^{(1)} = D \frac{2\mu}{R^2} \left(\frac{3x_3^2}{R^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right).$$

Равнодействующая этих нагрузок $P^{(1)}$, направленная по оси x_3 , равна:

$$P^{(1)} = 4\pi\mu D \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}. \quad (9.127)$$

В качестве *второй части решения задачи Буссинеска* возьмем перемещения $u_i^{(2)}$, являющиеся решением задачи о воздействии потенциала (9.62) $\varphi = C \ln(R+z)$ (решения Буссинеска второго рода), рассмотренного в разд. 9.5. Соответствующие перемещения выражаются формулами:

$$u_1^{(2)} = \varphi_{,1} = C \frac{x_1}{R(R+x_3)}, \quad u_2^{(2)} = \varphi_{,2} = C \frac{x_2}{R(R+x_3)}, \quad u_3^{(2)} = \varphi_{,3} = \frac{C}{R}.$$

В плоскости $x_3 = 0$ (за исключением начала координат) напряжения $\sigma_{33}^{(2)}$ равны нулю. Из формул (9.63) для $x_3 = 0$ получаем:

$$\sigma_{13} = -2\mu C \frac{x_1}{R^3}, \quad \sigma_{23} = -2\mu C \frac{x_2}{R^3}, \quad \sigma_{33} = 0. \quad (9.128)$$

Компоненты главного вектора нагрузок $\bar{p}^{(2)}$ в плоскости $x_3 = 0$ имеют следующие значения:

$$p_1^{(2)} = 2\mu C \frac{x_1}{R^2(R+x_3)}, \quad p_2^{(2)} = 2\mu C \frac{x_2}{R^2(R+x_3)}, \quad p_3^{(2)} = 2\mu C \frac{1}{R^2}.$$

Очевидно, что равнодействующая нагрузок $P^{(2)}$, приложенных к полушару, направлена по оси x_3 и равна:

$$P^{(2)} = 4\pi\mu C. \quad (9.129)$$

Легко проверить, что условие $\sigma_{33} = \sigma_{33}^{(1)} + \sigma_{33}^{(2)} = 0$ при $x_3 = 0$ выполняется (в силу (9.126) и (9.128)). Граничные условия $\sigma_{31} = \sigma_{31}^{(1)} + \sigma_{31}^{(2)} = 0$ и $\sigma_{32} = \sigma_{32}^{(1)} + \sigma_{32}^{(2)} = 0$ при $x_3 = 0$ приводят к следующей зависимости:

$$C = -D\mu/(\lambda + \mu). \quad (9.130)$$

Теперь осталось только связать величины C и D со сосредоточенной силой. Для этого используем тот факт, что величина равнодействующей всех сил, приложенных к полушару, должна быть равна P . В соответствии с этим и с учетом (9.127) и (9.129) имеем:

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} = 4\pi\mu D \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} + 4\pi\mu C. \quad (9.131)$$

Из соотношений (9.130) и (9.131) получаем, что

$$D = P/(4\pi\mu), \quad C = -P/(4\pi(\lambda + \mu)).$$

Складывая перемещения (9.125) и (9.128), определенные при решении двух рассмотренных вспомогательных задач, получаем следующие формулы:

$$u_i = \frac{Px_i}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3}{R^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{R(R+x_3)} \right], \quad i=1, 2, \quad u_3 = \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3^2}{R^3} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{R} \right].$$

Видно, что эти формулы совпадают с выведенными ранее формулами (9.121). В частности, в плоскости $x_3 = 0$ перемещения принимают значения

$$u_i = \frac{Px_i}{4\pi(\lambda + \mu)r^2}, \quad i=1, 2, \quad u_3 = \frac{P}{4\pi\mu r} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Интересным с точки зрения приложений является представление уравнений (1.136) для компонент вектора перемещений в цилиндрической (r, θ, z) и сферической (R, ϑ, φ) системах координат (см., соответственно, формулы (9.124) и (9.123)).

Так, из первой формулы (9.124) для компоненты u_r (цилиндрические координаты) следует, что она не зависит от угла θ . Если проанализировать выражение для компоненты u_R (сферические координаты) из (1.136), то следует, что перемещения u_R принимают положительные или отрицательные значения в зависимости от того, является ли выражение $(\cos^2 \vartheta + \cos \vartheta - \mu/(\lambda + \mu))$ меньше или больше нуля. Значения u_R будут положительными, если точки, в которых изучаются данные перемещения, находятся внутри конуса $(\cos^2 \vartheta + \cos \vartheta - \mu/(\lambda + \mu)) = 0$. Например, для $\lambda = \mu$, $\nu = 0,25$, угол $\vartheta_0 = 68^\circ 30'$.

9.12. ФОРМУЛЫ ГЕРЦА

Рассмотрим следующую задачу: в плоскости $x_3 = 0$, ограничивающей упругое полупространство, в пределах области S_p действует нормальная нагрузка $p_3 = p(x_1, x_2)$ (рис. 9.3).

Для корректности постановки граничной задачи будем предполагать, что интеграл $\iint |p(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$ является величиной ограниченной.

Для нахождения перемещений, вызванных определенной таким образом нагрузкой, используем решение задачи Буссинеска (см. п. 9.11) для сосредоточенной силы, действующей в точке $x = (x_1, x_2, 0)$, трактуя интеграл как функцию Грина.

Воспользуемся формулами (9.121), переписав их для $P = 1$ в следующем виде:

$$U_i(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{(1-\nu)\delta_{i3}}{\pi\mu R(x, \xi)} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{x_3}{R(x, \xi)} + (1-2\nu) \ln(R(x, \xi) + x_3) \right], \quad (9.132)$$

где $R(x, \xi) = ((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2)^{1/2}$ — расстояние между точками x и ξ .

Проинтегрируем выражение (9.132) по области S_p в плоскости $x_3 = 0$, на которой действует распределенная нагрузка. В результате получаем

$$u_i(\bar{x}) = \frac{(1-\nu)\delta_{i3}}{\pi\mu} \iint_{S_p} \frac{p(\xi_1, \xi_2)}{R(x, \xi)} d\xi_1 d\xi_2 - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{S_p} p(\xi_1, \xi_2) \left[\frac{x_3}{R(x, \xi)} + (1-2\nu) \ln(R(x, \xi) + x_3) \right] d\xi_1 d\xi_2. \quad (9.133)$$

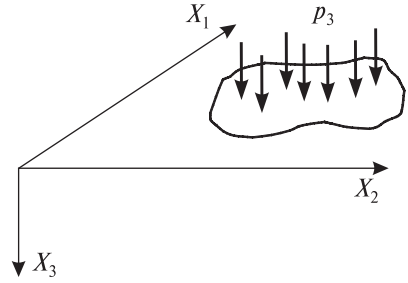


Рис. 9.3. Принциальная схема задачи Герца

Вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Omega(\bar{x}) &= \iint_{S_p} p(\xi_1, \xi_2) \ln [R(x, \xi) + x_3] d\xi_1 d\xi_2, \\ \Phi(\bar{x}) &= \iint_{S_p} \frac{p(\xi_1, \xi_2)}{R(x, \xi)} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\partial \Omega(\bar{x})}{\partial x_3}.\end{aligned}\quad (9.134)$$

Из определения функции $\Phi(\bar{x})$ (9.134) следует, что это потенциал простого слоя с плотностью $p(x_1, x_2)$. Таким образом, $\Phi(\bar{x})$ удовлетворяет вне области S_p уравнению Лапласа, является непрерывной функцией всюду, за исключением области S_p , и стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Производная функции $\Phi(\bar{x})$ по направлению нормали к области S_p испытывает конечный разрыв: при переходе от точки $\bar{x}$ к точке $(x_1, x_2, 0)$ со стороны положительных значений x_3 имеет место следующее соотношение:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right|_{x_3 \rightarrow +0} = \begin{cases} -2\pi p(x_1, x_2), & x \in S_p, \\ 0, & x \notin S_p. \end{cases} \quad (9.135)$$

Функция $\Omega(x)$ в полупространстве $x_3 > 0$ является гармонической. При $R \rightarrow \infty$ данная функция неограниченно возрастает. Производные $\Omega(x)$ по координатам в области $x_3 > 0$ при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

С помощью функций $\Phi(\bar{x})$ и $\Omega(x)$ соотношения (9.133) можно представить в таком виде:

$$\vec{u} = \frac{1-\nu}{\pi\mu} \vec{i}_3 \Phi - \frac{1}{4\pi\mu} \text{grad} [x_3 \Phi + (1-2\nu)\Omega]. \quad (9.136)$$

Переписав (9.136) в компонентах вектора перемещений, имеем

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{1}{4\pi\mu} \left[x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (1-2\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \right], \quad u_2 = -\frac{1}{4\pi\mu} \left[x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + (1-2\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \right], \\ u_3 &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \Phi - \frac{1}{4\pi\mu} x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.\end{aligned}\quad (9.137)$$

На основании (9.137) значения перемещений в плоскости $x_3 = 0$ определяются следующими формулами:

$$u_\beta = -\frac{1-2\nu}{4\pi\mu} \frac{\partial \Omega(x_1, x_2, 0)}{\partial x_\beta}, \quad \beta = 1, 2, \quad u_3 = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \Phi(x_1, x_2, 0).$$

Из соотношений (9.137) дилатация находится таким образом:

$$\theta = \text{div } \vec{u} = \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.$$

Для компонент напряженного состояния получаем

$$\sigma_{13} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right). \quad (9.138)$$

Так как $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \vec{u}$, то с учетом (9.138) имеем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{1}{2\pi} \left((1 + 2\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right), \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Из (9.138) легко получить, что при $x_3 = 0$ выполняется

$$\sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{x_3 \rightarrow +0}.$$

Из (9.135) находим, что

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{x_3 \rightarrow 0} = \begin{cases} -p(x_1, x_2), & x \in S_p, \\ 0, & x \notin S_p. \end{cases}$$

Если ввести новую функцию

$$F = -\frac{1}{4\pi\mu} [x_3 \Phi + (1 - 2\nu)\Omega],$$

то перемещения вида (9.137) можно представить более короткой записью, а именно:

$$u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1 - \nu}{\pi\mu} \delta_{i3} \Phi. \quad (9.139)$$

Формулы (9.139) впервые были введены Герцем и использовались им при решении контактных задач.

Определение напряженного и деформированного состояний в упругом полупространстве в случае действия на границе $x_3 = 0$ нагрузки, перпендикулярной ограничивающей его плоскости, было предметом целого ряда исследований. Так, Буссинеск рассматривал действие нагрузки p , равномерно распределенной по круговой области S и перпендикулярной к плоскости $x_3 = 0$. Той же задачей занимался Тередзава. Ляв очень подробно и тщательно рассмотрел задачу о действии нормальной нагрузки, распределенной по прямоугольной и круговой областям, на плоскости $x_3 = 0$.

9.13. ЗАДАЧА ЧЕРУТТИ¹

Рассмотрим задачу о нагружении поверхности $x_3 = 0$, ограничивающей упругое полупространство $x_3 \geq 0$, касательными усилиями.

Пусть касательные нагрузки направлены по оси x_1 . Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \sigma_{31}(x_1, x_2, 0) = -p_1(x_1, x_2); \\ \sigma_{32}(x_1, x_2, 0) = 0; \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = 0. \end{cases}$$

¹Черутти В. (Cerrutti V., 1850–1909), итальянский ученый механик.

Для решения сформулированной задачи используем представление Треффца (см. разд. 9.5). Перемещения выражаются через гармонические функции φ_i и ψ :

$$u_i = \varphi_i + x_3 \psi_{,i}. \quad (9.140)$$

Для функций φ_i и ψ , согласно формулам (9.100)–(9.103), имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \partial_3 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_3 + \partial_1 \psi = \Omega_1, \\ \partial_3 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_3 + \partial_2 \psi = 0, \\ 2\partial_3 \varphi_3 + 2(1-2\nu)\partial_3 \psi = 0. \end{cases} \quad (9.141)$$

Функция $\Omega(x)$ определяется из уравнения Лапласа и граничных условий:

$$\Delta \Omega_1 = 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \mu \Omega_1(x_1, x_2, 0) = -p_1(x_1, x_2), \quad x_3 = 0. \quad (9.142)$$

Между функциями Ω_1 и ψ существует зависимость, выражаемая соотношением (9.104). Для рассматриваемого случая это соотношение принимает вид

$$\partial_3^2 \psi = -\partial_1 \Omega_1 / 2. \quad (9.143)$$

В соответствии с приведенными формулами *алгоритм решения задачи выглядит следующим образом* [45].

Вначале решается краевая задача (9.142). Далее, зная функцию Ω_1 , из уравнения (9.143) определяется ψ , затем из третьего уравнения (9.141) – функция φ_3 . Функции φ_2 и φ_1 находятся соответственно из второго и первого уравнений (9.141). И, наконец, подставляя φ_i и ψ в соотношение (9.140), полностью заканчиваем решение.

Проведем непосредственное решение, при этом будем использовать синус- и косинус-преобразования Фурье.

Пусть нагрузка $p_1(x_1, x_2)$ является симметричной по переменным x_1 и x_2 . Тогда такую нагрузку можно представить двойным косинус-преобразованием Фурье:

$$p_1(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{p}_1(\alpha_1, \alpha_2) \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

где

$$\tilde{p}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty p_1(x_1, x_2) \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 dx_1 dx_2. \quad (9.144)$$

Аналогичным образом можно выразить функцию Ω_1 двойным косинус-интегралом Фурье, учитывая граничное условие в (9.142):

$$\Omega_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\Omega}_1(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Решая краевую задачу (9.142) с учетом того, что

$$\Omega_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x_1^2 + x_2^2 + x_3^2| \rightarrow \infty,$$

получаем:

$$\Omega_1(x_1, x_2, x_3) = -\frac{2}{\mu\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{p}_1(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-x_3 \gamma) \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \gamma = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}.$$

Для демонстрации описанной технологии решения рассмотрим действие сосредоточенной силы $p_1(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2)$, приложенной в начале координат и направленной по оси x_1 . С учетом того, что $\tilde{p}_1(\alpha_1, \alpha_2) = P/2\pi$ (это следует из (9.144)), имеем:

$$\Omega_1(x_1, x_2, x_3) = -\frac{P}{\pi^2\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\gamma x_3) \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = -\frac{P}{2\pi\mu} \frac{x_3}{R}.$$

Для использования уравнения (9.143) следует функцию ψ выразить с помощью смешанного преобразования Фурье:

$$\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty B(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-x_3\gamma) \sin \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

где $B = -(P\alpha_1)/(4\pi\mu\gamma^2)$.

Функция ψ легко вычисляется. Действительно, нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} \partial_3 \psi &= \frac{P}{2\pi^2\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1}{\gamma} \exp(-x_3\gamma) \sin \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \frac{P}{2\pi\mu} \int_0^\infty \alpha_1 K_0(\alpha_1 r) \sin \alpha_1 d\alpha_1 = \frac{P}{4\pi\mu} \frac{x_1}{R^3}. \end{aligned} \quad (9.145)$$

Здесь $r = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Тогда после интегрирования по координате x_3 получаем:

$$\psi = -\frac{P}{4\pi\mu} \frac{x_1}{R(R+x_3)}. \quad (9.146)$$

Из третьего уравнения (9.141) с учетом (9.146) имеем:

$$\Phi_3 = \frac{P(1-2\nu)}{4\pi\mu} \frac{x_1}{R(R+x_3)}, \quad (9.147)$$

а из первых двух уравнений (9.141) находим:

$$\begin{aligned} \partial_3 \Phi_2 &= \frac{P\nu}{\pi^2\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma^2} \exp(-x_3\gamma) \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \\ \partial_3 \Phi_1 &= \frac{P}{\pi^2\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - \frac{\nu \alpha_1^2}{\gamma^2}\right) \exp(-x_3\gamma) \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned}$$

Используя явные значения интеграла (9.145) и интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2} \exp(-x_3\gamma) \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2 &= \frac{\pi}{2R}, \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma^2} \exp(-x_3\gamma) \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2 &= \frac{3\pi}{2} \frac{x_1 x_2}{R^5}, \end{aligned}$$

можно вычислить функции Φ_1 и Φ_2 .

В результате имеем:

$$\varphi_1 = \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{1}{R} - \nu \left(\frac{1}{R+x_3} - \frac{x_1^2}{R(R+x_3)^2} \right) \right], \quad \varphi_2 = \frac{P\nu x_1 x_2}{2\pi\mu} \frac{1}{R(R+x_3)}. \quad (9.148)$$

Подставляя функции φ_i (9.148), (9.147) и ψ (9.146) в (9.140), получаем:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{1}{R} + \frac{x_1^2}{R^3} + (1-2\nu) \left(\frac{1}{R+x_3} - \frac{x_1^2}{R(R+x_3)^2} \right) \right], \\ u_2 &= \frac{Px_1 x_2}{4\pi\mu} \left[\frac{1}{R^3} - (1-2\nu) \frac{1}{R(R+x_3)^2} \right], \\ u_3 &= \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{x_1 x_3}{R^3} + (1-2\nu) \frac{x_1^2}{R(R+x_3)^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.149)$$

В сферических координатах (R, ϑ, φ) выражения для перемещений будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{P \cos \varphi}{\pi\mu R} \left[(1-\nu) \sin \vartheta - \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{\sin \vartheta}{1+\cos \vartheta} \right], \\ u_\vartheta &= \frac{P \cos \varphi}{\pi\mu R} \left[\frac{(3-4\nu)}{4} \cos \vartheta - \frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{(1-2\nu)}{2} \frac{1}{1+\cos \vartheta} \right], \\ u_\varphi &= -\frac{P \sin \varphi}{\pi\mu R} \left[\frac{1}{4} + \frac{(1-2\nu)}{4} \frac{1}{1+\cos \vartheta} \right]. \end{aligned}$$

9.14. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИЯ НАГРУЗКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим *общий случай действия нагрузки*: в начале координат действует произвольная сосредоточенная сила $\vec{P}$ с компонентами (P_1, P_2, P_3) , направленными по трем соответствующим осям координат.

Складывая перемещения, выраженные формулами (9.121), для компоненты усилий P_3 , перемещения, вызванные действием силы P_1 (формулы (9.149)), и перемещения, вызванные действием силы P_2 , получаем:

$$\begin{aligned} 4\pi\mu u_1 &= P_1 \left[\frac{1}{R} + \frac{x_1^2}{R^3} + (1-2\nu) \left(\frac{1}{R+x_3} - \frac{x_1^2}{R(R+x_3)^2} \right) \right] + \\ &+ P_2 \left[\frac{x_1 x_2}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x_1 x_2}{R(R+x_3)^2} \right] + P_3 \left[\frac{x_1 x_3}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x_1}{R(R+x_3)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi\mu u_2 &= P_1 \left[\frac{x_1 x_2}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x_1 x_2}{R(R+x_3)^2} \right] + \\
&+ P_2 \left[\frac{1}{R} + \frac{x_2^2}{R^3} + (1-2\nu) \left(\frac{1}{R+x_3} - \frac{x_2^2}{R(R+x_3)^2} \right) \right] + P_3 \left[\frac{x_2 x_3}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x_2}{R(R+x_3)} \right], \\
4\pi\mu u_3 &= P_1 \left[\frac{x_1 x_3}{R^3} + (1-2\nu) \frac{x_1^2}{R(R+x_3)^2} \right] + \\
&+ P_2 \left[\frac{x_2 x_3}{R^3} + (1-2\nu) \frac{x_2^2}{R(R+x_3)^2} \right] + P_3 \left[\frac{x_3^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right].
\end{aligned}$$

Здесь $R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Если в области Γ на плоскости $x_3 = 0$ действуют *распределенные нагрузки* $p(x_1, x_2) \equiv (p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2), p_3(x_1, x_2))$, то вызванные ими перемещения можно найти, применяя принцип суперпозиции.

Так, например, компонента перемещений $u_i(\vec{x})$ выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
4\pi\mu u_i(\vec{x}) &= \iint_{\Gamma} \left\{ p_1(\xi_1, \xi_2) \left[\frac{1}{R} + \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{R^3} + (1-2\nu) \left(\frac{1}{R+x_3} - \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{R(R+x_3)^2} \right) \right] + \right. \\
&+ p_2(\xi_1, \xi_2) \left[\frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{R^3} - (1-2\nu) \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{R(R+x_3)^2} \right] + \\
&\left. + p_3(\xi_1, \xi_2) \left[\frac{(x_1 - \xi_1)x_3}{R^3} - (1-2\nu) \frac{(x_1 - \xi_1)}{R(R+x_3)} \right] \right\} d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}$$

9.15. ЗАДАЧА МИНДЛИНА¹

Задача Миндлина является обобщением задач Кельвина, Буссинеска и Черутти. Задача состоит в определении поля перемещений, вызванного произвольно направленной силой $\vec{P}$, приложенной в точке $\vec{\xi}$ упругого полупространства. Плоскость $x_3 = 0$ свободна от внешних усилий.

Вначале рассмотрим частный случай, когда в точке $(0, 0, h)$ действует сосредоточенная сила $P_1 = 1$, направленная в положительном направлении оси x_3 (рис. 9.4).

Решение сформулированной задачи разбиваем на два этапа.

¹ Миндлин Рэймонд Дэвид (Raymond David Mindlin, 1906–1987), американский ученый-механик.

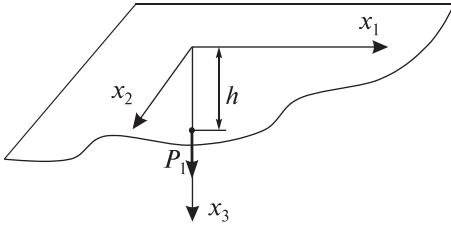


Рис. 9.4. К задаче Миндлина

Вначале рассматриваем задачу о действии в неограниченном пространстве двух противоположно направленных сил: силы $P_1 = +1$, приложенной в точке $(0, 0, h)$, и силы $P_1 = -1$, действующей в точке $(0, 0, -h)$.

Обозначим соответствующее этой нагрузке НДС как $\{u_i^0, \sigma_{ij}^0\}$. Для его определения используем метод Кельвина.

Воспользовавшись формулами (9.85) и применяя принцип суперпозиции, для перемещений u_i^0 получаем следующие формулы:

$$u_i^0 = A \left(\frac{x_i (x_3 - h)}{R_1^3} - \frac{x_i (x_3 + h)}{R_2^3} \right) + B \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \delta_{i3}. \quad (9.150)$$

Здесь

$$A = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad B = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad R_1 = [r^2 + (x_3 - h)^2]^{1/2},$$

$$R_2 = [r^2 + (x_3 + h)^2]^{1/2}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Определяя поле напряжений σ_{ij}^0 , можно заметить, что в плоскости $x_3 = 0$ от нуля отлично только напряжение σ_{33}^0 :

$$\sigma_{33}^0 = \frac{h}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{R_0^3} + \frac{3h^2}{R_0^5} \right), \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad R_0 = (h^2 + x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

На *втором этапе* определяем поле перемещений u_i' , вызванное действием нагрузки $p_3(x_1, x_2) = -\sigma_{33}^0(x_1, x_2, 0)$ в плоскости $x_3 = 0$ упругого полупространства.

Замечание. Данную нагрузку прикладываем для уравновешенности нагрузки в плоскости $x_3 = 0$.

Сформулированная задача представляет собой уже известную задачу, рассмотренную в п. 9.11 и 9.12. В соответствии с этим необходимо вычислить следующие функции:

$$\Phi(x) = \iint_{\Gamma} \frac{p_3(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{R(x, \xi)}, \quad \Omega(x) = \iint_{\Gamma} p_3(\xi_1, \xi_2) \ln(R' + x_3) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\Phi = \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}, \quad R' = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2]^{1/2}.$$

Функция Φ является гармонической в области $x_3 > 0$ и удовлетворяет граничному условию

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \bigg|_{x_3 \rightarrow +0} = -\sigma_{33}^0(x_1, x_2).$$

Рассмотрим следующую вспомогательную гармоническую функцию $S(\bar{x})$:

$$\begin{aligned} S(\bar{x}) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[C \frac{h+x_3}{R_2^3} + D \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{3(x_3+h)^2}{R_2^5} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[C \left(\frac{1}{R} \right)_{,3} - D \left(\frac{x_3+h}{R_2^3} \right)_{,3} \right]. \end{aligned} \quad (9.151)$$

Здесь C и D — константы.

Для $x_3 = 0$ на основании (9.151) имеем

$$S(x_1, x_2, 0) = -\frac{h}{2(1-\nu)} \left[\frac{C}{R_0^3} + \frac{D}{h} \left(\frac{1}{R_0^3} - \frac{3h^2}{R_0^5} \right) \right].$$

Если принять, что $D = -h$, $C = 2(1-\nu)$, получаем

$$S(x_1, x_2, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \Big|_{x_3 \rightarrow +0} = \left(\frac{1}{R_2} \right)_{,3} + \frac{h}{2(1-\nu)} \left(\frac{x_3+h}{R_2^3} \right)_{,3}. \quad (9.152)$$

Так как в обеих частях уравнения (9.152) находятся гармонические функции, то соотношение (9.152) справедливо для полупространства $x_3 > 0$. Проинтегрируем его по x_3 :

$$\Phi(\bar{x}) = \frac{1}{R_2} + \frac{h}{2(1-\nu)} \frac{x_3+h}{R_2^3}, \quad x_3 > 0.$$

Вторая гармоническая функция теперь находится легко:

$$\Omega(\bar{x}) = \ln(R_2 + x_3 + h) - \frac{h}{2(1-\nu)} \frac{1}{R_2}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = \Phi.$$

Теперь, зная функции $\Phi(\bar{x})$ и $\Omega(\bar{x})$, воспользовавшись формулами (9.136), можно определить перемещения u'_i .

Окончательно формулы для полных перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{r}{16\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{x_3-h}{R_1^3} - \frac{x_3+h}{R_2^3} \right) - \frac{1}{4\pi\mu} \left[x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + (1-2\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right], \\ u_3 &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(x_3-h)^2}{R_1^3} - \frac{(x_3+h)^2}{R_2^3} + (3-4\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] + \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \Phi - \frac{x_3}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Здесь $u_r = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta$.

Замечание. Решение u'_i является регулярной функцией, а перемещения и напряжения в точке $(0, 0, h)$ имеют особенность.

В качестве следующей рассмотрим такую задачу: пусть в точке $(0, 0, h)$ полупространства $x_3 > 0$ действует единичная сила ($P_1 = 1$), направленная по оси x_1 (рис. 9.5).

Как и при рассмотрении первой задачи, в данном случае целесообразно решение представить в виде суперпозиции двух частей. Первая часть относится к задаче о двух сосредоточенных силах, действующих в неограниченном упругом пространстве, параллельных оси x_1 . Первая из этих двух сил действует в точке $(0, 0, h)$, вторая — в точке $(0, 0, -h)$.

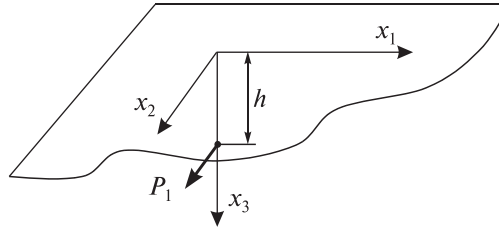


Рис. 9.5. К решению второй из сформулированных модельных задач

Складывая решения u_i^0 (9.150) для неограниченного пространства, можно убедиться, что в плоскости $x_3 = 0$ выполняются условия: $\sigma_{31}^0 = \sigma_{32}^0 = 0$. От нуля отлично только нормальное напряжение σ_{33}^0 :

$$\sigma_{33}^0 = \frac{x_1}{4\pi(1-\nu)R_0^3} \left(1 - 2\nu - \frac{3h^2}{R_0^2} \right), \quad R_0 = (x_1^2 + x_2^2 + h^2)^{1/2}. \quad (9.153)$$

К напряженному состоянию σ_{ij}^0 (9.153) необходимо добавить напряжения σ'_{ij} , выбранные так, чтобы в плоскости $x_3 = 0$ выполнялись условия:

$$\sigma_{31}^0 + \sigma'_{31} = 0, \quad \sigma_{32}^0 + \sigma'_{32} = 0, \quad \sigma_{33}^0 + \sigma'_{33} = 0.$$

Как и для первой из рассмотренных в данном разделе задач, будем решать задачу Буссинеска. Так как

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right|_{x_3 \rightarrow +0} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{x_1}{R_0^3} - \frac{3h^2 x_1}{R_0^5} \right],$$

тогда:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right|_{x_3 \rightarrow +0} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial x_1} \ln(R_2 + x_3 + h) + h \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right] \right\}_{x_3 \rightarrow +0}. \quad (9.154)$$

Так как в обе части уравнения (9.154) входят гармонические функции, то оно является справедливым в области $x_3 \geq 0$. Интегрируя его по переменной x_3 , находим

$$\Phi = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial x_1} \ln(R_2 + x_3 + h) + h \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right]. \quad (9.155)$$

В связи с тем, что $\Phi = \partial \Omega / \partial x_3$, имеем:

$$\Omega = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(1-2\nu) \left[(x_3 + h) \ln(R_2 + x_3 + h) - R_2 \right] + h \ln(R_2 + x_3 + h) \right]. \quad (9.156)$$

Перемещения u_i' можно определить по формулам (9.137), используя (9.155), (9.156). При $h \rightarrow 0$ рассмотренные примеры сводятся к решению задач Буссинеска и Черрути для сосредоточенной силы.

Замечание. Поле перемещений u_i' может быть определено и другими способами. Например, в случае действия сосредоточенной силы по оси x_3 в точке $(0, 0, h)$ для определения u_i' можно использовать функцию Буссинеска или функцию Лява.

Рассмотренная задача характеризуется осевой симметрией относительно оси x_3 . Во второй из рассмотренных задач u_i' можно определить, используя функции Папковича.

9.16. О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ. РЕШЕНИЕ ФЛАМАНА¹

Прежде чем переходить к рассмотрению решения Фламана, сделаем некоторые замечания, касающиеся выбора системы координат при построении модельных задач, особенно в двумерной постановке.

Так как перемещения точек упругого тела вследствие его деформирования, являющиеся решением уравнений математической теории упругости, определяются до аддитивного смещения, то важным представляется выбор системы отсчета.

Замечание. Под аддитивными смещениями понимаются перемещения уже деформированного тела по отношению к некоторой выбранной системе координат как абсолютно твердого тела.

Так как компоненты деформаций и напряжений в упругой полуплоскости убывают по мере удаления от места приложения нагрузки с порядком $1/r$, то при их интегрировании (при определении перемещений) появляются логарифмические особенности. В случае же рассмотрения трехмерного упругого тела убывание деформаций и напряжений имеет порядок $1/r^2$.

Поэтому *при вычислении перемещений упругой полуплоскости необходимо четко указывать систему координат, по отношению к которой определяются перемещения.*

Рассмотрим упругое полупространство, к границе которого приложена на ограниченном участке произвольная нагрузка с конечным результирующим усилием и конечным главным моментом.

Согласно уже сформулированному в разделе факту, начало системы координат можно связать с точкой полупространства, сколь угодно далеко расположенной от его плоской границы. Одну из осей можно направить по элементу, который до деформации был перпендикулярен к границе полупространства.

Перемещения точек упругого полупространства при указанных ограничениях, касающихся нагрузки, оказываются в такой системе координат всегда конечными и исчезающими по мере удаления от места границы, где приложена нагрузка. Вследствие этого указанную систему координат можно заменить другой, с началом в одной из точек границы тела до деформации, с двумя осями, лежащими в граничной плоскости, и третьей осью, перпендикулярной к ней. Перемещения полубесконечного тела по отношению к этой новой системе координат будут одновременно перемещениями по отношению к бесконечно удаленным его элементам, можно «закрепить» тело в бесконечно удаленных точках.

К сожалению, аналогичную процедуру нельзя сделать в случае упругой полуплоскости, даже если нагрузка приложена на участке границы конечной длины [90]. Действительно, изменение расстояния (a , следовательно, и перемещений) меж-

¹ Фламан А. (Flamant A., 1839–1915), французский инженер-механик.

ду двумя произвольными точками плоского тела (расположенными, например, на перпендикуляре к недеформированной границе полуплоскости) растет по закону логарифма в зависимости от самого расстояния.

Следовательно, если за начало координат взять точку в бесконечности (т. е. «закрепить» полуплоскость в бесконечности), то перемещения границы оказываются неограниченными. Начало системы координат, по отношению к которой определяются перемещения, необходимо связать с какой-либо конкретной точкой упругой полуплоскости, расположенной, например, на ее границе (а не произвольной, как в случае полупространства). Одну из осей системы направляют по касательной к одному из линейных элементов, проведенной из выбранной точки.

Поясним причину такого отличия в характере перемещений упругого полупространства и упругой полуплоскости (на основе материала статьи [90]).

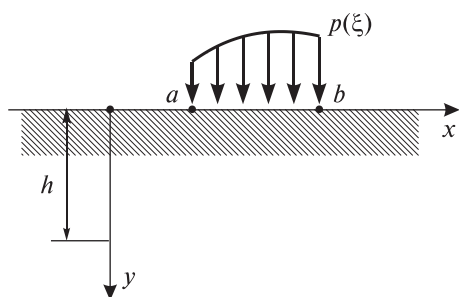


Рис. 9.6. К задаче Фламана

Пусть на горизонтальную границу упругой полуплоскости на участке $S: \xi \in [a, b]$ действует нормально распределенная нагрузка интенсивности $p(\xi)$ (рис. 9.6). Задача состоит в определении перемещений точек границы.

Для корректности постановки задачи, как упоминалось выше, необходимо четко указать систему координат, относительно которой вычисляются перемещения (условие «закрепления»). В соответствии с этим ось x совместим с границей полуплоскости, а ось y направим вглубь ее (см. рис. 9.6).

Закрепим элемент полуплоскости, расположенный на оси y , на глубине h . В этом случае выполняются следующие равенства: при $x = 0, y = h: u = 0, v = 0, \partial_y u = 0$. Здесь $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — соответственно составляющие перемещения точек упругой полуплоскости, параллельные осям x и y .

Решение задачи Фламана (действие сосредоточенной силы $\vec{P}$, направленной по оси y и приложенной в начале координат, на упругую полуплоскость), с учетом введенных условий закрепления можно представить в таком виде:

$$u = A \left[\frac{\vartheta}{2(\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{xy}{r^2} \right], \quad v = A \left[\frac{1}{2\mu} \ln \frac{r}{h} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{x^2}{r^2} \right], \quad (9.157)$$

$$A = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{P}{\pi}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg(x/y).$$

Для точек границы упругой полуплоскости формулы (9.157) приобретают следующий вид ($y = 0$):

$$u(x, 0) = U(x) = \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x,$$

$$v(x, 0) = V(x) = A \left[\frac{1}{2\mu} \ln \frac{|x|}{h} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \right]. \quad (9.158)$$

Замечание. В некоторых работах (см., например, [46]) величина $(\lambda + \mu)/(2\mu(\lambda + 2\mu))$ в формуле (9.158) для компоненты вертикальных перемещений опускается и формулой Фламана называется такое выражение:

$$V(x) = \frac{A}{2\mu} \ln \frac{|x|}{h} = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{P}{\pi} \ln \frac{|x|}{h}. \quad (9.159)$$

Если в начале координат действует нагрузка $pd\xi$, то перемещение на элементе границы, удаленном на расстояние ξ от точки $(0, 0)$ (рис. 9.7), в соответствии с формулой (9.159) будет

$$dV_f = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \ln \frac{|\xi|}{h} pd\xi. \quad (9.160)$$

Если нагрузка $p(\xi)$ распределена на участке $\xi \in [a, b]$, то в этом случае перемещения в начале координат следующие:

$$V_f(x) = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_a^b \ln \frac{|\xi|}{h} p(\xi) d\xi. \quad (9.161)$$

Например, если $a = 0$, $b = c$, $\lambda = \mu$, то на основании (9.161) получаем

$$V_f(x) = -\frac{3}{4\pi\mu} \int_0^c \ln \frac{|\xi|}{h} p(\xi) d\xi. \quad (9.162)$$

Однако если проанализировать формулы (9.160)–(9.162) для определения перемещений в начале координат, то можно убедиться, что они неточны. Следовательно, выражение (9.160) для перемещений в начале координат от усилий $pd\xi$ справедливо в предположении закрепления элемента полуплоскости на глубине h , находящегося непосредственно под точкой приложения нагрузки, т. е. на расстоянии ξ по оси y (рис. 9.8).

Таким образом, в выражении (9.160), по существу, производится суммирование перемещений бесконечного числа деформированных состояний с закреплениями в разных местах (в точках ξ), что *принципиально недопустимо*.

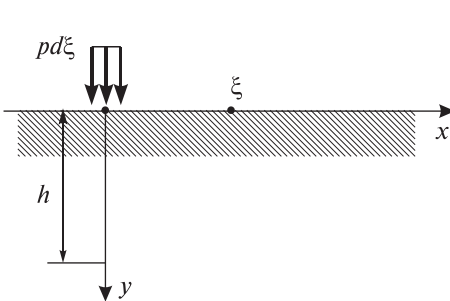


Рис. 9.7. Геометрические пояснения к построению «правильного» решения Фламана

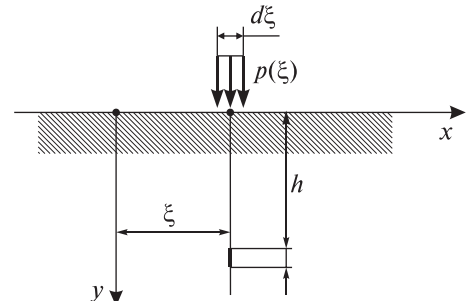


Рис. 9.8. Геометрические пояснения некорректности неточного решения Фламана

Правильное решение следующее. Пусть сосредоточенная сила действует в точках границы с координатами $(\xi, 0)$. Формулы для перемещений получаются из формулы Фламана, в которой координата x заменяется разностью $(x - \xi)$.

Кроме того, к величинам u и v следует еще прибавить перемещения, соответствующие аддитивному смещению полуплоскости как абсолютно жесткого тела. В результате получаем

$$\begin{aligned} u &= \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{y} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \frac{(x - \xi)y}{y^2 + (x - \xi)^2} + \alpha + \omega y, \\ v &= \frac{A}{2\mu} \ln \sqrt{y^2 + (x - \xi)^2} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \frac{(x - \xi)^2}{y^2 + (x - \xi)^2} + \beta - \omega x. \end{aligned} \quad (9.163)$$

Для определения констант аддитивного смещения α , β , ω примем, что в точке $(0, h)$ перемещения u и v обращаются в нуль вместе с производной $\partial u / \partial y$ (тем самым фиксируется элемент оси y на глубине h).

Решая соответствующие уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{h} + \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{h\xi}{h^2 + \xi^2} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{2h^3\xi}{(h^2 + \xi^2)^2}, \\ \beta &= -\frac{A}{2\mu} \ln \sqrt{h^2 + \xi^2} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \frac{\xi^2}{h^2 + \xi^2}, \\ \omega &= -\frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\xi}{h^2 + \xi^2} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \frac{(\xi^2 - h^2)\xi}{(h^2 + \xi^2)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя данные значения α , β , ω в выражения для u и v (9.163), после очевидных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} u(x, y, \xi) &= \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{y} + \operatorname{arctg} \frac{\xi}{h} + \frac{h\xi}{h^2 + \xi^2} - \frac{y\xi}{h^2 + \xi^2} \right] - \\ &\quad - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \left[\frac{(x - \xi)y}{y^2 + (x - \xi)^2} + \frac{2h^3\xi}{(h^2 + \xi^2)^2} + \frac{(\xi^2 - h^2)\xi y}{h^2 + \xi^2} \right], \\ v(x, y, \xi) &= \frac{A}{2\mu} \ln \sqrt{\frac{(x - \xi)^2 + y^2}{h^2 + \xi^2}} + \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\xi x}{h^2 + \xi^2} + \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \left[\frac{(x - \xi)^2}{y^2 + (x - \xi)^2} - \frac{\xi^2}{h^2 + \xi^2} + \frac{(\xi^2 - h^2)\xi x}{(h^2 + \xi^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.164)$$

Формула для определения вертикальных перемещений точек граничной поверхности (при $y = 0$) на основании (9.164) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 V(x, \xi) = v(x, 0, \xi) = & \frac{A}{2\mu} \ln \frac{|x - \xi|}{\sqrt{h^2 + \xi^2}} + \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\xi x}{h^2 + \xi^2} + \\
 & + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \left[1 - \frac{\xi^2}{h^2 + \xi^2} + \frac{(\xi^2 - h^2)\xi x}{(h^2 + \xi^2)^2} \right].
 \end{aligned} \quad (9.165)$$

Эти перемещения возникают в результате действия сосредоточенной силы $\bar{P}$ в точке $(\xi, 0)$ перпендикулярно к границе упругой полуплоскости, если принять

$$A = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{P}{\pi}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда распределенная нагрузка $p(\xi)$ действует на участке (a, b) . Осадка (вертикальные перемещения) от такой нагрузки в какой-либо точке границы $(x, 0)$ в соответствии с (9.165) в данном случае имеет следующее представление:

$$\begin{aligned}
 V(x) = \int_a^b \frac{1}{\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} p(\xi) \left\{ \frac{1}{2\mu} \ln \frac{|x - \xi|}{\sqrt{h^2 + \xi^2}} + \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\xi x}{h^2 + \xi^2} + \right. \\
 \left. + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} A \left[1 - \frac{\xi^2}{h^2 + \xi^2} + \frac{(\xi^2 - h^2)\xi x}{(h^2 + \xi^2)^2} \right] \right\} d\xi.
 \end{aligned} \quad (9.166)$$

Сравним полученные формулы с неточными выражениями (9.162). Пусть $x = 0$, $a = 0$, $b = c$, $\lambda = \mu$, $p = p_0 = \text{const}$. Согласно точной формуле (9.166) получаем:

$$V(0) = \frac{3p_0}{4\pi\mu} \int_0^c \left\{ \ln \sqrt{h^2 + \xi^2} - \ln \xi - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{\xi^2}{h^2 + \xi^2} \right\} d\xi.$$

В соответствии с неточной формулой (9.162) имеем:

$$V_f(0) = \frac{3p_0}{4\pi\mu} \int_0^c (\ln h - \ln \xi) d\xi.$$

После вычисления интегралов окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 V(0) &= \frac{3p_0}{4\pi\mu} \left(c \ln \frac{\sqrt{h^2 + c^2}}{c} + \frac{2}{3} h \operatorname{arctg} \frac{c}{h} \right), \\
 V_f(0) &= \frac{3p_0}{4\pi\mu} \left(c \ln \frac{h}{c} + c \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при использовании формулы для V_f получаем неверный результат, если принять, что $h = 0$ (т. е. закрепить элемент полуплоскости в начале координат $(0, 0)$). В этом случае перемещения становятся бесконечно большими. Точная же формула при $h = 0$ дает значение $V(0) = 0$.

9.17. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Проведем некоторые обобщения относительно классических фундаментальных решений теорий упругости, изложенных в данном разделе. Их можно выделить в два класса.

Первый класс фундаментальных решений — задачи для бесконечной упругой среды. В этом случае рассматриваемая область Ω^* — бесконечная упругая среда и соответствующая ей граница Γ^* — бесконечная граница.

Этому классу соответствует в общем случае *фундаментальное решение Кельвина для бесконечной упругой среды*. Для трехмерного случая его можно записать в виде:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right]. \quad (9.167)$$

Для двумерных задач

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left[(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j} \right]. \quad (9.168)$$

Здесь $u_{ij}^*(\xi, x)$ — перемещения, возникающие в точке x в j -м направлении и соответствующие единичной сосредоточенной нагрузке, действующей в i -м направлении и приложенной в точке ξ .

Выражения для напряжений записываются так:

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\},$$

где $\alpha = 2, 1$, $\beta = 3, 2$ соответственно для трехмерных задач и задач плоского-деформированного состояния.

Функция $r = r(\xi, x)$ — расстояние между точкой ξ , к которой прикладывается нагрузка, и некоторой точкой x пространства, производные функции r берутся по координатам точки x , т. е.:

$$r = \sqrt{r_i r_i}, \quad r_i = x_i(x) - x_i(\xi), \quad r_{,i} = \partial r / \partial x_i(x) = r_i / r.$$

Выражения для деформаций ε_{jk}^* в произвольной точке x , обусловленные единичной сосредоточенной нагрузкой, приложенной в точке ξ и направленной вдоль i -й оси, имеют вид:

$$\varepsilon_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\alpha\pi(1-\nu)\mu r^\alpha} \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - (r_{,i}\delta_{jk} + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}) \right\}.$$

Соответствующие формулы для напряжений можно выписать в такой форме:

$$\sigma_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\}. \quad (9.169)$$

Приведенные выражения для плоского деформированного состояния справедливы и для плоского напряженного состояния, если коэффициент ν заменить на $\bar{\nu} = \nu / (1 + \nu)$.

Второй класс фундаментальных решений относится к задачам для полупространства. В этом случае рассматривается полубесконечная среда с плоским участком границы — бесконечной горизонтальной плоскостью $\bar{\Gamma}$. Обычно рассматривается нижнее полупространство, где в качестве граничной поверхности $\bar{\Gamma}$ берется плоскость $x_1 = 0$, которая в данном случае считается свободной от напряжений.

Данный класс решений можно представить в такой форме:

$$(\quad)^* = (\quad)^K + (\quad)^C,$$

где $(\quad)^K$ и $(\quad)^C$ — соответственно решение Кельвина (выражения (9.167)–(9.169) для трех- и двумерных решений) и дополнительное решение.

Для того чтобы получить фундаментальные решения для плоского деформированного состояния, можно использовать процедуру интегрирования, изложенную в связи с задачей Кельвина, но можно получить фундаментальное решение для полуплоскости и в явном виде.

Например, выражения дополнительных решений $(\quad)^C$ для перемещений, обусловленных единичной сосредоточенной нагрузкой, приложенной внутри полупространства, имеют вид [91]:

$$\begin{aligned} u_{11}^c &= K_d \left(\left((8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)) \right) / R + \left((3-4\nu) R_1^2 - 2c\bar{x} \right) / R^3 + 6c\bar{x} R_1^2 / R^5 \right), \\ u_{12}^c &= K_d r_2 \left((3-4\nu) r_1 / R^3 - 4(1-\nu)(1-2\nu) / (R(R+R_1)) + 6c\bar{x} R_1 / R^5 \right), \\ u_{21}^c &= K_d r_2 \left((3-4\nu) r_1 / R^3 + 4(1-\nu)(1-2\nu) / (R(R+R_1)) - 6c\bar{x} R_1 / R^5 \right), \\ u_{22}^c &= K_d \left(1/R + (3-4\nu) r_2^2 / R^3 + (2c\bar{x} / R^3) (1 - 3r_2^2 / R^2) + \right. \\ &\quad \left. + (4(1-\nu)(1-2\nu) / (R+R_1)) (1 - r_2^2 / (R(R+R_1))) \right), \\ u_{23}^c &= K_d r_2 r_3 \left((3-4\nu) / R^3 - 4(1-\nu)(1-2\nu) / (R(R+R_1)^2) - 6c\bar{x} / R^5 \right), \\ u_{33}^c &= K_d \left(1/R + (3-4\nu) r_3^2 / R^3 + (2c\bar{x} / R^3) (1 - 3r_3^2 / R^2) + \right. \\ &\quad \left. + (4(1-\nu)(1-2\nu) / (R+R_1)) (1 - r_3^2 / (R(R+R_1))) \right), \\ u_{13}^c &= u_{12}^c r_3 / r_2; \quad u_{31}^c = u_{21}^c r_3 / r_2; \quad u_{32}^c = u_{23}^c, \end{aligned}$$

где

$$i = 1, 2, 3; \quad R = R(R_i R_i)^{1/2}, \quad r_i = x_i(x) - x_i(\xi); \quad K_d = 1 / (16\pi(1-\nu)\mu),$$

$$R_i = x_i(x) - x_i(\xi'); \quad c = x_1(\xi) \geq 0, \quad \bar{x} = x_1(x) \geq 0.$$

Геометрия задачи о единичной сосредоточенной нагрузке, приложенной внутри полупространства ($|P_1| = |P_2| = |P_3| = 1$), показана на рис. 9.9.

Выражения для слагаемых дополнительных напряжений имеют громоздкий вид и приведены, например, в [91].

Этот простой пример ясно показывает физическую природу выражения (9.168) и может быть использован для объяснения перехода от трехмерной к двумерной задаче путем интегрирования по координате $x_3(\xi)$. Рассмотрим выражение для перемещений в трехмерном случае следующего вида [91]:

$$\tilde{u}_{ij}^*(\xi, \bar{x}) = u_{ij}^* - \bar{u}_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}} \right) + \frac{r_i r_j}{r} \right], \quad (9.171)$$

где перемещения u_{ij}^* определяются выражением (9.167), а $\bar{u}_{ij}^* = u_{ij}^*(\xi, \bar{x})$ — перемещения в некоторой точке $\bar{x}$, лежащей на перпендикуляре к i -му направлению действия силы, проходящем через точку ξ . В соответствии с этим $x_3(\bar{x}) = x_3(x)$, $\bar{r} = r(\xi, \bar{x}) = \sqrt{r_3^2 + 1}$.

Выражение (9.171) можно использовать для нахождения фундаментальных решений для двумерного случая с помощью формулы

$$\left[u_{ij}^*(\xi, x) \right]_{2D} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{ij}^*(\xi, x) dx_3(\xi), \quad i, j = 1, 2,$$

которая содержит интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r_3^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_3^2 + 1}} \right] dr_3 = -2 \ln r, \quad r_i r_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(r_3^2 + r^2)^{3/2}} dr_3 = \frac{2r_i r_j}{r^2} = 2r_{,i} r_{,j}.$$

Из приведенных соотношений можно легко получить выражение (9.168).

Отметим, что перемещения равны нулю в точках $\bar{x}$ (зависящих от направления действия нагрузки).

Фундаментальные решения имеют широкое применение при рассмотрении различных классов задач МДТТ, в частности контактных задач (см., например, [79; 92–95]).

Замечание. В [6; 32] приведены примеры использования фундаментальных решений при рассмотрении различных задач МДТТ и геомеханики. Кроме того, описаны алгоритмы интегрирования фундаментальных решений при действии нагрузок в произвольных областях воздействия.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Для решения в форме Треффца выписать полную процедуру определения φ , ψ и u_i , представив φ_i как решения интегрального уравнения с использованием функций Грина.

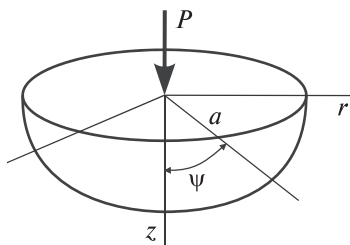


Рис. 9.11

2. Геометрия тела представляет собой полусферу радиусом a (рис. 9.11).

Используя решение Буссинеска, построить графики изменения компонент σ_{zz} , σ_{rr} и σ_{rz} по поверхности тела как функций угла ψ .

Найти значения угла ψ , для которых величины σ_{zz} , σ_{rr} и σ_{rz} являются максимальными. В вычислениях принять $\nu = 0,25; 0,5$.

3. Пусть в задаче Буссинеска u_R представляет перемещение в направлении R ($R^2 = r^2 + z^2$), т. е. u_R — пере-

мещение по лучу в направлении вперед либо назад от точки приложения. На поверхности полупространства ($z = 0, u_R = u_r$), как следует из уравнений для перемещений, выписанных в цилиндрической системе координат, u_R — перемещения по направлению вперед от точки приложения. На оси z (где $r = 0$) имеем, что $u_R = u_z$ и u_R направлено в противоположную сторону от точки приложения нагрузки.

Найти поверхность, на которой перемещение u_R в точности равно нулю.

$$u_r = \frac{P}{4\pi\mu R} \left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z} \right], \quad u_\theta = 0, \quad u_z = \frac{P}{4\pi\mu R} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right].$$

4. Рассматривается полупространство, на которое действуют две равные по величине сосредоточенные силы P (рис. 9.12).

Используя принцип суперпозиции, найти выражение для вертикальных перемещений $u_z(x, y, z = 0)$ на поверхности полупространства как функции координат (x, y) . Построить график значений $u_z(x, y, z = 0)$ вдоль оси x в интервале от $x = -4a$ до $x = +4a$.

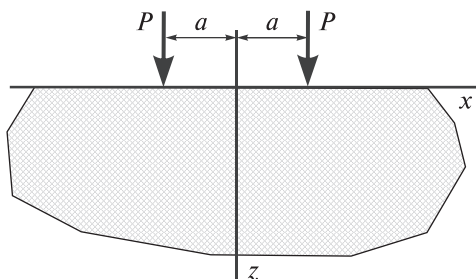


Рис. 9.12

5. Компоненты напряженного состояния для решения Буссинеска в случае действия сосредоточенной нагрузки на полусферическую поверхность должны точно уравновешиваться в точке приложения нагрузки P (рис. 9.13).

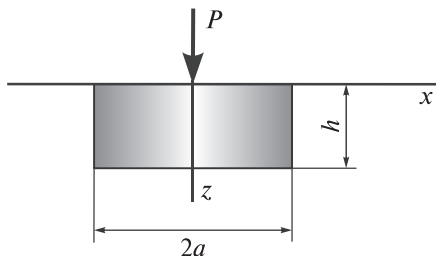


Рис. 9.13

Аналогичный вывод должен быть верным для любой цилиндрической поверхности с плоским основанием. Если определить вертикальную компоненту усилий растяжения, действующих на боковую поверхность и основание цилиндра, то вычисления показывают, что комбинация этих результатов в точности равна нагрузке P .

Показать, что этот вывод выполняется и в том случае, если диаметр цилиндра увеличить неограниченно, т. е. цилиндр приближается к плите толщиной h .

Показать, что данный вывод остается верным и если длину цилиндра увеличить неограниченно.

6. Используя выражения компонент напряжений для решения Фламана, показать, что усилия, действующие на цилиндрической поверхности радиусом b (рис. 9.14), определяются следующим выражением:

$$T = \frac{2pz}{\pi b^2} \bar{n}.$$

7. Для геометрии расчетной области, представленной на рис. 9.14, показать, что p уравнивает вертикальную составляющую усилий, действующих по цилиндрической поверхности радиусом b .

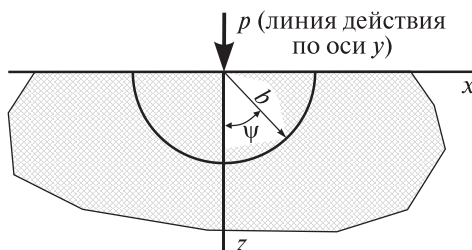


Рис. 9.14

8. Задача Фламана является примером задачи в условиях плоско-деформированного состояния. Для задачи в условиях плоско-деформированного состояния (рис. 9.15) показано, что деформации ε_{yy} равны нулю, а напряжения σ_{yy} — не равны.

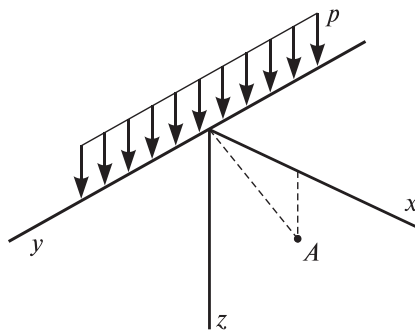


Рис. 9.15

Используя закон Гука и соотношения между упругими константами, показать, что для всех задач в плоскодеформированном состоянии (когда задача рассматривается в плоскости « x – z ») напряжения σ_{yy} всегда определяются формулой $\sigma_{yy} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$.

9. Рассматривается случай действия в неограниченном упругом пространстве распределенной нагрузки с интенсивностью p , линия действия которой сонаправлена оси z (рис. 9.16). Пусть линия действия нагрузки расположена непосредственно на оси z . Подобная модельная задача соответствует, например, случаю, если твердый прут, внедренный в упругое пространство, тянуть (вдавливает) с усилием из (в) пространства (о).

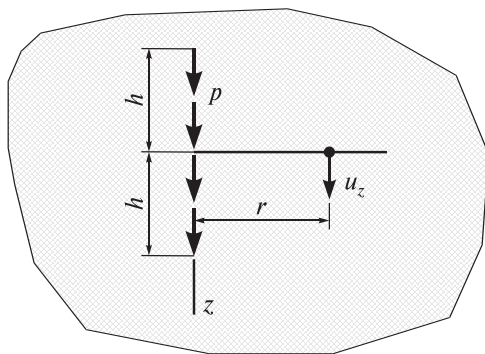


Рис. 9.16

Используя решение Кельвина, показать, что z -компонента вектора перемещений, рассматриваемых в точке, находящейся на расстоянии r от средней точки, задается следующей формулой:

$$u_z(r) = \frac{p}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{(1+r^2/h^2)^{1/2}} + \frac{1}{3(1+r^2/h^2)^{3/2}} \right].$$

Что произойдет с величиной u_z , если значение h увеличивать до бесконечности?

10. Показать, что для задачи Кельвина результирующая сила, действующая на сфере радиусом a , уравнивает приложенную нагрузку величиной $2P$.

11. В упругом полупространстве угол θ определяется следующим соотношением (рис. 9.17): $\operatorname{tg} \theta = x/z$.

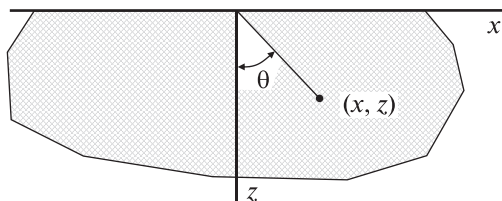


Рис. 9.17

Показать, что функция $\Phi = \theta(x^2 + z^2)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению по переменным x и z .

12. Для случая параболического распределения поверхностной нагрузки, действующей по круговой области на поверхности упругого полупространства и определяемой уравнением

$$p(r) = p_0 \left(1 - r^2/a^2\right), \quad 0 \leq r \leq a,$$

определить вертикальные перемещения w по окружности области действия нагрузки.

13. Нагрузка интенсивности p_0 действует по поверхности упругого полупространства по области, представляющей собой равносторонний треугольник со стороной длиной a (рис. 9.18).

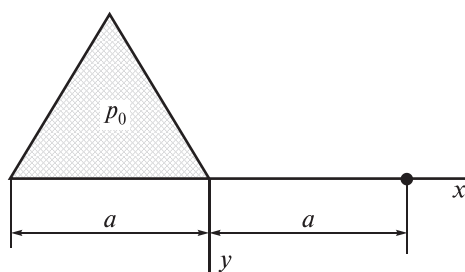


Рис. 9.18

Воспользовавшись технологией решения задач в случае действия нагрузок постоянной интенсивности, распределенных по площади произвольной формы, определить вертикальные перемещения поверхности полупространства в точке A (см. рис. 9.18).

14. Нагрузка, действующая на поверхность однородного упругого полупространства, представляет собой бесконечную в направлении оси y полосу шириною $2b$ с поперечным сечением в виде пирамиды (рис. 9.19).

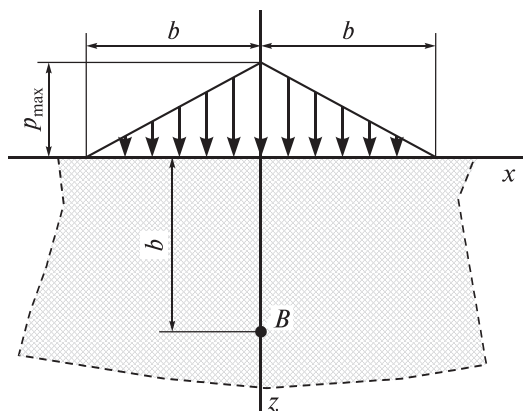


Рис. 9.19

Определить вертикальную компоненту напряжений σ_{zz} в точке B .

15. На поверхности однородного упругого полупространства по площади, изображенной на рис. 9.20, действует равномерная нагрузка интенсивности p_0 .

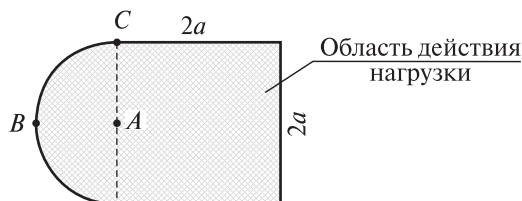


Рис. 9.20

Найти перемещение поверхности полупространства в точках A , B и C .

16. На поверхности однородного упругого полупространства действует распределенная по линейному закону нагрузка в пределах треугольной области (рис. 9.21). Величины прикладываемой нагрузки в точках A , B и C равны соответственно p_A , p_B , p_C .

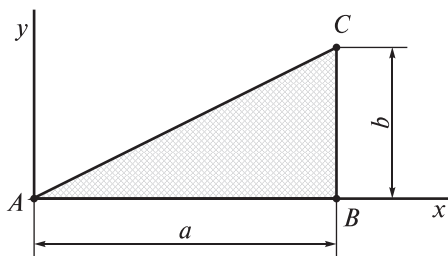


Рис. 9.21

Определить вертикальное перемещение поверхности полупространства в вершине A .

Глава 10

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

10.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В предыдущих разделах рассматривались задачи МДТТ в статической постановке. Вместе с тем существует большой класс задач, когда внешние воздействия на деформируемые тела носят четко выраженный динамический характер. К таким нагрузкам относятся, например, сейсмические толчки, различные динамические воздействия технологического происхождения и т. п.

Класс динамических задач достаточно обширен. В данном разделе рассмотрим задачи, модельные аналоги которых относятся к волновым задачам механики деформируемых твердых тел.

В краткой форме приведем основные понятия, относящиеся к описанию волновых процессов.

Если в каком-либо месте упругой сплошной (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами эти колебания распространяются от частицы среды к частице с некоторой скоростью v . *Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.* Важно, что такие возмущения, возникающее в некоторой части сплошной среды, распространяются в ней с конечной скоростью. Это значит, что в точке, находящейся на расстоянии L от источника возмущения, в течение некоторого времени τ будет сохраняться покой. Таким образом, частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. *Характерным свойством волны является перенос энергии без переноса вещества.*

Понятия «колебания» и «волны» взаимосвязаны, но и отличаются друг от друга. Движение тела G называется *колебательным* (или просто *колебаниями*) на конечном временном интервале времени $[t_1, t_2]$ (на полубесконечном интервале $t \geq t_1$), если на этом интервале все точки $M \in G$ совершают колебания. Под *колебаниями точки M* на интервале $[t_1, t_2]$ понимают такой закон изменения во времени хотя бы одного определяющего параметра $u_i(M, t)$, для которого существует функция $u_i^*(M, t)$, имеющая с траекторией более двух (счетное множество) точек пересечения, т. е. уравнение $u_i(M, t) = u_i^*(M, t)$ имеет более двух (счетное множество) корней (рис. 10.1). Как правило, $u_i^*(M, t)$ соответствует и положению равновесия тела.

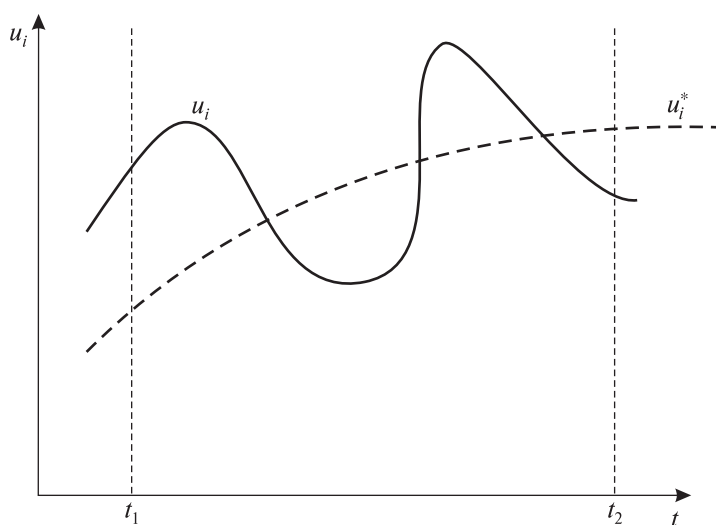


Рис. 10.1. Колебание точки (счетное множество корней с u_i^*)

С точки зрения такого определения колебательного движения, если в теле G существуют точки, совершающие колебания с разными законами движения, то такое движение называется *волновым процессом (волнами)* [96].

Еще раз следует подчеркнуть, что *принципиальным отличием волн от колебаний является перенос энергии*, так как в колебаниях происходят лишь «местные» преобразования энергии. Волны же, как правило, способны удаляться на значительные расстояния от места своего возникновения.

Большинство волн по своей природе не новые физические явления, а лишь условные названия для определенного вида коллективного движения. Так, если в объеме газа возникла звуковая волна, то это не значит, что в этом объеме появились новые физические объекты. Звук — лишь название для особого скоординированного типа движения тех же самых молекул. *Большинство волн — это колебания некоторой среды.* Вне этой среды волны данного типа не существуют (например, звук в вакууме).

Периодическое возмущение, создаваемое в точке, будет вызывать в другой точке, отстоящей от нее на расстоянии L , также периодическое движение, но сдвинутое по фазе. Задачи подобного типа называют волновыми задачами.

Замечание. В физике рассматриваются волны различной природы: механические, электромагнитные и т. д. Несмотря на отличия, эти волны имеют много общих черт.

Длина волны — это расстояние, на которое распространяется волна за один период колебаний.

В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны. Волны, рассматриваемый параметр которых (смещение молекул, механическое напряжение, и т. д.) изменяется периодически вдоль оси распространения (направления распространения) волны, называются *продольными волнами*. Если колебания происходят перпендикулярно оси распространения волны, то такие волны называются *поперечными*.

Если взаимосвязь между частицами среды осуществляется силами упругости, возникающими вследствие деформации среды при передаче колебаний от одних частиц к другим, то волны называются *упругими*. К ним относятся звуковые, ультразвуковые, сейсмические и другие волны.

Упругие поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

Как указывалось ранее, *плоские волны* — это волны, волновые поверхности которых представляют собой плоскости. *Сферическая волна* — волны, волновые поверхности которых — сферы.

Волны, несущие разрывы производных от перемещений, т. е. скоростей и напряжений, называются *волнами сильного разрыва* или *ударными волнами*. Ударные волны возникают при взрывах, детонации, сверхзвуковых движениях тел и т. д.

Для продольных и поперечных волн часто используются термины «волны расширения» и «волны искажения».

В неограниченном изотропном теле могут распространяться два и только два типа упругих волн: волны искажения и волны расширения. При деформировании твердой среды возникают как продольные волны, так и поперечные.

Кроме указанных выше типов волн, которые могут распространяться внутри безграничной твердой среды, упругие волны могут распространяться также вдоль поверхности, причем связанные с ними перемещения убывают с глубиной по экспоненциальному закону. Так как эти волны расходятся только в двух измерениях, они затухают с расстоянием медленнее других типов волн. Эти волны, называются *поверхностными волнами Рэлея* и играют важную роль при изучении сейсмических явлений.

Существование поверхностных волн является следствием взаимодействия продольных и (или) поперечных упругих волн при отражении этих волн от плоской границы между различными средами при определенных граничных условиях для компонент смещения. У поверхностных волн взаимосвязь между соседними элементами поверхности тела при передаче колебаний осуществляется не силами упругости, а силами поверхностного натяжения и тяжести. Волны на поверхности тела не являются ни продольными, ни поперечными. Таким образом, такие волны представляют собой суперпозицию продольного и поперечного движения молекул.

Поверхностные волны в твердых телах бывают двух классов: с вертикальной поляризацией, у которых вектор колебательного смещения частиц среды расположен в плоскости, перпендикулярной к граничной поверхности, и с горизонтальной поляризацией, у которых вектор смещения частиц среды параллелен граничной поверхности.

К наиболее часто встречающимся частным случаям поверхностных волн можно отнести следующие.

1. Волны Рэлея (или рэлеевские), распространяющиеся вдоль границы твердого тела с вакуумом или достаточно разреженной газовой средой. Энергия этих волн локализована в поверхностном слое толщиной от l до $2l$, где l — длина волны. Частицы в волне Рэлея движутся по эллипсам, большая полуось которых перпендикулярна границе, а малая — параллельна направлению распространения волны. Фазовая скорость волн Рэлея $V_R \approx 0,9V_S$.

2. Затухающие волны рэлеевского типа на границе твердого тела с жидкостью при условии, что фазовая скорость в жидкости меньше, чем в твердом теле (что справедливо почти для всех реальных сред). Эта волна непрерывно излучает энергию в жидкость, образуя в ней отходящую от границы неоднородную волну. Фазовая скорость V_L этой волны с точностью до процентов равна V_R . Распределение по глубине смещений и напряжений — такое же, как в волне Рэлея.

3. Незатухающая волна с вертикальной поляризацией, бегущая по границе жидкости и твердого тела со скоростью, меньше V_L (и, соответственно, меньше, чем скорости продольной и поперечной волн в твердом теле). Структура этой поверхностной волны другая, чем у рэлеевской волны. Она состоит из слабо неоднородной волны в жидкости, амплитуда которой медленно убывает при удалении от границы, и двух сильно неоднородных продольной и поперечной волн в твердом теле.

Энергия волны и движение частиц локализованы в основном в жидкости.

4. Волна Стонли¹, распространяющаяся вдоль плоской границы двух твердых сред, модули упругости и плотности которых не сильно различаются. Такая волна состоит как бы из двух рэлеевских волн — по одной в каждой среде.

Вертикальные и горизонтальные компоненты смещений в каждой среде убывают при удалении от границы так, что энергия волны оказывается сосредоточенной в двух граничных слоях. Фазовая скорость волны Стонли меньше значений фазовых скоростей продольных и поперечных волн в обеих граничащих средах.

5. Волны Лява — поверхностные волны с горизонтальной поляризацией, которые могут распространяться на границе твердого полупространства с твердым слоем.

Эти волны — чисто поперечные: в них имеется только одна компонента смещения, а упругая деформация в волне Лява представляет чистый сдвиг.

Важнейшим свойством волн является *свойство суперпозиции*, согласно которому в любой области среды может распространяться независимо друг от друга любое число волн.

10.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Одномерное волновое уравнение может быть представлено в следующей форме [96]:

- в плоском случае:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad (10.1)$$

- в сферическом случае (r — радиальная координата):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (10.2)$$

Замечание. Уравнения такого типа рассматриваются в курсе уравнений математической физики. Основной особенностью решений волнового уравнения является описание распространяющегося с конечной скоростью возмущения — волны.

¹ Стонли Джордж Джонстон (George Johnstone Stoney, 1826—1911), британский и ирландский физик и математик.

Используя метод Даламбера¹, можно рассмотреть процесс распространения волн (возмущений) вида:

$$\varphi(x, t) = \Phi_1(x - t/a) + \Phi_2(x + t/a), \quad (10.3)$$

где Φ_1, Φ_2 — дважды непрерывно дифференцируемые функции указанных аргументов.

Выражение (10.3) представляет собой общее решение уравнения (10.1). Можно показать, что уравнение (10.1) не имеет решений, отличных от тех, которые могут быть представлены функциями вида (10.3) или суперпозицией таких функций.

При $ax - t = \text{const}$ имеет место волна (возмущение), распространяющаяся в сторону возрастания ординаты x (при возрастании t).

При $ax + t = \text{const}$ имеет место волна, распространяющаяся в противоположном направлении.

Кроме того, на основании (10.3) можно исследовать свойства сферически симметричной волны, описываемой уравнением (10.2):

$$r\psi(r, t) = \Psi_1(r - t/a) + \Psi_2(r + t/a). \quad (10.4)$$

Слагаемое $\Psi_1(r - t/a)$ описывает *расходящуюся волну*, а $\Psi_2(r + t/a)$ — *сходящуюся волну*.

На рис. 10.2 указаны графические изображения процесса распространения одномерной волны в координатах (x, t) .

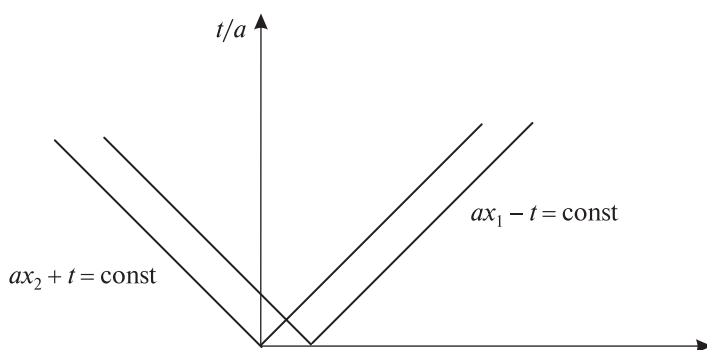


Рис. 10.2. Процесс распространения одномерной волны

Отсюда следует, что если в начальный момент времени ($t = 0$) задано некоторое значение функции $\varphi(x, 0)$, то оно является причиной возмущений, которые можно обнаружить при $t > 0$ в окрестностях точек x_1 и x_2 . Именно эта особенность уравнения (10.1) — описывать возмущения (волны), распространяющиеся с конечной скоростью, — и отражена в названии уравнения — волновое уравнение.

10.3. ФРОНТ ВОЛНЫ, ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В действительности в твердых телах колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси x , а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и но-

¹ Д'Аламбер Жан Лерон (d'Alembert J. L. R., 1717–1783), французский ученый-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик.

вые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется *фронтом волны* (*волновым фронтом*).

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как *волновой фронт в каждый момент времени только один*. Волновые поверхности остаются неподвижными. Волновой фронт все время перемещается. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической.

В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне — множество концентрических сфер.

Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.

Поясним понятие «фронт волны» на примере сферической волны. Понятие фронта волны естественно ввести, опираясь на конечность скорости распространения возмущений: если в какой-нибудь точке пространства с координатой r возмущение отсутствует, а при $t = 0$ в начале координат (или на сфере радиуса $r = r_0$) включается сигнал (задано конечное или бесконечное значение функции Ψ_1 из (10.4)), то в исследуемой точке r естественно ожидать возмущение в момент времени $t = a(r - r_0)$. Первый момент, в который возмущение в точке r будет отвечать фронту волны, имея в виду конечное время действия сигнала в точке r_0 , можно ввести понятие о *переднем* и *заднем фронте* (рис. 10.3.).

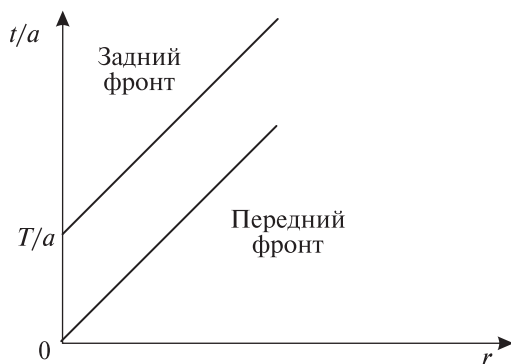


Рис. 10.3. Интерпретация понятий «передний фронт» и «задний фронт» волны

Следует заметить, что в пространственном случае источника возмущения на линии (сигнал задан на бесконечной линии) или на поверхности бесконечно-протяженного цилиндра радиуса $r = r_0$ задний фронт волны отсутствует. Это обстоятельство физически очевидно и должно быть известно из курса уравнений математической физики, в котором обсуждается также различие свойств решений уравнений гиперболического типа для $(2n + 1)$ и $2n$ (n — целое) пространственных переменных (время — отдельная переменная).

10.4. ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ

В динамике твердого тела предполагается, что напряжения, возникающие при приложении силы в некоторой точке тела, мгновенно приводят в движение каждую его другую точку, так что можно считать, что сила вызывает линейное ускорение всего тела как целого и угловое ускорение его относительно центра тяжести.

С другой стороны, в теории упругости тело рассматривается как находящееся в равновесии под действием приложенных сил, причем предполагается, что упругие деформации уже приняли их статические значения. Такая трактовка точна для задач, в которых время между моментом приложения нагрузки и установлением действительного равновесия мало по сравнению с промежутками времени, в течение которых производятся наблюдения. *Однако когда исследуется действие сил, приложенных лишь в течение короткого промежутка времени, или быстро изменяющихся, это явление надо рассматривать с точки зрения распространения волн напряжений.*

Реальные тела никогда не бывают совершенно упругими, так что при распространении в них возмущений часть механической энергии превращается в тепло (несколько различных механизмов этих превращений объединены общим названием — внутреннее трение). При прохождении в теле цикла напряжений обнаруживается, вообще говоря, петля гистерезиса: кривая «напряжение — деформация» для возрастающих напряжений не повторяется точно ее нисходящей ветвью. Даже в том случае, когда влияние этого эффекта незначительно при статической нагрузке, оно может быть существенным фактором затухания упругих волн, так как при прохождении импульса давления через материал каждый слой поочередно проходит через такой цикл, а для синусоидальных колебаний число циклов гистерезиса зависит от частоты и может достигать порядка миллионов в секунду. Градиенты скорости, создаваемые волной напряжения, приводят ко второму виду потерь, связанному с вязкостью материала. Природа затухания различна для этих двух типов внутреннего трения, и экспериментальные данные показывают, что оба типа имеют место.

Многие материалы обнаруживают также механическую релаксацию — это значит, что деформация, вызванная внезапным приложением фиксированного напряжения, асимптотически возрастает с течением времени. Аналогично напряжения, возникающие при мгновенном деформировании материала, асимптотически ослабляются. Найдено, что волны напряжений, период которых близок к времени релаксации среды, быстро затухают при прохождении через среду. Наконец, сжатия и расширения, производимые упругими волнами, порождают перепады температуры, и конечная теплопроводность среды является еще одним механизмом, с помощью которого механическая энергия рассеивается в виде тепловой энергии.

10.5. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ УПРУГОГО ТЕЛА

10.5.1. Общие замечания

Рассмотрим различные представления уравнений динамики однородного изотропного упругого тела.

Уравнения движения упругого тела можно получить из уравнений равновесия (10.10), часть 1, применяя принцип д'Аламбера, добавив к действующим массовым

силам ρf_i силы инерции, т. е.: $\rho F_i \rightarrow \rho(F_i - \ddot{u}_i)$. Таким образом, уравнения движения можно представить в таком виде:

$$\sigma_{ij,j} + \rho(F_i - \ddot{u}_i) = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (10.5)$$

Данные уравнения в развернутой форме записываются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Здесь X, Y, Z — компоненты объемных массовых сил по соответствующим осям в декартовой системе координат x, y, z ; t — время.

Остальные уравнения полной разрешающей системы уравнений (уравнения совместности деформаций, соотношения Коши, граничные условия) сохраняются в том же виде.

Помимо этого к данным уравнениям необходимо добавить *начальные условия*:

$$u_i = u_{0i}, \quad \dot{u}_i = \dot{u}_{0i}, \quad t = 0. \quad (10.7)$$

Замечание. Вопрос доказательства существования и единственности решения динамических задач теории упругости не будем рассматривать. Интересующимся следует обратиться к литературе по общему курсу теории упругости (см., например, [31]).

Связь напряжений с деформациями при рассмотрении упругого изотропного тела и для динамических задач теории упругости определяется законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Здесь λ, μ — упругие постоянные Ламе.

Как и при построении уравнений Ламе для статических задач теории упругости, из системы (10.6) исключаются компоненты σ_{ij} тензора напряжений, пользуясь соотношениями (10.8). Получается система трех уравнений второго порядка от перемещений u, v, w по координатам x, y, z и времени t , имеющей вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \Delta u + X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \Delta v + Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mu \Delta w + Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (10.9)$$

Или в компактной записи:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \mu \Delta u_i + \rho F_i. \quad (10.9^*)$$

Система уравнений (10.9) также носит название *системы Ламе динамических задач теории упругости*.

Следует отметить, что помимо данной постановки в зависимости от краевых и начальных условий в качестве базовых уравнений разрешающей системы уравнений нередко принимаются уравнения движения (10.6) относительно напряжений. При этом система (10.6) дополняется в общем случае шестью уравнениями Бельтрами — Мичелла (условиями совместности для напряжений) (см. разд. 4.7, ч. 1).

Но в большинстве своем при рассмотрении динамических задач теории упругости в качестве базовых используются уравнения (10.9). Для системы разрешающих уравнений с базовыми (10.9) чаще всего предлагаются способы поиска общих решений.

Система Ламе (10.9) может быть представлена в нескольких различных формах. Часто при построении решения системы (10.9) бывает удобно, на основании известной теоремы векторного анализа (теоремы Гельмгольца), представить вектор перемещений $\vec{u} = \mathbf{u} = (u, v, w)$ в виде потенциальной и соленоидальной частей [96; 97]:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi} \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi, \quad (10.10)$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ — скалярный, а $\vec{\psi} \{ \psi_x, \psi_y, \psi_z \}$ — векторный потенциалы поля перемещений. Операторы grad и rot в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad \text{rot } \psi = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что для однозначности потенциалов перемещений необходимо дополнительное условие, которое, как правило, принимают таким:

$$\text{div } \psi = \psi_{i,i} = 0. \quad (10.11)$$

Поле массовых сил также представляется в виде потенциальной и соленоидальной составляющих:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi.$$

Необходимо отметить, что при использовании представления (10.10) вместо трех искомых функций u, v, w вводится четыре функции: $\varphi, \psi_x, \psi_y, \psi_z$. Отсюда, в частности, следует, что имеет место некоторый «произвол» при выборе такого представления перемещений через потенциалы.

При использовании представления (10.10) уравнения движения в перемещениях удовлетворяются, если потенциалы перемещений являются решениями следующих уравнений (заметим, что $\text{div grad} = \Delta$, $\text{div rot} = 0$):

$$\ddot{\varphi} = c_1^2 \Delta \varphi + \Phi,$$

$$\ddot{\Psi} = c_2^2 \Delta \psi + \Psi, \quad \Delta \psi = \Delta \psi_i \mathbf{e}_i. \quad (10.12)$$

В (10.12) величины

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho} \quad (c_1 > c_2)$$

имеют размерность скорости и соответственно носят название скоростей распространения волн растяжения-сжатия (продольные волны) и формоизменения (поперечные).

Таким образом, для *однородной упругой изотропной среды* замкнутая система уравнений движения в потенциалах перемещений состоит из уравнений (10.12) и (10.11). В этом случае и начальные условия (10.7) для нее должны быть записаны в потенциалах:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}|_{t=0} = \dot{\varphi}_0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \dot{\psi}|_{t=0} = \dot{\psi}_0,$$

где $u_{0i} \mathbf{e}_i = \text{grad } \varphi_0 + \text{rot } \psi_0$, $\dot{u}_{0i} \mathbf{e}_i = \text{grad } \dot{\varphi}_0 + \text{rot } \dot{\psi}_0$, $\text{div } \psi_0 = 0$, $\text{div } \dot{\psi}_0 = 0$.

Отметим, что, несмотря на независимость уравнений (10.12), как правило, в начально-краевых задачах они связаны граничными условиями.

При *отсутствии массовых сил* из (10.9) следует четыре волновых уравнения для φ и $\bar{\psi}$, которые можно записать так:

$$\Delta \varphi = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta \bar{\psi} = b^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2}, \quad (10.13)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, а величины a и b представляют собой, соответственно, обратные значения скоростей распространения продольных и поперечных волн: $a = \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)} = 1/c_1$, $b = \sqrt{\rho/\mu} = 1/c_2$.

Приведем вывод системы уравнений (10.13). Перепишем уравнения (10.9) в следующем виде:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \bar{u} - \mu \text{rot rot } \bar{u} + \bar{F} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (10.14)$$

Из (10.10) следует, что: $\text{div } \bar{u} = \text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$, $\text{rot } \bar{u} = \text{rot rot } \bar{\psi}$.

Поэтому $\text{grad div } \bar{u} = \text{grad } \Delta \varphi$, $\text{rot rot } \bar{u} = -\text{rot}(\Delta \bar{\psi})$.

Докажем, что (10.10) задает общее решение уравнений (10.9). Подставим представление (10.10) в (10.14), имеем

$$\left[\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \text{grad div} \right] (\text{grad } \varphi) = \left[-\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \text{rot rot} \right] (\text{rot } \bar{\psi}).$$

Для векторного потенциала $\bar{\psi}$ и скалярного потенциала φ получаем:

$$\text{grad} \left[\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi \right] = -\text{rot} \left[\rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} - \mu \Delta \bar{\psi} \right].$$

В выписанном равенстве правая часть представляет вектор соленоидальный, а левая — потенциальный, следовательно, обе части не имеют ни вихря, ни расходимости и являются лапласовым вектором, представляющим собой градиент гармонической функции.

В соответствии с этим представления (10.13) оказываются справедливыми с точностью до лапласова вектора. Если выбрать потенциал φ удовлетворяющим волновому уравнению, то для векторного потенциала $\vec{\psi}$ будет справедливо второе волновое уравнение в (10.13).

Аналогичное представление справедливо и при наличии массовых сил. В этом случае необходимо вектор объемных сил также представить в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, что всегда возможно выполнить.

Можно показать, что для системы уравнений Ламе (10.9) возможно существование *двух типов объемных волн*, распространяющихся со скоростями c_1 и c_2 .

Для упрощения вывода принимаем, что массовые силы равны нулю. Продифференцируем уравнения системы (10.9) соответственно первое по x , второе по y и третье по z , складываем. В результате получаем

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varepsilon = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \quad (10.15)$$

$$\text{Здесь, как и ранее, } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Из (10.15) следует, что в упругой среде могут распространяться волны со скоростью c_1 .

Если в уравнениях (10.9) положить, что $\varepsilon = 0$, то из (10.9) следуют следующие три уравнения:

$$\mu\Delta u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \mu\Delta v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \mu\Delta w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (10.16)$$

которые указывают на то, что в упругой среде могут иметь место и волны, распространяющиеся со скоростью c_2 . Для этих волн существенным является факт отсутствия изменения объема, т. е. $\varepsilon = 0$.

Как следует из данных результатов, *основным объектом исследования* в динамической теории упругости являются волновые уравнения (10.15), (10.16) или система волновых уравнений (10.13).

10.5.2. Задача Коши и граничные задачи динамики упругого тела

В пятой главе, где рассматривались краевые задачи теории упругости, были выделены типы граничных условий, которые отвечают основным краевым задачам статической/динамической теории упругости.

В случае динамических процессов граничные условия должны быть дополнены начальными условиями, которые могут быть сформулированы для вектора упругих перемещений:

$$\vec{u}|_{t=t_0} = \vec{u}_0(x, y, z), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} = \vec{u}_1(x, y, z). \quad (10.17)$$

Рассмотрим важную в прикладном и научном отношении задачу Коши для системы уравнений (10.9).

Задача Коши для системы (10.9) — это задача с начальными данными для безграничной упругой среды [97]. В упругом пространстве или в некоторой его части

заданы начальные условия (10.17), необходимо построить и исследовать решение системы (10.9) при $t > t_0$.

С физической точки зрения это решение о распространении возмущения в упругой среде со скоростями c_1 и c_2 , «наведенного» той частью упругого пространства, в которой при $t = t_0$ были определены функции $\bar{u}_0(x, y, z)$, $\bar{u}_1(x, y, z)$, равные нулю в остальном пространстве.

Замечание. К решению сформулированной задачи вернемся далее.

Сейчас обратимся к формулировкам основных краевых задач в терминах упругих перемещений и в терминах скалярного $\varphi(x, y, z, t)$ и векторного $\vec{\psi}(x, y, z, t)$ потенциалов.

Краевая задача в случае граничных условий в напряжениях (будем называть ее *первой краевой задачей*) может быть сформулирована следующим образом. Пусть упругая среда занимает некоторую часть пространства D , ограниченную гладкой поверхностью S , на которой заданы напряжения. Кроме того, в области D определены функции X, Y, Z , описывающие массовые силы. Требуется найти решение системы уравнений (10.9), удовлетворяющее начальным условиям (10.17) и граничным условиям на поверхности S . Решение должно обладать заданной гладкостью (которая определяется требуемой гладкостью краевых и начальных условий, включая согласованность этих условий).

Компоненты вектора напряжений на поверхности, которые входят в формулировку краевых условий, выражаются формулами Коши через компоненты тензора напряжений и направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n}(x, y, z)$ к поверхности S :

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z), \\ T_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z), \\ T_{nz} &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, z) + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Отметим, что нормаль к поверхности S известна, поскольку поверхность S задана и поскольку граничные условия в моменты $t \geq t_0$ относятся к положению поверхности S до деформации. Так, например, в случае упругого полупространства $z \geq 0$ имеем

$$\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0, \quad \cos(n, z) = -1$$

и из (10.18) следует

$$T_{nx} = -\tau_{xz}, \quad T_{ny} = -\tau_{yz}, \quad T_{nz} = -\sigma_z. \quad (10.19)$$

На поверхности полупространства должны быть заданы нормальное усилие $T_{nz} = T_{zz}$ и два условия относительно касательных усилий T_{nx}, T_{ny} .

Ранее было отмечено, что при поиске решения первой краевой задачи могут быть выбраны *два пути*: либо и в краевых условиях (10.18) переходить к перемещениям, заменяя напряжения их выражениями (10.8) в соответствии с законом Гука, либо дополнить уравнения динамики (10.6) соотношениями Бельтрами — Мичелла и сформулировать начальные условия (10.17) в терминах напряжений. Таким образом во втором случае задача полностью формулируется в терминах напряжений.

Так, граничные условия типа (10.19) для полупространства, в соответствии с первым обозначенным путем построения решения, записываются следующим образом:

$$-T_{nx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad -T_{ny} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$-T_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (10.20)$$

Тогда первая краевая задача может быть сформулирована целиком в терминах перемещений: найти решение системы (10.9) при начальных условиях (10.17) и краевых условиях (10.20), предполагая некоторую гладкость функций $\bar{u}_0(x, y, z)$, $\bar{u}_1(x, y, z)$, $T_{zx}(x, y, 0, t)$, $T_{zy}(x, y, 0, t)$ и $T_{zz}(x, y, 0, t)$.

Наконец, отметим еще одну формулировку краевых задач, связанную с переходом от перемещений (или напряжений) к скалярному и векторному потенциалам, т. е. с переходом от системы (10.9) к системе (10.13).

Очевидно, что для построения задачи, имея в качестве базовой систему (10.13), необходимо и краевые, и начальные условия записать в терминах потенциалов.

Начальные условия (10.17) в терминах потенциалов принимают вид:

$$\Phi|_{t=t_0} = \varphi_0(x, y, z), \quad \bar{\Psi}|_{t=t_0} = \bar{\psi}_1(x, y, z), \quad (10.21)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \varphi_1(x, y, z), \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \bar{\psi}_1(x, y, z),$$

где φ_0 , φ_1 и $\bar{\psi}_0$, $\bar{\psi}_1$ связаны с $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_1$ согласно соотношениям (10.10), которые справедливы при всех $t \geq t_0$.

При формулировке *граничных условий первой краевой задачи* в терминах потенциалов необходимо в (10.18) заменить напряжения через деформации (производные от перемещений) согласно (10.8), затем перейти от перемещений к производным от потенциалов согласно (10.10), или в развернутом виде, согласно формулам:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}.$$

Здесь ψ_x , ψ_y , ψ_z — компоненты векторного потенциала.

В соответствии с замечанием к формулам (10.10) в общем случае одна из компонент векторного потенциала или некоторая комбинация функций Φ , ψ_x , ψ_y , ψ_z может быть положена равной нулю. Обычно этот факт используется при решении конкретных задач, в которых этот произвол используется для формулировок (например, соображения симметрии) и сокращения выкладок.

Приведем в качестве примера граничные условия первой краевой задачи для упругого полупространства (10.20), при этом положим (имея в виду указанный произвол) $\psi_z = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} T_{zx} &= 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z}, \\ -\frac{1}{\mu} T_{zy} &= 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}, \\ -\frac{1}{\mu} T_{zz} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} \right] + \frac{2\nu}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z \partial x} \right]. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Итак, в терминах потенциалов первую краевую задачу можно сформулировать следующим образом: найти решение системы уравнений (10.13) при начальных условиях (10.21) и краевых условиях (10.22).

Следует обратить внимание на сложный вид краевых условий (10.22), определяющих комбинации вторых производных от потенциалов через три известные на поверхности упругой среды функции. Это обстоятельство часто затрудняет применение методов построения решения, пригодных для отдельно рассматриваемого волнового уравнения, к построению решения системы волновых уравнений (10.19). В особенности это относится к решению задач для областей с углами, задач дифракции и т. д.

Формулировки краевых задач при заданных перемещениях (вторая основная краевая задача) и основной смешанной задачи выполняются по аналогии с первой краевой задачей.

10.5.3. Кинематические и динамические условия совместности системы Ламе. Поверхность разрыва

Выполним исследование системы Ляме (10.9) [97].

Вначале напомним некоторые сведения из теории уравнений в частных производных второго порядка.

В общем случае уравнения Ляме можно отнести к системам уравнений в частных производных вида:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \dots = 0, \quad (10.23)$$

где $i, j = 1, 2, \dots, m$ определяют количество неизвестных функций в системе, а n — наибольшее количество слагаемых в уравнениях.

Не выписанные в (10.23) слагаемые могут содержать только младшие производные.

Рассматриваемая система (10.23) является линейной или квазилинейной, т. е.

$$a_{ij} = a_{ij} \left(x_k, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right), \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Замечание. Наиболее общие результаты, относящиеся к системам (10.23), изложены в многочисленных источниках (см., например, [98]).

Рассмотрим гиперплоскость $x_1 = 0$. Специальные данные Коши задаются на ней в таком виде:

$$u_j \Big|_{x_1=0} = u_j^0(x_2, \dots, x_n); \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = u_j^{(1)}(x_2, \dots, x_n). \quad (10.24)$$

Поэтому на этой гиперплоскости могут быть вычислены все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $\partial^2 u_j / \partial x_1^2$.

Далее, как обычно, подставляя начальные данные в коэффициенты системы и приравнявая к нулю определитель, составленный из коэффициентов при $\partial^2 u_j / \partial x_1^2$, находим условие того, что гиперплоскость $x_1 = 0$ может быть характеристической поверхностью. Точнее, плоскость $x_1 = 0$ или поверхность

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (10.25)$$

вместе с определенными на ней начальными данными называется *характеристической*, если начальные данные (10.24) совместно с системой (10.23) не дают возможности однозначного определения на ней всех производных второго порядка.

Вместо x_k вводятся новые переменные x'_k , согласно формулам:

$$x'_k = \omega_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k = 1, \dots, n).$$

Выражения для необходимых производных имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} &= \frac{\partial u_j}{\partial x'_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} + \dots \\ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} &= \frac{\partial^2 u_j}{\partial x'^2_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} + \dots, \end{aligned}$$

где не выписанные слагаемые не содержат производных по x'_1 .

В новых переменных начальные данные относятся к плоскости $x'_1 = 0$, и следует записать условие того, что система (10.23), записанная в новых переменных

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x'^2_1} + \dots = 0,$$

не дает возможности определить производные $\partial^2 u_j / \partial x'^2_1$.

Если ввести вспомогательные обозначения $\omega'_{ij} = \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l}$, то условие неразрешимости примет вид:

$$|\omega'_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \dots & \omega'_{1m} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} & \dots & \omega'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega'_{m1} & \omega'_{m2} & \dots & \omega'_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Левая часть этого уравнения является однородным полиномом степени $2m$ относительно производных $\partial \omega_1 / \partial x_k$. Исследование этого уравнения позволяет определить эллиптический, гиперболический и вырожденный (параболический) тип системы (10.23).

Рассмотрим некоторую функцию u_j , представляющую решение системы (10.23) на поверхности $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, и положим, что эта функция имеет разрыв первого рода для производных второго порядка, а само решение u_j и его производные первого порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Если рассматривать решение u_j с двух разных сторон поверхности (10.25) как два разных решения с одинаковыми данными Коши на поверхности (10.25), то можно утверждать, что эта поверхность характеристическая.

Говорят, что решение уравнения второго порядка имеет на поверхности слабый разрыв, если при переходе через эту поверхность сама функция и ее первые производные непрерывны, а некоторые производные порядка выше первого имеют на поверхности (10.25) разрыв первого рода. Из предыдущих рассуждений следует, что поверхностью слабого разрыва может быть только характеристическая поверхность.

Теперь перейдем к рассмотрению системы Ламе и построим кинематические условия совместности.

Запишем данную систему в таком виде:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \Delta u_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (10.26)$$

Исследуем уравнения (10.26) на наличие слабых разрывов, для этого рассмотрим кинематическое условие совместности, т. е. правила дифференцирования функций вдоль поверхности.

Пусть некоторая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (ею может быть любая компонента вектора перемещений или производные от компонент вектора перемещений) непрерывна при переходе через поверхность $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, а ее частные производные первого порядка имеют с каждой стороны определенные, но разные пределы (со знаками «-» и «+»). В это случае производные первого порядка функции f имеют разрывы первого рода, т. е.:

$$[f_{x_k}] = f_{x_k}^+ - f_{x_k}^- \quad (f_{x_k} = \partial f / \partial x_k).$$

Но вдоль всякой линии L , лежащей на поверхности S , значения самой функции совпадают, т. е.

$$\sum_{k=1}^n f_{x_k}^+ dx_k = \sum_{k=1}^n f_{x_k}^- dx_k \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n [f_{x_k}] dx_k = 0, \quad (10.27)$$

что является уже ограничением на скачки — разрывы.

Из выражения для поверхности S следует, что

$$\sum_{k=1}^n \psi_{x_k} dx_k = 0. \quad (10.28)$$

Из уравнений (10.27) и (10.28) следует

$$\sum_{k=1}^n \{ [f_{x_k}] - h \psi_{x_k} \} dx_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \{ [f_{x_k}] - h \psi_{x_k} \} = 0.$$

Здесь h — пока неопределенный множитель.

Выберем h так, чтобы обратился в ноль множитель при единственном независимом дифференциале (а между остальными существует связь в силу уравнения поверхности, т. е. того, что $\psi = 0$), поэтому

$$h \psi_{x_k} = [f_{x_k}]. \quad (10.29)$$

Соотношения (10.29) определяют скачки производных первого порядка через частные производные ψ_{x_k} по соответствующим переменным.

Таким образом, доказано, что если существуют скачки первых производных некоторой функции f на поверхности S , то эти скачки пропорциональны первым производным ψ_{x_k} .

Легко обобщить это утверждение на тот случай, когда сама функция f и ее первые производные непрерывны при переходе через поверхность S , а вторые производные терпят разрыв (именно такие разрывы функций u , v , w будут слабыми с позиций уравнений Ламе). Тогда скачки вторых производных будут определяться соотношениями

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right] = h \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_l}. \quad (10.30)$$

Соотношения (10.30) представляют собой *кинематические условия совместности для уравнений* (10.26).

Замечание. Предлагается (10.30) получить самостоятельно, используя независимость второй производной (на своей стороне S) от порядка дифференцирования.

Для получения *динамических условий совместности* рассмотрим основную систему уравнений второго порядка и допустим существование скачков производных второго порядка на поверхностях ω_k :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n a_{ij}^{kl} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} \right] = 0. \quad (10.31)$$

Каждая функция u_j будет иметь свой коэффициент пропорциональности h_j в кинематических условиях совместности, т. е. на основании (10.30):

$$\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} \right] = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l}, \quad (10.32)$$

где $\omega_1 = 0$ — поверхность с начальными данными.

Окончательно из (10.31) находим систему однородных уравнений для множителей h_j , определитель которой равен нулю:

$$\sum_{j=1}^m \omega'_{ij} h_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (10.33)$$

Условия (10.33) представляют собой *динамические условия совместности*.

В дополнение к кинематическим и динамическим условиям совместности введем понятие о *распространении поверхности разрыва*.

Выделим независимую переменную $x_n = t$. Тогда уравнение движущейся поверхности слабого разрыва запишем в виде:

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = 0.$$

Для определения скорости перемещения этой поверхности по отношению к пространству (t — время), продифференцируем данное уравнение:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt = 0.$$

Введем следующие определения:

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2}, \quad \alpha_i = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = g \cos(n, x_i). \quad (10.34)$$

Тогда для скорости перемещения поверхности находим:

$$V = |dn|/dt = -(1/g)(\partial \omega / \partial t).$$

А для волнового уравнения, например вида $\Delta f = (1/V^2)(\partial^2 f / \partial t^2)$, определяем основное уравнение — *уравнение Эйконала*:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Рассмотрим уравнения Ламе (10.26). Определяя компоненты характеристического определителя ω'_{ij} , находим

$$\omega'_{ij} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j} + \delta_{ij} \left[\mu \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \right)^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right], \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\left[(\lambda + \mu) g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] \left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] = 0. \quad (10.35)$$

Замечание. Предлагаем самостоятельно выписать определитель и перейти к (10.35), используя (10.34).

Тогда из формулы для скорости перемещения поверхности следует, что существуют только две скорости распространения в покоящейся упругой среде:

$$V_p = c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad \text{и} \quad V_s = c_2 = \sqrt{\mu/\rho}.$$

Рассмотрим характер разрывов, используя условие динамической совместности (10.32) для слабых разрывов в уравнениях (10.23) и (10.26):

$$\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right] = h_j \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = h_j \alpha_i \alpha_k.$$

Для введенных ω'_{ij} из уравнений Ляме следуют динамические условия совместности:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j} h_j + \left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] h_i = 0.$$

С учетом обозначений для g и α_k из (10.34)

$$(\lambda + \mu) \alpha_i \sum_{j=1}^3 \alpha_j h_j + \left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] h_i = 0. \quad (10.36)$$

Введем вектор скачков $\vec{h}(h_1, h_2, h_3)$ с проекциями на оси координат для переменных u, v, w . Тогда

$$(\lambda + \mu) g^2 \alpha_i h_n + \left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] h_i = 0,$$

где h_n — проекция вектора $\vec{h}$ на нормаль к поверхности $\omega_1 = 0$.

Замечание. Характеристический определитель (10.35) можно найти из (10.36), как определитель алгебраической системы для h_1, h_2, h_3

В векторной форме

$$(\lambda + \mu) g^2 h_n \vec{n} + \left[\mu g^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] \vec{h} = 0.$$

Отсюда окончательно следует характер разрывов и определение типа волн.

1. Для скорости V_s коэффициент при $\vec{h}$ будет равен нулю, а значит, и $h_n = 0$, т. е. вектор $\vec{h}$ может лежать только в касательной плоскости к поверхности $\omega_1 = 0$. Это означает, что со скоростью V_s может распространяться только разрыв в касательной плоскости к характеристической поверхности.

2. Если же принять скорость распространения V_p , то вектор $\vec{h}$ лишь численным множителем отличается от $\vec{n}$, т. е. со скоростью V_p распространяется разрыв по нормали к характеристической поверхности.

Легко установить механический смысл вектора $\vec{h}$, используя разложение u_j в ряд Маклорена¹ в окрестности точки на характеристической поверхности и разложение ω_1 в ряд до первой степени: $u_j \sim (h/2)\omega_1^2$.

10.5.4. Вариационный принцип в динамике

Вариационное уравнение для упругого тела при динамических нагрузках можно получить из принципа Лагранжа (см. главу 5, часть 1), добавив к массовым силам силы инерции:

$$\int_{S_\tau} R_i \delta u_i dS + \int_V \rho (F_i - \ddot{u}_i) \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (10.37)$$

Уравнение (10.37) выражает собой *принцип виртуальных работ в динамике*. Оно справедливо как для упругого, так и для неупругого тела, а также для линейных и нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями. Введение закона Гука сужает принцип виртуальных работ до линейно упругих тел. Введение энергии деформации W позволяет придать уравнению (10.37) такую форму:

$$\int_{S_\sigma} R_i \delta u_i dS + \int_V \rho (F_i - \ddot{u}_i) \delta u_i dV = \delta W. \quad (10.38)$$

Из уравнений (10.37), (10.38) вытекает, что виртуальная работа внешних сил и сил инерции равна вариации энергии деформации.

Нужно отметить, что в случае смешанных граничных условий поверхностный интеграл, входящий в вариационные уравнения, берется только по той части поверхности S_σ , где заданы напряжения.

Из принципа виртуальных работ (10.38) можно вывести принцип минимума для поля перемещений, который называют *принципом Гамильтона* [45]. Согласно ему, переход системы из одного возможного состояния в другое за любой промежуток времени $[t_1, t_2]$ происходит таким образом, что функционал действия по Гамильтону принимает стационарное значение, т. е.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta W_p - \delta A) dt = 0,$$

где K — кинетическая энергия всей системы; W_p — потенциальная энергия деформации всей системы; A — работа внешних сил.

¹ Маклорен Колин (Colin Maclaurin, 1698–1746), шотландский математик.

10.6. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Нестационарные процессы (неустановившиеся процессы) описываются начально-краевой задачей следующего вида [96]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u) &= f, \quad M(x^j) \in V, \quad t \geq t_0, \\ \mathbf{B}(u)|_{\partial G} &= g, \quad t \geq t_0, \\ \mathbf{C}(u)|_{t=t_0} &= h, \quad M(x^j) \in V. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Здесь под геометрической областью V в зависимости от модели или конкретной задачи понимается k -мерное множество ($k = 1, 2, 3$); M — геометрическая точка; x^j — в общем случае криволинейные координаты (их число определяется размерностью множества V); $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — соответственно операторы модели, граничных и начальных условий; $u = (u_1, \dots, u_k)^T$ — вектор-столбец определяющих параметров модели среды; $f = (f_1, \dots, f_k)^T$ и $g = (g_1, \dots, g_k)^T$ — соответственно векторы-столбцы объемных и граничных возмущений; $h = (h_1, \dots, h_p)^T$, где $h_j = (h_{1j}, \dots, h_{kj})^T$ — матрица начальных возмущений, определяемых внешним воздействием на среду.

Если область V содержит бесконечно удаленные точки, то к граничным условиям следует добавить условия на бесконечности, например, такого вида: $u_i = O(1)$, $r \rightarrow \infty$.

Для большинства моделей МСС операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются линейными относительно искомого вектора u и могут быть представлены в таком матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u) &= \mathbf{A}_t u - \mathbf{A}_x u, \quad \mathbf{A}_t = (a_{tij})_{k \times k}, \quad \mathbf{A}_x = (a_{xij})_{k \times k}, \\ \mathbf{B}(u) &= \mathbf{B}_x u, \quad \mathbf{B}_x = (b_{ij})_{q \times k}, \quad 2q = \sum_{i=1}^k q_i, \quad q_i = \max_{j=1, k} q_{ij}, \\ \mathbf{C}(u) &= \begin{pmatrix} C_{1t} u_1 \\ \vdots \\ C_{kt} u_k \end{pmatrix}, \quad C_{it} = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ip}). \end{aligned} \quad (10.40)$$

Здесь $c_{ij} = \partial^{j-1} / \partial t^{j-1}$ ($j < p_i$), $c_{ij} \equiv 0$ ($j \geq p_i$), $p_i = \max_{j=1, k} p_{ij}$, $p = \max_{i=1, k} p_i$; a_{tij} — однородные линейные интегродифференциальные операторы по времени t , содержащие производные максимальных порядков p_{ij} ; a_{xij} — однородные линейные дифференциальные операторы по пространственным переменным x^j порядков q_{ij} ; $2q$ — порядок системы уравнений по пространственным переменным; b_{ij} — однородные линейные дифференциальные операторы порядков $r_{ij} \leq p_{ij}$ по времени и $r_{xij} \leq 2q$ по пространственным переменным x^j .

В связи с названием правых частей соотношений (10.39) для нестационарных процессов часто используется наименование «процесс распространения возмущений».

В зависимости от вида правых частей операторов в (10.39) используются следующие названия *нестационарных процессов*:

- распространение объемных возмущений

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = f \neq 0; \mathbf{B}(\mathbf{u})|_{\partial G} = 0; \mathbf{C}(\mathbf{u})|_{t=t_0} = 0;$$

- распространение граничных возмущений

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0; \mathbf{B}(\mathbf{u})|_{\partial G} = g \neq 0; \mathbf{C}(\mathbf{u})|_{t=t_0} = 0;$$

- распространение начальных возмущений (свободные колебания)

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0; \mathbf{B}(\mathbf{u})|_{\partial G} = 0; \mathbf{C}(\mathbf{u})|_{t=t_0} = h \neq 0.$$

Очевидно, что в силу линейности задачи общий случай нестационарного процесса может быть построен как суперпозиция всех трех указанных процессов.

Кроме того, полностью неоднородную задачу всегда можно свести к задаче с однородными граничными условиями.

Фундаментальными решениями (динамическими функциями Грина, функциями влияния) задачи о распространении объемных возмущений называются векторы $G^i(x, t; \xi, \tau)$, являющиеся решением следующих задач (см., например, [96]):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(G^i) &= f_i, \quad x \in V, \quad t \geq t_0; \quad i = 1, \dots, k, \quad k = 2 \text{ или } 3; \\ \mathbf{B}(G^i)|_{\partial V} &= 0, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{C}(G^i)|_{t=t_0} = 0, \quad x \in V. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Здесь все компоненты f_i равны нулю, за исключением i -й компоненты, совпадающей с дельта-функцией Дирака $\delta(x - \xi; t - \tau)$; $t_0 \leq \tau \leq t$.

Замечание. Здесь, как и ранее, по повторяющимся латинским индексам выполняется суммирование в пределах от 1 до k .

Как и ранее, из линейности задачи следует, что знание фундаментальных решений позволяет представить решение задачи о распространении объемных возмущений $f = (f_1, \dots, f_k)$ в интегральном виде:

$$u(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \iiint_V \sum_{i=1}^k G^i(x, t; \xi, \tau) f_i(\xi, \tau) d\xi. \quad (10.42)$$

Пусть оператор $\mathbf{A}$ в (10.41) является инвариантным относительно сдвига по координате x_j .

Инвариантность оператора означает по определению, что если $\forall x_j, \xi_j \in V$ (V — область изменения переменной x_j), то $(x_j - \xi_j) \in V$ и справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{A}(u(x_i, x_j - \xi_j, t)) = \tilde{f}(x_i, x_j - \xi_j, t).$$

Если таким же свойством инвариантности обладает и оператор $\mathbf{B}$ в (10.41), то фундаментальные решения зависят от разности аргументов по координате x_j :

$$G^i(x, t; \xi, \tau) = G^i(x_i, x_j - \xi_j, t; \xi_i, \tau).$$

Тогда в повторном интеграле, соответствующем тройному интегралу в (10.42), интеграл по ξ_j переходит в свертку по x_j . При этом функция $G^i(x_i, x_j, t; \xi_i, \tau)$ является решением задачи (10.41), в которой вместо правой части $\delta(x - \xi, t - \tau)$ рассматривается выражение $\delta(x_i - \xi_i, x_j, t - \tau)$.

Замечание. Для того чтобы дифференциальные операторы A_x и B_x в операторах (10.40) были инвариантны относительно сдвига, необходимо и достаточно, чтобы они имели постоянные коэффициенты, а область изменения соответствующей координаты совпадала со всей числовой прямой R или допускала периодическое продолжение решения на R .

Если $t_0 = 0$ и операторы A и C в (10.41) инвариантны относительно сдвига по времени (в этом случае требование $(t - \tau) \geq 0$ является излишним, так как все рассматриваемые функции по времени имеют носитель в виде положительной действительной полуоси), то фундаментальные решения зависят от разности аргументов по времени, т. е. $G^i(x, t; \xi, \tau) = G^i(x, t - \tau; \xi)$, и интегралы по времени в (10.42) переходят в свертку:

$$u(x, t) = \iiint_V \sum_{i=1}^k G^i(x, t; \xi) * f_i(\xi, t) d\xi. \quad (10.43)$$

При этом $G^i(x, t; \xi)$ является решением задачи (10.39), в которой вместо правой части $\delta(x - \xi, t - \tau)$ рассматривается выражение $\delta(x - \xi, t)$.

Если оператор A_t в (10.40) – дифференциальный, то для его инвариантности относительно сдвига необходимо и достаточно, чтобы он имел постоянные коэффициенты. Таким же свойством обладает и оператор C , а также оператор свертки по времени.

Таким образом, формула (10.43) справедлива для широкого типа сплошных сред, включая вязкоупругую среду.

Решение задачи о распространении начальных возмущений может быть построено с помощью динамических функций Грина $G^i(x, t; \xi, \tau)$. Для этого функцию $u(x, t)$ продолжаем нулем на полуось $t < t_0$.

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) H(t - t_0),$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Теперь можно рассмотреть соответствующую $\tilde{u}(x, t)$ регулярную обобщенную функцию. Тогда в случае оператора C вида (10.40) правые части начальных условий

$$u|_{t=t_0} = h_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = h_2(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}}|_{t=t_0} = h_p(x)$$

являются разрывами первого рода функции $u(x, t)$ и ее производных по t до порядка « $p - 1$ » в точке $t = t_0$.

Тогда в соответствии с формулами для производных обобщенных функций, производная в обычном смысле $\partial^m u / \partial t^m$ связана с обобщенной производной $\partial^m \tilde{u} / \partial t^m$ ($m = 1, \dots, p - 1$) следующим образом:

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \frac{\partial^m \tilde{u}}{\partial t^m} - \sum_{j=1}^m h_j(x) \delta^{(m-j)}(t - t_0), \quad (10.44)$$

где $\delta^{(j)}(t)$ – производная порядка j от дельта-функции Дирака.

Соответствующие значения $\mathbf{A}_t u$ и $\mathbf{A}_t \tilde{u}$ оператора $\mathbf{A}_t$ связаны между собой таким соотношением:

$$\mathbf{A}_t u = \mathbf{A}_t \tilde{u} - [\mathbf{A}_t u],$$

$$[\mathbf{A}_t u] = \sum_{j=1}^p d_j(x) \delta^{(p-j)}(t-t_0), \quad d_j(x) = (d_{1j}(x), \dots, d_{kj}(x))^T, \quad (10.45)$$

где $[\mathbf{A}_t u]$ – разрывная часть значения оператора $\mathbf{A}_t$, полученная только с учетом суммы в (10.44).

Подставляя (10.45) в первое уравнение для задачи о распространении начальных возмущений (где имеются в виду производные в обычном смысле) и учитывая (10.40), приходим к задаче о распространении объемных возмущений вида $f(x, t) = [\mathbf{A}_t u]$.

Применяя теперь формулу (10.42) и используя свойства дельта-функции, получаем следующие представления задачи о распространении начальных возмущений:

$$u(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \iiint_V \sum_{i=1}^k G^i(x, t; \xi, \tau) \sum_{j=1}^p d_{ij}(\xi) \delta^{(p-j)}(\tau - t_0) d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^p \iiint_V \sum_{i=1}^k \frac{\partial^{p-j} G^i}{\partial \tau^{p-j}}(x, t; \xi, \tau) \Big|_{\tau=t_0} d_{ij}(\xi) d\xi. \quad (10.46)$$

Если выполнены условия представления решения в виде свертки (10.43), то формула (10.46) приобретает такой вид ($t_0 = 0$):

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^p \iiint_V \sum_{i=1}^k \frac{\partial^{p-j} G^i}{\partial t^{p-j}}(x, t; \xi) d_{ij}(\xi) d\xi. \quad (10.47)$$

В качестве примера рассмотрим оператор следующего вида (являющийся весьма распространенным):

$$A_t = M \frac{\partial^p}{\partial t^p}, \quad M = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_k \end{pmatrix}. \quad (10.48)$$

Данному оператору соответствуют столбцы d_j с такими элементами (по повторяющимся греческим индексам суммирования нет): $d_{\alpha j} = \rho_\alpha h_{\alpha j}$.

Формула (10.47) для оператора (10.48) при $p = 1$ имеет вид:

$$u(x, t) = \iiint_V \sum_{i=1}^k G^i(x, t; \xi) \rho_i h_{i1}(\xi) d\xi,$$

а при $p = 2$ такой:

$$u(x, t) = \iiint_V \sum_{i=1}^k G^i(x, t; \xi) \rho_i h_{i1}(\xi) d\xi + \iiint_V \sum_{i=1}^k G^i(M, t; \xi) \rho_i h_{i2}(\xi) d\xi.$$

Фундаментальные решения можно определить и для задачи о распространении граничных возмущений.

Поверхностными фундаментальными решениями (поверхностными функциями Грина, поверхностными функциями влияния) называются векторы $G_S^i(x, t; \xi, \tau)$, являющиеся решением следующих задач о распространении граничных возмущений ($i = 1, \dots, k$):

$$\mathbf{A}(G_S^i) = 0, \quad x \in V, \quad t \geq t_0; \quad \mathbf{B}(G_S^i) \Big|_{\partial V} = g_i, \quad t \geq t_0; \quad \mathbf{C}(G_S^i) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad M(x^j) \in V,$$

где $\xi \in \partial V$, $t_0 \leq \tau \leq t$ и все компоненты вектора g_i равны нулю, за исключением i -й компоненты, которая совпадает со сосредоточенной на поверхности ∂V дельта-функцией $\delta_{\partial V}(x - \xi, t - \tau)$.

Решение задачи о распространении граничных возмущений $g = (g_1, \dots, g_k)$ аналогично (10.42) можно представить в следующем интегральном виде:

$$u(M, t) = \int_{t_0}^t d\tau \iint_{\partial V} \sum_{i=1}^k G_S^i(x, t; \xi, \tau) g_i(\xi, \tau) dS. \quad (10.49)$$

При выполнении указанных выше условий интеграл по времени в (10.49) переходит в свертку. Если выполняются указанные условия по пространственной координате x_j и эта координата является параметром в параметризации поверхности ∂V , то составляющая повторного интеграла, к которому сводится поверхностный интеграл в (10.49), также переходит в свертку.

Для операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ специального вида можно получить формулы, выражающие поверхностные функции влияния через объемные [96]. Для этого используют теоремы взаимности типа формулы Бетти для линейной теории упругости.

Однако, как правило, связь объемных и поверхностных функций влияния сложна, поэтому решение задачи о распространении граничных возмущений строится отдельно.

При использовании другого подхода к решению задачи о распространении граничных возмущений с помощью объемных функций влияния применяется процедура перехода к однородным граничным условиям. Данные процедуры подробно описаны в [96].

10.7. ЗАДАЧА СТОКСА

(ЗАДАЧА ДИНАМИКИ О ДЕЙСТВИИ СИЛЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ)

Задача о действии сосредоточенной силы в безграничной упругой среде для задач статической теории упругости была рассмотрена в разделе о фундаментальных решениях теории упругости (п. 9.8, ч. 2). Использование решения в форме Папковича — Нейбера и анализ решения, обладающего необходимой особенностью, привели к точным формулам для решения соответствующей задачи.

Рассмотрим подобную задачу, но в случае действия сосредоточенной силы, модуль которой является функцией времени. Так же, как и в случае статической задачи, построенное решение для динамической задачи имеет широкий диапазон применения.

Итак, пусть в некоторой точке упругой среды, принятой за начало координат, действует сосредоточенная сила $P(t)$, изменяющаяся во времени. Для бесконечной упругой среды граничные условия на бесконечности представляют собой условия отсутствия напряжений и перемещений. Поэтому искомое решение должно удовлетворять условиям на бесконечности и иметь особенность в начале координат, которая приводит к сосредоточенной силе, конечной по величине. Как и в случае статической задачи, если вырезать вокруг точки приложения силы малую окрестность в виде шара, то по поверхности этого шара следует распределить напряжения, эквивалентные приложенной силе по величине и направлению. При этом легко обнаружить (как и в статической задаче), что в начале координат напряжения должны обращаться в бесконечность порядка r^{-2} . Тогда перемещения, через производные от которых выражаются напряжения и деформации, должны иметь особенность порядка r^{-1} .

Чтобы найти класс решений, обладающих особенностью такого типа, рассмотрим решения волнового уравнения

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (10.50)$$

Исследуем решение (10.50) в случае центральной симметрии, т. е. $f = f(r, t)$ r — радиальная координата, t — время. В этом случае оператор Даламбера упрощается и уравнение (10.50) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Из данного уравнения следует (с помощью интеграла Даламбера) представление решения в сферически симметричном случае:

$$f = \frac{1}{r} f_1(t - r/c) + \frac{1}{r} f_2(t + r/c).$$

Здесь f_1 и f_2 — произвольные функции указанных аргументов. Известно, что слагаемые f_1 и f_2 описывают расходящиеся и сходящиеся сферические волны.

Если действие силы $P(t)$ началось в некоторый момент времени $t = 0$, то при $t < 0$ вся упругая среда находилась в состоянии покоя, так что возмущения в виде сходящихся волн отсутствуют при $t \geq 0$. Поэтому в качестве искомого решения, обладающего нужной особенностью, можно рассмотреть только расходящиеся волны

$$f = \frac{1}{r} f_1(t - r/c). \quad (10.51)$$

Действительно, функция f имеет в начале координат как раз ту особенность, которую должны иметь перемещения в задаче о сосредоточенной силе. Заметим, что производные f по координатам являются решениями волнового уравнения, но уже имеют слагаемые с более высокой особенностью в начале координат. Так, первые производные имеют особенность порядка r^{-2} . Действительно, например,

$$\frac{\partial}{\partial x} (1/r) = - (1/r^2) (x/r),$$

где $x/r = \cos(r, x)$ — величина ограниченная.

► В гл. 9, разд. 9.6, было отмечено, что в случае представления вектора перемещений как сумма потенциалов φ и $\vec{\psi}$ ($\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}$), необходимо вместо трех компонент вектора перемещений рассматривать четыре скалярные функции. Покажем на примере рассматриваемой задачи, как соображения симметрии позволяют распорядиться произволом «в одну функцию».

Если принять во внимание, что сила действует в направлении оси x (пусть $P(t)$ имеет направление оси x в положительную сторону) и вызывает движение в каждой точке только в плоскости, проходящей через эту точку и ось x , то вращение вокруг оси x отсутствует:

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Тогда из тождества $\text{div}(\text{rot } \vec{u}) = \text{div } \vec{\omega} = \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0$ следует, что ω_y и ω_z можно представить через частные производные одной и той же функции:

$$\omega_y = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \omega_z = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad (10.52)$$

где f определяется из (10.51).

Здесь уже учтено, что компоненты вектора поворота как производные от перемещений должны обладать особенностью того же типа, что и напряжения, т. е. порядка r^{-2} .

Введем в последние соотношения постоянный коэффициент, который понадобится нам далее для нормировки:

$$\omega_y = \beta \frac{\partial}{\partial z} [f(t-r/b)/r], \quad \omega_z = -\beta \frac{\partial}{\partial y} [f(t-r/b)/r].$$

Очевидно, что ω_y , ω_z удовлетворяют дифференциальному уравнению для компонент вектора поворота (волновое уравнение для поперечных волн со скоростью распространения $V_s = b$), условиям симметрии и обладают в начале координат нужной особенностью.

Объемная деформация $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, как было отмечено, удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн. Эта функция должна иметь особенность того же порядка, что и напряжение. Кроме того, должны быть учтены условия симметрии задачи (направление силы $P(t)$ вдоль оси x). Отсюда следует

$$\varepsilon = \alpha \frac{\partial}{\partial x} [f(t-r/a)/r],$$

где α — постоянный коэффициент нормировки.

При представлении вектора перемещений с помощью скалярного и векторного потенциалов в качестве скалярного потенциала выберем функцию $\partial\varphi/\partial x$. Тогда в представлении перемещений слагаемые, определяемые скалярным потенциалом, выразятся так:

$$U_\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad V_\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad W_\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z},$$

а объемная деформация, отвечающая этой части (вращение не влияет на объем), следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\partial u_\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} + \frac{\partial w_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi).$$

Из сравнения двух выражений для объемной деформации следует, что функция φ , через производную от которой выражается скалярный потенциал, определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[f(t-r/a)/r \right] \text{ или } \Delta\varphi = \alpha \left(f(t-r/a)/r \right).$$

Здесь «постоянная» интегрирования, которая может зависеть от t , опущена в силу краевых условий (перемещения на бесконечности отсутствуют).

Последнее уравнение можно проинтегрировать, если представить оператор Лапласа в сферическом случае (правая часть зависит только от r) в следующем виде:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right).$$

Из данного уравнения следует для $\partial\varphi/\partial r$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} \int_{\infty}^r r f(t-r/a) dr.$$

Замечание. Относительно постоянной интегрирования справедливо прежнее замечание, а именно: она равна нулю в силу начальных и граничных условий.

Заменим переменную интегрирования $r = a\tau$, тогда:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\alpha a^2}{r^2} \int_{\infty}^{r/a} \tau f(t-\tau) d\tau.$$

Поскольку для определения перемещений достаточно знать только производную $\partial\varphi/\partial r$, то дифференцированием по координатам находим перемещения, вызванные скалярным потенциалом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{x}{r}, \\ u_\varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{x}{r} \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right), \\ v_\varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \dots, \quad w_\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \dots \end{aligned}$$

Таким образом, вклад в поле перемещений за счет $\partial\varphi/\partial x$ определен, при этом в выражение вошел произвольный постоянный коэффициент α . ◀

Рассмотрим составляющие перемещений, вызванные вращениями. Здесь следует учесть, что $\omega_x = 0$, а ω_y, ω_z выражаются через производные одной и той же функции с помощью выражения (10.52). Подстановка, которая дает нужный результат, имеет следующий вид:

$$u_\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad v_\psi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad w_\psi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \dots$$

Эту подстановку можно получить, если в формулах для компонент перемещений, вызванных векторным потенциалом

$$u_\psi = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad v_\psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \quad w_\psi = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}$$

положить $\psi_x = 0$ (отсутствие вращения вокруг оси x) и учесть, что:

$$\psi_z = \partial \psi / \partial y, \quad \psi_y = -\partial \psi / \partial z, \quad \operatorname{div} \vec{\psi} = 0.$$

Значит, можно ввести не исходный векторный потенциал $\vec{\psi}$, а одну скалярную функцию $\psi(x, y, z, t)$.

Аналогично тому, как было выполнено для функции ϕ , находим:

$$\Delta \psi = \beta \frac{f(t - r/b)}{r}, \quad \beta = \text{const.}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\beta b^2}{r^2} \int_{\infty}^{r/b} \tau f(t - \tau) d\tau.$$

Далее, по величине ψ находим u_ψ, v_ψ, w_ψ , и складываем их с u_ϕ, v_ϕ, w_ϕ . По полному полю перемещений можно вычислить напряжения и подсчитать равнодействующую для сферы малого радиуса r . Эта равнодействующая будет равна $4\pi r f(t)$, если принять постоянные $\alpha = 1/a^2$, $2\beta = 1/b^2$.

Заменяя α и β их значениями, находим окончательно для перемещений:

$$4\pi r u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\tau/a}^{\tau/b} \tau P(t - \tau) d\tau + \frac{x^2}{r^3} \left\{ \frac{1}{a^2} P\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} P\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\} + \frac{1}{b^2 r} P\left(t - \frac{r}{b}\right),$$

$$4\pi r v = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\tau/a}^{\tau/b} \tau P(t - \tau) d\tau + \frac{xy}{r^3} \left\{ \frac{1}{a^2} P\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} P\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\},$$

$$4\pi r w = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\tau/a}^{\tau/b} \tau P(t - \tau) d\tau + \frac{xz}{r^3} \left\{ \frac{1}{a^2} P\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} P\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\}.$$

Покажем, что решение Стокса о действии сосредоточенной силы в упругой среде можно также интерпретировать как решение задачи Коши для неоднородных уравнений динамики упругого тела при нулевых начальных данных.

Поскольку решение построено, это утверждение можно доказать непосредственной подстановкой решения в уравнения для скалярного и векторного потенциалов.

Произвольную функцию определим через $4\pi r f(t) = P(t)$.

Действительно, роль скалярного потенциала играет функция

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\infty}^{r/a} \tau P(t - \tau) d\tau,$$

а векторный потенциал определен с помощью вспомогательной функции ψ , для которой $\psi_x = 0$, $\psi_z = \partial \psi / \partial y$, $\psi_y = -\partial \psi / \partial z$, так что:

$$\begin{aligned}\Psi_z &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\infty}^{r/b} \tau P(t-\tau) d\tau, \\ \Psi_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\infty}^{r/b} \tau P(t-\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение для скалярного потенциала $\partial\phi/\partial x$. Оператор Даламбера вычисляется следующим образом:

$$\square_a \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \Delta \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right).$$

Как указывают непосредственные выкладки:

$$\Delta \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[P(t-r/a)/r \right] \frac{1}{4\pi\rho} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\infty}^{r/a} \tau P''(t-\tau) d\tau.$$

Так что

$$\square_a \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{4\pi\rho a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[P(t-r/a)/r \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \int_{\infty}^{r/a} \tau P''(t-\tau) d\tau \right\}.$$

Последнюю формулу можно преобразовать, так что для скалярного потенциала $(\partial\phi/\partial x)$:

$$\square_a \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{4\pi\rho} P(t-r/a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ и т. д.}$$

Представим вектор массовых сил в таком виде:

$$\vec{F} = \text{grad } \Phi + \text{rot}(L, M, N),$$

где

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} (1/r) P(t-r/a), \quad L=0, \\ M &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial z} (1/r) P(t-r/b), \quad N = -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial y} (1/r) P(t-r/b).\end{aligned}$$

С помощью формул Стокса можно свести общий случай задачи с массовыми силами к случаю, когда они отсутствуют.

Для этого воспользуемся линейностью уравнения и краевых условий задачи и суммируем два решения: общее решение однородных уравнений динамики и частное решение неоднородной системы уравнений, построенное с помощью формул Стокса.

Пусть на исследуемое упругое тело действуют в некотором объеме V в точках ξ, η, ζ массовые силы X, Y, Z , зависящие от координат ξ, η, ζ и времени t . Обозначим перемещения, вызванные в безграничной упругой среде в точке x, y, z силой $X(\xi, \eta, \zeta, t)$, действующей в точке ξ, η, ζ (центр тяжести малого объема $d\omega$) в направлении оси x , как:

$$U^{(x)}(\xi, \eta, \zeta, x, y, z), \quad V^{(x)}, \quad W^{(x)}.$$

Тогда сила $X(\xi, \eta, \zeta, t)$ вызывает перемещение, равное:

$$U^{(x)}d\omega, V^{(x)}d\omega, W^{(x)}d\omega.$$

И окончательно суммируя действие всех массовых сил, находим:

$$U^* = \iiint_V \{U^{(x)} + U^{(y)} + U^{(z)}\} d\omega, V^* = \dots, W^* = \dots$$

Эти интегралы представляют упругие перемещения в безграничном теле за счет действия массовых сил. Если же тело ограничено, то нужно построить суммарные перемещения вида:

$$u = U^* + u', v = V^* + v', w = W^* + w',$$

где компоненты перемещений u', v', w' удовлетворяют однородным уравнениям и так, чтобы граничные условия на поверхности и начальные условия для u, v, w удовлетворялись точно.

Итак, при заданных массовых силах (а значит, и при известных U^*, V^*, W^*) задача построения вспомогательных функций u', v', w' является вполне определенной краевой задачей динамики упругого тела.

Таким образом, *одно из важных применений решения Стокса — построение общих решений динамических уравнений теории упругости.*

10.8. СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим задачи о свободных (собственных) и вынужденных гармонических колебаниях, а также задачи о распространения прогрессивных волн в упругом теле.

Собственные колебания. Под ними понимается задача на собственные значения (собственные частоты) для однородных уравнений теории упругости при однородных граничных условиях. В этом случае упругое тело свободно от действия внешних сил:

$$F_i = 0, \sigma_{ij}l_j = 0, \text{ на } S_\sigma.$$

Часть поверхности S_u может быть неподвижно закреплена, т. е. на ней $u_i = 0$. Заданы начальные условия (10.7), которые приводят тело в движение сообщением ему начального распределения перемещений и скоростей.

Вынужденные гармонические колебания. В этом случае объемные силы F_i , поверхностные силы R_i и заданные перемещения точек поверхности u_i^0 представляют собой периодические функции времени такие, что

$$F_i = F_i^0 \varphi(t), R_i = R_i^0 \varphi(t), u_{0i} = u_i^0 \varphi(t).$$

Величины с верхним индексом «нуль» не зависят от времени, поэтому в качестве типового представителя функции $\varphi(t)$ можно принять:

$$\varphi(t) = \exp(ipt) = \cos pt + i \sin pt.$$

Действительно, любая периодическая функция представима рядом Фурье. Построив решение для одного члена этого ряда, можно воспользоваться принципом суперпозиции для построения полного решения.

10.8.1. Собственные колебания упругих тел

Рассмотрим задачу на *собственные колебания упругих тел*. Решение уравнений движения строится в виде:

$$u_k = U_k \exp(i\omega t).$$

Здесь U_k — функция только координат, но не времени. Аналогичным образом представляются все компоненты тензоров деформации ε_{ij} и напряжения σ_{ij} .

В дальнейшем для удобства через u_i, σ_{ij} будем обозначать амплитуды перемещений и напряжений, т. е. вместо U_i будем в дальнейшем писать u_i . Тогда, подставив искомое решение в уравнения движения (10.6), получаем систему уравнений для амплитуд:

$$\sigma_{ij,j} - \rho\omega^2 u_i = 0. \quad (10.53)$$

Внешние силы и граничные условия в случае свободных колебаний должны быть нулевыми, при этом множитель $\exp(i\omega t)$ сокращается. Вопрос о начальных условиях мы пока оставляем в стороне.

Уравнения связи между амплитудами напряжений и деформаций сохраняют форму обычных уравнений закона Гука: $\sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{k,l}$.

Система уравнений (10.53) при однородных граничных условиях может иметь очевидное тривиальное решение: $u_i \equiv 0, \sigma_{ij} \equiv 0$.

Однако при некоторых значениях параметра $\omega = \omega_k$ возможно и ненулевое решение: $u_i \equiv u_i^k, \sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij}^k$.

Соответствующие значения параметра ω_k называются *собственными частотами упругого тела*, а функции u_i^k определяют *собственные формы колебаний*.

Заметим, что в (10.53) входят квадраты собственных частот, которые сохраняются при всех дальнейших выкладках, поэтому корню ω_k будет всегда соответствовать второй, равный по величине и противоположный по знаку, корень — ω_k . Мы не будем вводить для этих отрицательных корней специальную нумерацию, но следует помнить, что кроме решения $u_i \exp(i\omega t)$ всегда присутствует и второе решение $-u_i \exp(-i\omega t)$. Это замечание позволяет образовывать из них действительные комбинации, которые одни только и имеют механический смысл.

Уравнения, связывающие величины u_i^k и σ_{ij}^k , вытекают из (10.53):

$$\sigma_{ij,j}^k - \rho\omega_k^2 u_i^k = 0. \quad (10.54)$$

Очевидно, что вследствие однородности системы уравнений и граничных условий искомые функции, входящие в (10.54), определены с точностью до произвольного множителя.

Отметим, что уравнения (10.6) могут рассматриваться как уравнения статической задачи теории упругости с массовыми силами $-\rho\omega^2 u_i$.

Пусть $\omega = \omega_k$ есть какая-либо из собственных частот. Тогда $u_i = u_i^k$ представляет перемещение, вызванное действием распределенных по объему сил $P_i^k = -\rho\omega_k^2 u_i^k$. Аналогичным образом силы $P_i^s = -\rho\omega_s^2 u_i^s$ при частоте ω_s вызывают перемещение u_i^s . Но по теореме Бетти (см. разд. 6.4, ч. 1) имеем

$$\int_V P_i^s u_i^k dV = \int_V P_i^k u_i^s dV \quad \text{или} \quad \omega_s^2 \int_V \rho u_i^s u_i^k dV = \omega_k^2 \int_V \rho u_i^k u_i^s dV.$$

Так как $\omega \neq \omega_k$, то последнее равенство возможно, если интеграл равен нулю. Следовательно,

$$\int_V \rho u_i^k u_i^s dV = 0 \quad (k \neq s).$$

Это равенство выражает *свойство ортогональности собственных форм колебаний*. Из условия ортогональности следует, в частности, что частоты ω_k всегда действительны. Чтобы доказать это, предположим противное, а именно допустим, что $\omega_1 = \alpha + i\beta$. Уравнение для нахождения собственных частот будет обязательно иметь еще один комплексно сопряженный корень $\omega_2 = \alpha - i\beta$. Соответствующие собственные формы также будут комплексно сопряженными:

$$u_i^1 = p_i + iq_i, \quad u_i^2 = p_i - iq_i.$$

Из условия ортогональности следует:

$$\int_V \rho u_i^1 u_i^2 dV = \int_V \rho (p_i^2 + q_i^2) dV = 0.$$

Но это равенство возможно лишь тогда, когда $p_i \equiv 0$, $q_i \equiv 0$. Таким образом, в линейной теории упругости движений с комплексными частотами быть не может. Очевидно, что этим исключается и случай чисто мнимых частот.

Поскольку u_i^k определены лишь с точностью до произвольного постоянного множителя, их можно нормировать произвольным образом. Обычно принимают:

$$\int_V \rho u_i^k u_i^s dV = \delta_{ks}, \quad (10.55)$$

где δ_{ks} — символы Кронекера.

Соотношения (10.55) выражают условия нормирования и одновременно повторяют условия ортогональности собственных форм.

Перейдем теперь к исследованию свободных колебаний. Принцип суперпозиции (метод Фурье) позволяет представить общее выражение для перемещений при свободных колебаниях упругого тела следующим образом:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t) u_i^k(x_s). \quad (10.56)$$

Здесь A_k, B_k — неопределенные константы.

Дифференцируя (10.56) по времени, находим:

$$\dot{u}_i = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \omega_k \cos \omega_k t - B_k \omega_k \sin \omega_k t) u_i^k(x_s).$$

Приравнявая при $t = 0$ значения перемещений и скоростей их заданным начальным значениям u_{0i} и v_{0i} , получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k u_i^k(x_s) = u_{0i}(x_s), \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega_k u_i^k(x_s) = v_{0i}(x_s).$$

Умножаем каждое из этих равенств на ρu_i^k и интегрируем по объему. Вследствие (10.55) в левой части от каждого ряда остается лишь по одному члену:

$$B_k = \int_V \rho u_{0i} u_i^k dV, \quad A_k = \frac{1}{\omega_k} \int_V \rho v_{0i} u_i^k dV. \quad (10.57)$$

Следует заметить, что соотношения (10.57) не предполагают возможности разложения функций u_{0i} и v_{0i} в ряды по собственным формам колебаний или фундаментальным функциям u_i^k . Начальное распределение скоростей вообще может быть даже не непрерывным, и если говорить о сходимости, то речь может идти лишь о сходимости в среднем.

10.8.2. Вынужденные колебания упругих тел

Пусть на тело действуют периодические силы с круговой частотой p . Для простоты будем считать, что массовые силы отсутствуют ($F_i = 0$), а на всей поверхности тела внешние силы представимы в виде:

$$R_i = R_i^0 \exp(ipt).$$

Замечание. Рассмотрение более общего случая дополнительных трудностей не встречается.

Полагая перемещения и напряжения также пропорциональными $\exp(ipt)$ и сохраняя обозначения u_i и σ_{ij} для амплитуд перемещений и напряжений, получим из (10.6) следующие уравнения:

$$\sigma_{ij,j} - \rho p^2 u_i = 0. \quad (10.58)$$

На поверхности S_σ должны выполняться граничные условия:

$$\sigma_{ij} l_j = R_i^0. \quad (10.59)$$

Искомое решение представляем в виде:

$$u_i = u'_i + u_i^0, \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma_{ij}^0. \quad (10.60)$$

Здесь u_i^0 , σ_{ij}^0 — решение статической задачи теории упругости, удовлетворяющее уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$, уравнениям связи и граничным условиям (10.59).

Тогда, подставив (10.60) в (10.58), получим, что первая часть решения u'_i , σ'_{ij} в (10.60) удовлетворяет следующим уравнениям движения:

$$\sigma'_{ij,j} - \rho p^2 u'_i = \rho p^2 u_i^0 \quad (10.61)$$

при однородных граничных условиях.

Представляем u'_i , σ'_{ij} в виде рядов:

$$u'_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_i^k, \quad \sigma'_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_{ij}^k.$$

Подставляя эти выражения в (10.61) и исключая производные от амплитуд напряжений с помощью (10.54), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho (\omega_k^2 - p^2) u_i^k = \rho p^2 u_i^0.$$

Умножая полученное равенство на u_i^m и интегрируя по объему, с помощью условия ортонормированности собственных функций (10.55) находим:

$$a_m (\omega_m^2 - p^2) = p^2 \int_V \rho u_i^0 u_i^m dV.$$

Отсюда следует:

$$a_m = \frac{p^2}{\omega_m^2 - p^2} \int_V \rho u_i^0 u_i^m dV.$$

Если $p = \omega_m$, то частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот упругого тела, и соответствующий коэффициент с течением времени обращается в бесконечность. Это явление называют *резонансом*.

В случае неперiodического воздействия внешних сил для описания вынужденных колебаний упругого тела поверхностная нагрузка и искомое решение представляются в виде разложений в ряд по системе собственных фундаментальных функций. Подстановка этих рядов в уравнения движения позволяет получить уравнения для определения неизвестных функций времени.

10.9. НЕРАВЕНСТВО РЭЛЕЯ И МЕТОД РИТЦА

Умножим обе части уравнения (10.53) на u_i , проинтегрируем по объему и решим полученное равенство относительно ω^2 . Тогда

$$\omega^2 = \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV / \int_V \rho u_i^2 dV. \quad (10.62)$$

Преобразуя числитель интегрированием по частям при однородных граничных условиях (интеграл по поверхности будет равен нулю), получаем

$$\omega^2 = \int_V E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV / \int_V \rho u_i^2 dV. \quad (10.63)$$

Если $u_i = u_i^k$, то уравнение (10.53) выполняется при $\omega = \omega_k$ и формула (10.62) либо (10.63) даст точное значение квадрата собственной частоты с номером k . Но если u_i — произвольные функции, то уравнение (10.53) не выполняется и формула (10.63) определяет некоторое число ω^2 , которое, вообще говоря, не представляет собой квадрат частоты каких-либо свободных колебаний системы.

Покажем, что функционал, фигурирующий в правой части формул (10.62), (10.63), позволяет получить оценку, по крайней мере для наименьшей из собственных частот. Условимся нумеровать собственные частоты в порядке возрастания, так что $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$.

Выберем в качестве u_i произвольную систему трех дифференцируемых и непрерывных функций, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Разложим их в ряд по системе собственных функций:

$$u_i = \sum a_k u_i^k.$$

А так как, вследствие (10.53)

$$\sigma_{ij,j} = \sum \sigma_{ij,j}^k = \rho \sum a_k \omega_k^2 u_i^k,$$

то, умножив это выражение соответственно на $u_i = \sum a_m u_i^m$ и проинтегрировав, получим:

$$\int \sigma_{ij,j} u_i dV = \sum \sum a_k a_m \omega_k^2 \int \rho u_i^k u_i^m dV = \sum a_k^2 \omega_k^2.$$

Совершенно аналогично вследствие ортогональности главных форм

$$\int \rho u_i^2 dV = \sum a_k^2.$$

Теперь соотношение (10.62) можно переписать следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 \omega_2^2 + \dots}{a_1^2 + a_2^2 + \dots} \quad \text{или} \quad \omega^2 = \omega_1^2 \frac{a_1^2 + a_2^2 (\omega_2/\omega_1)^2 + \dots}{a_1^2 + a_2^2 + \dots}.$$

Но каждый член ряда в числителе не меньше соответствующего члена ряда в знаменателе, так как $(\omega_k/\omega_1)^2 > 1$. Поэтому $\omega_1^2 \leq \omega^2$ и (10.63) можно заменить неравенством

$$\omega_1^2 \leq \tilde{U}/\tilde{T}. \quad (10.64)$$

Здесь $\tilde{U}$ — упругий потенциал, вычисленный для заданной системы перемещений u_i ; $\tilde{T}$ — выражение кинетической энергии, в которой скорости заменены перемещениями u_i .

Неравенство Рэлея (10.64) дает верхнюю оценку для низшей частоты колебаний упругого тела.

Если функции u_i содержат некоторое число неопределенных параметров c_s , то $\tilde{U} = \tilde{U}(c_s)$ и $\tilde{T} = \tilde{T}(c_s)$. Наилучшим приближением для ω_1^2 будут значения c_s , минимизирующие дробь в правой части (10.64), поэтому должно быть:

$$\frac{\partial}{\partial c_s} (\tilde{U}/\tilde{T}) = 0.$$

Отсюда $\frac{1}{\tilde{T}^2} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial c_s} \tilde{T} - \tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial c_s} \right) = 0$ или, полагая $\tilde{U}/\tilde{T} = \omega^2$:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial c_s} - \omega^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial c_s} = 0. \quad (10.65)$$

Наиболее простой результат получается, когда параметры c_s входят в выражение u_i линейно, а именно

$$u_i = \sum_{s=1}^{\infty} c_s f_i^s. \quad (10.66)$$

Уравнения (10.65) линейны и однородны, поэтому для существования нетривиального решения необходимо, чтобы детерминант системы был равен нулю. Это условие приводит к алгебраическому уравнению степени k относительно ω^2 . Вследствие неравенства Рэлея наименьший корень уравнения будет давать верхнюю оценку для ω^2 , которая может только улучшиться с увеличением k . При увеличении k корень уравнения с номером m будет стремиться к величине ω_m^2 , при этом нельзя сказать — сверху или снизу.

Замечание. Доказательство этой теоремы здесь не приводится. Следует заметить, что для ее выполнения необходима полнота системы функций f_i^s , т. е. возможность представления любой допустимой системы перемещений u_i в виде (10.66).

Описанная приближенная процедура определения частот называется *методом Рунца*.

10.10. МГНОВЕННАЯ НАГРУЗКА И МГНОВЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИЯ

Теория колебаний упругого твердого тела (системы) находит применение для доказательства двух важных теорем, относящихся к сопротивлению материалов.

Первая теорема заключается в том, что деформация, вызываемая действием мгновенной нагрузки, вдвое превышает ту, которая получилась бы при постепенном возрастании сил до той же величины (статическом нагружении).

Чтобы доказать эту теорему отметим, что если к упругой системе приложить мгновенные силы, то система приходит в состояние колебания около такого положения равновесия, которое она заняла бы под действием равной же нагрузки, но приложенной статически. В начальном состоянии у тела будет только потенциальная энергия, и, так как предполагается отсутствие каких-либо упругих напряжений, эта энергия может быть определена по положению тела в силовом поле, которое создает нагрузку на него. Если начальное положение системы совпадает с положением наибольшего отклонения какого-либо возможного для системы нормального колебания, то в системе возникнет именно это колебание, и конфигурация ее по истечению $1/4$ периода совпадет с конфигурацией при равновесии, т. е. смещения из положения равновесия будут равны нулю.

По истечении половины периода конфигурация будет противоположна той, которую тело имело в начальном положении. Наибольшие смещения из начального положения будут тогда вдвое больше, чем смещения в положении равновесия. Если под действием мгновенной нагрузки в предоставленной самой себе не возникают нормальные колебания, то деформация менее чем вдвое превышает деформацию в положении равновесия, так как тело не проходит через конфигурацию, в которой вся энергия будет потенциальной.

Вторая теорема утверждает, что при мгновенном обращении направлений сил величина деформации может утроиться.

Для доказательства предположим, что система деформирована и удерживается в положении равновесия. Теперь изменим мгновенно направление сил, тогда в новом положении все смещения будут противоположны прежним. Система начнет колебаться около нового положения равновесия. Если возникнут нормальные колебания, то наибольшие смещения из нового положения будут вдвое больше, чем начальные смещения из недеформированного состояния. В момент, когда смещения из положения равновесия достигают максимума, оно будет в три раза превышать смещения из начального положения.

Типичный пример применения первой теоремы представляет случай, когда упругая нить вытянута какой-нибудь мгновенной нагрузкой. Наибольшее удлинение здесь вдвое превосходит то, которое получается при статическом действии того же груза.

Примером применения второй теоремы является случай закрученного цилиндрического стержня. При мгновенном изменении направления вращающей пары наибольший сдвиг в три раза превышает первоначальный.

10.11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Дифференциальные уравнения движения упругого тела с произвольной анизотропией, выраженные через компоненты перемещения с использованием закона Гука, имеют вид:

$$\frac{1}{2} E_{ijkl} (u_{k,jl} + u_{l,kj}) - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (10.67)$$

Для изотропного тела уравнения движения можно записать в следующем виде:

$$(\lambda + 2\mu) \theta_{,i} + \mu \Delta u_i - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (10.68)$$

Определение плоской волны, приведенное в разд. 10.1, можно дополнить следующим образом. Плоской волной называется такое решение системы (10.67), которое описывает перемещение неизменной конфигурации в направлении единичного вектора $\vec{n}$ со скоростью c . Решения такого типа, соответствующие постоянной скорости c , не зависящей от конфигурации, возможны лишь в неограниченной упругой среде.

Согласно определению, поле перемещений, соответствующее плоской волне, дается следующими выражениями:

$$u_i = U_i (ct - n_s x_s). \quad (10.69)$$

Определим скорости распространения волн в неограниченной среде. Подставляя выражение поля перемещений (10.69) в уравнение движения (10.67), получаем:

$$\frac{1}{2} E_{ijkl} (U_k'' n_l n_j + U_l'' n_k n_j) - \rho U_i'' c^2 = 0.$$

Полагая $U_i = \delta_{is} U_s$, приведем эту систему к следующему виду:

$$\left(\frac{1}{2} E_{ijkl} (n_l n_j \delta_{ks} + n_k n_j \delta_{ls}) - \rho \delta_{is} c^2 \right) U_s'' = 0.$$

Эта система однородных линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда, когда определитель ее равен нулю, т. е:

$$\det \left[\frac{1}{2} E_{ijkl} (n_l n_j \delta_{ks} + n_k n_j \delta_{ls}) - \rho \delta_{is} c^2 \right] = 0. \quad (10.70)$$

Условие (10.70) представляет собою кубическое уравнение относительно c^2 , решение которого определяет для каждого направления $\vec{n}$ три скорости распространения плоских волн.

В частном случае, если тело изотропно, то, как известно, тензор модулей упругости имеет следующий вид: $E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl}$.

Внесем эти выражения для компонент модуля упругости в уравнение (10.70). При этом учтем, что

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ks} n_k n_j = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ls} n_k n_j = \delta_{ij} \delta_{jl} \delta_{ls} n_k n_j = n_j n_s, \quad \delta_{ik} \delta_{jl} n_l n_j = \delta_{is}.$$

Теперь уравнение (10.70) для скоростей плоских волн принимает следующий вид:

$$\det \left[(\lambda + \mu) n_i n_s + \mu \delta_{is} - \rho c^2 \delta_{is} \right] = 0. \quad (10.71)$$

Для изотропного тела, очевидно, скорости распространения волн во всех направлениях одинаковы, поэтому в (10.71) можно принять, например, $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$.

С учетом этого уравнение (10.71) запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2\mu - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Как видно, оно имеет двойной корень, следовательно, в изотропном теле получается не три, а две скорости распространения плоских волн, а именно:

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_1 > c_2.$$

Не нарушая общности, можно рассмотреть волны, распространяющиеся вдоль оси x_1 , а именно:

1) *продольные волны*: $u_1 = u(ct - x_1)$, $u_2 = u_3 = 0$; первое уравнение движения (10.68) приводится к следующему виду:

$$(\lambda + 2\mu - \rho c^2)u'' = 0.$$

Данное уравнение удовлетворяется, когда $c = c_1$, а это скорость продольных волн;

2) *поперечные волны*: $u_2 = u(ct - x_1)$, $u_1 = u_3 = 0$. Подстановка во второе уравнение движения приводит к такому результату:

$$(\mu - \rho c^2)u'' = 0.$$

Данное уравнение удовлетворяется, когда $c = c_2$ — скорость распространения поперечных волн.

Рассмотрим процесс отражения и преломления волн. Встречая на своем пути слой с отличающимися свойствами, волны отражаются или преломляются подобно тому, как луч света отражается от зеркальной поверхности или преломляется, переходя из воздуха в воду. Любые изменения упругих характеристик или плотности материала на пути распространения волн заставляют их преломляться, а при резких изменениях свойств среды часть энергии волн отражается.

В акустике и оптике волна, падающая на плоскую преграду, отражается от нее. То же происходит и с упругими волнами, но если на преграду падает волна расширения, то отражаются уже две волны: волна расширения и волна искажения. Более того, волна расширения отражается по закону геометрической оптики: угол падения равен углу отражения.

Покажем, что для упругих волн введение предположения о существовании волны расширения и волны искажения является единственно возможным. Для доказательства данного утверждения рассмотрим продольную волну, распространяющуюся в направлении оси x_1 . Согласно определению, поле перемещений, соответствующее плоской волне, как решение уравнения движения, дается выражениями

$$u_1 = f(x_1 - ct), \quad u_2 = u_3 = 0.$$

Предположим теперь, что плоская волна распространяется не вдоль оси x_1 , а вдоль некоторой прямой, лежащей в плоскости x_1x_2 , составляющей угол α с направлением оси x_1 (рис. 10.4).

Направляя ось ξ по этой прямой, по формулам преобразования координат находим: $\xi = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$.

Перемещение U направлено вдоль оси ξ и

$$U = f(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha - c_1 t).$$

Совершенно аналогичным образом можно записать величины перемещений u_1 , связанных с плоской волной искажения, распространяющейся вдоль луча, лежащего в плоскости $x_1 x_2$ и составляющего угол β с осью x_1 . Теперь

$$V = g(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta - c_2 t).$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть упругая среда занимает полупространство $x_1 > 0$, граница полупространства жестко закреплена таким образом, что на ней перемещения равны нулю (рис. 10.5).

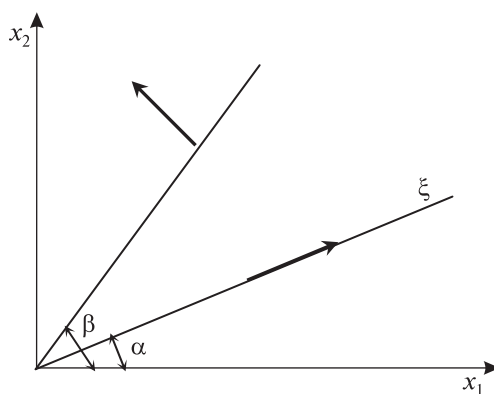


Рис. 10.4. Распространение плоской волны вдоль произвольной прямой

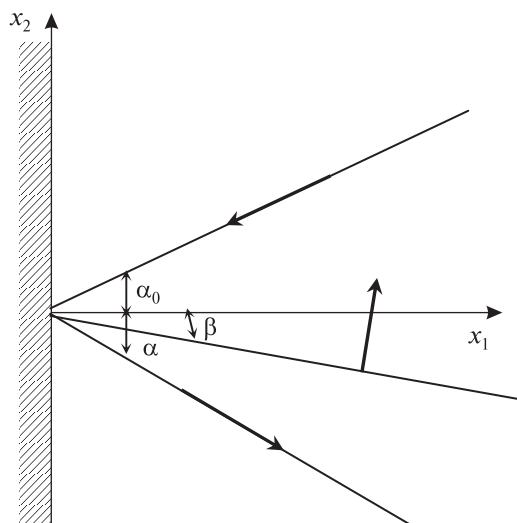


Рис. 10.5. К задаче об отражении волны в упругом полупространстве

На стенку падает волна расширения $U_0 = f_0$ под углом α_0 к оси x_1 . От стенки отражается волна расширения $U = f$ под углом α и отражается волна искажения $V = g$ под углом β .

Данная задача является физически оправданной, если [36]:

$$\sin \alpha = -\sin \alpha_0, \quad \sin \beta = -(c_2/c_1) \sin \alpha_0. \quad (10.72)$$

Волна расширения отражается по закону геометрической оптики (угол падения равен углу отражения). Кроме этого возникает волна искажения, отражающаяся под углом β , при этом $|\beta| < |\alpha_0|$ (см. рис. 10.5).

Для простоты выводов была рассмотрена довольно искусственная задача об упругой среде, скрепленной с абсолютно жесткой стенкой. Более реальной является конечно задача об отражении волны от свободной поверхности. Решается она точно таким же способом, только вместо условия $u_1 = u_2 = 0$ при $x_1 = 0$ необходимо использовать условие $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$. Выполнив подобные выкладки в [36] показано, что и в этом случае приходим к тем же соотношениям между углами падения и отражения (10.72).

Установленные факты позволяют сделать некоторые заключения о волновых процессах в ограниченной среде. Даже если начальное возмущение было таково, что оно порождало лишь простые волны одного какого-либо рода, продольные или поперечные, в результате отражений от стенок поверхности тела будут возникать и продольные, и поперечные волны, распространяющиеся с разными скоростями. Поэтому волновые решения для бесконечного тела, когда одно и то же деформированное и напряженное состояние переносится без изменения с постоянной скоростью, для ограниченных упругих тел, вообще говоря, невозможно. Следует отметить, что сделанное заключение не исключает возможности распространения в ограниченной среде волн с постоянной скоростью специального вида, например синусоидальных.

10.12. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ

Волны, несущие разрывы производных от перемещений, т. е. скоростей и напряжений, называются *волнами сильного разрыва* или *ударными волнами*.

Известно [36], что скорость распространения продольной волны в стержне, задается выражением:

$$c_0 = \sqrt{E/\rho}, \quad (10.73)$$

причем при доказательстве этого утверждения сразу предполагается, что на фронте волны скорость и деформация, а следовательно, напряжение, меняются скачком, т. е. в стержне возможно распространение ударной волны с той же скоростью c_0 .

Согласно определению поле перемещений, соответствующее плоской продольной волне, распространяющейся в изотропной среде, имеет вид

$$u_i = U_i (ct - n_s x_s). \quad (10.74)$$

Если подставить (10.74) в уравнения движения (10.67) и решить его для изотропного тела, то можно установить, что в изотропном теле имеет место две скорости распространения плоских волн c_1 и c_2 , имеющие стандартное выражение (2.93). Скорость распространения продольной волны в стержне (10.73) отлична от скоростей вида (2.93). В действительности волны вида (10.74) в стержне (т. е. в ограниченном

теле) распространяться не могут, так как возмущение, переносимое вдоль оси стержня, меняет свою конфигурацию.

Замечание. Вывод о возможности существования в изотропной среде двух типов волн, распространяющихся со скоростями c_1 и c_2 , носит менее общий характер, чем результат, касающийся распространения волн в стержне. Действительно, при построении решения в виде (10.74) предполагается, что функции u_i , по крайней мере, дважды дифференцируемы, в противном случае подстановка их в уравнения движения была бы бессмысленна. Действительно, первые производные от функций u_i по времени — это скорости. Напряжения выражаются через первые производные от перемещений по координатам. Эти первые производные должны быть непрерывны, следовательно, волны рассмотренного типа не могут нести разрывов скоростей или разрывов напряжений. Для стержня сразу же предполагалось, что на фронте волны скорость и деформация, а, следовательно, напряжение, меняются скачком.

Поэтому, возможность распространения ударных волн в неограниченной упругой среде со скоростями c_1 и c_2 требует обоснования. Докажем *возможность распространения продольных волн сильного разрыва в неограниченной упругой среде*.

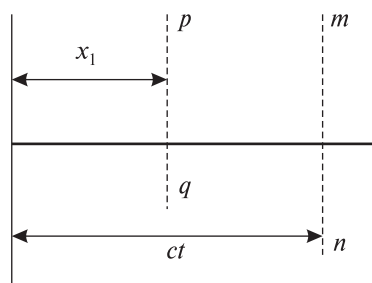


Рис. 10.6. Распространение продольных волн

Рассмотрим продольные волны, распространяющиеся вдоль оси x_1 (рис. 10.6). По истечении времени t участок среды длины ct вдоль оси x_1 будет равномерно деформирован, а остальная часть останется ненапряженной, т. е. сечение mn , которое служит границей между напряженными и ненапряженными частями, будет двигаться со скоростью c . Фиксируем некоторое сечение pq с координатой x_1 . В данный момент времени расстояние его от фронта составляет $ct - x_1$. Участок длиной $ct - x_1$ равномерно сжат, его деформация e_{11} . Следовательно, сечение pq сместилось из первоначального положения на расстояние: $u_1 = e_{11}(ct - x_1)$.

Пусть в момент времени t волна проходит через сечение 1—1, а в момент времени $t + dt$ через сечение 2—2. Расстояние между данными сечениями составляет длину dx_1 . Для этого нужно, чтобы $dx_1 = cdt$. Дифференцируя по времени, находим скорость движения сечения:

$$v = du_1/dt = e_{11}c.$$

В течение времени dt в сечении 1—1 действует сила σF (F — площадь поперечного сечения), тогда как сечение 2—2 остается ненапряженным, следовательно, импульс равен $\sigma_{11}Fdt$. В начальный момент времени вся выделенная часть была в покое, а в момент $t + dt$ вся она движется со скоростью v , следовательно, изменение количества движения есть: $v\rho Fdx_1 = v\rho Fcdt$, т. е. $\sigma_{11}Fdt = v\rho Fcdt$, или

$$\sigma_{11}\nu\rho c = e_{11}\rho c^2. \quad (10.75)$$

На основании закона Гука для изотропной среды:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)e_{11} + \lambda(e_{11} + e_{22}).$$

Из соотношений Коши $e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ и условия, что $u_2 = u_3 = 0$, следует: $e_{11} = e_{22} = 0$, а значит

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)e_{11}. \quad (10.76)$$

Подставляя (10.76) в (10.75), находим скорость распространения волны в неограниченной упругой среде: $c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

Таким образом, уравнения движения упругой среды допускают решения, содержащие разрывы первых производных от перемещений.

10.13. ПРОГРЕССИВНЫЕ ВОЛНЫ

Под *прогрессивными волнами* понимаются частные решения уравнений динамической теории упругости, соответствующие волнам, распространяющимся вдоль прямой при отсутствии начальных условий.

Предположим, что исследуемые прогрессивные волны распространяются вдоль прямой, в качестве которой для определенности выбрана ось Ox , $x = x_1$. Тогда соответствующее частное решение уравнений движения можно принять в виде:

$$u_k(t, x_1, x_2, x_3) = V_k(x_2, x_3) e^{-iq(x-ct)}, \quad (q > 0, c > 0). \quad (10.77)$$

Решения (10.77) имеют смысл для областей, обладающих бесконечным размером вдоль оси Ox : бесконечный цилиндр, в общем, переменного сечения — *волновод*, полупространство, плоский бесконечный слой.

Входящие в него величины имеют следующие названия: V_k — *амплитуда волны*, q — *волновое число*, $\omega = qc$ — *фазовая частота*, $-q(x-ct)$ — *фаза волны*. Величина $L = 2\pi/q$ называется *длиной (периодом)* волны. Кроме того, поскольку существует точка, в которой фаза сохраняет постоянное значение, т. е. $-q(x-ct) = \text{const}$, то величина c называется *фазовой скоростью*.

Так же, как и при гармонических колебаниях, комплексное решение (10.77) следует понимать, как два процесса: его действительная часть изменяется по закону косинуса, мнимая — по синусу.

Если возмущения отсутствуют (нулевые массовые силы и однородные граничные условия), то задача о прогрессивных волнах сводится к задаче на собственные значения. Собственным значением здесь является фазовая скорость c , которая в общем случае неявным образом определяет зависимость $c = c(q)$ и соответствующую систему собственных функций (мод) $V_k(q, x_2, x_3)$.

Среды (волны) обладают дисперсией в том случае, если функция $c(q) \neq \text{const}$, и не имеют дисперсии в противном случае.

В теории стационарных волн используется введенное *Стоксом* и *Рэлеем* понятие групповой скорости c_g , которая определяется как скорость точки $x = x_*$, в которой фаза волны стационарна, т. е.

$$\frac{d}{dq}(-q(x_* - ct)) = 0. \quad (10.78)$$

Отсюда следует

$$c_g = x_*/t = c + qc'(q). \quad (10.79)$$

Из (10.79) вытекает, что групповая и фазовые скорости совпадают только для бездисперсных сред.

Важность знания групповой скорости подтверждается следующими качественными рассуждениями. Рассмотрим несколько (группу) волн вида (10.77) с близкими фазовыми частотами. Если в некоторой точке их фазы совпадают или близки, то там амплитуды отдельных волн складываются по модулю. Наименьшее различие фаз будет иметь место при условии (10.78). Поэтому определяемая формулой (10.79) групповая скорость есть скорость распространения максимума возмущения, образованного группой волн.

Можно показать, что понятие прогрессивных волн аналогично гармоническим волнам имеет непосредственную связь с комплексным преобразованием Фурье по координате x . А именно, если разыскивается решение вида:

$$u_k(t, x, x_2, x_3) = v_k(x - ct, x_2, x_3), \quad (10.80)$$

то имеет место равенство:

$$v_k^F(q, x_2, x_3) = V_k(q, x_2, x_3). \quad (10.81)$$

Здесь значок « F » обозначает изображение, q — параметр преобразования.

Тогда амплитуда групповой волны — изображение Фурье функции $v_k(x, x_2, x_3)$ в (10.81). При этом (10.77) является с точностью до постоянного множителя подынтегральным выражением в интеграле обращения преобразования Фурье. Заметим, что (10.81) суть частный случай *автомодельных решений*, то есть решений, зависящих от меньшего числа переменных, чем исходная задача.

При наличии в теле бесконечно удаленной точки указанное в разделе 10.1 условие ограниченности решения должно быть заменено *условием излучения Зоммерфельда*¹, которое является условием существования единственного решения, соответствующего волновому уравнению Гельмгольца: $\Delta \tilde{\varphi} + k^2 \tilde{\varphi} = \tilde{F}$, $k > 0$, где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{F}$ — амплитуды или моды φ и F .

Упомянутое условие излучения имеет вид (r — длина радиус-вектора, i — мнимая единица):

- пространственная и одномерная задачи

$$\varphi_{,r} + ik\varphi = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty,$$

- плоская задача

$$\varphi_{,r} + ik\varphi = o(1/\sqrt{r}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Замечание. Понятие прогрессивных волн широко используется при рассмотрении волн, распространяющихся по поверхности полупространства или плоского слоя, в том числе в сейсмологии и океанологии.

10.14. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

Рассмотрим задачу о распространении плоской прогрессивной волны (10.77) в направлении границы полуплоскости, занятой однородной линейно-упругой изотропной средой (имеет место плоское деформированное состояние). Граница полуплоскости свободна от напряжений, массовые силы и возмущения на бесконечности отсутствуют.

¹ Зоммерфельд Арнольд Иоганнес Вильгельм (Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld, 1868–1951), немецкий физик-теоретик и математик.

Введем такую прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, что ось Oz направлена вглубь полуплоскости, а ось Ox совпадает с границей $z = 0$.

Движение среды описывается уравнениями в потенциалах (10.12) ($\varphi = \varphi(x, z)$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$, $\psi_3 = \psi(x, z)$):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (10.82)$$

Перемещения, деформации, напряжения и потенциалы связаны между собой известными соотношениями:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{33}, \quad \sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33} + \lambda \varepsilon_{11}. \end{aligned} \quad (10.83)$$

Условия на границе полуплоскости и на бесконечности имеют вид:

$$\sigma_{13}|_{z=0} = \sigma_{33}|_{z=0} = 0, \quad \varphi = O(1), \quad \psi = O(1) \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (10.84)$$

Решение задачи (10.82)–(10.84) ищем в форме прогрессивной волны

$$\varphi(t, x, z) = \Phi(z)E(x, t), \quad \psi(t, x, z) = \Psi(z)E(x, t), \quad E(x, t) = e^{-iq(x-ct)}. \quad (10.85)$$

Подставляя (10.85) в (10.82), получаем уравнения относительно функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\Phi''(z) - q^2 \beta_1 \Phi(z) = 0, \quad \Psi''(z) - q^2 \beta_2 \Psi(z) = 0, \quad \beta_j = 1 - c^2/c_j^2. \quad (10.86)$$

При $c < c_j$ ($\beta_j \leq 0$) решения этих уравнений не удовлетворяют граничным условиям на бесконечности (см. (10.84)). Если же (см. неравенство в (10.12)) $c < c_j$, то $\beta_j > 0$ и удовлетворяющие условию на бесконечности решения имеют вид:

$$\Phi(z) = C_1 E_1(z), \quad \Psi(z) = C_2 E_2(z), \quad E_j(z) = e^{-q\alpha_j z}, \quad \alpha_j = \sqrt{\beta_j} = \sqrt{1 - c^2/c_j^2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Следовательно, $\varphi(t, x, z) = C_1 E_1(z)E(x, t)$, $\psi(t, x, z) = C_2 E_2(z)E(x, t)$.

Тогда из (10.83) находим:

• перемещения

$$\begin{aligned} u_1 &= q[-iC_1 E_1(z) + \alpha_2 C_2 E_2(z)]E(x, t), \\ u_3 &= -q[\alpha_1 C_1 E_1(z) + iC_2 E_2(z)]E(x, t); \end{aligned}$$

• деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -q^2 [C_1 E_1(z) + i\alpha_2 C_2 E_2(z)]E(x, t), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{q^2}{2} [2i\alpha_1 C_1 E_1(z) - (1 + \alpha_2^2) C_2 E_2(z)]E(x, t), \\ \varepsilon_{33} &= q^2 [\alpha_1^2 C_1 E_1(z) + i\alpha_2 C_2 E_2(z)]E(x, t), \end{aligned}$$

$$\theta = -q^2 \frac{c^2}{c_1^2} C_1 E_1(z) E(x, t);$$

• напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\mu q^2 \left[\left(2\alpha_1^2 + \frac{c^2}{c_2^2} \right) C_1 E_1(z) + 2i\alpha_2 C_2 E_2(z) \right] E(x, t), \\ \sigma_{13} &= \mu q^2 \left[2i\alpha_1 C_1 E_1(z) - (1 + \alpha_2^2) C_2 E_2(z) \right] E(x, t), \\ \sigma_{33} &= \mu q^2 \left[(1 + \alpha_2^2) C_1 E_1(z) + 2i\alpha_2 C_2 E_2(z) \right] E(x, t).\end{aligned}\quad (10.87)$$

Подставляя равенства (10.87) в первые два граничные условия (10.84), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_1 и C_2 :

$$2i\alpha_1 C_1 - (1 + \alpha_2^2) C_2 = 0, \quad (1 + \alpha_2^2) C_1 + 2i\alpha_2 C_2 = 0.$$

Условием существования ее нетривиального решения является равенство нулю определителя этой системы:

$$\begin{aligned}R(\alpha_1, \alpha_2) &= (1 + \alpha_2^2)^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 = R_0(\xi) = (2 - \xi)^2 - 4\sqrt{1 - (\xi/\eta^2)}\sqrt{1 - \xi} = 0, \\ \xi &= c^2/c_2^2, \quad \eta^2 = c_1^2/c_2^2.\end{aligned}\quad (10.88)$$

Умножение левой части этого равенства на сопряженное выражение

$$\tilde{R}_0(\xi) = (2 - \xi)^2 + 4\sqrt{1 - \xi/\eta^2}\sqrt{1 - \xi}$$

приводит к многочлену четвертой степени

$$P_{42}(\xi) = \xi P_{32}(\xi), \quad P_{32}(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 8(2 + \kappa)\xi - 8(1 + \kappa).$$

Здесь

$$\kappa = \lambda/(\lambda + 2\mu) = v/(1 - v) = 1 - 2/\eta^2. \quad (10.89)$$

Поскольку в действительной области $\tilde{R}_0(\xi) > 0$, то (10.88) эквивалентно следующему кубическому уравнению (множитель ξ отброшен, так как он дает нулевой корень, что соответствует отсутствию волны):

$$P_{32}(\xi) = 0. \quad (10.90)$$

В силу неравенства $0 < v < 1/2$ для реальных сред параметры κ и η изменяются в следующих диапазонах:

$$0 < \kappa < 1, \quad \sqrt{2} < \eta < \infty. \quad (10.91)$$

Предельный случай $\kappa = 1$ ($\eta = \infty$) отвечает акустической среде. При этом знаменатель в равенстве для ξ в (10.88) обращается в нуль ($C_2 = 0$). Поэтому параллельно с уравнением (10.90) будем рассматривать эквивалентные ему уравнения:

$$\begin{aligned}P_{31}(\varsigma) &= \varsigma^3 - 4(1 - \kappa)\varsigma^2 + 2(2 + \kappa)(1 - \kappa)^2 \varsigma - (1 - \kappa^2)(1 - \kappa)^2 = 0, \\ P_{32}(\eta^2 \varsigma) &= \eta^6 P_{31}(\varsigma), \\ R_0(\eta^2 \varsigma) \tilde{R}_0(\eta^2 \varsigma) &= P_{42}(\eta^2 \varsigma) = P_{41}(\varsigma) = \eta^2 \varsigma P_{31}(\varsigma).\end{aligned}\quad (10.92)$$

Дискриминант многочлена $P_{31}(\varsigma)$ имеет вид:

$$D_3(\kappa) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{54}\Delta_3(\kappa), \quad p = \frac{8}{3}(3\kappa - 2), \quad q = \frac{8}{27}(45\kappa - 11),$$

$$\Delta_3(\kappa) = \kappa^3 + \frac{11}{32}\kappa^2 + \frac{3}{16}\kappa - \frac{5}{32}.$$

Так как $\Delta_3(0) < 0$, $\Delta_3(1) > 0$ и $\Delta_3'(\kappa) > 0$, то существует единственный действительный корень κ_* многочлена $\Delta_3(\kappa)$. При этом для $D_3(\kappa)$ имеем (величины κ_* , v_* и η_*^2 связаны между собой соотношениями (10.89)):

$$D_3(\kappa_*) = 0,$$

$$D_3(\kappa) < 0 \quad (0 \leq \kappa < \kappa_*, \quad 0 \leq v < v_*, \quad 2 \leq \eta^2 < \eta_*^2),$$

$$D_3(\kappa) > 0 \quad (\kappa_* < \kappa < 1, \quad v_* < v < 1/2, \quad \eta_*^2 < \eta^2 < +\infty),$$

$$\kappa_* \approx 0,357\,003\,205, \quad v_* \approx 0,263\,082\,064, \quad \eta_*^2 = 3,110\,4351.$$

Таким образом, многочлены $P_{31}(\varsigma)$ и $P_{32}(\xi)$ при $0 \leq \kappa < \kappa_*$ имеют три различных действительных корня. При $\kappa_* < \kappa < 1$ один корень многочленов действительный, а два других — комплексно сопряженные.

Отметим, что для действительных корней ς_1 , ς_2 и ς_3 многочлена $P_{31}(\varsigma)$ справедливы следующие неравенства: $0 < \varsigma_1 = c_R^2/c_1^2 < 1/\eta^2$ ($0 \leq \kappa < 1$), $\varsigma_{2,3} > 1$ ($0 < \kappa \leq \kappa_*$).

Таким образом, существует единственная фазовая скорость

$$c = c_R = \sqrt{\xi_R} c_2 = \sqrt{\varsigma_R} c_1 < c_2, \quad \xi_R = \xi_1, \quad \varsigma_R = \varsigma_1. \quad (10.93)$$

Общее решение системы алгебраических уравнений представим следующим образом (C — произвольная константа):

$$C_1 = -2i\alpha_{2R}C, \quad C_2 = (1 + \alpha_{2R}^2)C, \quad \alpha_{2R} = \sqrt{1 - \xi_R}.$$

Подставляя эти константы в (10.87), находим перемещения и напряжения:

$$u_1 = Cq\alpha_{2R} \left[-2E_1(z) + (1 + \alpha_{2R}^2)E_2(z) \right] E(x, t),$$

$$u_3 = Ciq(1 + \alpha_{2R}^2) \left[\frac{1 + \alpha_{2R}^2}{2} E_1(z) - E_2(z) \right] E(x, t);$$

$$\sigma_{11} = 2iC\mu q^2 \alpha_{2R} \left[(2\alpha_{1R}^2 + c^2/c_2^2) E_1(z) - (1 + \alpha_{2R}^2) E_2(z) \right] E(x, t),$$

$$\sigma_{13} = C\mu q^2 (1 + \alpha_{2R}^2)^2 [E_1(z) - E_2(z)] E(x, t),$$

$$\sigma_{33} = 2iC\mu q^2 \alpha_{2R} (1 + \alpha_{2R}^2) [-E_1(z) + E_2(z)] E(x, t), \quad \alpha_{1R} = \sqrt{1 - \xi_R/\eta^2}. \quad (10.94)$$

Отметим, что напряженно-деформированное состояние среды определяется неединственным образом, так как в формулах (10.94) присутствует произвольный постоянный множитель C . Это связано с тем, что исходная задача является однородной. Комплексные решения следует понимать следующим образом. В силу ли-

нейности задачи реальными являются соответственно либо действительная, либо мнимая их часть.

Полученные волны называются *волнами Рэлея* (см. раздел 10.1), а соответствующая им фазовая скорость c_R называется *скоростью волн Рэлея*. Отметим, что, как следует из уравнения (10.88), фазовая скорость в этом случае не зависит от волнового числа q , следовательно, волны Рэлея являются бездисперсными. Они, вследствие экспоненциальных множителей с показателями $(-qa_j z)$, очень быстро затухают по глубине полуплоскости. Скорость затухания определяется фазовой скоростью q , т. е. длиной волны L по координате x ($L = 2\pi/q$). Чем больше фазовая скорость (меньше длина волны), тем быстрее происходит затухание.

Следовательно, *волны Рэлея являются поверхностными* (их основная энергия сосредоточена у границы полуплоскости). Данные волны имеют большое значение в сейсмологии, поскольку они наблюдаются при землетрясениях вдали от эпицентра, и именно они являются причинами разрушений объектов на земной поверхности. Волны Рэлея также играют большую роль при проведении ультразвуковых исследований, в том числе в дефектоскопии.

10.15. ВОЛНЫ ЛЯВА

Другой тип поверхностных волн открыт Лявом и носит его имя. Они наблюдаются в полупространстве, свойства которого изменяются скачкообразно.

Рассмотрим плоский слой толщины h , абсолютно жестко сцепленный с полупространством (рис. 10.7). Материалы полупространства и слоя являются однородными линейно-упругими изотропными средами с упругими постоянными λ_0, μ_0 и λ_1, μ_1 , а также плотностями ρ_0 и ρ_1 соответственно. Граница полупространства свободна от напряжений, массовые силы и возмущения на бесконечности отсутствуют.

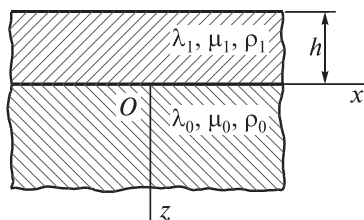


Рис. 10.7. К определению поверхностных волн Лява

Вводим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, что ось Oz направлена вглубь полупространства, ось Ox совпадает с границей $z = 0$ раздела.

Исследуем задачу об антиплоских деформациях системы, которым соответствуют перемещения, направленные по оси Oy и не зависящие от координаты y :

$$u_1^{(j)} = u_3^{(j)} \equiv 0, \quad u_2^{(j)} = u^{(j)}(t, x, z). \quad (10.95)$$

Здесь и далее верхний индекс в обозначениях параметров указывает на полупространство ($j = 0$) или слой ($j = 1$).

Из (10.5) и общих базовых уравнений теории НДС деформируемого тела (гл. 2, ч. 1) находим уравнения движения, связь деформаций с перемещениями и физический закон:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} &= c_2^{(j)2} \Delta u^{(j)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\ \varepsilon_{12}^{(j)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23}^{(j)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{11}^{(j)} = \varepsilon_{13}^{(j)} = \varepsilon_{22}^{(j)} = \varepsilon_{33}^{(j)} = \theta^{(j)} = 0; \\ \sigma_{12}^{(j)} &= \mu_j \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x}, \quad \sigma_{23}^{(j)} = \mu_j \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z}, \quad \sigma_{11}^{(j)} = \sigma_{13}^{(j)} = \sigma_{22}^{(j)} = \sigma_{33}^{(j)} = 0. \end{aligned} \quad (10.96)$$

Граничные условия заключаются в отсутствии напряжений на границе $z = -h$ всей системы, непрерывности перемещений и напряжений на плоскости $z = 0$, а также в ограниченности решения на бесконечности. Нетривиальные граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{23}^{(1)} \Big|_{z=-h} = 0, \quad \sigma_{23}^{(0)} \Big|_{z=0} = \sigma_{23}^{(1)} \Big|_{z=0}, \quad u^{(0)} \Big|_{z=0} = u^{(1)} \Big|_{z=0}, \quad u^{(j)} = O(1) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (10.97)$$

Решение задачи (10.95)–(10.97) ищем в форме прогрессивной волны ($j = 0, 1$):

$$u^{(j)}(t, x, z) = U_j(z) E(x, t), \quad E(x, t) = e^{-iq(x-ct)}. \quad (10.98)$$

Подставляя (10.98) в (10.95), получаем уравнения относительно функций $U_j(z)$:

$$U_j''(z) - q^2 \beta_j U_j(z) = 0, \quad \beta_j = 1 - c^2 / c_2^{(j)2}. \quad (10.99)$$

Для полупространства, аналогично задаче о волнах Рэлея, при $c \geq c_2^{(0)}$ ($\beta_0 < 0$) решение соответствующего уравнения ($j = 0$) не ограничено на бесконечности. Если же $c < c_2^{(0)}$ ($\beta_0 \geq 0$), то удовлетворяющее условию на бесконечности решение имеет вид (C_0 – произвольная константа):

$$U_0(z) = C_0 E_0(z), \quad E_0(z) = e^{-q\alpha_0 z}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\beta_0} = \sqrt{1 - c^2 / c_2^{(0)2}}.$$

Для слоя ($j = 1$) сначала предположим, что $c > c_2^{(1)}$ ($\beta_1 < 0$), т. е.:

$$c_2^{(1)} < c < c_2^{(0)}. \quad (10.100)$$

В этом случае общее решение соответствующего уравнения в (10.99) записывается так (C_1, C_2 – произвольные константы):

$$U_1(z) = C_1 \sin(q\alpha_1 z) + C_2 \cos(q\alpha_1 z), \quad \alpha_1 = \sqrt{-\beta_1} = \sqrt{c^2 / c_2^{(1)2} - 1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u^{(0)}(t, x, z) &= C_0 E_0(z) E(x, t), \\ u^{(1)}(t, x, z) &= [C_1 \sin(q\alpha_1 z) + C_2 \cos(q\alpha_1 z)] E(x, t). \end{aligned} \quad (10.101)$$

Тогда из (10.96) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(j)}(t, x, z) &= -i\mu_j q u^{(j)}(t, x, z), \quad \sigma_{23}^{(0)}(t, x, z) = -\mu_0 q \alpha_0 u^{(0)}(t, x, z), \\ \sigma_{23}^{(1)}(t, x, z) &= \mu_1 q \alpha_1 [C_1 \cos(q\alpha_1 z) + C_2 \sin(q\alpha_1 z)] E(x, t). \end{aligned} \quad (10.102)$$

Подставляя равенства (10.101) и (10.102) в первые три граничные условия (10.97), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_0 , C_1 и C_2 :

$$C_1 \cos(q\alpha_1 h) + C_2 \sin(q\alpha_1 h) = 0, \mu_0 q \alpha_0 C_0 + \mu_1 q \alpha_1 C_1 = 0, C_0 = C_2. \quad (10.103)$$

Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$\frac{\mu_0 \alpha_0}{\mu_1 \alpha_1} \cos(q\alpha_1 h) - \sin(q\alpha_1 h) = 0.$$

Это условие эквивалентно трансцендентному уравнению:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\xi q h) = f(\xi), \quad f(\xi) = \frac{\gamma_{01}}{\xi} \sqrt{\beta_{01}^2 - \xi^2}, \quad \xi = \alpha_1, \\ \gamma_{01} = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad \beta_{01}^2 = \delta_{01}^2 - 1, \quad \delta_{01}^2 = \frac{c_2^{(0)2}}{c_2^{(1)2}}. \end{aligned} \quad (10.104)$$

Отметим, что в силу соотношения (10.100) $\beta_{01}^2 > 0$.

Для выяснения условий существования и единственности решения уравнения (10.104) исследуем поведение функции $f(\xi)$. Ее область определения задается неравенствами (равенство $\xi = \beta_{10}$ исключено в силу соотношений (10.100) $0 < \xi < \beta_{10} = \sqrt{\delta_{01}^2 - 1}$). Она является строго убывающей на всей области определения, поскольку

$$f'(\xi) = -\frac{\gamma_{01} \beta_{01}^2}{\xi^2 \sqrt{\beta_{01}^2 - \xi^2}} < 0.$$

Так как

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} f(\xi) = +\infty \text{ и } f(\beta_{10}) = 0,$$

то ее область значений имеет вид $0 \leq f(\xi) < +\infty$.

График функции $f(\xi)$ имеет точку перегиба $\xi = \tilde{\xi}$, которая находится из соотношений:

$$f''(\xi) = -\frac{3\gamma_{01}\beta_{01}^2}{\xi^3 (\beta_{01}^2 - \xi^2)^{3/2}} \left(\frac{2}{3} \beta_{01}^2 - \xi^2 \right) = 0, \quad \tilde{\xi} = \beta_{01} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Учитывая все выше сказанное относительно поведения функции $f(\xi)$, а также свойства тангенса, приходим к выводу, что уравнение (10.104) имеет действительные корни:

$$\xi_{L1} < \xi_{L2} < \dots < \xi_{Lk}, \quad \pi(m-1) \leq \xi_{Lm} < \frac{\pi}{2}(2m-1) \quad (m=1, 2, \dots, k).$$

Число корней определяется равенством $k = k(qh) = [\beta_{10} qh / \pi] + 1$, где $|x|$ — целая часть действительного числа x .

Следовательно, функции $\xi_{Lm}(qh)$ определены на множествах $qh > \pi(m-1)/\beta_{10}$. Причем, как следует из (10.104):

$$\lim_{qh \rightarrow \frac{\pi}{\beta_{10}}(m-1)+0} \xi_{Lm} = \beta_{10}. \quad (10.105)$$

Кроме того, из (10.104) получаем, что ξ_{Lm} удовлетворяет уравнению:

$$qh \xi_{Lm} = \arctg[f(\xi_{Lm})]. \quad (10.106)$$

Отсюда находим

$$\lim_{qh \rightarrow +\infty} \xi_{Lm} = 0. \quad (10.107)$$

Дифференцируя по qh равенство (10.104)

$$\xi'(qh) \left\{ f(\xi) + \xi qh \left[1 + f^2(\xi) \right] + \frac{\gamma_{01}^2}{f(\xi)} \right\} = - \frac{\xi^2}{1 + f^2(\xi)}, \quad (10.108)$$

приходим к выводу, что функции $\xi_{Lm}(qh)$ и $\xi'_{Lm}(qh)$ являются строго монотонно убывающими.

Покажем теперь, что при $c \leq c_2^{(1)}$ ($\beta_1 \geq 0$) прогрессивные волны в рассматриваемой системе не существуют. Действительно, при $c < c_2^{(1)}$ ($\beta_1 > 0$) общее решение соответствующего уравнения в (10.99) будет

$$U_1(z) = C_1 \operatorname{sh}(q\alpha_1 z) + C_2 \operatorname{ch}(q\alpha_1 z), \quad \alpha_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{1 - c^2/c_2^{(1)2}}. \quad (10.109)$$

Аналогично предыдущему случаю получаем:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x, z) &= [C_1 \operatorname{sh}(q\alpha_1 z) + C_2 \operatorname{ch}(q\alpha_1 z)] E(x, t), \\ \sigma_{23}^{(1)}(t, x, z) &= \mu_1 q \alpha_1 [C_1 \operatorname{ch}(q\alpha_1 z) + C_2 \operatorname{sh}(q\alpha_1 z)] E(x, t). \end{aligned}$$

Перемещения $u^{(0)}$, напряжения $\sigma_{12}^{(j)}$ и $\sigma_{23}^{(0)}$ определяются соответствующими равенствами в (10.101) и (10.102).

Из граничных условий (10.97) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений для констант C_0, C_1, C_2 :

$$C_1 \operatorname{ch}(q\alpha_1 h) - C_2 \operatorname{sh}(q\alpha_1 h) = 0, \quad \mu_0 q \alpha_0 C_0 + \mu_1 q \alpha_1 C_1 = 0, \quad C_0 = C_2.$$

Условие существования ее нетривиального решения приводит к уравнению $\operatorname{th}(\alpha_1 qh) = -\mu_0 \alpha_0 / (\mu_1 \alpha_1)$, которое не имеет действительных корней, так как $\operatorname{th} \xi \geq 0$ при любом $\xi \geq 0$.

При $c = c_2^{(1)}$ ($\beta_1 = 0$) общее решение соответствующего уравнения в (10.99) записывается в виде

$$U_1(z) = C_1 z + C_2. \quad (10.110)$$

Замечание. Остальные выкладки предоставляем выполнить самостоятельно.

Итак, волны Лява существуют только при удовлетворяющих условию (10.100) фазовых скоростях, равных:

$$c = c_{Lm} = c_2^{(1)} \sqrt{1 + \xi_{Lm}^2}, \quad (10.111)$$

где ξ_{Lm} — корни уравнения (10.104).

Для определения формы этих волн в системе уравнений (10.103) полагаем (C – произвольная постоянная):

$$C_1 = C\mu_0 q \alpha_{0m}, \quad C_0 = C_2 = C\mu_1 q \alpha_{1m}, \quad \alpha_{0m} = \sqrt{\beta_{01}^2 - \xi_{Lm}^2} / \delta_{01}, \quad \alpha_{1m} = \xi_{Lm}.$$

Тогда, учитывая (10.101) и (10.102), находим

$$u^{(0)}(t, x, z) = C\mu_1 q \alpha_{1m} E_0(z) E(x, t),$$

$$u^{(1)}(t, x, z) = Cq [\mu_0 \alpha_{0m} \sin(q \alpha_{1m} z) + \mu_1 \alpha_{1m} \cos(q \alpha_{1m} z)] E(x, t);$$

$$\sigma_{12}^{(0)}(t, x, z) = -iC\mu_0 \mu_1 q^2 \alpha_{1m} E_0(z) E(x, t),$$

$$\sigma_{12}^{(1)}(t, x, z) = -iC\mu_1 q^2 [\mu_0 \alpha_{0m} \sin(q \alpha_m z) + \mu_1 \alpha_{1m} \cos(q \alpha_m z)] E(x, t),$$

$$\sigma_{23}^{(0)}(t, x, z) = -C\mu_0 \mu_1 q^2 \alpha_{0m} \alpha_{1m} E_0(z) E(x, t),$$

$$\sigma_{23}^{(1)}(t, x, z) = C\mu_1 q^2 \alpha_{1m} [\mu_0 \alpha_{0m} \cos(q \alpha_{1m} z) + \mu_1 \alpha_{1m} \sin(q \alpha_{1m} z)] E(x, t).$$

Волны Лява имеют те же практические приложения, что и волны Рэлея. Отметим только, что в отличие от волн Рэлея, как следует из (10.104) и (10.111), они являются дисперсными.

Подставляя (10.111) в (10.80) для групповых скоростей c_{gm} , получаем

$$\varsigma_{gm} = \frac{c_{gm}}{c_2^{(1)}} = \sqrt{1 + \xi_{Lm}^2} + \frac{\xi_{Lm} \xi'_{Lm}}{\sqrt{1 + \xi_{Lm}^2}} qh, \quad (10.112)$$

где $\xi'_{Lm}(qh)$ определяется формулой (10.108).

10.16. ПРОГРЕССИВНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

Поверхностные волны Рэлея могут существовать в полупространстве. Для оценки влияния второй границы в аналогичной постановке рассмотрим задачу о распространении плоских прогрессивных волн в плоском упругом слое толщины $2h$. Соответствующая геометрия задачи и, выбранная прямоугольная декартова система координат, указаны на рис. 10.8.

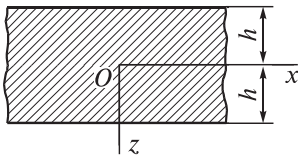


Рис. 10.8. К задаче о распространении плоских прогрессивных волн в плоском упругом слое

Движение слоя описывается уравнениями (10.82) и соотношениями (10.83). Положим, что границами слоя служат плоскости $z = \pm h$ и они являются свободными (см. также (10.84)). Граничные условия запишем в следующем виде:

$$\sigma_{13}|_{z=\pm h} = \sigma_{33}|_{z=\pm h} = 0. \quad (10.113)$$

Как в задаче о волнах Рэлея, разыскиваем решение в виде (10.85) и приходим к уравнениям (10.86). Вид общего решения этих уравнений зависит от величины фазовой скорости: $c < c_2$, $c = c_2$, $c_2 < c < c_1$, $c = c_1$ или $c > c_1$.

Можно так же, как и ранее (см. (10.109), (10.110)), выписать соответствующие решения и построить уравнения для определения фазовой скорости. Однако здесь удобнее в диапазонах $c < c_2$, $c_2 < c < c_1$ и $c > c_1$ записать решения уравнений (10.86) в одном и том же виде (C_k и D_k — произвольные константы):

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= C_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}), \\ \Psi(z) &= D_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}), \quad \beta_j = 1 - c^2/c_j^2, \end{aligned} \quad (10.114)$$

рассматривая при необходимости корень как мнимое число.

Результаты для границ диапазонов получаются с помощью соответствующих предельных переходов.

Из (10.85) и (10.114) получаем следующие представления для потенциалов:

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, z) &= \left(C_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) E(x, t), \\ \psi(t, x, z) &= \left(D_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) E(x, t).\end{aligned}$$

Тогда из (10.83) находим:

$$\begin{aligned}u_1 &= -q \left\{ i \left(C_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) + \sqrt{\beta_2} \left(D_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t), \\ u_3 &= q \left\{ \sqrt{\beta_1} \left(C_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) - i \left(D_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t), \\ \varepsilon_{11} &= -q^2 \left\{ C_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) - i\sqrt{\beta_2} \left(D_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t), \\ \varepsilon_{13} &= -\frac{q^2}{2} \left\{ 2i\sqrt{\beta_1} \left(C_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \beta_2) \left(D_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t), \\ \varepsilon_{33} &= q^2 \left\{ \beta_1 \left(C_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) - i\sqrt{\beta_2} \left(D_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t), \\ \sigma_{11} &= \mu q^2 \left\{ -(1 + 2\beta_1 - \beta_2) \left(C_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2i\sqrt{\beta_2} \left(D_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t), \\ \sigma_{13} &= -\mu q^2 \left\{ 2i\sqrt{\beta_1} \left(C_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \beta_2) \left(D_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t), \\ \sigma_{33} &= q^2 \left\{ (1 + \beta_2) \left(C_1 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + C_2 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2i\sqrt{\beta_2} \left(D_1 \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) + D_2 \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) \right) \right\} E(x, t). \end{aligned} \quad (10.115)$$

Подставляя равенства (10.115) в граничные условия (10.113), после преобразований получаем две независимые однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно C_2 , D_1 и C_1 , D_2 :

$$\begin{aligned}
2i\sqrt{\beta_1}C_2 \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_1}) + (1+\beta_2)D_1 \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}) &= 0, \\
(1+\beta_2)C_2 \operatorname{ch}(qh\sqrt{\beta_1}) + 2i\sqrt{\beta_2}D_1 \operatorname{ch}(qh\sqrt{\beta_2}) &= 0, \\
2i\sqrt{\beta_1}C_1 \operatorname{ch}(qh\sqrt{\beta_1}) + (1+\beta_2)D_2 \operatorname{ch}(qh\sqrt{\beta_2}) &= 0, \\
(1+\beta_2)C_1 \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_1}) + 2i\sqrt{\beta_2}D_1 \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}) &= 0.
\end{aligned} \tag{10.116}$$

Как вытекает из (10.115), при $C_1 = D_2 = 0$ перемещение u_1 и напряжения σ_{11}, σ_{33} — четные, а перемещение u_3 и напряжение σ_{13} — нечетные функции по координате z . Если же $C_2 = D_3 = 0$, то, наоборот, u_3 и σ_{13} — четные, а u_1 и σ_{11}, σ_{33} — нечетные функции. Назовем эти два типа волн соответственно *симметричными* и *антисимметричными* и в силу линейности задачи рассмотрим их отдельно.

1. *Симметричные волны.* Условием существования нетривиального решения системы (10.107) является равенство нулю ее определителя, которое эквивалентно трансцендентному уравнению, записываемому при различных значениях фазовой скорости с учетом равенства $\operatorname{th} ix = i \operatorname{tg} x$ следующим образом:

- при $c < c_2$ ($\xi < 1$)

$$\frac{\operatorname{th}(qh\sqrt{1-\xi/\eta^2})}{\operatorname{th}(qh\sqrt{1-\xi})} = \frac{(2-\xi)^2}{4\sqrt{1-\xi}\sqrt{1-\xi/\eta^2}};$$

- при $c_2 < c < c_1$ ($1 < \xi < \eta^2$)

$$\frac{\operatorname{th}(qh\sqrt{1-\xi/\eta^2})}{\operatorname{tg}(qh\sqrt{\xi-1})} = \frac{(2-\xi)^2}{4\sqrt{\xi-1}\sqrt{1-\xi/\eta^2}};$$

- при $c > c_1$ ($\xi < \eta^2$)

$$\frac{\operatorname{tg}(qh\sqrt{\xi/\eta^2-1})}{\operatorname{tg}(qh\sqrt{\xi-1})} = -\frac{(2-\xi)^2}{4\sqrt{\xi-1}\sqrt{\xi/\eta^2-1}}. \tag{10.117}$$

Обозначения используемых параметров указаны в (10.88).

В силу периодичности тангенса уравнения (10.117) имеют счетное множество решений $\xi_{s1} < \xi_{s2} < \dots < \xi_{sk} < \dots$, которым соответствуют фазовые скорости $c_{sk} = \varsigma_{sk} c_2$, $\varsigma_{sk} = \sqrt{\xi_{sk}}$.

Исследуем поведение фазовых скоростей в двух предельных случаях: длина волны значительно больше толщины слоя ($L \gg 2h, gh \rightarrow 0$) и длина волны намного меньше толщины слоя ($L \ll 2h, gh \rightarrow \infty$). При этом будем использовать следующие свойства элементарных функций:

$$\operatorname{tg} x \sim x \sim x + x^3/3, \operatorname{th} x \sim x \sim x - x^3/3, x \rightarrow 0, \operatorname{th} x \sim 1, x \rightarrow +\infty. \tag{10.118}$$

Сохраняя в третьем уравнении (10.117) члены первого порядка малости при $qh \rightarrow 0$, получаем (знаки эквивалентности заменяем равенствами): $4(1-\xi/\eta^2) = (2-\xi)^2$. Отсюда для первой формы колебаний имеем, что при $qh \rightarrow 0$ (см. неравенства (10.91)):

$$\xi_{s1} \rightarrow \xi_* = 2(1+\kappa), c \rightarrow c_* = 2(c_2/c_1)\sqrt{c_1^2 - c_2^2}, 1 < 2(1+\kappa) \leq \eta^2. \tag{10.119}$$

Использование разложений из (10.118) с учетом членов третьего порядка приводит при $qh \rightarrow 0$ это уравнение к виду:

$$\xi \left\{ \frac{q^2 h^2}{3} \xi^2 \left[1 - \frac{q^2 h^2}{3} \left(5 - \frac{4}{\eta^2} \right) \right] \xi - 2(1 + \kappa) \left(1 - \frac{2q^2 h^2}{3} \right) \right\} = 0.$$

Поскольку коэффициент при старшей степени стремится к нулю, то корень уравнения стремится к бесконечности.

Аналогичный анализ соотношений (10.117) приводит к тому же результату, который соответствует только диапазону изменения ξ , отвечающему третьему из уравнений (10.117). Поскольку для первой формы справедливо (10.119), то этот вывод относится к высшим формам $\xi_{sk} \rightarrow \infty$, $c_{sk} \rightarrow \infty$ при ($k \geq 2$). При $qh \rightarrow 0$, учитывая последнее отношение эквивалентности в (10.118), из (10.117) получаем уравнение:

$$\frac{(2 - \xi)^2}{4\sqrt{1 - \xi}\sqrt{1 - \xi/\eta^2}} = 1,$$

которое эквивалентно уравнению (10.88). Следовательно, фазовая скорость первой формы волны стремится к скорости волн Рэлея (см. (10.93)): $\xi_{s1} \rightarrow \xi_R$, $c \rightarrow c_R$, т. е. в этом случае границы слоя $z = \pm h$ оказывают малое влияние друг на друга и ведут себя как границы полупространства. Таким образом, на них имеют место преимущественно волны, близкие к волнам Рэлея.

Из соотношений (10.117) вытекает, что волны этого типа являются дисперсными. Групповая скорость в соответствии с (10.80) будет

$$c_g = \frac{c_g}{c_2} = \varsigma(qh) + \frac{\xi'(qh)}{2\varsigma(qh)} qh, \quad (10.120)$$

где $\xi'(qh)$ находится как производная неявно заданной уравнениями (10.117) функции $\xi(qh)$.

Можно показать, что групповая скорость для первой формы имеет такие же предельные значения, как и фазовая скорость, а для высших форм при $qh \rightarrow 0$ она стремится к нулю [99].

Для определения формы колебаний положим в (10.116)

$$C_2 = C(1 + \beta_2) \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}), \quad D_1 = -2iC\sqrt{\beta_1} \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_1}),$$

где C — произвольная постоянная.

Подставляя эти равенства в (10.115), находим формы волн перемещений и напряжений ($C_1 = D_2 = 0$):

$$u_1 = iqC \left\{ -(1 + \beta_2) \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}) \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) + 2\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2} \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) \right\} E(x, t),$$

$$u_3 = qC\sqrt{\beta_1} \left\{ (1 + \beta_2) \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}) \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) - 2 \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_1}) \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) \right\} E(x, t),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \mu q^2 C \left\{ -(1 + 2\beta_1 - \beta_2)(1 + \beta_2) \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}) \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) + \right. \\ \left. + 4\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2} \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_1}) \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) \right\} E(x, t), \end{aligned}$$

$$\sigma_{13} = 2i\mu q^2 C \sqrt{\beta_1} (1 + \beta_2) \left\{ -\operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}) \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_1}) + \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_1}) \operatorname{sh}(qz\sqrt{\beta_2}) \right\} E(x, t),$$

$$\sigma_{33} = q^2 C \left\{ (1 + \beta_2)^2 \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_2}) \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_1}) - 4\sqrt{\beta_1} \sqrt{\beta_2} \operatorname{sh}(qh\sqrt{\beta_1}) \operatorname{ch}(qz\sqrt{\beta_2}) \right\} E(x, t).$$

2. *Антисимметричные волны.* Аналогично симметричным волнам из условия существования нетривиального решения системы (10.116) получаем трансцендентное уравнение относительно безразмерной фазовой скорости:

- при $c < c_2$ ($\xi < 1$)

$$\frac{\operatorname{th}(qh\sqrt{1-\xi/\eta^2})}{\operatorname{th}(qh\sqrt{1-\xi})} = \frac{4\sqrt{1-\xi}\sqrt{1-\xi/\eta^2}}{(2-\xi)^2};$$

- при $c_2 < c < c_1$ ($1 < \xi < \eta$)

$$\frac{\operatorname{th}(qh\sqrt{1-\xi/\eta^2})}{\operatorname{tg}(qh\sqrt{\xi-1})} = -\frac{4\sqrt{\xi-1}\sqrt{1-\xi/\eta^2}}{(2-\xi)^2};$$

- при $c > c_1$ ($\xi > \eta^2$)

$$\frac{\operatorname{tg}(qh\sqrt{\xi/\eta^2-1})}{\operatorname{tg}(qh\sqrt{\xi-1})} = -\frac{4\sqrt{\xi-1}\sqrt{\xi/\eta^2-1}}{(2-\xi)^2}. \quad (10.121)$$

Уравнения (10.121) имеют счетное множество решений $\xi_{\alpha 1} < \xi_{\alpha 2} < \dots < \xi_{\alpha k} < \dots$, которым соответствуют фазовые скорости $c_{ak} = \varsigma_{ak} c_2$, $\varsigma_{ak} = \sqrt{\xi_{ak}}$.

Исследование асимптотического поведения фазовых и групповых (см. (10.120)) скоростей показывает, что для первой формы $\xi_{a1} \rightarrow 0$, $\xi_{ga1} \rightarrow 0$ при $qh \rightarrow 0$ и $\xi_{a1} \rightarrow \xi_R$, $\xi_{ga1} \rightarrow \xi_R$ при $qh \rightarrow \infty$, а для высших форм $\xi_{sk} \rightarrow \infty$, $\xi_{gsk} \rightarrow 0$ при $gh \rightarrow 0$ ($k \geq 2$).

Для определения формы антисимметричных колебаний можно положить в (10.116) (D – произвольная постоянная)

$$C_1 = D(1 + \beta_2) \operatorname{ch}(qh\sqrt{\beta_2}), \quad D_2 = -2iD\sqrt{\beta_1} \operatorname{ch}(qh\sqrt{\beta_1}),$$

и далее необходимо подставить эти равенства в (10.115), учитывая, что $C_2 = 0$ и $D_1 = 0$.

10.17. ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ СИЛЫ

В рамках предположений разд. 10.14 о геометрии области и свойствах занимающей ее среды, рассмотрим еще одну практически важную задачу о движении с постоянной скоростью v в направлении оси Ox нормальной к границе $z = 0$ полуплоскости силы P (рис. 10.9).

Движение упругой среды описывается соотношениями (10.82)–(10.84). Условия на бесконечности сформулируем позже. Граничные условия на границе полуплоскости имеют вид

$$\sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = -P\delta(x - vt), \quad (10.122)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

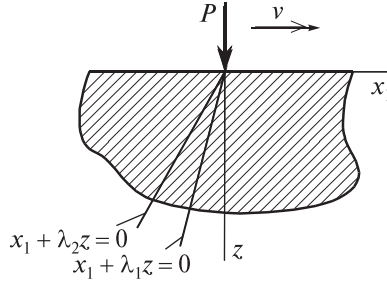


Рис. 10.9. Геометрия задачи о движении с постоянной скоростью нормальной к границе полуплоскости силы P

Предполагая, что решение задачи есть функции от $x - vt$ и z , перейдем к новой подвижной системе координат $x_1 = x - vt$, $z_1 = z$.

В новых переменных уравнения (10.82) приобретают следующий вид:

$$\beta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \beta_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \beta_j = 1 - M_j^2, \quad M_j = \frac{v}{c_j}. \quad (10.123)$$

Здесь M_j — числа Маха¹.

Соотношения (10.83) сохраняются, в (10.83) координата x заменяется переменной x_1 . Граничные условия (10.122) переходят в следующие:

$$\sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = -P\delta(x_1). \quad (10.124)$$

В зависимости от соотношения скорости v движения силы и скоростей распространения волн c_1 , c_2 (величин чисел Маха, коэффициентов β_j) уравнения (10.123) имеют различный тип.

Так, при $v < c_2 < c_1$ ($M_1 < M_2 < 1$, $1 < \beta_2 < \beta_1$) оба уравнения эллиптические.

При $c_2 < v < c_1$ ($1 < M_1 < M_2$, $\beta_2 < \beta_1 < 0$) первое уравнение эллиптическое, а второе гиперболическое.

При $c_2 < c_1 < v$ ($1 < M_1 < M_2$, $\beta_2 < \beta_1 < 0$) оба уравнения гиперболические.

Указанные диапазоны имеют названия: первый из них — *дозвуковой*, второй — *трансзвуковой*, третий — *сверхзвуковой*.

Для решения задачи будем использовать комплексное преобразование Фурье по координате x_1 (индекс F указывает на трансформанту, q — параметр преобразования). В пространстве преобразований уравнения (10.123), соотношения (10.83) и граничные условия (10.124) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} -q^2 \beta_1 \varphi^F + \frac{\partial^2 \varphi^F}{\partial z^2} &= 0, \quad -q^2 \beta_2 \psi^F + \frac{\partial^2 \psi^F}{\partial z^2} = 0, \\ u_1^F &= -iq\varphi^F - \frac{\partial \psi^F}{\partial z}, \quad u_3^F = \frac{\partial \varphi^F}{\partial z} - iq\psi^F, \end{aligned}$$

¹ Мах Эрнст (Mach Ernst, 1838–1916), австрийский физик, механик.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^F &= -iqu_1^F, \quad \varepsilon_{13}^F = \frac{1}{2} \left(-iqu_3^F + \frac{\partial u_1^F}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{33}^F = \frac{\partial u_3^F}{\partial z}, \\ \sigma_{13}^F \Big|_{z=0} &= 0, \quad \sigma_{33}^F \Big|_{z=0} = -P.\end{aligned}\quad (10.125)$$

В законе Гука (10.83) в обозначениях компонент тензоров необходимо добавить индекс F . Далее отдельно рассмотрим все три диапазона, в которых может находиться скорость v .

1. *Дозвуковая скорость* $v < c_2$ ($M_1 < M_2 < 1$, $0 < \beta_2 < \beta_1$).

Уравнения (10.125) в этом случае принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \phi^F}{\partial z^2} - q^2 \alpha_1^2 \phi^F = 0, \quad \alpha_1 = \sqrt{\beta_1}, \quad \frac{\partial^2 \psi^F}{\partial z^2} - q^2 \alpha_2^2 \psi^F = 0, \quad \alpha_2 = \sqrt{\beta_2}. \quad (10.126)$$

Соответствующие условия на бесконечности — условия затухания решений этих уравнений:

$$\phi^F = O(1), \quad \psi^F = O(1) \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (10.127)$$

Удовлетворяющие им решения уравнений (10.126) будут:

$$\phi^F(q, z) = C_1 E_1(z), \quad E_1(z) = e^{-\alpha_1 |q| z}, \quad \psi^F(q, z) = C_2 E_2(z), \quad E_2(z) = e^{-\alpha_2 |q| z}. \quad (10.128)$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Из (10.125) и (10.83) находим перемещения:

$$\begin{aligned}u_1^F &= -iqC_1 E_1(z) + \alpha_2 |q| C_2 E_2(z), \quad u_3^F = -\alpha_1 |q| C_1 E_1(z) - iqC_2 E_2(z); \\ \varepsilon_{11}^F &= -q \left[qC_1 E_1(z) + i|q| \alpha_2 C_2 E_2(z) \right], \quad \varepsilon_{13}^F = \frac{q}{2} \left[2i|q| \alpha_1 C_1 E_1(z) - q(1 + \alpha_2^2) C_2 E_2(z) \right], \\ \varepsilon_{33}^F &= q \left[q\alpha_1^2 C_1 E_1(z) + i|q| \alpha_2 C_2 E_2(z) \right]; \\ \sigma_{11}^F &= -\mu q \left[q(2\alpha_1^2 + M_2^2) C_1 E_1(z) + 2i|q| \alpha_2 C_2 E_2(z) \right], \\ \sigma_{13}^F &= \mu q \left[2i|q| \alpha_1 C_1 E_1(z) - q(1 + \alpha_2^2) C_2 E_2(z) \right], \\ \sigma_{33}^F &= \mu q \left[q(1 + \alpha_2^2) C_1 E_1(z) + 2i|q| \alpha_2 C_2 E_2(z) \right].\end{aligned}\quad (10.129)$$

Заметим, что при $q > 0$ и $v = c$ в соответствии с (10.81) формулы (10.129) совпадают с равенствами (10.87)–(10.88).

Подставляя напряжения из (10.129) в граничные условия в (10.125), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_1 и C_2 :

$$2i|q| \alpha_1 C_1 - q(1 + \alpha_2^2) C_2 = 0, \quad q(1 + \alpha_2^2) C_1 + 2i|q| \alpha_2 C_2 = -P/(\mu q). \quad (10.130)$$

Определитель этой системы равен $q^2 R(\alpha_1, \alpha_2)$, т. е. при $v = c$ пропорционален определителю (10.88). Ее решение имеет вид:

$$C_1 = -\frac{PK_u(1 + \alpha_2^2)}{\mu q^2}, \quad C_2 = -\frac{2iPK_u \alpha_1 \operatorname{sign} q}{\mu q^2}, \quad K_u = \frac{1}{R(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

Подставляя эти постоянные в (10.129), находим изображение перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} u_1^F &= \frac{iPK_u}{\mu q} \left[(1 + \alpha_2^2) E_1(z) - 2\alpha_1\alpha_2 E_2(z) \right], \\ u_3^F &= \frac{PK_u\alpha_1}{\mu|q|} \left[(1 + \alpha_2^2) E_1(z) - 2E_2(z) \right], \\ \sigma_{11}^F &= PK_u \left[(1 + \alpha_2^2) (2\alpha_1^2 + M_2^2) E_1(z) - 4\alpha_1\alpha_2 E_2(z) \right], \\ \sigma_{13}^F &= -2iPK_u\alpha_1 (1 + \alpha_2^2) [E_1(z) - E_2(z)] \operatorname{sign} q, \\ \sigma_{33}^F &= -PK_u \left[(1 + \alpha_2^2)^2 E_1(z) - 4\alpha_1\alpha_2 E_2(z) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя свойства преобразования Фурье, окончательно находим перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, z) &= \frac{PK_u}{\pi\mu} \left[(1 + \alpha_2^2) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha_1 z} - 2\alpha_1\alpha_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha_2 z} \right], \\ u_3 &= \frac{PK_u\alpha_1}{\pi\mu} \left[CM_2^2 - (1 + \alpha_2^2) \ln \sqrt{x_1^2 + \alpha_1^2 z^2} + 2 \ln \sqrt{x_1^2 + \alpha_2^2 z^2} \right], \\ \sigma_{11} &= \frac{PK_u\alpha_1 z}{\pi} \left[(2\alpha_1^2 + M_2^2) \frac{1 + \alpha_2^2}{x_1^2 + \alpha_1^2 z^2} - \frac{4\alpha_2^2}{x_1^2 + \alpha_2^2 z^2} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{2PK_u\alpha_1 (1 + \alpha_2^2) (M_2^2 - M_1^2) x_1 z^2}{\pi (x_1^2 + \alpha_1^2 z^2) (x_1^2 + \alpha_2^2 z^2)}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{PK_u\alpha_1 z}{\pi} \left[\frac{(1 + \alpha_2^2)^2}{x_1^2 + \alpha_1^2 z^2} - \frac{4\alpha_2^2}{x_1^2 + \alpha_2^2 z^2} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, при скорости движения силы, совпадающей со скоростью волн Рэлея c_R ($M_2 = \sqrt{\xi_R}$, $M_1 = \sqrt{\zeta_R}$, см. (10.93)), все компоненты напряженно-деформированного состояния среды обращаются в бесконечность, т. е. решение задачи не существует (не существует решение системы уравнений (10.130)). Предельное значение скорости движения силы $v = c_2$ ($M_2 = 1$, $M_1 = 1/\eta$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \sqrt{(1 + \kappa)/2}$, $K_u = 1$) не является критическим, т. е. решение задачи существует и имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, z) &= \frac{P}{\pi\mu} \operatorname{arctg} \frac{x_1 \sqrt{2}}{z \sqrt{1 + \kappa}}, \quad u_3 = \frac{P \sqrt{1 + \kappa}}{\pi\mu \sqrt{2}} \left[C - \ln \frac{\sqrt{2x_1^2 + (1 + \kappa)z^2}}{x_1^2 \sqrt{2}} \right], \\ \sigma_{11} &= \frac{Pz(2 + \kappa) \sqrt{2(1 + \kappa)}}{\pi [2x_1^2 + (1 + \kappa)z^2]}, \quad \sigma_{13} = -\frac{Pz^2(1 + \kappa) \sqrt{2(1 + \kappa)}}{\pi [2x_1^2 + (1 + \kappa)z^2] x_1}, \quad \sigma_{33} = -\frac{Pz \sqrt{2(1 + \kappa)}}{\pi [2x_1^2 + (1 + \kappa)z^2]}. \end{aligned}$$

Анализ этих формул показывает, что напряжения равны нулю на бесконечности, касательные перемещения u_1 ограничены в окрестности бесконечно удаленной точки $x_1 = \infty$, на поверхности полуплоскости ограничены, но имеют разрыв первого рода. Нормальные же перемещения u_3 имеют логарифмическую особенность в начале подвижной системы координат и при $x_1 \rightarrow \infty$:

$$u_1|_{z=0} = \frac{PK_u}{\pi\mu} (1 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2) \operatorname{sign} x_1, \quad u_3|_{z=0} = \frac{PK_u\alpha_1 M_2^2}{\pi\mu} (C + \ln|x_1|);$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u_1 = \pm \frac{PK_u}{\pi\mu} (1 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2), \quad u_3 \sim \frac{PK_u\alpha_1 M_2^2}{\pi\mu} \ln|x_1| \quad (x_1 \rightarrow \pm\infty).$$

Отметим, что наличие особенностей у перемещений, как здесь, так и далее, не противоречит гипотезе сплошности среды, поскольку рассматривается идеализированная сосредоточенная нагрузка. В случае распределенной нагрузки эти особенности отсутствуют.

2. *Трансзвуковая скорость* $c_2 < v < c_1$ ($M_1 < 1 < M_2$, $\beta_2 < 0 < \beta_1$).

Уравнение (10.126) вместе с условием на бесконечности (10.127), а также соответствующее решение (10.128) в этом случае сохраняется. Второе же уравнение из (10.125) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi^F}{\partial z^2} + q^2 \lambda_2^2 \Psi^F = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{-\beta_2}. \quad (10.131)$$

Для этого уравнения условие на бесконечности (одномерная задача) это условие излучения (10.82):

$$\frac{\partial \Psi^F}{\partial z} + iq\lambda_2 \Psi^F = o\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (10.132)$$

Удовлетворяющее ему решение уравнения (10.131) имеет вид:

$$\Psi^F(q, z) = C_2 \tilde{E}_2(z), \quad \tilde{E}_2(z) = e^{-i\lambda_2 q z}.$$

Аналогично (10.129) получаем представления трансформант перемещений, деформаций, напряжений и систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_1 и C_2 :

$$u_1^F = -iqC_1 E_1(z) + i\lambda_2 q C_2 \tilde{E}_2(z), \quad u_3^F = -\alpha_1 |q| C_1 E_1(z) - iqC_2 \tilde{E}_2(z),$$

$$\varepsilon_{11}^F = q^2 [-C_1 E_1(z) + \lambda_2 C_2 \tilde{E}_2(z)], \quad \varepsilon_{33}^F = q^2 [\alpha_1^2 C_1 E_1(z) - \lambda_2 C_2 \tilde{E}_2(z)];$$

$$\varepsilon_{13}^F = \frac{q}{2} [2i|q|\alpha_1 C_1 E_1(z) - q(1 - \lambda_2^2) C_2 \tilde{E}_2(z)],$$

$$\sigma_{11}^F = \mu q^2 [-(2\alpha_1^2 + M_2^2) C_1 E_1(z) + 2\lambda_2 C_2 \tilde{E}_2(z)],$$

$$\sigma_{13}^F = \mu q [2i|q|\alpha_1 C_1 E_1(z) - q(1 - \lambda_2^2) C_2 \tilde{E}_2(z)],$$

$$\sigma_{33}^F = \mu q^2 [(1 - \lambda_2^2) C_1 E_1(z) - 2\lambda_2 C_2 \tilde{E}_2(z)],$$

$$2i|q|\alpha_1 C_1 - q(1 - \lambda_2^2) C_2 = 0, \quad (1 - \lambda_2^2) C_1 - 2\lambda_2 C_2 = -P/(\mu q^2). \quad (10.133)$$

Решение системы уравнений (10.133) имеет вид (многочлен $P_{31}(\zeta)$ определен в (10.92)):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{PK_t(1-\lambda_2^2)}{\mu q^2} \left[(1-\lambda_2^2)^2 + 4i\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign} q \right], \\ C_2 &= \frac{2iPK_t\alpha_1 \operatorname{sign} q}{\mu q^2} \left[(1-\lambda_2^2)^2 + 4i\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign} q \right], \\ K_t &= \left(\eta^2 M_1^2 P_{31}(M_1^2) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (10.134)$$

Подставляя эти постоянные в (10.133), находим изображения перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u_1^F &= \frac{PK_t i}{\mu q} \left[(1-\lambda_2^2)^2 + 4i\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign} q \right] \left[(1-\lambda_2^2) E_1(z) - i2\alpha_1\lambda_2 \tilde{E}_2(z) \operatorname{sign} q \right], \\ u_3^F &= \frac{PK_t \alpha_1}{\mu |q|} \left[(1-\lambda_2^2)^2 + 4i\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign} q \right] \left[(1-\lambda_2^2) E_1(z) - 2\tilde{E}_2(z) \right], \\ \sigma_{11}^F &= PK_t (1-\lambda_2^2) \left[(1-\lambda_2^2)^2 + 4i\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign} q \right] \times \\ &\times \left[(2\alpha_1^2 + M_2^2) (1-\lambda_2^2) E_1(z) - 4i\alpha_1\lambda_2 \tilde{E}_2(z) \operatorname{sign} q \right], \\ \sigma_{13}^F &= -2iPK_t \alpha_1 (1-\lambda_2^2) \left[(1-\lambda_2^2)^2 + 4i\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign} q \right] \left[E_1(z) - \tilde{E}_2(z) \right] \operatorname{sign} q, \\ \sigma_{33}^F &= -PK_t \left[(1-\lambda_2^2)^2 + 4i\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign} q \right] \left[(1-\lambda_2^2)^2 E_1(z) - 4i\alpha_1\lambda_2 \tilde{E}_2(z) \operatorname{sign} q \right]. \end{aligned} \quad (10.135)$$

Из (10.135) с использованием свойств преобразования Фурье находим перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, z) &= \frac{PK_t}{\pi \mu} \left[(1-\lambda_2^2)^3 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha_1 z} + 4\alpha_1\lambda_2 (1-\lambda_2^2) \ln \sqrt{x_1^2 + \alpha_1^2 z^2} - \right. \\ &\left. - 2\alpha_1\lambda_2 (1-\lambda_2^2)^2 \ln |x_1 + \lambda_2 z| + 4\alpha_1^2 \lambda_2^2 \operatorname{sign}(x_1 + \lambda_2 z) + 2\alpha_1\lambda_2 (1-\lambda_2^4) C \right], \\ u_3(x_1, z) &= \frac{PK_t \alpha_1}{\pi \mu} \left[- (1-\lambda_2^2)^3 \ln \sqrt{x_1^2 + \alpha_1^2 z^2} + 4\alpha_1\lambda_2 (1-\lambda_2^2) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha_1 z} + \right. \\ &\left. + 2(1-\lambda_2^2)^2 \ln |x_1 + \lambda_2 z| - 4\alpha_1\lambda_2 \operatorname{sign}(x_1 + \lambda_2 z) + (1-\lambda_2^2)(1-\lambda_2^4) C \right], \\ \sigma_{11}(x_1, z) &= PK_t \alpha_1 \left[(2\alpha_1^2 + M_2^2) (1-\lambda_2^2) \frac{(1-\lambda_2^2)^2 z + 4\lambda_2 x_1}{\pi (x_1^2 + \alpha_1^2 z^2)} - \right. \\ &\left. - \frac{4\lambda_2 (1-\lambda_2^2)^2}{\pi (x_1 + \lambda_2 z)} + 16\alpha_1 \lambda_2^2 \delta(x_1 + \lambda_2 z) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}(x_1, z) = & -2PK_t\alpha_1(1-\lambda_2^2) \left\{ \frac{(1-\lambda_2^2)(\lambda_2 x_1 - \alpha_1^2 z)z}{\pi(x_1^2 + \alpha_1^2 z^2)(x_1 + \lambda_2 z)} + \right. \\
& \left. + 4\alpha_1\lambda_2 \left[\delta(x_1 + \lambda_2 z) - \frac{\alpha_1 z}{\pi(x_1^2 + \alpha_1^2 z^2)} \right] \right\}, \\
\sigma_{33}(x_1, z) = & -PK_t\alpha_1 \left[(1-\lambda_2^2)^2 \frac{(1-\lambda_2^2)^2 z + 4\lambda_2 x_1}{\pi(x_1^2 + \alpha_1^2 z^2)} - \right. \\
& \left. - \frac{4\lambda_2(1-\lambda_2^2)^2}{\pi(x_1 + \lambda_2 z)} + 16\alpha_1\lambda_2^2\delta(x_1 + \lambda_2 z) \right]. \quad (10.136)
\end{aligned}$$

В рассматриваемом транззвуковом случае аргумент $\varsigma = M_1^2$ многочлена $P_{31}(\varsigma)$ (см. (10.134)) лежит в диапазоне $\eta^{-2} < \varsigma < 1$, в котором отсутствуют его действительные корни. Следовательно, решение задачи в отличие от сверхзвукового случая определено при любых скоростях движения нагрузки из указанного диапазона.

Предельные значения скорости движения силы, соответствующие концам диапазона, в транззвуковом случае также не являются критическими.

Так, при $v = c_2$ ($M_1 = 1/\eta$, $M_2 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha_1 = \sqrt{(1+\kappa)}/2$, $K_t = 1$) перемещения и напряжения совпадают с соответствующими, определяемыми формулами (10.134) и (10.135) для сверхзвукового случая.

При $v = c_1$ ($M_2 = \eta$, $M_1 = 1$, $\lambda_2^2 = \eta^2 - 1$, $\alpha_1 = 0$, $K_t^{-1} = (\eta^2 - 2)^2$), как следует из (10.136), имеем дело с одномерной деформацией:

$$\begin{aligned}
u_1 &= (P/2\lambda)\text{sign } x_1, \quad u_3 \equiv 0; \\
\sigma_{11} &= -(P/\kappa)\delta(x_1), \quad \sigma_{13} \equiv 0, \quad \sigma_{33} = -P\delta(x_1). \quad (10.137)
\end{aligned}$$

При получении первого и третьего равенств в (10.137) было использовано следующее свойство дельты-совокупности функций $f(x_1, z)$ при $z \rightarrow +0$:

$$\lim_{z \rightarrow +0} f(x_1, z) = \delta(x_1), \quad f(x_1, z) = \frac{\alpha_1 z}{\pi(x_1^2 + \alpha_1^2 z^2)}. \quad (10.138)$$

Тот же результат можно получить, если выполнить предельный переход в равенствах (10.135), а затем — обратное преобразование Фурье.

Из (10.136) вытекает, что перемещения имеют логарифмическую особенность на границе полуплоскости и при $x_1 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
u_1|_{z=0} &= \frac{PK_t}{\pi\mu} \left\{ \left[\frac{\pi}{2}(1-\lambda_2^2)^3 + 4\alpha_1^2\lambda_2^2 \right] \text{sign } x_1 + 2\alpha_1\lambda_2(1-\lambda_2^4)(\ln|x_1| + C) \right\}, \\
u_3|_{z=0} &= \frac{PK_t\alpha_1}{\pi\mu} \left\{ (1-\lambda_2^2)(1-\lambda_2^4)(\ln|x_1| + C) + 2\alpha_1\lambda_2 \left[\pi(1-\lambda_2^2) - 2 \right] \text{sign } x_1 \right\}, \\
u_1 &\sim \frac{2PK_t}{\pi\mu} \alpha_1\lambda_2(1-\lambda_2^4)\ln|x_1|, \quad u_3 \sim \frac{PK_t\alpha_1}{\pi\mu} (1-\lambda_2^2)^2(1-\lambda_2^4)\ln|x_1| \quad (x_1 \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Из (10.136) следует, что напряжения имеют сингулярную особенность на фронте $x_1 + \lambda_2 z = 0$ волны Маха.

Граничные условия в (10.125) выполняются, поскольку справедливо предельное равенство (10.138). По той же причине напряжения на границе полуплоскости определяются так:

$$\sigma_{11}(x_1, z) = PK_t \left\{ 8(\alpha_1^2 + \lambda_2^2)(1 - \lambda_2^2) \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\pi x_1} + \left((2\alpha_1^2 + M_2^2)(1 - \lambda_2^2)^3 + 16\alpha_1^2 \lambda_2^2 \right) \delta(x_1) \right\}.$$

3. *Сверхзвуковая скорость* $c_2 < c_1 < v$ ($1 < M_1 < M_2$, $\beta_2 < \beta_1 < 0$).

В этом случае решение также можно построить с использованием преобразования Фурье. При этом изображение потенциала ϕ должно удовлетворять уравнению (10.131) и условию (10.132), в которых λ_2 должно быть заменено величиной $\lambda_1 = \sqrt{-\beta_1}$.

Однако поскольку в этом случае оба уравнения в (10.123) являются гиперболическими, то удобнее использовать другой подход, основанный на функционально-инвариантных решениях Д'Аламбера:

$$\phi(x_1, z) = f(x_1 + \lambda_1 z), \quad \psi(x_1, z) = g(x_1 + \lambda_2 z),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные, необходимое число раз дифференцируемые функции.

Подставляя эти представления в (10.83), находим ($x = x_1$):

$$\begin{aligned} u_1 &= f'(x_1 + \lambda_1 z) - \lambda_2 g'(x_1 + \lambda_2 z), \quad u_3 = \lambda_1 f'(x_1 + \lambda_1 z) + g'(x_1 + \lambda_2 z); \\ \varepsilon_{11} &= f''(x_1 + \lambda_1 z) - \lambda_2 g''(x_1 + \lambda_2 z), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left[2\lambda_1 f''(x_1 + \lambda_1 z) - (\lambda_2^2 - 1) g''(x_1 + \lambda_2 z) \right], \quad \varepsilon_{33} = \lambda_1^2 f''(x_1 + \lambda_1 z) + \lambda_2 g''(x_1 + \lambda_2 z), \\ \sigma_{11} &= \mu \left[(M_2^2 - 2\lambda_1^2) f''(x_1 + \lambda_1 z) - 2\lambda_2 g''(x_1 + \lambda_2 z) \right], \\ \sigma_{13} &= \mu \left[2\lambda_1 f''(x_1 + \lambda_1 z) - (\lambda_2^2 - 1) g''(x_1 + \lambda_2 z) \right], \\ \sigma_{33} &= \mu \left[(\lambda_2^2 - 1) f''(x_1 + \lambda_1 z) + 2\lambda_2 g''(x_1 + \lambda_2 z) \right]. \end{aligned} \quad (10.139)$$

Подставляя последние два равенства из (10.139) в граничные условия (10.124), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно $f''(x_1)$ и $g''(x_1)$:

$$2\lambda_1 f''(x_1) - (\lambda_2^2 - 1) g''(x_1) = 0, \quad (\lambda_2^2 - 1) f''(x_1) + 2\lambda_2 g''(x_1) = -(P/\mu) \delta(x_1).$$

Ее решение имеет вид (см. (10.88)):

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= -\frac{PK_s}{\mu} (\lambda_2^2 - 1) \delta(x_1), \quad g''(x_1) = -\frac{2PK_s}{\mu} \lambda_1 \delta(x_1), \\ K_s &= \frac{1}{\tilde{R}(\lambda_1, \lambda_2)}, \quad \tilde{R}(\lambda_1, \lambda_2) = R(i\lambda_1, i\lambda_2) = (\lambda_2^2 - 1)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2. \end{aligned} \quad (10.140)$$

Интегрируя эти равенства, находим первые производные искомых функций:

$$f'(x_1) = -\frac{PK_s}{\mu} (\lambda_2^2 - 1) H(x_1), \quad g'(x_1) = -\frac{2PK_s}{\mu} \lambda_1 H(x_1).$$

Подстановка найденных производных в (10.139) приводит к окончательным формулам для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{PK_s}{\mu} \left[-(\lambda_2^2 - 1) H(x_1 + \lambda_1 z) + 2\lambda_1 \lambda_2 H(x_1 + \lambda_2 z) \right], \\
 u_3 &= -\frac{PK_s \lambda_1}{\mu} \left[(\lambda_2^2 - 1) H(x_1 + \lambda_1 z) + 2H(x_1 + \lambda_2 z) \right]; \\
 \sigma_{11} &= PK_s \left[-\left(M_2^2 - 2\lambda_1^2 \right) (\lambda_2^2 - 1) \delta(x_1 + \lambda_1 z) + 4\lambda_1 \lambda_2 \delta(x_1 + \lambda_2 z) \right], \\
 \sigma_{13} &= 2PK_s \lambda_1 (\lambda_2^2 - 1) \left[\delta(x_1 + \lambda_2 z) - \delta(x_1 + \lambda_1 z) \right], \\
 \sigma_{33} &= -PK_s \left[(\lambda_2^2 - 1)^2 \delta(x_1 + \lambda_1 z) + 4\lambda_1 \lambda_2 \delta(x_1 + \lambda_2 z) \right]. \quad (10.141)
 \end{aligned}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Поскольку функция $\tilde{R}(\lambda_1, \lambda_2)$ (см. (10.140)) в рассматриваемом сверхзвуковом случае строго положительная, то решение задачи определено при любых скоростях движения нагрузки из указанного диапазона.

При предельном значении скорости движения силы $v = c_1$ ($M_2 = \eta$, $M_1 = 1$, $\lambda_2^2 = \eta^2 - 1$, $\lambda_1 = 0$, $K_s^{-1} = (\eta^2 - 2)^2$) в сверхзвуковом случае напряжения и нормальные перемещения совпадают с соответствующими значениями, определяемыми формулами (10.137) для трансзвукового случая. Отличаются только касательные перемещения:

$$u_1 = (P/\lambda) H(x_1).$$

Это связано с гиперболическим типом обоих уравнений (10.123) при сверхзвуковой скорости.

Из (10.141) следует, что фронтами $x_1 + \lambda_1 z = 0$ и $x_1 + \lambda_2 z = 0$ волн Маха полуплоскость разбивается на три области, в каждой из которых перемещения постоянны, а на фронтах они имеют разрывы первого рода:

- при $x_1 < -\lambda_2 z$

$$u_1 = u_3 \equiv 0;$$

- при $-\lambda_2 z < x_1 < -\lambda_1 z$

$$u_1 = P \frac{2K_s \lambda_1 \lambda_2}{\mu}, \quad u_3 = -P \frac{2K_s \lambda_1}{\mu};$$

- при $x_1 > -\lambda_1 z$

$$u_1 = -P \frac{K_s}{\mu} (\lambda_2^2 - 1 - 2\lambda_1 \lambda_2), \quad u_3 = -\frac{PK_s \lambda_1}{\mu} M_2^2.$$

Формулы в (10.141) показывают, что на указанных фронтах напряжения имеют сингулярную особенность.

10.18. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим задачи о распространении возмущений в упругом однородном изотропном пространстве, взяв за исходные уравнения движения относительно вектора перемещения $u_k(\vec{x}, t)$:

$$\ddot{u}_k = (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + c_2^2 \Delta u_k + F_k, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad t > 0. \quad (10.142)$$

Здесь точками обозначена операция дифференцирования по времени t ; Δ — оператор Лапласа; c_1 и c_2 — как и ранее, скорости волн расширения-сжатия и сдвига: $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$.

Для замыкания задачи необходимо к системе уравнений (10.142) добавить начальные условия:

$$u_k|_{t=0} = \varphi_k(x_1, x_2, x_3), \quad \dot{u}_k|_{t=0} = \psi_k(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in R^3.$$

Решение приведенных далее модельных задач опирается на использование понятия тензора Грина. В разд. 10.6 приведена общая информация о фундаментальных решениях и тензоре Грина нестационарных процессов. Конкретизируем данные понятия применительно к рассматриваемым здесь задачам. Напомним, что *тензор Грина* $G_{km}(\vec{x}, t)$ (функция влияния) волнового уравнения является решением следующей краевой задачи:

$$\ddot{G}_{km} = (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial \theta_m}{\partial x_k} + c_2^2 \Delta G_{km} + \delta_{km} \delta(t) \delta(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad t > 0,$$

$$G_{km}|_{t=0} = 0, \quad \dot{G}_{km}|_{t=0} = 0.$$

Здесь:

$$G_{km} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{x_k x_m}{c_1 r^2} \delta(c_1 t - r) + \frac{1}{c_2} \left(\delta_{km} - \frac{x_k x_m}{r^2} \right) \delta(c_2 t - r) - \right. \\ \left. - \frac{t}{r^2} \left(\delta_{km} - \frac{3x_k x_m}{r^2} \right) [H(c_1 t - r) - H(c_2 t - r)] \right\}.$$

При известной функции Грина перемещения можно определить на основе следующих интегральных представлений:

$$u_k(\vec{x}, t) = G_{km}(\vec{x}, t) ** F_m(\vec{x}, t) + \dot{G}_{km}(\vec{x}, t) * \varphi_m(\vec{x}) + G_{km}(\vec{x}, t) * \psi_m(\vec{x}), \quad (10.143)$$

Здесь знак «*» обозначает операцию свертки функций.

В (10.143) свертка в первом слагаемом вычисляется как по пространственным координатам, так и по времени, а в остальных — только по пространственным координатам.

Деформации G_{klm}^ε и коэффициент объемного расширения θ_m , соответствующие функции влияния G_{km} , определяются так:

$$G_{klm}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{lm}}{\partial x_k} + \frac{\partial G_{km}}{\partial x_l} \right); \quad \theta_m = G_{11m}^\varepsilon + G_{22m}^\varepsilon + G_{33m}^\varepsilon = \left(\frac{\partial G_{1m}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{2m}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{3m}}{\partial x_3} \right).$$

Следует отметить, что если тензор Грина $G_{km}(\vec{x}, t)$ является симметричным тензором второго ранга, то $G_{klm}^{\varepsilon}(\vec{x}, t)$ – тензор третьего ранга [31, 109].

Представления для напряжений при известных тензорах $G_{km}(\vec{x}, t)$ и $G_{klm}^{\varepsilon}(\vec{x}, t)$ имеют вид:

$$\sigma_{kl}(\vec{x}, t) = G_{klm}^{\sigma}(\vec{x}, t) ** F_m(\vec{x}, t) + \dot{G}_{lkm}^{\sigma}(\vec{x}, t) * \varphi_m(\vec{x}) + G_{klm}^{\sigma}(\vec{x}, t) * \psi_m(\vec{x}), \quad (10.144)$$

где $G_{klm}^{\sigma}(\vec{x}, t)$ – функции влияния для напряжений, являющиеся компонентами тензора третьего ранга, которые определяются следующим образом:

$$G_{klm}^{\sigma}(\vec{x}, t) = \lambda \theta_m \delta_{kl} + 2\mu G_{klm}^{\varepsilon}. \quad (10.145)$$

Выполнив процедуру получения функций влияния G_{klm}^{ε} , получим

$$\begin{aligned} G_{klm}^{\varepsilon} = & -\frac{1}{4\pi^2 r} \left\{ \frac{x_k x_l x_m}{c_1 r^2} \delta'(c_1 t - r) - \frac{1}{c_1 r} \left(x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km} + x_m \delta_{kl} - \frac{6x_k x_l x_m}{r^2} \right) \times \right. \\ & \times \delta(c_1 t - r) + \frac{1}{c_2} \left(\frac{x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km}}{2} - \frac{x_k x_l x_m}{r^2} \right) \delta'(c_2 t - r) + \frac{1}{c_2 r} \left(3 \frac{x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km}}{2} + \right. \\ & \left. + x_m \delta_{kl} - \frac{6x_k x_l x_m}{r^2} \right) \delta(c_2 t - r) - \frac{3t}{r^3} \left(x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km} + x_m \delta_{kl} - \right. \\ & \left. - \frac{5x_k x_l x_m}{r^2} \right) \left[H(c_1 t - r) - H(c_2 t - r) \right] \Big\}. \end{aligned} \quad (10.146)$$

Функции влияния для напряжений $G_{klm}^{\sigma}(\vec{x}, t)$ определяются простой подстановкой равенств (10.146) в (10.145).

На основании приведенных формул построим несколько конкретных видов функций влияния.

Пример 1. Найти перемещения в упругом пространстве под действием внешних сил вида: $F_1 = \delta(t)\delta(x_1)$, $F_2 = F_3 \equiv 0$, при нулевых начальных условиях.

Перемещения в этом случае определяются так:

$$u_k(\vec{x}, t) = G_{kl}(\vec{x}, t) ** \delta(t)\delta(x_1) = \iint_{R^2} G_{kl}(\vec{x}, t) dx_2 dx_3. \quad (10.147)$$

Соответствующие функции влияния для перемещений:

$$\begin{aligned} G_{11} = & \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{x_1^2}{c_1 r^2} \delta(c_1 t - r) + \frac{1}{c_2} \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2} \right) \delta(c_2 t - r) - \frac{t}{r^2} \left(1 - \frac{3x_1^2}{r^2} \right) \left[H(c_1 t - r) - H(c_2 t - r) \right] \right\}; \\ G_{k1} = & \frac{x_1 x_k}{4\pi r^3} \left\{ \frac{1}{c_1} \delta(c_1 t - r) - \frac{1}{c_2} \delta(c_2 t - r) + \right. \\ & \left. + \frac{3t}{r^2} \left[H(c_1 t - r) - H(c_2 t - r) \right] \right\}, \quad (k=2, 3). \end{aligned} \quad (10.148)$$

Так как при $k=2, 3$ функции G_{k1} являются нечетными по координате x_k , то соответствующие интегралы в (10.147) равны нулю и поэтому при данном виде возму-

щения $u_2 = u_3 \equiv 0$. Выражения для перемещений u_1 на основании (10.147) и (10.148) приобретают вид

$$u_1 = \iint_{R^2} G_{11} dx_2 dx_3 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{x_1^2}{c_1} J_3(x_1, c_1 t) + \frac{1}{c_2} [J_1(x_1, c_2 t) - x_1^2 J_3(x_1, c_2 t)] - \right. \\ \left. - t [I_3(x_1, c_1 t) - I_3(x_1, c_2 t) - 3x_1^2 (I_5(x_1, c_1 t) - I_5(x_1, c_2 t))] \right\}, \quad (10.149)$$

где

$$J_l(x_1, t) = \iint_{R^2} \frac{1}{r^l} \delta(t-r) dx_2 dx_3, \quad I_l(x_1, t) = \iint_{R_2} \frac{1}{r^l} H(t-r) dx_2 dx_3. \quad (10.150)$$

Вычислять интегралы в (10.150) удобно в полярных координатах ξ и α : $x_2 = \xi \cos \alpha$, $x_3 = \xi \sin \alpha$, где $\xi = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \geq 0$, $-\pi < \alpha \leq \pi$. При этом учтем, что уравнение $f(\xi) = t - r = 0$ и неравенство $f(\xi) \geq 0$ имеют решения $\xi = \xi_0 = \sqrt{t^2 - x_1^2}$ и $\xi \leq \xi_0$ только при $t \geq |x_1|$. Кроме того, согласно свойствам дельта-функции Дирака

$$\delta(t-r) = \frac{1}{|f'(\xi_0)|} \delta(\xi - \xi_0) = \frac{r}{\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \delta(\xi - \xi_0) = \frac{t}{\xi_0} \delta(\xi - \xi_0), \quad r|_{\xi=\xi_0} = t.$$

Тогда, интегралы J_1 и J_3 в (10.150) равны:

$$J_1(x_1, t) = H(t - |x_1|) 2\pi \frac{t}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} \frac{\xi}{r} \delta(\xi - \xi_0) d\xi = 2\pi H(t - |x_1|), \\ J_3(x_1, t) = H(t - |x_1|) 2\pi \frac{t}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} \frac{\xi}{r^3} \delta(\xi - \xi_0) d\xi = \frac{2\pi}{t^2} H(t - |x_1|). \quad (10.151)$$

Интегралы I_3 и I_5 вычисляются с учетом носителей подинтегральных функций и с помощью замены переменной интегрирования $y = \xi^2$:

$$I_3(x_1, t) = H(t - |x_1|) 2\pi \int_0^{\xi_0} \frac{\xi}{r^3} d\xi = \pi H(t - |x_1|) \int_0^{\xi_0^2} \frac{dy}{(y + x_1^2)^{3/2}} = 2\pi \frac{(t - |x_1|)}{t|x_1|} H(t - |x_1|), \\ I_5(x_1, t) = H(t - |x_1|) 2\pi \int_0^{\xi_0} \frac{\xi}{r^5} d\xi = \\ = \pi H(t - |x_1|) \int_0^{\xi_0^2} \frac{dy}{(y + x_1^2)^{5/2}} = 2\pi \frac{(t^3 - |x_1|^3)}{3t^3|x_1|^3} H(t - |x_1|). \quad (10.152)$$

Подставляя (10.151) и (10.152) в (10.149), окончательно получаем

$$u_1(\bar{x}, t) = u_1(x_1, t) = \frac{1}{2c_1} H(c_1 t - |x_1|).$$

Пример 2. Найти перемещения в упругом пространстве под действием внешних сил вида: $F_k = \delta(t)\delta(x_1, x_2)\delta_{km}$, ($k, m = 1, 2$), $F_3 \equiv 0$, при нулевых начальных условиях. В данном случае перемещения определяются так:

$$u_k(\vec{x}, t) = G_{kl}(\vec{x}, t) ** \delta(t)\delta(x_1, x_2)\delta_{lm} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{km}(\vec{x}, t) dx_3, \quad (10.153)$$

$$u_3(\vec{x}, t) = G_{3l}(\vec{x}, t) ** \delta(t)\delta(x_1, x_2)\delta_{lm} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{3m}(\vec{x}, t) dx_3.$$

Замечание. В этом примере в (10.153) и далее все целочисленные индексы принимают значения 1 и 2.

При $m = 1, 2$ функции G_{3m} являются нечетными по координате x_3 . Поэтому соответствующие интегралы в (10.153) равны нулю и, следовательно, при данном виде возмущения $u_3 \equiv 0$. Для остальных составляющих вектора перемещения получаем

$$u_k = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{x_k x_m}{c_1} K_3(x_1, x_2, c_1 t) + \frac{1}{c_2} [\delta_{km} K_1(x_1, x_2, c_2 t) - \right.$$

$$- x_k x_m K_3(x_1, x_2, c_2 t)] - t [\delta_{km} [L_3(x_1, x_2, c_1 t) - L_3(x_1, x_2, c_2 t)] -$$

$$\left. - 3x_k x_m (L_5(x_1, x_2, c_1 t) - L_5(x_1, x_2, c_2 t)) \right] \Bigg\}, \quad (10.154)$$

где

$$K_l(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^l} \delta(t-r) dx_3, \quad L_l(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^l} H(t-r) dx_3. \quad (10.155)$$

При вычислении интегралов (10.155) учтем, что уравнение $t-r=0$ и неравенство $t-r \geq 0$ имеют решения только при $t \geq r_2$. Эти решения имеют соответственно такой вид: $x_3 = \pm \zeta_0$ и $|x_3| \leq \zeta_0$, где $\zeta_0 = \sqrt{t^2 - r_2^2}$ и $r_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Кроме того, согласно свойствам дельта-функции Дирака, имеем

$$\delta(t-r) = \frac{r}{|x_3|} \Bigg|_{x_3=\pm\zeta_0} [\delta(x_3 + \zeta_0) + \delta(x_3 - \zeta_0)] = \frac{t}{\zeta_0} [\delta(x_3 + \zeta_0) + \delta(x_3 - \zeta_0)], \quad r|_{x_3=\pm\zeta_0} = t.$$

Тогда для интегралов K_1 и K_3 в (10.155) с учетом четности подинтегральной функции получаем

$$K_1(x_1, x_2, t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \delta(t-r) dx_3 = 2H(t-r_2) \frac{t}{\zeta_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \delta(x_3 - \zeta_0) dx_3 = 2(t^2 - r_2^2)_+^{-1/2},$$

$$K_3(x_1, x_2, t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r^3} \delta(t-r) dx_3 =$$

$$= 2H(t-r_2) \frac{t}{\zeta_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{r^3} \delta(x_3 - \zeta_0) dx_3 = \frac{2}{t^2} (t^2 - r_2^2)_+^{-1/2}. \quad (10.156)$$

Интегралы L_3 и L_5 вычисляются с учетом четности и носителей подынтегральных функций:

$$\begin{aligned}
 L_3(x_1, x_2, t) &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{r^3} H(t-r) dx_3 = 2H(t-r_2) \int_0^{\zeta_0} \frac{dx_3}{(r_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = \\
 &= 2H(t-r_2) \frac{x_3}{r_2^2 \sqrt{r_2^2 + x_3^2}} \Big|_0^{\zeta_0} = \frac{2}{tr_2^2} (t^2 - r_2^2)_+^{1/2}, \\
 L_5(x_1, x_2, t) &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{r^5} H(t-r) dx_3 = 2H(t-r_2) \int_0^{\zeta_0} \frac{dx_3}{(r_2^2 + x_3^2)^{5/2}} = \\
 &= 2H(t-r_2) \frac{x_3(3r_2^2 + x_3^2)}{3r_2^4 (r_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \Big|_0^{\zeta_0} = 2 \frac{r_2^2 + 2t^2}{3t^3 r_2^4} (t^2 - r_2^2)_+^{1/2}, \quad (10.157)
 \end{aligned}$$

Подставляя (10.156) и (10.157) в (10.154), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 u_k = u_k(x_1, x_2, t) &= -\frac{1}{2\pi r_2^2} \left\{ \delta_{km} \left[\frac{1}{c_1} (c_1^2 t^2 - r_2^2)_+^{1/2} - c_2 t^2 (c_2^2 t^2 - r_2^2)_+^{-1/2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x_k x_m}{r_2^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} (2c_j^2 t^2 - r_2^2) (c_j^2 t^2 - r_2^2)_+^{-1/2} \right\}. \quad (10.158)
 \end{aligned}$$

Пример 3. Определить перемещения в упругом пространстве под действием сосредоточенной в начале координат и направленной по оси Ox_1 силы F : $F = \rho f(t) H(t)$ при нулевых начальных условиях.

Расчеты выполняем в безразмерных переменных:

$$x'_i = \frac{x_i}{L}; u'_i = \frac{u_i}{L}; \tau = \frac{c_* t}{L}; \vartheta' = \frac{\vartheta}{T_0}; F'_i = \frac{F_i L}{c_1^2} - \Lambda' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x'_i}; \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu} \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\chi = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1-\nu}; \Lambda' = \frac{\Lambda T_0}{\rho c_1^2}; \gamma_m = \frac{c_*}{c_m} \quad (m = 1, 2); \eta = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \sqrt{\frac{2}{1-\chi}};$$

$$\gamma = \gamma_1; r' = r/L; \varphi' = \varphi/L^2; \Phi'_1 = \Phi_1/L.$$

Здесь u_i , σ_{ij} , F_i , $F_i - \Lambda(\partial\vartheta/\partial x_i)$ — соответственно, компоненты вектора перемещения, тензора напряжений, вектора массовых сил и вектора фиктивных массовых сил; c_m — скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде; λ , μ — параметры Ламе; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность среды; Λ — коэффициент температурного расширения среды; T_0 — температура среды в начальном состоянии; c_* — параметр, имеющий размерность скорости; L — характерный линейный размер; φ и Φ_1 — соответственно скалярные потенциалы вектора перемещений и массовых сил.

Принимаем, что $f(t) = f_0 = \text{const}$; $f'_0 = f/(c_1^2 L) = 1$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1,871$.

Для рассматриваемого случая координаты объемной силы имеют вид

$$F_1 = f_+(t)\delta(\vec{x}), \quad F_2 = F_3 \equiv 0; \quad f_+(t) = f(t)H(t).$$

Выражение для компонент вектора перемещений с учетом условий задачи приобретают такой вид:

$$u_k(\vec{x}, t) = G_{k1}(\vec{x}, t) ** f_+(t)\delta(x_1, x_2, x_3) = G_{k1}(\vec{x}, t) * f_+(t).$$

Подставив сюда функции влияния G_{k1} из (10.148), придем к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{x_1^2}{c_1^2 r^2} f_+ \left(t - \frac{r}{c_1} \right) + \frac{1}{c_2^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2} \right) f_+ \left(t - \frac{r}{c_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{3x_1^2}{r^2} \right) \sum_{j=1}^2 (-1)^j f^{(2)} \left(t - \frac{r}{c_j} \right) \right]; \\ u_k(x_1, x_2, x_3, t) &= -\frac{x_1 x_k}{4\pi r^3} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\frac{1}{c_j^2} f_+ \left(t - \frac{r}{c_j} \right) + \frac{3}{r^2} f^{(2)} \left(t - \frac{r}{c_j} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$f^{(2)}(t) = t_+ * f_+(t) = \int_0^t (t-\tau) H(t-\tau) f(\tau) d\tau = H(t) \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (10.159)$$

Определенная формулой (10.159) функция $f^{(2)}(t)$ является первообразной функции $f_+(t)$.

Из (10.159) для заданной в условиях примера функции $f(t)$ получаем

$$f^{(2)}(t) = f_0 H(t) \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{f_0}{2} t_+^2.$$

10.19. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУШЕНИЙ В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

В соответствии с постановкой исходной задачи в рассматриваемом случае

$$u_k = u_k(x_1, x_2, t), \quad u_3 \equiv 0, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} \equiv 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} \equiv 0; \quad \sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Уравнения движения записываются так:

$$\ddot{u}_k = (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + c_2^2 \Delta u_k + F_k(x_1, x_2, t), \quad \vec{x} = (x_1, x_2) \in R^2, \quad t > 0. \quad (10.160)$$

Для построения разрешающей системы уравнений к уравнениям (10.160) необходимо добавить начальные условия:

$$u_k|_{t=0} = \varphi_k(x_1, x_2), \quad \dot{u}_k|_{t=0} = \psi_k(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in R^2.$$

Интегральные представления для перемещений и напряжений имеют вид, аналогичный соответственно (10.143) и (10.144).

Функции влияния $G_{km}(x_1, x_2, t)$ для двухмерных задач фактически были построены в рассмотренном ранее примере 2 – выражение (10.158):

$$G_{km} = -\frac{1}{2\pi r^2} \left\{ \delta_{km} \left[\frac{1}{c_1} (c_1^2 t^2 - r^2)_+^{1/2} - c_2 t^2 (c_2^2 t^2 - r^2)_+^{-1/2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{x_k x_m}{r^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} (2c_j^2 t^2 - r^2) (c_j^2 t^2 - r^2)_+^{-1/2} \right\}, \\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (10.161)$$

Пример 4. Определить перемещения в упругой плоскости под действием сосредоточенной в начале координат и направленной по оси Ox_1 силы F , равной: $F = \rho f(t) H(t)$ при нулевых начальных условиях.

Расчеты выполняем в безразмерных переменных и принимаем, что $f(t) = f_0 = \text{const}$; $f'_0 = f/(c_1^2 L) = 1$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1,871$.

Для рассматриваемого случая координаты объемной силы имеют вид

$$F_1 = f_+(t) \delta(x_1, x_2), \quad F_2 \equiv 0; \quad f_+(t) = f(t) H(t).$$

Выражение для компонент вектора перемещений с учетом условий задачи приобретают такой вид:

$$u_k(x_1, x_2, t) = G_{k1}(x_1, x_2, t) * f_+(t) \delta(x_1, x_2) = G_{k1}(x_1, x_2, t) * f_+(t). \quad (10.162)$$

Функции влияния G_{k1} находим из (10.161):

$$G_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{2\pi r^2} \left\{ \left[\frac{1}{c_1} (c_1^2 t^2 - r^2)_+^{1/2} - c_2 t^2 (c_2^2 t^2 - r^2)_+^{-1/2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{x_\alpha^2}{r^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} (2c_j^2 t^2 - r^2) (c_j^2 t^2 - r^2)_+^{-1/2} \right\}; \\ G_{12} = -\frac{x_1 x_2}{2\pi r^4} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} (2c_j^2 t^2 - r^2) (c_j^2 t^2 - r^2)_+^{-1/2}.$$

Подставляя данные равенства в (10.162), находим, что перемещения определяются по следующим формулам:

$$u_1(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{c_1 r^2} N_{11}(r, t) - \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{r^2} N_{12}(r, t) + N_{-1,2}(r, t) \right) + \right. \\ \left. + \frac{x_1^2}{r^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} \left(\frac{2}{r^2} N_{1j}(r, t) + N_{-1,j}(r, t) \right) \right];$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = -\frac{x_1 x_2}{2\pi r^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} \left(\frac{2}{r^2} N_{1,j}(r, t) + N_{-1,j}(r, t) \right),$$

где

$$\begin{aligned} N_{-1,j}(r, t) &= \int_0^t \left(c_j^2 \tau^2 - r^2 \right)_+^{-1/2} f(t - \tau) d\tau = H(c_j t - r) \int_{r/c_j}^t \frac{f(t - \tau) d\tau}{\sqrt{c_j^2 \tau^2 - r^2}}, \\ N_{1,j}(r, t) &= \int_0^t \left(c_j^2 \tau^2 - r^2 \right)_+^{-1/2} f(t - \tau) d\tau = \\ &= H(c_j t - r) \int_{r/c_j}^t f(t - \tau) \sqrt{c_j^2 \tau^2 - r^2} d\tau. \end{aligned} \quad (10.164)$$

Для определения перемещений используем операцию свертки, тогда:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= f_0 G_{11}(x_1, x_2, t) * H(t) = \\ &= \frac{f_0}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{c_j} \left[(-1)^j \frac{x_2^2 - x_1^2}{2r^4} t \left(c_j^2 t^2 - r^2 \right)_+^{1/2} + \frac{1}{2c_j} \ln \left(\left(c_j t + \sqrt{c_j^2 t^2 - r^2} \right) / r \right) H(c_j t - r) \right], \\ u_2(x_1, x_2, t) &= f_0 G_{21}(x_1, x_2, t) * H(t) = \frac{f_0 x_1 x_2}{2\pi r^4} t_+ \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} \left(c_j^2 t^2 - r^2 \right)_+^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.165)$$

Замечание. Построить формулы (10.165) самостоятельно.

10.20. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОБЪЕМНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим задачу о распространении равномерно распределенных по плоскости $x_1 = 0$ граничных возмущений в полупространстве $x_1 \geq 0$, представляющем собой упругую однородную изотропную среду.

Замечание. Если волновой процесс соответствует случаю, когда $\vec{u} = \vec{u}(x_i, t)$, то говорят о плоских волнах, распространяющихся в направлении $\vec{e}_i$.

Соответствующая начально-краевая задача включает в себя:

- уравнениями движения упругой среды

$$\gamma_\alpha^2 \ddot{u}_\alpha = u_{\alpha,11} + \eta_\alpha F_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

- начальные условия

$$u_\alpha|_{\tau=0} = \varphi_\alpha(x_1), \quad \dot{u}_\alpha|_{\tau=0} = \psi_\alpha(x_1),$$

- граничные условия

$$(\alpha u + \beta u_{,x})|_{x=0} = q(\tau).$$

Замечание. Можно показать [96], что все типы граничных условий МДГТ можно записать в одном общем виде:

$$\left(\alpha_0 u_i + \beta_0 u_{i,x}\right)\Big|_{x=0} = q_{0i}(\tau), \left(\alpha_1 \dot{u}_j + \beta_1 u_{j,x}\right)\Big|_{x=0} = q_{1j}(\tau), \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j),$$

где $\alpha_k, \beta_k \in R; k = 0, 1; \sum_{l=0}^1 \alpha_k^2 \neq 0, \sum_{l=0}^1 \beta_k^2 \neq 0$.

Так, если $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 0, \beta_1 = \gamma_j^2$, а функции $q_{0i}(\tau) = u_{0i}(\tau), q_{1j}(\tau) = p_{0j}(\tau)$, то в этом случае имеют место смешанные граничные условия:

$$(u_i)\Big|_{x=0} = u_{0i}(\tau), (\sigma_{1j})\Big|_{x=0} = p_{0j}(\tau) \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j).$$

Так как компоненты вектора перемещения в рассматриваемом случае являются независимыми [96], то достаточным является построить решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \ddot{u} &= u_{,11} + F, \quad u\Big|_{\tau=0} = \varphi(x), \quad \dot{u}\Big|_{\tau=0} = \psi(x), \\ (\alpha u + \beta u_{,x})\Big|_{x=0} &= 0, \quad u(x, \tau) = O(1), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Замечание. Компоненты вектора перемещений являются независимыми, если они могут быть найдены независимо друг от друга и не связаны между собой через граничные условия.

Воспользовавшись определением фундаментальных решений, перемещения и напряжения для сформулированной задачи могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_0^\infty G(x, \tau; \xi) * F(\xi, \tau) d\xi + \\ &+ \gamma^2 \left[\int_0^\infty \dot{G}(x, \tau; \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^\infty G(x, \tau; \xi) \psi(\xi) d\xi \right]; \end{aligned} \quad (10.166)$$

$$\sigma(x, \tau) = \int_0^\infty G_\sigma(x, \tau; \xi) * F(\xi, \tau) d\xi + \gamma^2 \left[\int_0^\infty \dot{G}_\sigma(x, \tau; \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^\infty G_\sigma(x, \tau; \xi) \psi(\xi) d\xi \right];$$

Здесь $G(x, \tau; \xi)$ и $G_\sigma(x, \tau; \xi)$ — объемные функции влияния.

Первая из этих функций является решением задачи

$$\begin{aligned} \gamma^2 \ddot{G} &= G_{,xx} + \delta(\tau) \delta(x - \xi), \quad G\Big|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{G}\Big|_{\tau=0} = 0, \\ (\alpha G + \beta G_{,x})\Big|_{x=0} &= 0, \quad G = O(1), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (10.167)$$

а вторая функция выписывается на основании соотношения, определяющего напряжения через перемещения [96]:

$$G_\sigma(x, \tau; \xi) = G_{,x}(x, \tau; \xi) / \eta_\alpha.$$

Применяя к задаче (10.167) преобразование Лапласа по времени τ и решив краевую задачу относительно изображений $G^L(x, s; \xi)$, получаются следующие формулы для изображений функций влияния:

$$G^L(x, s; \xi) = \frac{1}{2s\gamma} \left\{ \exp(\gamma s(x - \xi)) - \frac{\alpha + \beta\gamma s}{\alpha - \beta\gamma s} \exp(-\gamma s(x + \xi)) - 2 \operatorname{sh}[\gamma s(x - \xi)] H(x - \xi) \right\},$$

$$G_\sigma^L(x, s; \xi) = \frac{1}{2\eta_\alpha} \left\{ \exp(\gamma s(x - \xi)) + \frac{\alpha + \beta\gamma s}{\alpha - \beta\gamma s} \exp(-\gamma s(x + \xi)) - 2 \operatorname{ch}[\gamma s(x - \xi)] H(x - \xi) \right\}.$$

Оригиналы этих функций достаточно просто определяются с помощью свойств преобразования Лапласа. В [96] показано, что удобнее это делать для каждого конкретного случая граничных условий на поверхности $x = 0$.

Пример 5. Определить НДС упругого полупространства, у которого в начальный момент времени перемещения равны $\varphi(x) = xe^{-x/3}$, а скорости равны нулю. Граница полупространства неподвижна, массовые силы отсутствуют. В расчетах положить $\gamma = \eta_\alpha = 1$.

Для этой задачи формулы для компонент НДС (10.166) имеют вид:

$$u(x, \tau) = \int_0^\infty \dot{G}(x, \tau; \xi) \varphi(\xi) d\xi; \quad (10.168)$$

$$\sigma(x, \tau) = \int_0^\infty \dot{G}_\sigma(x, \tau; \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (10.169)$$

Производные по времени от функций влияния находятся дифференцированием функций влияния следующего вида [96]:

$$G(x, \tau; \xi) = \frac{1}{2\gamma} \left\{ H[\tau + \gamma(x - \xi)] - H[\tau - \gamma(x + \xi)] - \right. \\ \left. - H(x - \xi) (H[\tau + \gamma(x - \xi)] - H[\tau - \gamma(x - \xi)]) \right\},$$

$$G_\alpha(x, \tau; \xi) = \frac{1}{2\gamma\eta_\alpha} \left\{ \delta[\tau + \gamma(x - \xi)] + \delta[\tau - \gamma(x + \xi)] - \right. \\ \left. - H(x - \xi) (\delta[\tau + \gamma(x - \xi)] + \delta[\tau - \gamma(x - \xi)]) \right\}.$$

Тогда:

$$\dot{G}(x, \tau; \xi) = \frac{1}{2} \left\{ \delta[\tau + \gamma(x - \xi)] - \delta[\tau - \gamma(x + \xi)] - \right. \\ \left. - H(x - \xi) (\delta[\tau + \gamma(x - \xi)] - \delta[\tau - \gamma(x - \xi)]) \right\},$$

$$\dot{G}_\alpha(x, \tau; \xi) = \frac{1}{2\gamma\eta_\alpha} \left\{ \delta'[\tau + \gamma(x - \xi)] + \delta'[\tau - \gamma(x + \xi)] - \right. \\ \left. - H(x - \xi) (\delta'[\tau + \gamma(x - \xi)] + \delta'[\tau - \gamma(x - \xi)]) \right\}.$$

Подставляя данные функции в (10.168) и (10.169) и учитывая их носители и начальные условия задачи, можно определить перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2} \left\{ (\tau + x) \exp(-(\tau + x)/3) H(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + [(x - \tau)_+ \exp(-(x - \tau)/3) - (\tau - x)_+ \exp(-(\tau - x)/3)] \right\}, \\ \sigma(x, \tau) &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\tau + x}{3}\right) \exp(-(\tau + x)/3) H(\tau) + \left(1 - \frac{\tau - x}{3}\right) \exp(-(\tau - x)/3) H(\tau - x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{x - \tau}{3}\right) \exp(-(x - \tau)/3) H(x - \tau) \right\}. \end{aligned}$$

10.21. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГОГО СЛОЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим модельную задачу, состоящую в изучении НДС упругого тонкого слоя, находящегося на упругой полуплоскости. На верхней границе слоя действует нормальная однородная распределенная нагрузка, а нижняя граница находится в полном контакте с полуплоскостью (поэтому можно принять, что она является закрепленной). Математическая постановка сформулированной модельной задачи выглядит следующим образом [96]:

$$\gamma^2 \ddot{u} = u_{,xx}, \quad u|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \sigma|_{x=1} = -p(\tau).$$

Здесь u , σ — соответственно вертикальные перемещения и напряжение.

Решение задачи с граничными условиями в более общей постановке

$$(\alpha_0 u + \beta_0 \sigma)|_{x=0} = q_0(\tau), \quad (\alpha_0 u + \beta_0 \sigma)|_{x=1} = q_1(\tau)$$

может быть представлено в таком виде [96]:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^{N_{ij}(x, \tau)} q_j(\tau - k_{ijn}(x)) H[\tau - k_{ijn}(x)] * R_{ijn}(\tau), \\ \sigma(x, \tau) &= \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^{N_{ij}(x, \tau)} q_j(\tau - k_{ijn}(x)) H[\tau - k_{ijn}(x)] * \dot{R}_{ijn}(\tau). \end{aligned} \quad (10.170)$$

Здесь изображения по Лапласу функций $R_{ijn}(\tau)$ имеют следующие выражения:

$$R_{00n}^L(s) = a_{22}(s) R_n(s), \quad R_{01n}^L(s) = -a_{12}(s) R_n(s), \quad R_{10n}^L(s) = -a_{21}(s) R_n(s),$$

$$R_{11n}^L(s) = a_{11}(s) R_n(s), \quad R_n(s) = \frac{R^n(s)}{a_{11}(s) a_{22}(s)}, \quad R(s) = \frac{a_{12}(s) a_{21}(s)}{a_{11}(s) a_{22}(s)},$$

$$(a_{ij}(s))_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \beta_0 s \gamma & \alpha_0 - \beta_0 s \\ \alpha_1 - \beta_1 s \gamma & \alpha_1 - \beta_1 s \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
k_{00n}(x) &= 2n + x, \quad k_{10n}(x) = 2n + 2 - x, \quad k_{01n}(x) = 2n + 1 + x, \quad k_{11n}(x) = 2n + 1 - x, \\
N_{00}(x, \tau) &= (\tau - x)/2, \quad N_{10}(x, \tau) = (\tau + x - 2)/2, \\
N_{01}(x, \tau) &= (\tau - x - 1)/2, \quad N_{11}(x, \tau) = (\tau + x - 1)/2.
\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае имеем:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad q_0(\tau) = 0, \quad q_1(\tau) = -p(\tau), \\
a_{11}(s) &= a_{12}(s) = 1, \quad -a_{21}(s) = a_{12}(s) = s, \\
R(s) &= -1, \quad R_{11n}^L(s) = -R_{01n}^L(s) = (-1)^n / s.
\end{aligned}$$

Тогда $R_{11n}(s) = -R_{01n}(s) = (-1)^n H(\tau)$ и формула (10.170) приобретает вид

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^{N_{i1}(x, \tau)} (-1)^{n+i} H[\tau - k_{i1n}(x)] \int_0^{\tau - k_{i1n}(x)} p[\tau - k_{i1n}(x) - t] dt, \\
\sigma(x, \tau) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^{N_{i1}(x, \tau)} (-1)^{n+i} H[\tau - k_{i1n}(x)] p[\tau - k_{i1n}(x)]. \quad (10.171)
\end{aligned}$$

В (10.170) и (10.171) H — функция Хевисайда.

Рассмотрим действие на слой серии импульсной нагрузки вида

$$p(\tau) = \sum_{k=0}^N T(\tau - k\Delta), \quad (10.172)$$

где Δ — промежутки времени, через которые действует нагрузка, $T(\tau) = \tau H(\tau) - 2(\tau - d/2)H(\tau - d/2) + (\tau - d)H(\tau - d)$, d — длительность импульса.

Подставляя выражение (10.172) для нагрузки в формулу для перемещений и напряжений (10.171), с учетом свойств δ -функции получаем

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^{N_{i1}(x, \tau)} \sum_{k=0}^N (-1)^{n+i} \left(H[\tau - k_{i1n}(x) - k\Delta] \left((\tau - k_{i1n}(x) - k\Delta)^2 / 2 \right) - \right. \\
&\quad \left. - H[\tau - k_{i1n}(x) - k\Delta - d/2] \left((\tau - k_{i1n}(x) - k\Delta - d/2)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + H[\tau - k_{i1n}(x) - k\Delta - d] \left((\tau - k_{i1n}(x) - k\Delta - d)^2 / 2 \right) \right); \\
\sigma(x, \tau) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^{N_{i1}(x, \tau)} \sum_{K=0}^N (-1)^{n+i} H[\tau - k_{i1n}(x)] T(\tau - k\Delta).
\end{aligned}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется «волной в твердых деформируемых средах»?
2. Волна «переносит» в твердом теле:
 - 1) энергию;
 - 2) вещество;
 - 3) и то, и другое.

3. Отличие понятий «волна» и «колебания».
4. Основные характеристики волны.
5. Продольные, поперечные поверхностные волны.
6. Плоские волны, сферические волны.
7. Ударные волны.
8. Виды поверхностных волн.
9. Волновое уравнение:

$$1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$$2) \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right];$$

$$3) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

10. Волны напряжений.
11. Полная система разрешающих уравнений динамической теории упругости.
12. Уравнения Ламе динамической теории упругости.
13. Скорости распространения каких волн: $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$?
14. Краевая задача динамической теории упругости в случае граничных условий

в напряжениях.

15. Краевая задача Коши динамической теории упругости.
16. Кинематические условия совместности системы Ламе.
17. Динамические условия совместности системы Ламе.
18. Поверхность разрыва.
19. Принцип виртуальных работ в динамике.
21. Фундаментальные решения (динамические функции Грина).
22. Поверхностные фундаментальные решения (поверхностные функции Грина).
23. Задача Стокса.
24. Оператор Даламбера:

$$1) \square_a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right);$$

$$2) \varphi(t) = \exp(ipt) = \cos(pt) + i \sin(pt);$$

$$3) \sigma_{ij,j}^k - \rho \omega_k^2 u_i^k = 0.$$

25. Собственные колебания упругих тел. Собственные частоты упругого тела.
26. Вынужденные колебания упругих тел.
27. Неравенство Рэлея. Физический смысл неравенства.
28. Первая и вторая теоремы о действии мгновенной нагрузки.
29. Основные черты и особенности распространения плоских волн в неограниченной упругой среде.
30. Основные черты и особенности распространения ударных волн в неограниченных упругих телах.
31. Прогрессивные волны.
32. Волны Рэлея.
33. Волны Лява.
34. Числа Маха.

ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

11.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Как следует из материала, изложенного в предыдущих главах, при решении задач МДТТ один из актуальных вопросов состоит в выборе и/или построении предельных критериев — критериев, в соответствии с которыми рассматриваемый объект МДТТ приходит в предельное состояние.

Справедливость той или иной гипотезы можно подтвердить только путем сопоставления результатов расчета с данными экспериментальных исследований. К сожалению, надежных экспериментальных данных при сложном напряженном состоянии все еще недостаточно, поэтому сегодня установить корректность теорий прочности, учитывающих существенно трехмерный характер НДС деформируемых сред, — сложная задача. Следует учитывать, что идеального совпадения результатов теоретических расчетов с опытными данными быть не может. Это объясняется не только идеализацией свойств материала при создании теории, но и неизбежным разбросом результатов опыта. При экспериментальной проверке теории прочности следует пользоваться лишь такими статистически обработанными данными, которые не вызывают сомнений.

Теория прочности должна иметь четкий физический смысл. Нельзя считать убедительными те приемы при построении теории, которые базируются на абстрактных математических операциях с последующим определением неизвестных параметров — констант материала.

Из большого числа факторов, прямо или косвенно влияющих на закономерности деформирования и величину прочности, важно выбрать определяющие для рассматриваемых процессов. От правильного, физически обоснованного выбора отправных гипотез зависит точность полученных на основе теории расчетных формул.

С точки зрения практического использования *теория прочности должна формулироваться уравнением с минимальным количеством констант материала, определяемых, в свою очередь, из простейших опытов*. Однако вряд ли есть смысл искать инвариантные к виду напряженного состояния функции, содержащие одну константу. Такие функции в лучшем случае могут описать сопротивление лишь тех материалов, которые находятся в состоянии, близком к состояниям идеально пластичного или идеально хрупкого тела. Следует учитывать, что если сопротивление материала считается функцией только напряженного состояния, то основные механические

свойства подавляющего числа реальных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению — сжатию, можно отразить в расчетном уравнении двумя константами.

Следует констатировать такой факт, что большинство теорий прочности не нашло широкого распространения в научной и технической литературе. Это объясняется не только отсутствием экспериментального обоснования того или иного предложения, но и громоздкостью их расчетных уравнений, а также необходимостью опытного определения большого числа констант материала.

Учет сопутствующих факторов, таких как температура, скорость нагружения, градиент напряжений, масштаб и другие, не всегда возможен. Поэтому параметры, отражающие влияние указанных факторов, должны входить в критерий прочности в виде, удобном для их исключения, при отсутствии необходимой информации о влиянии того или иного фактора.

Ряд авторов предлагает подход, основанный на введении в расчетные формулы, вытекающие из различных гипотез прочности, поправочных коэффициентов. Однако эта попытка устранить несоответствие теоретических и опытных данных приводит, как правило, к увеличению числа констант, подлежащих экспериментальному определению. Поэтому данный способ малоэффективен и не получил серьезного развития.

Важным параметром, на который часто ориентируются при выборе теории прочности большого числа материалов, является их остаточная деформация при разрушении. В зависимости от величины этой деформации материалы подразделяются на пластичные и хрупкие. Такое деление условно, поскольку величина остаточной деформации зависит от вида напряженного состояния, при котором производится испытание, от режима испытаний — скорости нагружения, среды, температуры и т. п. Этот вопрос требует специального исследования. Однако всегда следует иметь в виду, что один и тот же материал при одних напряженных состояниях течет, а при других — хрупко разрушается, причем резкого перехода от одного класса напряженных состояний к другим нет. Для напряженных состояний, при которых материал течет, характерно наличие больших сжимающих напряжений, а хрупкое разрушение характерно для широкого класса материалов для нагружений, при которых напряжения положительны (т. е. напряжения растяжения).

Следует отметить: выбор корректных критериев разрушения для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, остается актуальным вопросом механики деформируемых твердых тел.

Современные инженерные методы расчета на прочность основаны преимущественно на макроскопических понятиях и представлениях. Разрушению (в смысле отделения одной части тела от другой) предшествуют сложные микро- и субмикроскопические процессы в материале, характер их протекания зависит от природы и физического состояния деформируемого тела, вида и режима механического нагружения, температурных условий испытания, среды и многих других факторов. Интенсивность этих процессов значительно зависит от уровня соответствующих напряжений, которые можно подразделить на три группы: напряжения первого, второго и третьего рода. Напряжения первого рода уравниваются в объемах одного порядка с объемами тела, напряжения второго рода уравниваются в объемах нескольких кристаллитов, а напряжения третьего рода — в объемах одной или нескольких кристаллических ячеек.

Характеристики механических свойств также подразделяются на макроскопические (1-го рода), микроскопические (2-го рода) и субмикроскопические (3-го рода). Микроскопическое разрушение с увеличением внешней нагрузки переходит в макроскопическое, приводящее к разделению тела на части.

Если рассматривать разрушение как переход из одного состояния (микроуровень) в другое (макроуровень), то *более корректно говорить не о хрупких и вязких телах, а о хрупком и вязком их состоянии*. До сих пор нет решающего подтверждения в пользу тех или иных представлений о физической картине разрушения. Однако наличие и роль пластической деформации в процессе разрушения весьма важно. Так, например, известно, что даже самый хрупкий излом надрезанного образца стали в жидком воздухе при рентгенографическом исследовании обнаруживает заметную остаточную деформацию. Способность материала к пластической деформации зависит от многих факторов, и в первую очередь от вида напряженного состояния, температуры, скорости деформирования и др. Это объясняется сложностью процессов, происходящих при пластическом деформировании.

Большой практический интерес представляет изучение причин значительного расхождения между теоретической прочностью идеальных кристаллов и прочностью реальных тел. Различными методами расчета теоретической прочности кристаллов получены величины, превышающие техническую прочность в 100–1000 раз. Некоторые исследователи объясняют этот факт, во-первых, несовершенством метода расчета прочности, ведь современная теория идеального кристалла не учитывает таких факторов, как последовательность смещения атомов, возможность местной потери устойчивости кристаллической решетки, изменения в процессе деформирования упругих постоянных и т. п., и, во-вторых, наличием в реальном кристалле особого рода дефектов кристаллической решетки — дислокаций, которые при деформировании превращаются в ультрамикроскопические нарушения сплошности.

Принципы механического подхода к изучению внутренних явлений, протекающих в нагруженном материале, наиболее полно выражены в теории трещин, объясняющей низкую прочность реальных тел наличием в материале мельчайших трещин.

Замечание. Начало исследований в области трещин было положено 50 лет назад Инглисом¹, решившим методами теории упругости задачу о равновесии тела с изолированной эллиптической полостью при однородном поле напряжении. Задача о критических напряжениях при однородном плоском напряженном состоянии с учетом молекулярных сил сцепления, действующих у края трещин, впервые была решена Аланом Гриффитсом². Механизм разрушения пластичных материалов при наличии трещин исследован Эгоном Ороуаном³ и Джорджем Ирвином⁴.

¹Инглис Эдвард Чарльз (Charles Edward Inglis, 1875–1952), английский инженер-механик; величайший теоретик инженерии своего времени. В Кембриджском университете существует здание, названное его именем.

²Гриффитс Алан Арнольд (Alan Arnold Griffith, 1893–1963), английский инженер-механик.

³Ороуан Эгон (Egon Orowan, 1902–1989), венгерский/британский/американский физик, механик.

⁴Ирвин Джордж Рэнкин (Irwin George Rankine, 1907–1998), американский ученый в области механики разрушения и сопротивления материалов.

Много сторонников в подходе к построению предельных критериев в рамках статистической теории прочности. Одними из первых изложили идеи о построении статистической теории прочности в своих работах А. П. Александров¹ и С. Н. Журков². В дальнейшем данные идеи были развиты в работах других ученых.

Но, к сожалению, несмотря на существенное развитие теории дислокаций и теории трещин, современные методы, основанные на этих теориях, не позволяют проводить инженерные расчеты. Практически не приемлемы для инженерных расчетов и теории прочности, основанные на статистическом подходе. Оценка несущей способности реальной конструкции расчетным путем пока возможна лишь при использовании той или иной, часто феноменологической теории, основанной на методах механики сплошной среды. Механические теории прочности, как правило, требуют значительно меньше информации о материале, чем микроскопические или атомические теории, и формулируются критериями, удобными для практического применения.

11.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ

Как уже указывалось, при расчете предельного состояния материала в условиях произвольной системы напряжений используются критерии, основанные на той или иной теории прочности.

Проблема *рационального выбора критерия прочности (предельного состояния)* с математической точки зрения сводится к определению некоторой функции $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, величина которой не зависит от соотношения главных напряжений, если их значения соответствуют разрушению или заданному допуску на остаточную деформацию. Так, если речь идет о состоянии разрушения, то если значения аргументов, входящих в функцию F , таковы, что не выполняется условие вида

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) \leq K, \quad (11.1)$$

то говорят об *условии разрушения*.

Замечание. В зависимости от величины, с которой сопоставляется эквивалентное напряжение, термин «условие прочности» может иметь смысл условия пластичности, условия разрушения, условия, соответствующего заданному допуску на деформацию или заданному коэффициенту запаса по отношению к пределу пластичности или пределу прочности и др.

В условии (11.1) величина K — критерий прочности — обычно имеет определенную физическую интерпретацию: максимальное нормальное или касательное напряжение, максимальное удлинение, энергия формоизменения и т. д. Иногда критерий прочности не имеет прямого физического смысла.

Константы материала m_i определяются главным образом по результатам испытаний при простейших нагружениях путем совместного решения уравнений, выписанных в виде (11.1), применительно к каждому из проведенных испытаний. Число констант, подлежащих определению, для большинства гипотез не превышает трех.

¹ Александров Анатолий Петрович (1903–1994), советский физик, академик АН СССР. Трижды Герой Социалистического Труда. Президент Академии наук СССР в 1975–1986 гг.

² Журков Серафим Николаевич (1905–1997), советский физик, академик АН СССР. Герой Социалистического Труда.

В случае необходимости определения трех констант, испытания материалов проводятся при одноосном растяжении, одноосном сжатии и кручении. Для этих видов нагружений условие (11.1) записывается следующим образом:

$$F_1(\sigma_{ext}, m_i) \leq K_1; F_1(\sigma_{press}, m_i) \leq K_2; F_1(\tau_{tor}, m_i) \leq K_3. \quad (11.2)$$

Система уравнений (11.2) позволяет исходные константы представить в виде функций пределов прочности при соответствующих нагружениях.

Прочность материала можно оценить также параметрами, характеризующими деформированное состояние. Нельзя забывать, что если в упругой области эти параметры являются однозначными функциями компонент тензора напряжений, то в неупругой области они зависят не только от конечного напряженного состояния, но и от пути нагружения.

Условие (11.1) в предельном случае переходит в уравнение, которое в трехмерном пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ интерпретируется поверхностью, ограничивающей область безопасных напряженных состояний и называемой *предельной поверхностью (ПП)*.

Эту поверхность в зависимости от рассматриваемого условия (11.1), называют *предельной поверхностью текучести (ППТ)* или *предельной поверхностью разрушения (ППР)*. Таким образом, каждое условие прочности имеет определенную геометрическую интерпретацию, зависящую от вида соответствующей предельной поверхности. В отдельные группы выделяют теории, критерии прочности которых представляются сингулярными поверхностями, и теории, имеющие регулярные (гладкие) поверхности.

Следует отметить, что для описания прочности большого класса материалов (породные массивы, грунты и др.) недостаточно только предельных соотношений между главными напряжениями. Необходимо дополнить эти соотношения указанием на величину предельных деформаций (деформаций, при которых несущая способность объекта будет исчерпана). Предельные деформации несут в себе информацию о процессе деформирования. Проверка на критические состояния по величине напряжений еще недостаточна для оценки несущей способности многих объектов МДТТ: напряжения практически не связаны однозначно с соответствующими деформациями (такая связь характерна только в рамках линейной теории упругости). Деформации (в том числе и остаточные) существенно зависят от истории нагружения или деформирования. Если нагружение ведется по заданной программе нагружения (а не деформирования), параметр, характеризующий разрушение, остается скрытым. *Для оценки разрушения определенных классов объектов необходимо учитывать вид деформированного состояния.* В этом случае предельные (деформации) являются одним из физически корректных критериев разрушения объекта.

Структура критерия разрушения как функции предельных деформаций может иметь вид

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_i^*, \quad \varepsilon_i^* = \alpha_i - \beta_i E.$$

Здесь ε_i^* — предельные деформации при определенном типе деформационных процессов (объемном, одноосном сжатии, поперечном изгибе и др.).

Предельная поверхность разрушения является геометрическим местом точек, координаты которых равны пределам прочности, а точки, лежащие на предельной по-

верхности, соответствуют пределам прочности/опасного состояния материала при разных напряженных состояниях. Если одно из главных напряжений равно нулю, то предельное состояние будет описываться плоской кривой, которая в этом случае называется предельной кривой разрушения или предельной кривой опасного состояния.

Кроме напряженного состояния на прочность материала оказывают влияние температура, градиенты напряжений, масштабный фактор и т. п. Поэтому поверхности равной прочности следовало бы строить в пространстве с максимальным количеством измерений. Однако выдвинутые гипотезы позволяют составить уравнения предельной поверхности лишь в трехмерном пространстве напряжений.

В работе [100] показано, что предельной поверхности разрушения, вообще говоря, в общем случае произвольных путей нагружения не существует. Множество предельных точек разрушения образует в пространстве параметров нагружения не поверхность, а некоторый объем (континуум) разрушения. Разрушение в заданной точке континуума разрушения может как произойти, так и не произойти — в зависимости от пути нагружения, а не только при определенной комбинации параметров нагружения. Причем допущения, принятые в классических критериях прочности, оправданны и корректны лишь с точки зрения определенного континуума разрушения, а именно если множество путей нагружения таково, что континуум разрушения представляет собой достаточно тонкий слой или вырождается в поверхность. В этом случае можно говорить о понятии поверхности разрушения как о частном случае данного множества путей нагружения. Например, в большинстве случаев активного нагружения тел без дефектов континуум разрушения может вырождаться в поверхность. Но в общем случае разрушения материалов с дефектами такой вывод нельзя считать обоснованным. Например, так как геометрия развития трещин зависит от пути нагружения, то маловероятно, что континуум разрушения в общем случае вырождается в ППР даже при активном нагружении.

Замечание. Практически каждая из классических теорий прочности описывает какой-либо один частный вид поведения материала при определенном виде напряженно-деформированного состояния. В то же время в реальных условиях тело обычно находится в сложном напряженно-деформированном состоянии. Более того, при различных условиях деформирования многие материалы могут проявлять различные свойства (упругость, пластичность, хрупкость).

Кроме указанного противоречия классические теории прочности, использующие понятие предельной поверхности, не отвечают на ряд еще достаточно важных для механики вопросов, таких как:

- о времени разрушения в условиях длительного нагружения;
- масштабах и типе разрушения после достижения телом предельного состояния;
- влиянии макродефектов на процесс разрушения.

Важное заключение сформулировано в [100] относительно *постулата о выпуклости ППР* (постулат Друкера [101]). Практически все критерии прочности требуют выпуклости ППР, хотя данное требование и подвергается сомнению [102]. Из существования континуума разрушения следует, что ППР может быть и вогнутой с любым радиусом кривизны. Такой вывод следует из того, что любая геометрическая поверхность (выпуклая, вогнутая или плоская), расположенная в континууме разрушения,

надлежащим образом подобранном множестве путей нагружения может быть поверхностью разрушения. Таким образом, перенос постулата Друкера из теории пластичности на теорию прочности не имеет оснований и может привести к ошибке.

Предельные поверхности главным образом строятся в пространстве главных напряжений (реже в пространстве главных деформаций), которая разделяет зоны опасного и безопасного состояний рассматриваемого тела. Общее математическое представление ППР, на основании (11.1), может быть выражено, например, следующим образом:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K_*.$$

В прикладных инженерных исследованиях и расчетах понятие ППР получило широкое распространение. В своем большинстве в различных подходах ППР строится либо на базе выполнения экспериментальных работ, либо путем формально-геометрических построений, или введением различных предположений физического характера.

В соответствии с выбором того либо иного критерия топология предельной поверхности изменяется. Следует подчеркнуть, что практически во всех критериях подразумевается простое (пропорциональное) нагружение. Формулировка критерия разрушения при сложном нагружении требует использования функционалов (по времени или/и параметрам нагружения). При этом, естественно, фиксированной предельной поверхности не будет.

В настоящее время при выдвижении новых гипотез и построении теорий прочности наиболее распространен феноменологический подход. Данное обстоятельство обусловлено тем, что идеи, положенные в основу той или иной теории прочности, должны иметь определенный физический смысл. Однако разработку теории существенно сдерживает отсутствие необходимого экспериментального и теоретического материала об исследуемом механизме деформирования.

Рассмотрим некоторые характерные теории, которые собраны в группы по формам предельных поверхностей разрушения. Очевидно, что невозможно рассмотреть все предложенные теории прочности.

11.3. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ КОТОРЫХ – МНОГОГРАННИКИ

Критерий наибольших нормальных напряжений является, наверное, одной из первых, и наиболее простой теорией прочности (свое начало ведет еще от Галлилея и Лейбница¹). Согласно этому критерию опасное состояние некоторого объема твердого деформируемого тела, подверженного нагружению, наступает тогда, когда одно из главных нормальных напряжений превысит или станет равным пределу прочности (или пределу текучести) материала, составляющему деформируемое тело. Критерий в терминах главных напряжений может быть записан в следующем виде:

¹ Лейбниц Готфрид Вильгельм (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716), немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской академии наук.

$$\begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_{ext}, \sigma_1 > 0; \\ \sigma_3 \leq \sigma_{press}, \sigma_3 \leq 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

при условии $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, где σ_{ext} — предельное напряжение на растяжение (положительное значение); σ_{press} — предельное напряжение на сжатие (отрицательное значение), где в качестве предела на сжатие могут выступать предел текучести или допускаемое напряжение.

В качестве предельных величин могут быть взяты пределы прочности на одноосное, двухосное или объемное напряженные состояния. Чаще всего используется предельная величина на одноосное напряженное состояние. В качестве предела прочности на сжатие может выступать предел пластичности (текучести).

Замечание. Напоминаем, что здесь, как это принято в классической литературе по МДТТ, растягивающие напряжения считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.

Вначале теория наибольших нормальных напряжений была выписана для положительных напряжений. Позже Уильям Ренкин¹ предложил добавить аналогичные условия для поля отрицательных напряжений. Под его именем теория была распространена в англо-американской литературе.

При построении ППР критерий наибольших нормальных напряжений может быть представлен в виде:

$$|\sigma_i| = \sigma_*, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11.4)$$

Соотношения (11.4) определяет в пространстве напряжений шесть плоскостей, параллельных координатным осям. Пересекаясь, эти плоскости образуют куб со стороной $2\sigma_*$, на поверхности которого лежат точки, соответствующие предельным состояниям материала.

К сожалению, данная теория плохо соответствует данным испытаний многих реальных материалов. Так, например, она не объясняет практически неограниченную прочность при высоких гидростатических давлениях.

В основе *критерия наибольших линейных деформаций* лежит гипотеза Мариотта, в которой предполагается, что прочность нарушается в том случае, если наибольшая по абсолютной величине относительная линейная деформация превысит некоторое предельное значение, не зависящее от вида напряженного состояния.

Так как наибольшая по абсолютной величине линейная деформация возникает в направлении либо максимального σ_1 , или минимального σ_3 главных напряжений, то условие наступления предельного состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{ext}, \\ \varepsilon_{\min} = \varepsilon_3 \leq \varepsilon_{press}, \end{cases} \quad (11.5)$$

где ε_{ext} — предельная деформация на растяжение (положительное значение); ε_{press} — предельная деформация на сжатие (отрицательное значение).

Известно, что при развитии деформационных процессов с течением времени вычисляемые напряжения являются истинными напряжениями и, кроме того, предельные значения напряжений легче определить опытным путем, чем предельные значения деформаций, поэтому выражения (11.5) лучше переписать в терминах напряжений.

¹ Ренкин (Ранкин) Уильям Джон Макуорн (Rankine William John Macquorn, 1820–1872), шотландский инженер, физик и механик, один из создателей технической термодинамики.

На основании обобщенного закона Гука (если считать его справедливым вплоть до достижения напряжениями предела текучести для пластического материала и предела прочности для хрупкого) условие наступления предельного состояния (или нарушения сплошности деформируемого тела), по критерию наибольших линейных деформаций в терминах главных напряжений можно записать:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\max} E = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \geq \sigma_{\text{ext}}, \\ \varepsilon_{\min} E = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_{\text{press}}. \end{cases} \quad (11.6)$$

Теорию наибольших линейных деформаций применять к разрушению хрупких материалов необходимо весьма осмотрительно. Например, в соответствии с этой теорией прочность хрупкого материала при двухосном растяжении должна быть больше, чем при простом растяжении, что не подтверждается экспериментами.

Соотношения критерия наибольших линейных деформаций в пространстве напряжений интерпретируется трехгранной пирамидой.

Критерий наибольшего касательного напряжения в качестве критерия прочности был предложен первоначально Кулоном и получил развитие в результате проведения Баушингером своих опытов, показавших, что сопротивление стали сдвигу близко к половине ее сопротивления растяжению. В этой теории нашел свое объяснение и факт высокой прочности материала при его всестороннем сжатии.

Условия прочности, основанные на использовании максимального касательного напряжения, предлагались также Треска и др. Леви использовал условие Кулона – Треска для решения задач о давлении грунтов. Сен-Венан применил это условие при построении теории пластического течения.

Для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, Кулон предположил, что в случае сжатия (среднее напряжение с отрицательным знаком: $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 < 0$) максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ является линейной функцией среднего нормального напряжения:

$$\tau_{\max} = C_1 \sigma_n + C_2. \quad (11.7)$$

При выражении постоянных C_1 и C_2 через механические характеристики при растяжении ($\sigma_1 = \sigma_{\text{ext}}; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) и сжатии ($\sigma_3 = \sigma_{\text{press}}; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$) (11.7) принимает вид:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\text{ext}} + \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{ext}} - \sigma_{\text{press}}} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_{\text{ext}} \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{ext}} - \sigma_{\text{press}}}. \quad (11.8)$$

Для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, критерий (11.8) выполняется только в области сжатия ($\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 < 0$).

Для области растяжения ($\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 > 0$) данный критерий удобно дополнить критерием максимальных напряжений. С учетом этого критерий (11.8) можно представить в виде:

$$F(\sigma_1, \sigma_3) = \begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_{\text{ext}}, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} > 0; \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{\sigma_{\text{ext}} + \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{ext}} - \sigma_{\text{press}}} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_{\text{ext}} \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{ext}} - \sigma_{\text{press}}}, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq 0. \end{cases}$$

Предельная поверхность, соответствующая условию (11.8), представляет шестигранную равнонаклоненную к осям пирамиду.

К уравнению (11.8) приводит также теория прочности Мора, если предположить, что предельная кривая, огибающая круги напряжений, — прямая линия. Вместе с тем это предположение — грубое упрощение, не имеющее физического обоснования. Идею о замене предельных кривых Мора прямыми поддерживал Прандтль, предложивший условие вида $\sigma_1 - \sigma_3 = c_1 - c_2 (\sigma_1 + \sigma_3)$, которое после выражения постоянных c_1 и c_2 через предельные напряжения при растяжении и сжатии также приводится к условию (11.8).

Основной смысл теории Мора сводится к эмпирическому определению кривой $\tau = f(\sigma)$, огибающей семейство предельных главных кругов Мора и состоящей из двух симметричных ветвей. Абсциссы σ и ординаты τ точек касания кругов огибающими представляют нормальные и касательные напряжения, при которых начинается пластический сдвиг или разрушение.

Таким образом, физический смысл теории Мора можно сформулировать следующим образом: нарушение прочности материала наступает либо при достижении касательными напряжениями τ некоторой критической величины, зависящей от нормальных напряжений σ , действующих по тем же плоскостям скольжения, либо при достижении наибольшим нормальным напряжением предельного для данного материала значения.

Отметим, что теория Мора отличается широтой охвата явлений, наблюдаемых при опыте, и продолжает совершенствоваться и развиваться.

Несмотря на универсальность, *критерий прочности Мора имеет и множество недостатков* в случае использования, например, применительно к геоматериалам. По теории прочности Мора сцепление и угол внутреннего трения зависят от напряжений, а максимальный коэффициент сцепления не соответствует тем же осевым деформациям, что и максимальный угол внутреннего трения, т. е. ими нельзя однозначно выразить значение прочности на срез. Неясным остается влияние и промежуточного главного напряжения σ_2 на прочность горных пород.

Сделаем некоторые замечания по поводу учета *второго главного напряжения* при построении критериев прочности.

Учет влияния среднего главного напряжения σ_2 на разрушение твердых деформируемых тел в определенных напряженно-деформированных состояниях необходим.

Так, например, условие прочности (11.3) с учетом напряжения σ_2 можно представить зависимостью вида:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{ext}}{\sigma_{press}} (\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_{ext}. \quad (11.9)$$

Аналогичная форма критерия хрупкого разрушения следует и из *теории наибольших относительных удлинений*:

$$\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{ext}, \quad (11.10)$$

где ν — коэффициент поперечных деформаций.

Эта теория предусматривает разрушение материала путем отрыва. Зависимости (11.9) и (11.10) показывают, что для применения классических теорий прочности при оценке опасности хрупкого разрушения с учетом напряжения σ_2 необходимо поль-

зоваться комплексным параметром напряженности σ_g , зависящим от двух (в общем случае от трех) действующих на контуре напряжений σ_2 и σ_1 .

В частных случаях напряжением σ_2 пренебрегают, тогда условия (11.9) и (11.10) приводятся к условиям (11.3) и (11.6). Для объемного напряженного состояния может быть предложен обобщенный критерий прочности, учитывающий разрушение материала в результате как сдвига, так и отрыва:

$$\frac{\sigma_{ext}^2}{\sigma_{press}^2} \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] + \left(1 - \frac{\sigma_{ext}^2}{\sigma_{press}^2} \right) \sigma_1^2 \leq \sigma_{ext}^2. \quad (11.11)$$

В случае, если $\sigma_{ext}/\sigma_{press} \approx 0$ (т. е. для идеально хрупких материалов), выражение (11.11) преобразуется в соответствующее уравнение теории максимальных нормальных напряжений.

А. Ю. Ишлинским предложена «гипотеза прочности формоизменения», которая, как отмечает ученый, в известном смысле сочетает идеи Хубера – Мизеса и Кулона. За факторы, определяющие начало текучести, принимаются величины, характеризующие формоизменение элемента материала: $\gamma_i = \varepsilon_i - \theta$, ($i = \overline{1,3}$), $\theta = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$.

Условие наступления предельного состояния имеет вид:

$$2\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3) = \pm 2\sigma_y. \quad (11.12)$$

Здесь $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. В (11.12) σ_y – предел текучести.

В пространстве напряжений условие (11.12) интерпретируется равнонаклоненной к осям правильной шестигранной призмой, в которую вписан цилиндр Мизеса, а на плоскости с координатами σ_1, σ_2 – шестиугольником, образованным прямыми

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \mp 2\sigma_y; \quad 2\sigma_1 - \sigma_2 = \mp 2\sigma_y; \quad 2\sigma_1 + \sigma_2 = \mp 2\sigma_y.$$

Предел текучести при чистом сдвиге, согласно этой теории, должен составлять 2/3 предела текучести при растяжении: $\tau_y = 0,667\sigma_y$ (по гипотезе Кулона $\tau_y = 0,5\sigma_y$, а по гипотезе Хубера – Мизеса $\tau_y = 0,5777\sigma_y$).

Лев Липатов¹ при выводе уравнения прочности исходил из предположения об учете изменчивости хрупко-пластических свойств материала в зависимости от шарового тензора в следующей формулировке: с увеличением всестороннего сжатия хрупкий материал приобретает пластические свойства и, начиная с определенной величины гидростатического давления, ведет себя как пластическое тело, разрушаясь при значительных деформациях. В условиях всестороннего растяжения такой пластичный материал может разрушаться хрупко, при этом деформации формоизменения практически отсутствуют. В соответствии с этим критерий прочности должен содержать в себе механические характеристики, описывающие хрупкие и пластические свойства материала. На основании обработки экспериментальных данных, полученных при испытании ряда хрупких материалов на сжатие при боковом давлении, Липатов вывел следующее уравнение:

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_{iy}\sigma_1 + \sigma_{press}^2 = \sigma_3^2, \quad (11.13)$$

которое в системе координат $\sigma_1 - \sigma_3$ представляет квадратную гиперболу с асимптотами, наклоненными к осям координат под углом 45° .

¹ Липатов Лев Николаевич (1940–2017), советский и российский физик. Специалист в области теоретической физики. Академик РАН.

В уравнении (11.13) σ_{iy} – предел текучести материала в идеально пластичном состоянии.

Предельная поверхность критерия, предложенного Л. Н. Липатовым, представляет собой равнонаклоненную к осям пространственную фигуру, имеющую в нормальном сечении правильный шестиугольник, размеры которого увеличиваются с увеличением гидростатического сжатия, а стороны шестиугольника асимптотически приближаются к граням призмы Кулона.

Недостатком теории Липатова является игнорирование промежуточного нормального напряжения σ_2 .

Отдельную группу составляют критерии, основанные на предположении, что предельное состояние возникает, когда максимальная деформация сдвига $\gamma_{\max}$ достигает определенной, зависящей от средней линейной деформации величины, например

$$\gamma_{\max} = C_1 - C_2 \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i,$$

или в главных напряжениях

$$\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 - \sigma_3) = C_1 - C_2 \frac{1-2\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \sigma_i. \quad (11.14)$$

После выражения постоянных C_1 и C_2 через механические характеристики при растяжении ($\sigma_1 = \sigma_{\text{ext}}$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) и сжатии ($\sigma_3 = \sigma_{\text{press}}$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), (11.14) преобразуется к такому расчетному уравнению:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\sigma_{\text{ext}} \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}}} - \frac{\sigma_{\text{ext}} + \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (11.15)$$

Условие (11.15) в пространстве напряжений соответствует поверхности шестигранной пирамиды, вписанной в круговой конус.

Аналогичное условие прочности было предложено Н.Н. Давиденковым¹ с коллегами, которые сформулировали условие наступления предельного состояния в такой форме:

$$\tau_{\max} + C_1 \sigma_n = C_2.$$

Для хрупких материалов условие прочности следует искать в виде

$$\sigma_1 + C_1 \sigma_n = C_2. \quad (11.17)$$

Выражение (11.17) после выражения постоянных C_1 и C_2 через механические характеристики при растяжении и сжатии принимает следующий вид:

$$\sigma_1 + \frac{3\sigma_{\text{ext}}}{\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}}} \sigma_n = \frac{\sigma_{\text{ext}} \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}}}.$$

Дальнейшее развитие данной теории может быть в направлении учета девиатора напряжений, характеризующегося параметром Надаи – Лоде.

¹Давиденков Николай Николаевич (1879–1962), советский ученый, физик, механик. Академик АН Украинской ССР, доктор технических наук, профессор.

11.4. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРЫХ – ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

К данной группе теорий прочности относятся прежде всего теории, основанные на энергетических концепциях.

Вероятно, впервые гипотеза о том, что опасное состояние материала наступает при достижении удельной потенциальной энергией некоторого предела, была высказана Бельтрами в 1885 г. Согласно *теории предельной полной энергии деформации* Бельтрами – Хейга предельное состояние наступает по достижению удельной потенциальной энергией некоторого предела. Исходя из указанного предположения, расчетные уравнения теории Бельтрами – Хейга можно записать в виде

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_y^2, \quad (11.18)$$

где σ_y – предел пластичности/текучести материала.

Уравнение (11.18) в пространстве напряжений представляется эллипсоидом вращения с центром в начале координат.

Замкнутая форма предельной поверхности указывает на непригодность теории применительно к хрупким материалам.

Этот критерий удовлетворительно фиксирует начало пластической деформации и может быть записан следующим образом:

$$\tau_{\text{oct}} \leq \left(\sqrt{2}/3\right)\sigma_y,$$

где τ_{oct} – касательное напряжение на октаэдрической площадке.

Чтобы получить согласованность этой теории с тем фактом, что материалы могут выдерживать значительные гидростатические давления, не приходя в состояние текучести, Хубер в 1904 г. предложил в случае отрицательного шарового тензора за критерий прочности принимать не полную величину потенциальной энергии, а только ту ее часть, которая соответствует изменению формы. Таким образом, для указанного случая условие прочности, по Хуберу, имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2. \quad (11.19)$$

Изучая вопросы пластической деформации материалов, Мизес в 1913 г. и Генки в 1914 г. обобщили теорию Хубера и независимо друг от друга пришли к выводу, что условие (11.19) справедливо как при отрицательном, так и при положительном шаровом тензоре. Следовательно, условие (11.19) предполагает наступление критического состояния при достижении энергией формоизменения некоторой предельной величины. Однако этим не исчерпывается трактовка физического смысла рассматриваемой теории. Уравнение (11.19) можно получить, принимая за критерий любую величину, которая формально эквивалентна энергии формоизменения. К таким величинам можно отнести касательное напряжение на октаэдрической площадке, среднее касательное напряжение на поверхности элементарной сферы, введенное В. В. Новожиловым¹:

$$\tau_i = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / \sqrt{15}.$$

¹ Новожилов Валентин Валентинович (1910–1987), советский ученый-механик. Академик Академии наук СССР. Герой Социалистического Труда. Лауреат Ленинской премии.

Условие пластичности Мизеса — Генки, как и условие постоянства максимальных касательных напряжений, было распространено на всю область пластических деформаций. Интересно, что уравнение (11.19) выведено в предположении, что между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, поэтому оно, казалось бы, теряет логический смысл за пределом пропорциональности и тем более за пределом текучести. Однако последняя трактовка теории (о пропорциональности критерия второму инварианту девиатора напряжений) дает основание использовать уравнение (11.19) для выполнения «пластических» расчетов, т. е. за пределами применимости закона Гука, что равносильно принятию в качестве критерия не полной энергии изменения формы, а только упругой ее части, зависящей от указанных компонентов полных деформаций при пластическом деформировании. Необходимо учитывать возможное влияние деформационной анизотропии. Было, например, обнаружено, что в случаях сложного нагружения возникающая при пластическом деформировании анизотропия иногда приводит к парадоксальным результатам: уменьшению интенсивности напряжения (при наложении второй нагрузки) может сопутствовать увеличение интенсивности деформации, коэффициент поперечной деформации при втором нагружении может принимать различные значения, вплоть до отрицательных.

Уравнение (11.19) в пространстве напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяет поверхность равнонаклоненного к осям кругового цилиндра, описанного вокруг призмы Кулона. При плоском напряженном состоянии предельная кривая представляется эллипсом.

Большинство новейших энергетических теорий укладывается в рамки высказанной А. Надаи гипотезы о том, что в предельном состоянии октаэдрическое касательное напряжение

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / 3$$

является функцией октаэдрического нормального напряжения: $\sigma_{\text{окт}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$.

Таким образом, согласно А. Надаи, условие наступления предельного состояния следует искать в виде

$$\tau_{\text{окт}} = f(\sigma_{\text{окт}}). \quad (11.20)$$

В системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ это уравнение описывает поверхность вращения, равнонаклоненную к осям.

Гипотезу Надаи можно рассматривать как более общую формулировку теории прочности Мора. Если, по Мору, наступление предельного состояния происходит, когда касательное напряжение в плоскостях скольжения увеличивается до определенной величины, зависящей от нормального напряжения, которое действует по тем же плоскостям, то по гипотезе Надаи аналогичные условия должны выполняться на октаэдрической площадке.

Учитывая, что октаэдрические касательные напряжения с точностью до коэффициента равны интенсивности напряжений, а октаэдрические нормальные напряжения равны среднему нормальному напряжению (шаровому тензору), гипотезу Надаи можно также записать в виде

$$\sigma_i = \Psi(\sigma_{\text{окт}}). \quad (11.21)$$

Выражения (11.20) и (11.21) для предельного состояния материала учитывают влияние шарового тензора.

Согласно гипотезе Янга¹ – Бужинского² опасное состояние материала наступает при достижении энергией, состоящей из энергии формоизменения и некоторой части энергии изменения объема, определенного критического значения, являющегося в свою очередь линейной функцией шарового тензора. Применительно к интенсивности напряжений и шаровому тензору данную гипотезу можно представить таким уравнением:

$$\sigma_i^2 = A + B\sigma_0 + C\sigma_0^2.$$

Если коэффициенты A , B и C определить из опытов на растяжение, сжатие и кручение, то, переходя к главным напряжениям, получим следующее расчетное уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\left(\frac{\sigma_{ext}\sigma_{press}}{2\tau_{tor}} - 1\right)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \\ + (\sigma_{press} - \sigma_{ext})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{press}\sigma_{ext}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

При определенных соотношениях между константами, найденными из опыта на растяжение, сжатие и кручение, предельная поверхность может обращаться в любую из поверхностей вращения:

- в сферу, при $\tau_{tor} = \sqrt{\sigma_{press}\sigma_{ext}/2}$;
- эллипсоид, при $\tau_{tor} > \sqrt{\sigma_{press}\sigma_{ext}/3}$;
- параболоид, при $\tau_{tor} = \sqrt{\sigma_{press}\sigma_{ext}/3}$;
- круговой цилиндр, при $\tau_{tor} = \sigma_{ext}/\sqrt{3}$ и $\sigma_{press} = \sigma_{ext}$;
- двупольный гиперболоид, при $\sqrt{\sigma_{press}\sigma_{ext}/3} > \tau_{tor} > 2\sigma_{press}\sigma_{ext}/(\sqrt{3}(\sigma_{press} + \sigma_{ext}))$;
- круговой конус, при $\tau_{tor} = 2\sigma_{press}\sigma_{ext}/(\sqrt{3}(\sigma_{press} + \sigma_{ext}))$;
- однополый гиперболоид, при $\tau_{tor} < 2\sigma_{press}\sigma_{ext}/(\sqrt{3}(\sigma_{press} + \sigma_{ext}))$.

Если отношение $\sigma_{ext}/\sigma_{press}$ стремится к нулю, то предельная поверхность вырождается в девиаторную плоскость. Таким образом, уравнение (11.22) – более общее уравнение поверхностей вращения второго порядка, а гипотеза Янга – Бужинского содержит в себе как частные случаи все предложенные энергетические теории вида (11.20).

Большая группа теорий прочности основывается на линейной зависимости между касательными и нормальными напряжениями в октаэдрической плоскости. Впервые такого вида зависимость была, по-видимому, предложена с соответствующим физическим обоснованием в 1940 г. А. И. Боткиным³.

¹ Янг Юлий Иванович (1895–1977), советский инженер-механик, ученый в области теории прочности, доктор технических наук, профессор.

² Бужинский Владимир Марьянович (1900–1970), польский ученый, профессор Львовского политехнического института.

³ Боткин А.И., ученый, инженер-механик горных пород и массивов.

А. И. Боткин рассмотрел октаэдрические напряжения как инвариантные величины вида $\sqrt{(J_1^2 - 2J_2)}/3$ для шарового тензора и девиатора напряжений. Эти величины он принял в качестве критериев для оценки интенсивности гидростатического напряжения и интенсивности напряжения сдвига, оказывающих различное влияние на сопротивление материалов.

Условие наступления предельного состояния в соответствии с критерием Боткина имеет вид:

$$\tau_{\text{oct}} = C_1 + C_2 \sigma_{\text{oct}},$$

где τ_{oct} и σ_{oct} — касательное и нормальное октаэдрические напряжения.

Выразив константы C_1 и C_2 через предельные напряжения при растяжении и сжатии, критерий Боткина приобретает вид

$$\frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sigma_{\text{ext}}\sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}}} - \frac{\sigma_{\text{ext}} + \sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (11.23)$$

Легко показать, что уравнение (11.23) является уравнением кругового конуса, ось которого равнонаклонена к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а вершина имеет координаты

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{\text{ext}}\sigma_{\text{press}}}{\sigma_{\text{press}} - \sigma_{\text{ext}}}.$$

При $\sigma_3 = 0$ (плоское напряженное состояние) предельная кривая в системе координат $\sigma_1 - \sigma_2$ в зависимости от значения $\sigma_{\text{ext}}/\sigma_{\text{press}}$ может быть эллипсом ($1 \leq \sigma_{\text{ext}}/\sigma_{\text{press}} \leq 0,27$), параболой ($\sigma_{\text{ext}}/\sigma_{\text{press}} = 0,27$), гиперболой ($\sigma_{\text{ext}}/\sigma_{\text{press}} \leq 0,27$).

Таким образом, основными характеристиками, определяющими прочность материала, являются, в соответствии с данной гипотезой, коэффициент внутреннего трения и коэффициент сцепления.

Критерии прочности, интерпретирующиеся поверхностями вращения, были получены также на основе предположений, не связанных с энергетическими представлениями. Так, Г. А. Дошинский¹ ввел предположение, что *наступление предельного состояния материала определяется величиной абсолютных значений компонентов деформаций*. Общей мерой этой величины может служить среднее квадратичное от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$:

$$\varepsilon_{\text{av}} = \sqrt{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)/3}.$$

Соответствующее этому критерию условие эквивалентности в напряжениях принимает вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2\nu(2-\nu)}{1+2\nu^2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_{\text{ext}}^2. \quad (11.24)$$

¹Дошинский Г. А., советский ученый-механик, доктор физико-математических наук, профессор.

В пространстве напряжений уравнение (11.24) представляется вытянутым в направлении оси симметрии пространства эллипсоидом вращения, вырождающимся при $\nu = 0,5$ в цилиндр Хубера – Мизеса – Генки.

Для хрупких материалов предельное значение средней деформации не является постоянным, а, как следует из опытов, возрастает при переходе от растяжения к сжатию. Поэтому для распространения условия (11.24) на хрупкие материалы принято, что предельное значение среднеквадратичной деформации линейно зависит от относительной величины объемной деформации:

$$\varepsilon_{av} = A\theta + B. \quad (11.25)$$

Определяя значения постоянных A и B по результатам испытаний материала на растяжение и сжатие и выражая деформации через напряжения, переходим к следующей форме условия прочности:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2\nu(2-\nu)}{1+2\nu^2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} + \frac{\sigma_{press} - \sigma_{ext}}{\sigma_{press} + \sigma_{ext}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{2\sigma_{press}\sigma_{ext}}{\sigma_{press} + \sigma_{ext}}.$$

В зависимости от соотношений между константами материалов ν , σ_{press} , σ_{ext} возможными предельными поверхностями будут цилиндр (при $\nu = 0,5$), эллипсоид, параболоид, гиперboloид (при $\nu \neq 0,5$). В отличие от теории Боткина условие Доштинского учитывает влияние на прочность упругих характеристик материала. Это имеет смысл, так как упругое поведение хрупких материалов наблюдается почти до разрушения.

Пределы применимости линейной зависимости (11.25) ограничены интервалом $\sigma_{press} \leq (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{ext}$. Расчеты вне этого интервала могут привести к значительным ошибкам.

Некоторые общие выводы для данной группы предельных критериев.

Как следует из приведенного перечня критериев, они главным образом ориентированы на наступление состояния пластичности.

Для пластичных материалов широкое распространение в расчетной практике (как при выполнении расчетов в условиях пластичности, так и при изучении состояния тел в условиях ползучести) получили теория максимальных касательных напряжений (условие Кулона) и теория энергии формоизменения (условие Мизеса – Генки).

Если вначале полагали, что физические процессы, протекающие в материале, более полно отражают условие Кулона, а условие Мизеса было введено формально и использовалось лишь как математически удобное приближение, поскольку оно представляется одним уравнением, то впоследствии оказалось, что для ряда материалов условие Мизеса лучше согласуется с опытными данными, чем условие Кулона. В связи с этим возникла необходимость в выяснении физического смысла условия Мизеса. Эквивалентную функцию этого условия стали трактовать как октаэдрическое касательное напряжение, удельную энергию формоизменения и т. д.

Сравнивая инвариантные функции указанных теорий, можно обнаружить их некоторое сходство. В обеих теориях придается значение разности главных напряжений, но с тем отличием, что энергетическая теория принимает во внимание все три разности, а теория максимальных касательных напряжений учитывает только разность наибольшего и наименьшего из трех главных нормальных напряжений. Таким образом, оба условия связывают сопротивление материала деформированию только с касательными напряжениями: первое — с максимальными, второе — с октаэдрическими.

Известны попытки вывести расчетные уравнения Мизеса и Кулона, исходя из одного и того же энергетического начала. Так, в некоторых работах пользуются критерием, являющимся обобщением условий Кулона и Мизеса, в такой форме:

$$\left((\sigma_1 - \sigma_2)^n + (\sigma_2 - \sigma_3)^n + (\sigma_3 - \sigma_1)^n / 2 \right)^{1/n} = \sigma_{ext}^n,$$

где показатель степени n не обязательно должен быть целым числом.

При $n = 1$ условие сводится к критерию Треска, при $n = 2$ — к критерию Мизеса. Промежуточным значениям соответствуют предельные поверхности, расположенные между призмой Кулона и цилиндром Мизеса.

По мнению Д. Д. Ивлева¹ [103], условие Кулона является более обоснованным с точки зрения общих экстремальных принципов механики деформируемых сред.

Для выяснения, какой из этих теорий надо отдать предпочтение, ставились специальные опыты. Результаты опытов не дали конкретного ответа в пользу той или иной теории. Локальность пластических деформаций и их развитие главным образом по плоскостям действия максимальных касательных напряжений позволяют предполагать, что начало образования пластических деформаций для пластичных материалов лучше согласуется с теорией наибольших касательных напряжений. С другой стороны, серьезное обоснование для применения энергетической теории можно найти в известных опытах Лоде, Надаи и др.

Если теории первой группы (предельные поверхности которых — многогранники) укладываются в рамки гипотезы Надаи в виде

$$f_1(\tau_{oct}, \sigma_{oct}, m_i) = 0,$$

то теории прочности второй группы (предельные поверхности которых — поверхности вращения) можно объединить обобщенной зависимостью

$$f_2(\tau_{max}, \sigma_{oct}, m_i) = 0.$$

Поверхности предельного состояния, соответствующие теориям второй группы, ограничены плоскими гранями, поэтому соответствующие условия прочности для самых общих случаев не могут быть выражены одной формулой, в которой все главные напряжения равноправны. Этого недостатка не имеют теории первой группы, для которых условия предельного состояния выражены аналитическими функциями, что облегчает их использование при построении математического аппарата в соответствующих расчетах.

¹ Ивлев Дюис Данилович (1930–2013), советский и российский ученый-механик, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации.

11.5. ОБОБЩЕННЫЕ КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

Перспективным представляется построение обобщенных критериев. В этом случае, приняв в качестве базовой структуру некоторого стандартного критерия, функциональное представление нового обобщенного критерия получаем, введя дополнительные гипотезы, положения.

При сравнении результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными было замечено, что для каждой гипотезы есть область напряженных состояний, в которой теория наиболее хорошо согласуется с опытом. В связи с этим целесообразно разделить предельную поверхность на несколько секторов, из которых один может оказаться, например, цилиндром, другой — конусом и т. д.

Концепция о невозможности описания предельного состояния материала одним уравнением наиболее ярко выражена в *объединенной теории прочности Давиденкова — Фридмана*¹. Эта теория основана на том принципе, что характер разрушения материала зависит не только от его физико-механических свойств и внешних условий работы, но и от схемы напряженно-деформированного состояния. Учитывается, что в зависимости от характера напряженного состояния материал может разрушаться как, например, от нормальных напряжений (хрупкое разрушение или разрушение отрывом), так и от касательных напряжений (пластическое разрушение — разрушение срезом).

Таким образом, учитывается, что для каждого материала существует не зависящая от вида напряженного состояния связь между напряжениями и деформациями в координатах «касательное напряжение — сдвиг». Для пластичных материалов конечная ордината кривой деформирования, представляющей предельное сопротивление срезу, является константой материала

Итак, теория прочности Давиденкова — Фридмана объединяет две классические теории прочности: *максимальных касательных напряжений* и *наибольших относительных удлинений*.

Эту теорию удобно представить графически в виде известной диаграммы механического состояния, в которой отражены основные свойства материала (рис. 11.1). В правой части диаграммы помещается кривая течения, не зависящая от вида напряженного состояния, в левой части прямыми, параллельными координатным осям системы $\tau_{\max} - \sigma_{eqv}$, представлены предельные состояния текучести и разрушения. Здесь σ_{eqv} — эквивалентное напряжение, определяемое по теории наибольших относительных удлинений (соответствующее наибольшей линейной положительной деформации). Каждому напряженному состоянию соответствует луч, исходящий из начала координат. Так, например, луч, наклоненный к оси под углом, тангенс которого $1/(2\nu)$, соответствует одноосному сжатию. В зависимости от того, какую предельную кривую пересекает этот луч, определяют вид разрушения (путем отрыва или путем сдвига), а значит, и теорию прочности, по которой следует вести расчет.

Итак, предельная поверхность, соответствующая гипотезе Фридмана, представляет собой равно наклоненную шестигранную призму, ограниченную с противоположных сторон трехгранной пирамидой.

¹Фридман Александр Александрович (1888—1925), российский и советский математик, физик и геофизик.

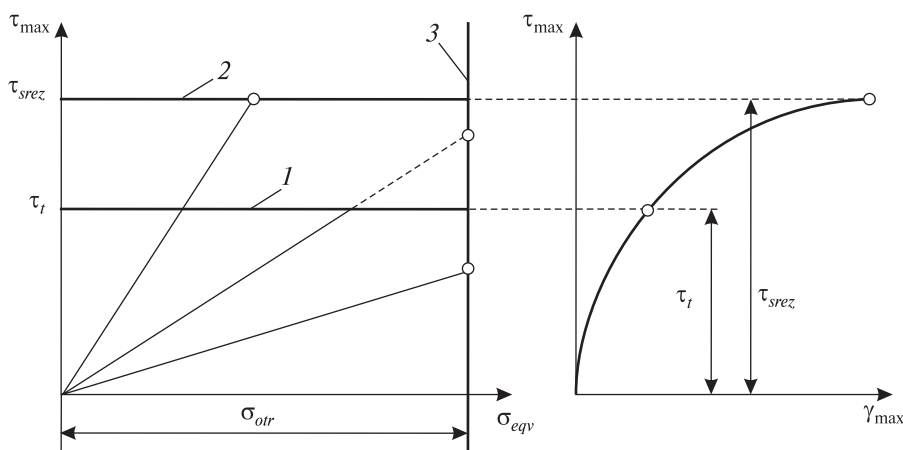


Рис. 11.1. Диаграмма механического состояния по Фридману:
1 – начало текучести; 2 – разрушение сдвигом; 3 – разрушение отрывом

Диаграмма механического состояния строится по известным из опытов значениям предельных напряжений σ_{otr} , τ_{srez} , τ_t , которые предполагаются постоянными для данного материала и независимыми от схемы НДС.

Оценку состояния объекта МДТТ можно выполнять в соответствии с диаграммой механического состояния (см. рис. 11.1), изобразив напряженное состояние на диаграмме в виде точки с координатами $(\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2, \sigma_{eqv} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$.

Механический смысл теории хорошо трактуется на примере простого нагружения. Если провести через начало координат и данную точку прямую, можно предсказать, какой вид разрушения будет соответствовать анализируемому напряженному состоянию (см. рис. 11.1). Так, для прямой 2 имеет место разрушение материала путем среза; для прямой 1 – разрушение путем отрыва, который происходит после развития пластических деформаций; для прямой 3 – разрушение путем отрыва без развития пластических деформаций.

Согласно объединенной теории прочности, основной характеристикой напряженного состояния, определяющей характер разрушения, может служить величина α , равная отношению

$$\alpha = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{eqv}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))}.$$

Параметр α характеризует вид напряженного состояния. Например, если $\alpha = \nu/2$, то прямая линия на диаграмме деформирования соответствует сжатию; если $\alpha = 1/(1 + \nu)$ – кручению; а в случае, если $\alpha = 1/2$ – растяжению. Отметим, что вместо параметра α можно взять коэффициент Надаи – Лоде, характеризующий вид напряженного состояния.

Помимо параметра α для оценки свойств материала вводится параметр $\beta = \tau_{srez}/\sigma_{otr}$. Если $\beta = 1$, то материал чаще всего разрушается путем среза; если $\beta < 1$, то материал, как правило, разрушается путем отрыва; если $\beta \approx 1$, то характер разрушения материала во многом зависит от вида напряженного состояния.

В соответствии с введенными параметрами характер разрушения определяется как напряженным состоянием (коэффициент α), так и природой материала (параметр β). А именно: при $\alpha < \beta$ имеет место отрыв, а при $\alpha > \beta$ – срез.

Перед разрушением поведение материала определяется соотношением коэффициента α и параметром $\eta = \tau_t / \sigma_{otr}$. Если $\eta > \alpha$, то материал разрушается без развития пластических деформаций, т. е. хрупко; если же $\eta < \alpha$, то разрушению предшествует появление пластических деформаций.

Описанные теории прочности, критерии которых являются функциями от компонент тензора напряжений, не учитывают наличия дефектов в твердых деформируемых средах и, как следствие, игнорируют локальные возмущения полей напряжений на таких дефектах, а значит, и флуктуации механических свойств материала в наиболее напряженных или наиболее дефектных объемах. Поскольку места локальных всплесков поля напряжения распределены по объему случайно, то существенное значение при учете наличия дефектности в материалах имеет *статистическая трактовка прочности*.

В последние годы наряду с привлечением для объяснения разрушения твердых деформируемых тел критериев хрупкого разрушения, в основе которых лежит теория трещинообразования, широко используется статистический подход к оценке процессов разрушения. Не анализируя детально эти теории прочности, следует заметить, что практическое их использование сопряжено со значительными трудностями, возникающими при экспериментальном определении параметров, входящих в предложенные критерии.

Наиболее математически строгой, по мнению многих специалистов, является *единая статистическая теория прочности С. Д. Волкова*¹, устанавливающая общий статистический критерий прочности в виде некоторого «допуска» на вероятность развития процесса разрушения. С. Д. Волковым на основании модели микроскопически неоднородной среды и с учетом пластических деформаций предложено следующее условие предельного состояния в объемном поле напряжений $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$:

$$\chi_{\sigma_T} - (\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3)}(\chi_s - 1).$$

Здесь $\chi_s = 2\bar{\xi}_s / \sigma_y$, где $\bar{\xi}_s$ – средний предел текучести второго рода на площадке скольжения, а σ_y – предел текучести первого рода.

Полагая, что критическое напряжение должно зависеть не только от нормального напряжения, действующего в плоскости скольжения, но и от шарового тензора, С. Д. Волковым предложено условие наступления критического состояния для модели микроскопически неоднородной среды с такой форме:

$$\begin{aligned} \frac{\chi_s \sigma_T}{2} - \beta \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \lambda \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \\ = C \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3)}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

¹ Волков Сергей Дмитриевич (1919–1980), советский ученый-механик. Основатель уральской научной школы в области механики микroneоднородных сред, механики разрушения, статистического металловедения, статистической теории упругости.

В (11.26) χ , β , λ и C – константы материала, определяемые из опытов при различных напряженных состояниях (например, при одноосном растяжении или сжатии, чистом сдвиге и двухосном равномерном растяжении).

В работе [104] доказана гипотеза о том, что критерии прочности материалов следует искать в виде инвариантных функций касательных напряжений σ_i и максимального нормального напряжения $\sigma_{n \max}$. В соответствии с этим положением условие наступления предельного состояния имеет следующую структуру:

$$\sigma_i^n + C_1 (\sigma_{n \max})^m = C_2, \quad (11.27)$$

где n и m – константы материала.

В (11.27) в качестве функции касательных напряжений принята интенсивность напряжений σ_i , равная:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_i = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / \sqrt{2}.$$

Значение $\sigma_{n \max}$ может принимать различные значения в зависимости от достигнутого напряженного состояния:

$$\begin{cases} \sigma_{n \max} = \sigma_3, & |\sigma_3| > |\sigma_1|; \\ \sigma_{n \max} = \sigma_1, & |\sigma_3| < |\sigma_1|. \end{cases} \quad (11.28)$$

В соответствии с (11.28), если C_1 и C_2 выразить через предельные напряжения при растяжении σ_{ext} и сжатии σ_{stress} для каждого значения $\sigma_{n \max}$, то представление (11.27) в зависимости от достигаемого максимального нормального напряжения приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_i^n - \frac{|\sigma_{press}|^n - \sigma_{ext}^n}{\sigma_{press}^m} \sigma_3^m = |\sigma_{ext}|^n, & |\sigma_3| > |\sigma_1|; \\ \sigma_i^n + \frac{|\sigma_{press}|^n - \sigma_{ext}^n}{\sigma_{ext}^m} \sigma_1^m = |\sigma_{press}|^n, & |\sigma_3| < |\sigma_1|. \end{cases}$$

Следует отметить, что обобщенные критерии прочности хорошо согласуются с опытными данными при рассмотрении предельного состояния достаточно однородных и изотропных материалов. Таким образом, данный критерий учитывает различие в поведении материалов при растяжении и сжатии, но слабо учитывает гетерогенность рассматриваемых объектов МДГТ.

11.6. ОПИСАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Для описания развития деформационных процессов в твердых деформируемых телах вплоть до полной потери ими несущей способности (разрушения) перспективно использовать *концепцию поврежденности*. Основанные на этих концепциях теории прочности позволяют не только определить характеристики напряженно-деформированного состояния, вызывающего переход тела в критическое состояние, но и дают ответ на вопрос о времени (интервале времени) наступления процесса разрушения.

В настоящее время известно множество моделей накопления повреждений. Все они базируются на двух различных представлениях о том, что следует понимать под поврежденностью. Первое из них предложено А. Пальмгреном¹, а второе — Л. М. Качановым и Ю. Н. Работновым.

Помимо указанных имеется также подход, в котором в качестве меры поврежденности принимается длина трещины, которую можно связать с долговечностью.

Достаточно много исследований посвящено рассмотрению повреждений с привлечением вероятностного анализа. Структурно-неоднородные материалы имеют, как правило, случайную структуру с различной степенью упорядоченности составляющих элементов, поэтому накопление повреждений так же является случайным процессом. В связи с этим различные детерминированные модели лишь приближенно описывают поведение реальных неоднородных материалов. Статистический подход в сущности является наиболее общим при моделировании процессов с вероятностной структурой. Статистическая теория деформирования и разрушения твердых тел позволяет с единой точки зрения описать процессы пластической деформации, ползучести и релаксации, хрупкого разрушения и накопления повреждений. Пользуясь ею, представляется возможным естественным путем получить все соотношения для феноменологических теорий пластичности, ползучести и усталости.

11.6.1. Гипотеза Пальмгрена – Майнера

Концепция поврежденности Пальмгрена в первую очередь относится к усталостной прочности твердых тел. Условие разрушения, согласно концепции поврежденности Пальмгрена, имеет вид:

$$\sum n_i / N_i = 1. \quad (11.29)$$

Здесь N_i — количество оборотов до разрушения при постоянных значениях нагрузки P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а n_i — количество оборотов, в течение которых прикладывалась нагрузка P_i (т. е. в течение всего цикла испытаний нагрузка менялась).

Отношение

$$D_i = n_i / N_i \quad (11.30)$$

называется усталостным повреждением, произведенным за n_i циклов нагрузки P_i .

Работы А. Пальмгрена не содержали количественных сравнений между результатами испытаний и предложенным условием разрушения. Возможно, поэтому оно осталось почти незамеченным. Но с тех пор как Майнер вновь выдвинул эту гипотезу, она привлекла внимание проектировщиков. Впоследствии она получила известность под названием *закона Пальмгрена – Майнера или линейного закона накопления повреждений при усталостном разрушении под действием нагрузки переменной амплитуды*. Этот закон имеет немаловажное достоинство — он достаточно прост и именно поэтому широко используется.

Необходимо, однако, иметь в виду, что эта простота является следствием игнорирования некоторых существенных факторов, поэтому в предсказании разрушения возможны ошибки.

¹ Гипотеза Пальмгрена – Майнера — гипотеза накопления повреждений, предложена в 1924 г. А. Пальмгреном и развита А. Майнером.

К наиболее значительным недостаткам линейной теории относится то, что она не описывает влияния очередности воздействия напряжений различных уровней и предполагает одинаковую скорость накопления повреждений при напряжении некоторого заданного уровня независимо от предыдущей истории нагружения. Между тем экспериментальные данные показывают, что, во-первых, скорость накопления повреждений при заданном уровне напряжения является функцией истории предыдущего циклического нагружения и для убывающей последовательности напряжений сумма (11.29), как правило, меньше единицы, а для возрастающей – больше единицы. Во-вторых, линейная гипотеза позволяет рассчитать лишь средние значения долговечностей, которые могут существенно отличаться от долговечностей отдельных образцов или деталей.

Это связано с тем, что при использовании линейной гипотезы суммирования повреждений недостаточно внимания уделяется учету рассеяния долговечностей образцов. Величины N_i , входящие в выражения (11.29) и (11.30), определяют по кривой усталости, соответствующей 50 %-й вероятности разрушения. Данное несоответствие может быть устранено в том случае, если использовать не кривые усталости для 50 %-й вероятности разрушения, а кривые, соответствующие каждому образцу, испытываемому при нерегулярном нагружении.

Такой подход реализован во многих работах. Например, была предложена следующая формула для суммирования повреждений при программном изменении нагрузки:

$$\sum_1^k \frac{n_i}{b_i (N_i)_d} = 1,$$

где n_i – число циклов наработки при напряжении σ_i одного из k уровней нагрузки; $(N_i)_d$ – действительная долговечность образца при напряжении σ_i ; b_i – коэффициент отклонений от линейной гипотезы, определяемый по характеристикам неупругости металлов.

Известны и нелинейные гипотезы суммирования усталостного повреждения. Однако они не получили широкого распространения в первую очередь в связи с неопределенностью коэффициентов, входящих в основные расчетные формулы.

Простота и ясность меры (11.30) сделали ее весьма распространенной. На ее основе построены гипотезы накопления повреждений.

11.6.2. Концепция поврежденности Робинсона¹

Определение поврежденности, аналогичное определению А. Пальмгрена, было предложено Д. Робинсоном.

Основные положения подхода Робинсона состоят в следующем. Для определения повреждений, вызываемых действием нагрузки P_i в течение времени t_i , исследуется отношение:

$$D_i = t_i / T_i. \quad (11.31)$$

¹ Робинсон Давид Вениаминович (Robinson D. V.), ученый-физик, механик-технолог.

Здесь T_i — время полного разрушения при ползучести под действием постоянной нагрузки P_i ,

Условие разрыва при ползучести в случае ступенчатого изменения нагрузки P_i определяется из соотношения

$$\sum D_i = 0. \quad (11.32)$$

Из (11.30) и (11.31) видно, что условие разрушения в точности выполняется в случаях небольших изменений нагрузки. Многочисленные испытания на усталостную прочность, а также на разрыв при ползучести, проводившиеся при сильно изменяющихся нагрузках, показали, что условие разрушения (11.32) иногда оказывается очень неточным. Особенно сильные отклонения от линейной гипотезы выявлены в испытаниях на совместное действие усталости и ползучести. Отклонение может происходить как в безопасную, так и в опасную сторону в зависимости от последовательности приложения нагрузки.

Предлагались иные, более сложные, чем (11.30) и (11.31), определения поврежденности, имеющие целью обеспечить лучшее согласование с экспериментальными результатами. Тем не менее линейные определения (11.30) или (11.31) сохраняют актуальность и сейчас прежде всего своей концептуальной и математической ясностью.

Вместе с тем выражения (11.30) и (11.31) представляют собой определения разрушения «задним числом», поскольку входящие в них величины N_i или T_i должны быть известны. Это означает, что до использования условия разрушения (11.30) необходимо провести испытание при нескольких постоянных уровнях нагрузки.

11.6.3. Гипотеза накопления повреждений Генри¹

Гипотеза накопления повреждений, предложенная Дж. Генри, основана на представлении о том, что кривые усталости смещаются по мере накопления повреждений и что поврежденность при усталости может быть определена как отношение величины уменьшения предела усталости к пределу усталости исходного материала, т. е.

$$D = (E_0 - E) / E_0, \quad (11.33)$$

где D — поврежденность; E_0 — предел усталости исходного материала; E — предел усталости материала после повреждения.

При формулировке гипотезы Генри предполагается, что исходная кривая усталости может быть описана уравнением равнобочной гиперболы, асимптотами которой являются ось напряжения и проходящая через E_0 линия, параллельная оси числа циклов. Это означает, что уравнение кривой усталости имеет вид:

$$N = k_0 / (S - E_0),$$

где N — число циклов до разрушения при амплитуде напряжения S . Здесь S — амплитуда приложенного симметричного напряжения; k_0 — постоянная материала, E_0 — предел усталости исходного материала.

¹ Генри Джозеф (Henry Joseph, 1797–1878), американский физик, считался одним из величайших американских учёных со времен Бенджамина Франклина.

Подразумевается, что при действии циклических напряжений ниже предела усталости не возникает никаких повреждений, а кривая усталости после повреждения также описывается уравнением равнобочной гиперболы, т. е.

$$N_r = k/(S - E),$$

где N_r — оставшееся число циклов до разрушения при действии напряжения с амплитудой S (S , как и ранее, амплитуда приложенного симметричного напряжения); k — постоянная материала; E — предел усталости поврежденного материала ($E < E_0$). Для E получена следующая формула:

$$E = \frac{S(1 - n/N)}{(S - E_0)/E_0 + (1 - n/N)}.$$

Данная формула позволяет определить текущее значение предела усталости E после воздействия n циклов напряжения с амплитудой S , если полное число циклов до разрушения при этом напряжении равно N , а начальный предел усталости E_0 .

Воспользовавшись формулой для E , соотношения (11.33) преобразовываются в следующую формулу для определения поврежденности:

$$D = \frac{E_0 - E}{E_0} = 1 - \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{S(1 - n/N)}{(S - E_0) + E_0(1 - n/N)},$$

которую, в свою очередь, можно привести к виду:

$$D = \frac{(n/N)}{1 + (E_0/(S - E_0))(1 - n/N)},$$

где D — поврежденность; n — число циклов воздействия напряжения с амплитудой S ; N — число циклов до разрушения; E_0 — предел усталости исходного материала; S — амплитуда приложенного напряжения.

Гипотезу Генри можно обобщить на случай воздействия последовательности напряжений различной амплитуды. При этом величина E_0 каждый раз должна пересчитываться. Таким образом, в результате может быть получена последовательность значений $E_0, E_1, E_2, \dots$, где E_0 — предел усталости исходного материала, E_1 — предел усталости материала после воздействия n_1 циклов напряжения с амплитудой S_1 и т. д. Такой подход позволяет оценить уменьшение предела усталости материала при его повреждении.

11.6.4. Кинетические уравнения поврежденности

Кинетические уравнения поврежденности строятся на подходах к определению поврежденности, базирующихся на концепции поврежденности Качанова — Работнова.

В противоположность рассмотренным определениям поврежденности в концепции Качанова используется только текущее механическое состояние материала и постулируется сильная зависимость прочности от дефектов. Предполагается, что дефекты непрерывным образом распределены (или рассеяны) по объему нагружаемого тела. Основные положения модели разработаны применительно к ползучести материалов и состоят в следующем.

Деформация ползучести часто сопровождается постепенным ухудшением структуры материала: в ней возникают малые несплошности, которые могут соединяться между собой, образуя небольшие трещины. В результате воспринимающая нагрузку площадь уменьшается, хотя это уменьшение может оставаться незаметным. Такого рода ослабления, или повреждения, возникают во всем объеме нагружаемого материала. В описанном состоянии обычное определение напряжения как $\sigma = Q/F_0$ теряет свой смысл, так как истинная площадь сечения F_* , несущая нагрузку Q , меньше номинальной площади F_0 . Поэтому истинное напряжение $\sigma_S = Q/F_*$ превышает расчетное σ . Л. М. Качанов ввел безразмерную величину, называемую *сплошностью* и определяемую как отношение

$$\psi = \sigma/\sigma_S.$$

Здесь σ_S — истинное напряжение в материале.

Ю. Н. Работнов ввел величину

$$\omega = 1 - \psi,$$

называемую *параметром поврежденности* или просто *поврежденностью*. Этот параметр изменяется от $\omega = 0$ для неповрежденного состояния до $\omega = 1$ для полностью поврежденного состояния.

Принимая соответствующий закон роста поврежденности, можно получить формулы для расчета времени до разрушения при ползучести, а также вывести характерные особенности хрупко-ползучего разрушения.

Согласно основной идее подхода Л. М. Качанова, описание образования внутренних разрывов можно выполнять при помощи непрерывно изменяющейся переменной состояния — величины поля поврежденности.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Раскройте понятие предельной поверхности разрушения.
2. Приведите примеры критериев прочности, предельные поверхности разрушения которых — многогранники.
3. Дайте примеры критериев прочности, предельные поверхности которых — поверхности вращения.
4. Приведите примеры обобщенных критериев прочности.
6. В чем состоит концепция поврежденности Пальмгрена — Майнера?
7. В чем состоит концепция поврежденности Робинсона?
8. В чем состоит гипотеза накопления повреждений Генри?
9. В чем состоит концепция поврежденности Качанова — Работнова?

ЧАСТЬ 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ СПЕЦИАЛЬНЫХ
РАЗДЕЛОВ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА



РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

12.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СРЕД ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ ИХ К ЭФФЕКТИВНЫМ УПРУГИМ СРЕДАМ

В качестве модельного аналога реальному механическому процессу/явлению можно построить множество различных аналитических расчетных схем. Одним из наиболее важных моментов является выбор физических уравнений, определяющих поведение среды (упругая модель, учет вязкоупругих, пластических эффектов и т. д.). Следовательно, естественно желание иметь такой «прикладной пакет», который позволял бы рассматривать как можно более широкий спектр физических соотношений для моделирования поведения реальной среды. Очевидно, что нельзя объять необъятное, и поэтому, к сожалению, универсальных, пригодных «на все случаи жизни» методов и технологий пока не существует.

В связи с данными обстоятельствами желательно иметь «под рукой» несколько «прикладных пакетов», реализующих различные законы поведения среды.

Возможен и другой путь: разработка подходов, позволяющих при моделировании механических процессов, явлений приводить реальные среды к некоторой условной «эффективной среде». В качестве такой «эффективной среды» удобно принять модель упругой среды, так как очевидно, что для изучения механического поведения среды в упругой постановке сегодня имеется наибольшее количество хорошо изученных и апробированных методов и подходов.

Рассмотрим некоторые подходы, позволяющие выполнить такую процедуру.

12.1.1. Решение задач для физически нелинейной упругой среды методом возмущения линейно-упругих свойств

Рассматриваются задачи пространственной теории упругости, которые по классификации В. В. Новожилова *нелинейны физически, но линейны геометрически*. В этом случае удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей.

Соотношения между напряжениями σ_{ij} и малыми упругими деформациями для однородного изотропного тела в соответствии с физически нелинейной теорией могут быть записаны в следующем виде:

$$\sigma_{ii} = 3K\chi(e_0)e_0 + 2\mu\gamma(\psi_0^2)(e_{ii} - e_0), \quad \sigma_{ij} = \mu\gamma(\psi_0^2)e_{ij}, \quad (i \neq j), \quad (12.1)$$

где $K = \lambda + 2\mu/3$ — модуль объемного сжатия; $e_0 = (1/3)(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = e_{ii}/3$ — средняя объемная деформация; ψ_0 — интенсивность деформации сдвига:

$$\psi_0^2 = (4/3)\left[(2/3)(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 - e_{11}e_{22} - e_{11}e_{33} - e_{22}e_{33}) + (1/2)(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2)\right];$$

$\chi(e_0)$ и $\gamma(\psi_0^2)$ — соответственно функции удлинения и сдвига, которые могут быть представлены степенными рядами вида:

$$\begin{aligned} \chi(e_0) &= 1 + \chi_1 e_0 + \chi_2 e_0^2 + \chi_3 e_0^3 + \dots, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2 \psi_0^2 + \gamma_4 \psi_0^4 + \gamma_6 \psi_0^6 + \dots \end{aligned} \quad (12.2)$$

Постоянные χ_i и γ_{2j} определяются экспериментально.

Замечание. Для большого круга материалов (например, геоматериалы, бетон) функции удлинения и сдвига с достаточной степенью точности могут быть выражены в форме:

$$\chi(e_0) = 1; \quad \gamma(\psi_0^2) = 1 + \gamma_2 \psi_0^2.$$

Представим соотношения (12.1) в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + \mu\left((\partial u_i / \partial x_j) + (\partial u_j / \partial x_i)\right) + 2\mu\delta\eta_{ij}, \quad (12.3)$$

где $0 \leq \delta \leq 1$, причем при $\delta = 0$ уравнения (12.3) переходят в линейные, а при $\delta = 1$ — в нелинейные уравнения состояния (12.1).

Функция возмущений η_{ij} характеризует отклонение физически нелинейных соотношений (12.3) от уравнений закона Гука. В случае представления функций удлинения и сдвига рядами (12.2) она имеет следующий вид:

$$\eta_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_{2n} \psi_0^{2n} e_{ij} + \delta_{ij} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \chi_n e_0^{n+1} - \gamma_{2n} \psi_0^{2n} e_0 \right) \right]. \quad (12.4)$$

Подставим (12.3) в уравнения равновесия Коши. Получим

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{X_i}{\mu} + \delta F_i = 0, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (12.5)$$

где $F_i = 2 \sum_{j=1}^m \partial \eta_{ij} / \partial x_j$.

Процедура решения задач в соответствии с описанным подходом выглядит следующим образом.

Пусть необходимо определить НДС физически нелинейного тела при заданных на одной части S_u его граничной поверхности S перемещениях u_i^0 , а на остальной части S_σ — внешних усилиях T_i^0 , $S = S_u \cup S_\sigma$:

$$u_i|_{S_u} = u_i^0, \quad \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_\sigma} = T_i^0. \quad (12.6)$$

Представляем $u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, \psi_0^2, \eta_{ij}, F_i$ рядами по степеням параметра δ :

$$\{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, \psi_0^2, \eta_{ij}, F_i\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \{u_i^{(n)}, e_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n)}, \psi_0^{(2n)}, \eta_{ij}^{(n)}, F_i^{(n)}\}. \quad (12.7)$$

Внеся соответствующие ряды (12.7) в уравнения (12.5) и приравняв выражения при одинаковых степенях параметра δ , получаем:

$$\Delta u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x_i} = -\frac{X_i}{\mu}, \quad (i=1, \dots, m); \quad (12.8)$$

$$\Delta u_i^{(n)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x_i} = -F_i^{(n-1)}, \quad (n \geq 1). \quad (12.9)$$

Таким образом, в нулевом приближении имеем систему уравнений Ламе, соответствующую линейной теории. А в каждом последующем приближении ($n \geq 1$) правые части системы (12.8) являются известными функциями, зависящими от решения задачи в предыдущих приближениях. Они определяются по формуле

$$F_i^{(n-1)} = 2 \sum_{j=1}^m \partial \eta_{ij}^{(n-1)} / \partial x_j.$$

Граничные условия (12.6) в n -м приближении будут иметь следующий вид:

$$u_i^{(n)} \Big|_{S_u} = u_i^{0(n)}; \quad \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_\sigma} = T_i^{(n)}. \quad (12.10)$$

Для решения задачи (12.6)–(12.8) в нулевом приближении и (12.9)–(12.10) при $n \geq 1$ можно воспользоваться каким-либо подходом для решения задач теории упругости. После определения $u_i^{(n)}$ компоненты деформаций $e_{ij}^{(n)}$ определяются из соотношений Коши

$$e_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} \right). \quad (12.11)$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(n)}$ вычисляются по формуле

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \lambda \theta^{(n)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(n)} + 2\mu \eta_{ij}^{(n-1)}. \quad (12.12)$$

Таким образом, приводим физически нелинейную граничную задачу теории упругости к последовательности соответствующих линейных краевых задач.

Замечание. В выражениях (12.11) и (12.12) компоненты $u_i^{(n)}$ и $\theta^{(n)}$ заменяются их явными представлениями (например, интегральными аналогами при использовании методов интегральных уравнений) для повышения точности вычислений. Можно ограничиться представлениями $u_i^{(n)}$ и $\theta^{(n)}$ в виде аппроксимирующих полиномов с определенными в ходе вычислений коэффициентами. Однако это снижает точность вычислений.

12.1.2. Решение задач для ортотропных сред методом возмущения изотропных упругих свойств

Рассматривается упругое однородное тело, для которого связь между напряжениями и малыми деформациями e_{ij} описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33}; \\ \sigma_{22} &= c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33}; \\ \sigma_{33} &= c_{13}e_{11} + c_{23}e_{22} + c_{33}e_{33}; \\ \sigma_{12} &= c_{66}e_{12}; \quad \sigma_{23} = c_{44}e_{23}; \quad \sigma_{13} = c_{55}e_{13}.\end{aligned}\quad (12.13)$$

Выделяем в этих соотношениях часть, по форме соответствующую закону Гука для изотропной среды: $\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$. Тогда (12.13) представляем в таком виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (c_{11} - c_{12})e_{11} + c_{12}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + (c_{13} - c_{12})e_{33}; \\ \sigma_{22} &= (c_{11} - c_{12})e_{11} + c_{12}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + (c_{22} - c_{11})e_{22} + (c_{23} - c_{12})e_{33}; \\ \sigma_{33} &= (c_{11} - c_{12})e_{11} + c_{12}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + (c_{13} - c_{12})e_{11} + (c_{23} - c_{12})e_{22} + (c_{33} - c_{11})e_{33}; \\ \sigma_{23} &= \mu e_{23} + (c_{44} - \mu)e_{23}; \quad \sigma_{13} = \mu e_{13} + (c_{55} - \mu)e_{13}; \quad \sigma_{12} = \mu e_{12} + (c_{66} - \mu)e_{12}.\end{aligned}\quad (12.14)$$

Приняв для ортотропного тела, что

$$\mu = (1/2)(c_{11} - c_{12}), \quad \lambda = c_{12}, \quad (12.15)$$

соотношения (12.14) можно записать в форме

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\delta\eta_{ij} \quad (0 \leq \delta \leq 1), \quad (12.16)$$

где функции возмущений η_{ij} , характеризующие отклонение упругих свойств ортотропного тела от свойств изотропной среды, согласно (12.14) имеют вид

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= (1/2)(c_{13} - c_{12})e_{33}; \\ \eta_{22} &= (1/2\mu)[(c_{22} - c_{11})e_{22} + (c_{23} - c_{12})e_{33}]; \\ \eta_{33} &= (1/2\mu)[(c_{13} - c_{12})e_{11} + (c_{23} - c_{12})e_{22} + (c_{33} - c_{11})e_{33}]; \\ \eta_{23} &= (1/2\mu)(c_{44} - \mu)e_{23}; \quad \eta_{13} = (1/2\mu)(c_{55} - \mu)e_{13}; \quad \eta_{12} = (1/2\mu)(c_{66} - \mu)e_{12}.\end{aligned}\quad (12.17)$$

При $\delta = 0$ соотношения (12.16) переходят в уравнения закона Гука для изотропной среды, а при $\delta = 1$ – в уравнения (12.13) обобщенного закона Гука для ортотропной среды, причем характеристики μ и λ определяются согласно (12.15).

Выражения (12.15) можно записать и с помощью «технических постоянных»:

$$\begin{aligned}\mu &= (E_1/2)[1 - \nu_{12} - \nu_{23}(\nu_{13} + \nu_{23})(E_2/E_3)][1 - \nu_{12}^2(E_1/E_2) - \\ &\quad - \nu_{23}^2(E_2/E_3) - (\nu_{13}^2 + 2\nu_{12}\nu_{13}\nu_{23})(E_1/E_3)]^{-1}; \\ \lambda &= (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})E_2[1 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13} - \nu_{13}^2 - \nu_{12}^2 - \nu_{23}^2]^{-1}.\end{aligned}$$

Опишем процедуру решения задач, базирующуюся на данном подходе.

Пусть требуется определить напряженно-деформированное состояние ортотропного тела при заданных граничных условиях. Представим неизвестные компоненты тензора напряжений σ_{ij} и вектора перемещений u_i рядами

$$\{\sigma_{ij}, u_i\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \{u_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}. \quad (12.18)$$

Вид уравнений (12.3) и (12.16) тождествен. Кроме того, выбор неизвестных u_i и σ_{ij} в форме (12.18) и (12.7) также идентичен. Следовательно, метод отыскания компонентов $u_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$ в данном случае аналогичен методу, изложенному в предыдущем разделе. Отличие состоит в том, что вместо соотношений (12.4) возмущения η_{ij} необходимо определять на основе формул (12.17).

Замечание. Данный метод возмущения изотропных упругих свойств позволяет находить решения с наибольшей степенью точности для ортотропных тел с упругими свойствами, незначительно отклоняющимися от свойств изотропной среды.

12.2. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НДС В ТЕЛАХ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ В РАМКАХ МДТТ. МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АУКСЕТИЧНОГО МАТЕРИАЛА

В гл. 2, ч. 1 упоминались «специальные материалы», для которых можно строить системы разрешающих уравнений для исследования НДС, оставаясь в рамках механики деформируемых твердых тел, но при этом физический закон, описывающий взаимосвязь между компонентами НДС, отличен от закона Гука.

В данном и следующем разделе речь идет о математических моделях, которые могут быть использованы для описания «аномалий упругости». Под «аномалиями упругости» в данном случае подразумеваем учет внутренней структуры изучаемого тела.

Рассмотрим модели для описания поведения ауксетичных материалов — материалов, для которых коэффициент Пуассона принимает отрицательные значения (см. разд. 2.1, ч. 1). Далее приведена процедура построения модели анизотропной теории упругости для описания поведения одного из типов ауксетичного материала (пеноматериала) при конечных деформациях. С целью анализа деформирования ауксетика выделяется структурная единица, моделируемая упругими стержневыми элементами [109] (рис. 12.1).

Для оценки коэффициента Пуассона расчет состояния элемента при одноосном растяжении выполняется следующим способом: упругие модули элемента определяются непосредственно из соотношения между тензорами напряжений и деформаций путем решения системы уравнений, связывающих усилия и смещения стержней. Следует отметить, что стержневые модели для моделирования нестандартного поведения материалов в качестве базовых принимаются достаточно часто (см. например, [109; 110]).

Рассмотрим модель, предложенную профессором Ю. М. Плескачевским¹ и его коллегами.

Деформационное поведение материала можно охарактеризовать деформированием структурной единицы ABC (рис. 12.1). Выделяем этот фрагмент как свободное тело, находящееся в равновесии, заменяя связи на концах стержней растягивающими P_i и изгибающими Q_i силами (рис. 12.2).

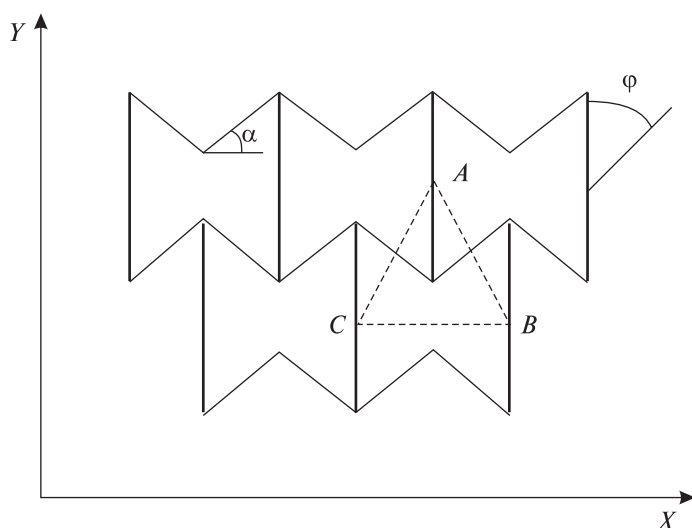


Рис. 12.1. Двумерная модель пористого материала

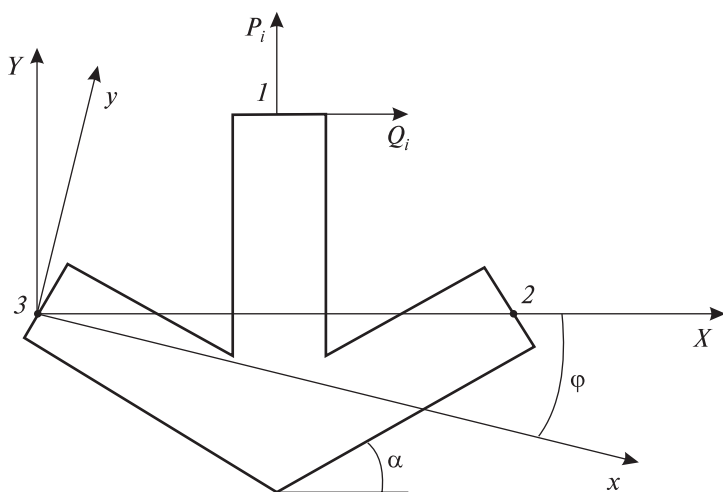


Рис. 12.2. Соединение стержневых элементов

¹ Плескачевский Юрий Михайлович, советский и белорусский ученый в области механики материалов и конструкций, материаловедения и микросистемной техники.

Под действием сил P_i и Q_i точки их приложения смещаются относительно места соединения стержней на величины:

$$\Delta \perp_i = N_i Q_i + L_i \varphi \quad \text{и} \quad \Delta \parallel_i = M_i P_i, \quad (12.19)$$

где $\Delta \perp_i$, $\Delta \parallel_i$ — соответственно поперечное и продольное перемещения i -й точки, N_i , M_i — поперечная и продольная податливости стержней, φ — угол поворота элемента.

Податливости стержней определяются из известных соотношений теории упругости [36]:

$$N_i = 4 q_i^3 / E_m + 3(1 + \nu_m) q_i / E_m, \quad M_i = q_i / E_m,$$

где ν_m , E_m — коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала стержней, $q_i = L_i / t$ — отношение длины упругой части стержня к его толщине.

Из геометрических соображений следует, что:

$$q_1 = r q_2 + \frac{1 + \sin \alpha}{2 \cos \alpha} (r - 1), \quad q_3 = q_2,$$

где $r = b/a$ — отношение длин вертикального и наклонного стержней, α — угол, характеризующий вогнутость модели (см. рис. 12.1), а параметр q_2 связан с объемной долей армирующей фазы V_f следующим соотношением:

$$V_f = \frac{(2+r)q_2 + \frac{(r-1)(1+\sin \alpha)}{2 \cos \alpha} + \frac{(1+\sin \alpha)}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4}}{4 \cos \alpha (r - \sin \alpha) \left[\frac{q_2 + (1+\sin \alpha)}{2 \cos \alpha} \right]^2}.$$

Решая уравнение относительно q_2 , получаем:

$$q_2 = \frac{\sqrt{(r+2)^2 - 4V_f(r-\sin \alpha)(2+\sin \alpha)} - [4V_f(r-\sin \alpha)(1+\sin \alpha) - r - 2]}{8V_f \cos \alpha (r - \sin \alpha)}.$$

Тогда податливости определяются по следующим формулам:

$$N_1 = 4 \frac{\left(r q_2 + \frac{1 + \sin \alpha}{2 \cos \alpha} (r - 1) \right)^3}{E_m} + 3(1 + \nu_m) \frac{r q_2 + \frac{1 + \sin \alpha}{2 \cos \alpha} (r - 1)}{E_m},$$

$$N_2 = 4 \frac{q_2^3}{E_m} + 3(1 + \nu_m) \frac{q_2}{E_m}, \quad M_1 = \frac{r q_2 + \frac{1 + \sin \alpha}{2 \cos \alpha} (r - 1)}{E_m}, \quad M_2 = \frac{q_2}{E_m}.$$

Таким образом, податливости являются известными функциями параметра r , угла α , объемной доли армирующей фазы V_f , коэффициента Пуассона и модуля Юнга материала стержней ν_m и E_m соответственно.

Затем определяются смещения точек 1 и 2 относительно точки 3:

$$\bar{\delta}_i = \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_3, \quad i = 1, 2. \quad (12.20)$$

Далее, задав одноосное деформационное состояние структурного элемента (задав одну компоненту тензора деформации), находятся относительные смещения

концов стержней. После этого определяются действующие на концах стержней силы, необходимые для таких смещений. И, наконец, находятся компоненты тензора напряжений.

Задав ε_{xx} , определяются три коэффициента жесткости a_{11} , a_{12} , a_{13} . Задав ε_{yy} , вычисляются три коэффициента жесткости a_{13} , a_{23} , a_{33} , а задав ε_{xy} — a_{12} , a_{22} , a_{23} .

Для заданного значения и направления деформации компоненты $\bar{\delta}_i$ считаются известными.

Предполагаем, что в системе координат x , y , повернутой относительно X , Y на угол φ (см. рис. 12.2), задана деформация сдвига ε_{xy} . Тогда:

$$\begin{aligned}\delta_{1x} &= \varepsilon_{xy} l_2 \left[\cos \varphi (r - \sin \alpha) + \sin \varphi \cos \alpha \right] \cos \varphi, \\ \delta_{1y} &= -\varepsilon_{xy} l_2 \left[\cos \varphi (r - \sin \alpha) + \sin \varphi \cos \alpha \right] \sin \varphi, \\ \delta_{2x} &= 2\varepsilon_{xy} l_2 \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi, \\ \delta_{2y} &= -2\varepsilon_{xy} l_2 \cos \alpha \sin^2 \varphi,\end{aligned}\tag{12.21a}$$

где $l_i = L_i + t((1 + \sin \alpha)/(2 \cos \alpha))$ — общая длина стержня.

Если в указанной системе задана деформация растяжения ε_{xx} , то получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\delta_{1x} &= \varepsilon_{xx} l_2 \left[\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi (r - \sin \alpha) \right] \cos \varphi, \\ \delta_{1y} &= -\varepsilon_{xx} l_2 \left[\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi (r - \sin \alpha) \right] \sin \varphi, \\ \delta_{2x} &= 2\varepsilon_{xx} l_2 \cos \alpha \cos^2 \varphi, \\ \delta_{2y} &= -2\varepsilon_{xx} l_2 \cos \alpha \cos \varphi \sin \alpha.\end{aligned}\tag{12.21б}$$

Аналогично для компоненты деформации ε_{yy} имеем:

$$\begin{aligned}\delta_{1x} &= \varepsilon_{yy} l_2 \left[\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi (r - \sin \alpha) \right] \sin \varphi, \\ \delta_{1y} &= -\varepsilon_{yy} l_2 \left[\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi (r - \sin \alpha) \right] \cos \varphi, \\ \delta_{2x} &= 2\varepsilon_{yy} l_2 \cos \alpha \sin^2 \varphi, \\ \delta_{2y} &= -2\varepsilon_{yy} l_2 \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}\tag{12.21в}$$

Запись (12.21) включает четыре уравнения относительно $\bar{\delta}_i$ ($\delta_{1x}, \delta_{1y}, \delta_{2x}, \delta_{2y}$) с семью неизвестными P_j , Q_j , φ ($j = 1, 2, 3$). Недостающие уравнения получаем из условий равновесия:

$$\begin{aligned}(P_2 - P_3) \cos \alpha + (Q_2 + Q_3) \sin \alpha + Q_1 &= 0, \\ (P_2 + P_3) \sin \alpha + (Q_3 - Q_2) \cos \alpha + P_1 &= 0, \\ rQ_1 + Q_2 + Q_3 &= 0.\end{aligned}\tag{12.22}$$

Подставляя соотношение (12.19) в выражение (12.20), из (12.20) и (12.22) находим усилия P_j , Q_j как функции параметров α , φ , r и V_f .

Учет равновесия элемента позволяет найти компоненты двумерного тензора напряжений. Они определяются как отношения проекции силы на ось i к площади поверхности, нормальной к оси j ($i, j = x, y$).

Итак, тензор напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma_{xx} = \frac{[(P_2 + P_3)\cos\alpha + (Q_2 - Q_3)\sin\alpha]}{4l_2(r - \sin\alpha)},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{P_1}{4l_2\cos\alpha}, \quad \sigma_{xy} = \frac{Q_1}{4l_2\cos\alpha}.$$

Зная компоненты тензора напряжений в системе X, Y , можно определить их в системе x, y и, рассматривая отдельно случаи (12.21а), (12.21б) и (12.21в), найти все компоненты тензора модулей упругости a_{ij} :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = a_{11}\varepsilon_{xx} + a_{12}\varepsilon_{xy} + a_{13}\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{xy} = a_{12}\varepsilon_{xx} + a_{22}\varepsilon_{xy} + a_{23}\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{yy} = a_{13}\varepsilon_{xx} + a_{23}\varepsilon_{xy} + a_{33}\varepsilon_{yy}. \end{cases} \quad (12.24)$$

В частности, для определения коэффициента Пуассона $\nu_{xy} = -\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{yy}$ и модуля Юнга $E_y = \sigma/\varepsilon_{yy}$ при $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$ и $\sigma_{yy} = \sigma$ записываем

$$\nu_{xy} = \frac{a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}},$$

$$E_y = -a_{13}\nu_{xy} + a_{23} \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} + a_{33}.$$

Таким образом, получены зависимости ν_{xy} как функции от $(\alpha, \varphi, r, V_f, \nu_m, E_m)$ и E_y как функции от $(\alpha, \varphi, r, V_f, \nu_m, E_m)$.

Например, для значений угла нагружения $\varphi \approx 0$ и $\varphi \approx \pi/2$, когда ν_{xy} становится отрицательным, имеем

$$\nu_{xy}(\varphi=0) = -\frac{(r - \sin\alpha)\sin\alpha(N_2 - M_2)}{2M_1 + N_2\cos^2\alpha + M_2\sin^2\alpha},$$

$$\nu_{xy}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha(N_2 - M_2)}{(r - \sin\alpha)(N_2\sin^2\alpha + M_2\cos^2\alpha)}.$$

Соотношение для модуля Юнга

$$E_y(\varphi=0) = \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha(N_2 - M_2)\nu(\varphi=0) + (r - \sin\alpha)(M_2\cos^2\alpha + N_2\sin^2\alpha)}{2\cos\alpha[2M_1(M_2\cos^2\alpha + N_2\sin^2\alpha) + N_2M_2]},$$

если ячейка имеет форму правильного шестиугольника, сводится к такому:

$$E_y = (2/\sqrt{3})1/(N + 3M).$$

Для получения функциональных зависимостей между напряжениями и деформациями используются известные соотношения для анизотропных тел:

$$\sigma_{xx} = \frac{E_x \varepsilon_{xx} + \nu E_y \varepsilon_{yy}}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\nu E_x \varepsilon_{xx} + E_y \varepsilon_{yy}}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_{xy} = 2G_{xy} \varepsilon_{xy}. \quad (12.25)$$

Подставляя в (12.25) следующие решения для исходной системы координат (X, Y) (при угле поворота $\varphi = 0$, как одном из вариантов отрицательности коэффициента Пуассона для данной модели):

характеристики продольных модулей Юнга определяются следующим образом

$$E_x = \frac{\cos \alpha}{2(r - \sin \alpha)(N_2 \sin^2 \alpha + M_2 \cos^2 \alpha)};$$

$$E_y = \frac{r - \sin \alpha}{2 \cos \alpha (2M_1 + N_2 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha)}. \quad (12.26)$$

модуль сдвига и коэффициент Пуассона вычисляются так:

$$G_{xy} = \frac{\cos \alpha}{4[r(N_2 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha) - M_2 \sin \alpha]};$$

$$\nu_{xy} = -\frac{(r - \sin \alpha) \sin \alpha (N_2 - M_2)}{2M_1 + N_2 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha}. \quad (12.27)$$

Податливости M_1, M_2, N_2 определяются по описанным выше формулам при заданных V_f, α, r .

Соотношения (12.26), (12.27) могут быть также получены при рассмотрении структурного элемента отдельно в трех состояниях одноосного нагружения. Задав σ_{xx} при $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$, найдем E_x и ν_{xy} . Задав σ_{yy} при $\sigma_{xy} = \sigma_{xx} = 0$, найдем E_y . Задав σ_{xy} при $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, находим G_{xy} .

Зная компоненты тензора модулей податливости в системе XU , можно определить эти компоненты и в любой системе xu , повернутой относительно исходной на угол φ . Для этого следует использовать известные соотношения пересчета компонент тензора модулей податливости при повороте координатных осей.

Итак, построенная математическая модель в целом состоит из уравнений равновесия Коши, уравнений неразрывности, граничных условий и физических уравнений (12.24), определяющих связь между напряжениями и деформациями.

12.3. ОПИСАНИЯ НДС ТЕЛ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ В ЦЕЛОМ КАК СПЛОШНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С РАЗЛИЧНЫМИ ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ

В данном разделе рассмотрен один из возможных подходов к описанию НДС тел блочной структуры в рамках моделей МДТТ с учетом различных внутренних связей между элементами. Для данной задачи элементами являются отдельные блоки, а связями – межблоковые промежутки.

Существенным моментом при моделировании является выбор поведения собственно блоков и межблокового пространства. Блоки могут выбираться как жесткие тела либо как упругие. В свою очередь межблоковое пространство может рассматриваться как жесткое или упругое сцепление между соседними блоками. В связи с этим большое значение имеет знание свойств межблоковых промежутков с целью прогнозирования значений коэффициентов трения при возможных подвижках, вызывающих необратимые деформации в теле.

Таким образом, для описания деформирования блочной структуры необходимо:

- знать физико-механические свойства отдельных элементов;
- знать физико-механические свойства межблоковых промежутков;
- определить условия статического (или динамического) равновесия системы блоков при заданном виде нагружения;
- установить порядок приложения нагрузок (или догружения) не только в каждой граничной точке множества блоков, но и внутри боковой структуры на межблоковых промежутках.

Следует отметить, что траектория нагружения системы блоков может быть зарегистрирована только на внешних, но не на внутренних межблочных границах.

Очевидно, что вариантов движения блоковой структуры и взаимодействия блоков в этой структуре может быть несколько. Рассмотрим подход к описанию состояния блоковой структуры в предположении деформирования блоков как твердых тел, на основании работы [111].

Наиболее естественным является подход, при котором трение между блоками рассматривается в том виде, в каком оно есть на самом деле. Однако в этом случае возникает необходимость использования методов теории вероятностей, ведь набор блоков содержит хотя и счетное, но огромное число элементов. Вариантов формирования блоков тоже бесконечно много. Поэтому даже возможностей современной вычислительной техники недостаточно для решения задачи в такой постановке. Перспективно другое направление моделирования движения блочной структуры — переход от непотенциальности в контактах к потенциальным связям.

Замечание. Как известно, силы трения не потенциальны.

Для моделирования контактных условий между блоками используются контакт-элементы, представляющие тонкие образования, жестко связанные с блоками и деформирующиеся по следующему закону:

$$\sigma_n = k_n (v_n^+ - v_n^-), \quad \tau_t = k_t (u_n^+ - u_n^-), \quad (12.28)$$

где v_n^+ , u_n^+ — смещения точек границ блоков соответственно по нормали к ним и по касательной для верхнего и нижнего берегов границ блоков; k_n и k_t — коэффициенты пропорциональности.

Механический смысл выражений (12.28) состоит в следующем: первая формула показывает, что по нормали к границам блоков связующее деформируется по типу пружины; вторая формула — что по касательной происходит сдвиг, не зависящий от σ_n .

Соотношение (12.28) потенциально, так как модуль жесткости k_n является функцией σ_n , а модуль жесткости k_t — функцией τ_n . Следовательно, работа, затрачиваемая

мая на деформирование контакт-элемента, обусловлена только начальной и конечной точками пути нагружения.

Несколько «критических замечаний» относительно соотношения (12.28), несмотря на то что оно достаточно активно используется в прикладных исследованиях (например, в задачах геомеханики). Во-первых, соотношения (12.28) не учитывают трение между блоками, так как τ_n не учитывает влияние σ_n , а в блочных моделях оно должно иметь место. Во-вторых, в (12.28) не учитывается толщина контакта-элемента (толщина межблокового пространства – прослойка). Вместе с тем трещина прослойки влияет на характер деформирования.

В качестве модельного рассматривается слоистое двумерное твердое тело. Слои параллельны между собой, наклонены под углом α к плоскости OXZ и в первом случае имеют одну и ту же шероховатость (рис. 12.3).

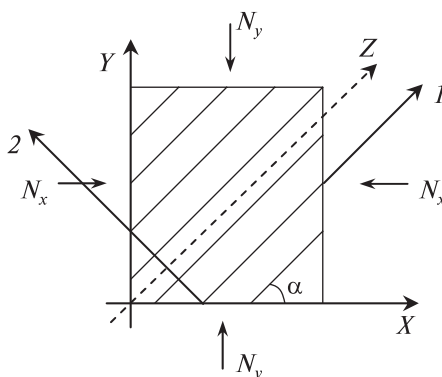


Рис. 12.3. Модель слоистого тела с ослаблениями

Пусть в начальном состоянии тело находится под действием сжимающих сил, притягивающих слои друг к другу. Из уравнений равновесия можно получить, что нормальная N_2 и касательная N_{21} нагрузки, действующие на слои:

$$N_2 = -N_x \sin^2 \alpha - N_y \cos^2 \alpha, \quad N_{21} = (N_x - N_y) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Из механического смысла следует, что N_{21} – усилие, имеющее характер силы трения на поверхности слоев, поэтому

$$N_{21} = k_{tp} N_2,$$

где k_{tp} – коэффициент трения между слоями. Если φ – угол трения, то $k_{tp} = \operatorname{tg} \varphi$, где $\varphi \in [-\varphi^*, \varphi^*]$. Здесь φ^* – предельное значение.

Замечание. Рассматриваемая схема соответствует такому порядку приложения нагрузки, когда сначала действует нагрузка N_2 , а затем нагрузка N_{21} , что физически оправданно для большинства случаев реальных ситуаций нагружения блочных структур. Если вначале действует N_{21} , а затем N_2 , то конфигурация блочной структуры будет другой.

Принимается, что N_x , N_y и k_{tp} таковы, что блочная структура, изображенная на рис. 12.3, находится в состоянии статического равновесия.

Пусть рассматриваемая блочная модель нагружается дополнительными нагрузками, такими, что в результате их воздействия возникают напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , приложенные к граням изображенного на рис. 12.4 прямоугольника. Напряжения σ_1 , σ_2 , σ_{12} , выражаются через σ_x , σ_y , τ_{xy} по известным формулам.

Главные напряжения вместе с N_1 , N_2 , N_{21} образуют следующие нагрузки (рис. 12.4): $N_1 + \sigma_1$; $N_2 + \sigma_2$; $N_{12} + \sigma_{12}$.

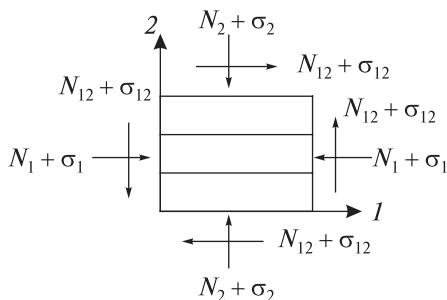


Рис. 12.4. Принципиальная схема нагружения элемента блочной структуры

При сжатии тела в направлении, перпендикулярном плоскостям слоев, вначале деформируются прослойки между блоками. Принимается, что слои более «жесткие», чем прослойки. Поэтому можно считать, что блочная структура вначале деформируется за счет деформации прослоек.

Кроме того, принимается дополнительно, что под воздействием нормальной нагрузки $N_2 + \sigma_2$ поперечные деформации $M_1 + \varepsilon_1$ не возникают. Аналогично из-за большей податливости при деформировании прослоек можно считать, что нормальное усилие по оси 1 — $N_1 + \sigma_1$, не вызывает поперечной деформации $M_2 + \varepsilon_2$.

Таким образом, деформации по оси 1 — $M_1 + \varepsilon_1$, являются функциями только напряжений $N_1 + \sigma_1$, а по оси 2 — $M_2 + \varepsilon_2$ — функциями только $N_2 + \sigma_2$. Можно принять, что эти функции линейны:

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 \sigma_1; \varepsilon_2 = \lambda_2 \sigma_2. \quad (12.29)$$

Замечание. Как следует из (12.29), их вид подобен (12.28).

Следовательно, в этом случае блочная модель в направлении осей 1 и 2 деформируется по типу пружины (рис. 12.5).

Важно то, что связь между ε_1 , ε_2 и σ_1 , σ_2 в (12.29) не требует знания значений N_1 , N_2 , M_1 и M_2 . Знание этих функций необходимо при нелинейной связи между величинами ε_i и σ_i . Так, например, если $M_1 + \varepsilon_1 = A(N_1 + \sigma_1)^2$, где $A = \text{const}$, в этом случае $\varepsilon_1 = 2AN_1\sigma_1 + A\sigma_1^2$.

По своему механическому смыслу коэффициенты λ_i в (12.29) представляют податливость материала. Например, если выполняется условие

$$\lambda_2 > \lambda_1, \quad (12.30)$$

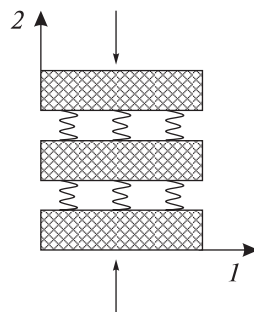


Рис. 12.5. Принципиальная схема нормального нагружения элемента блочной структуры

то материал более ослаблен (или податлив) в направлении оси 2, чем в направлении оси 1 за счет свойств прослоек.

Кроме того, соотношение (12.30) указывает на то, что сдвиги в блочной структуре в первую очередь будут иметь место в плоскостях, перпендикулярных оси 2.

Пусть теперь, вследствие приложения нагрузки σ_2 , а затем нагрузки σ_{21} блоки сдвигаются по плоскостям ослабления. В этом случае усилия $N_{12} + \sigma_{12}$ равнозначны силе трения

$$N_{12} + \sigma_{12} = k_{tp} (N_2 + \sigma_2).$$

Очевидно, что порядок приложения нагрузок σ_2 и σ_{21} между блоками не следует учитывать, если выполняется условие

$$|\sigma_2| \ll N_2, \quad (12.31)$$

т. е. когда влияние σ_2 на процесс сдвига по сравнению с N_2 пренебрежимо мало. В этом случае

$$\sigma_{21} = k_{tp} N_2 - N_{21}. \quad (12.32)$$

В [111] показано, что правая часть (12.32) является функцией сдвига $\gamma = 2\varepsilon_{21}$. Тогда в соответствии с основными положениями МДТТ разложим ее (правую часть (12.32)) в ряд по степеням γ :

$$\sigma_{21} = \sum_i a_i \gamma^i. \quad (12.33)$$

Оставаясь в рамках малых сдвигов в представлении (12.33), можно пренебречь степенями выше первой. Тогда $\sigma_{21} = a_1 \gamma = 2a_1 \varepsilon_{21}$.

Введя обозначения $2\lambda_{21} = a_1^{-1}$, получаем

$$2\varepsilon_{21} = 2\lambda_{21} \sigma_{21}. \quad (12.34)$$

Итак, в первом приближении математическая модель тела блочной структуры с явными проявлениями линий скольжения без нарушения сплошности тела в целом состоит из уравнений равновесия Коши, уравнений неразрывности, граничных условий и физических уравнений, определяющих связь между напряжениями и деформациями (12.29), (12.34), которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\tau_{xy}, \\ 2\varepsilon_{xy} = a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\tau_{xy}. \end{cases} \quad (12.35)$$

В (12.35) коэффициенты a_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) определяются через податливости λ_1, λ_2 , λ_{12} и угол наклона слоев α по формулам

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda_1 \cos^4 \alpha + \lambda_2 \sin^4 \alpha + 2\lambda_{12} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ a_{22} = \lambda_1 \sin^4 \alpha + \lambda_2 \cos^4 \alpha + 2\lambda_{12} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ a_{12} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ a_{13} = 0,5 [\lambda_1 - \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_{12}) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha, \\ a_{23} = 0,5 [\lambda_1 - \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_{12}) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha, \\ a_{33} = (\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 2\alpha + 2\lambda_{12} \cos^2 2\alpha. \end{cases} \quad (12.36)$$

Таким образом, закон деформирования твердого тела вида (12.35)–(12.36) отражает модель поведения в случае образования в теле блочной структуры. Закон (12.35)–(12.36) справедлив при выполнении условия типа (12.31).

Соотношения, аналогичные (12.35)–(12.36), могут быть построены и для трехмерного случая [112].

Рассмотрим процедуру построения соотношений, определяющих появление перемещений в теле по плоскостям ослабления для модели твердого тела, изображенной на рис. 12.3, в случае нагружения данного тела сжимающими усилиями. В теле имеются плоскости ослабления, составляющие с осью абсцисс угол α . Так как оси OX и OY являются главными осями, то напряжения σ_x , σ_y — главные напряжения. В соответствии с этим имеет место следующее напряженное состояние: $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\tau_{xy} = 0$.

Так как наибольший интерес представляет ситуация возникновения перемещений по плоскостям ослабления, в качестве основных деформационных процессов следует рассмотреть процессы сдвига по плоскостям ослабления.

Деформации сдвига по плоскостям ослабления для модели, представленной на рис. 12.3, возможны, если выполняется следующее условие:

$$|\tau_{21}| = \left| \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right| \geq k_{12}. \quad (12.37)$$

Здесь k_{12} — положительная постоянная, предел упругости блочной структуры на сдвиг.

Так как в рассматриваемой ситуации $\tau_{xy} = 0$, сдвиги могут произойти, если выполняется условие

$$\left| \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha \right| \geq k_{12}. \quad (12.38)$$

Отсюда следует, что наименьшему значению из выписанного неравенства $|\sigma_y - \sigma_x| = 2k_{12}$ соответствуют углы $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$.

При уменьшении либо увеличении значения угла α появление скольжения одних слоев по другим требует возрастания величины $|\sigma_y - \sigma_x|$.

При выполнении условия $\alpha \rightarrow 0^\circ$ или $\alpha \rightarrow 90^\circ$ для появления скольжения по нарушениям величина $|\sigma_y - \sigma_x|$ должна стремиться к бесконечности. Однако в таких пределах изменения α еще до того, как будет выполнено условие (12.37) или (12.38), при больших значениях $|\sigma_y - \sigma_x|$ могут быть выполнены другие предельные условия. Например:

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &= |\sigma_x \cos^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha| \geq k_1, \\ |\sigma_2| &= |\sigma_x \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha| \geq k_2, \end{aligned} \quad (12.39)$$

где k_1 и k_2 — соответственно пределы упругости блоков в направлениях осей 1 и 2.

Замечание. Условие (12.39) — предельное условие, когда собственно слои начинают деформироваться неупруго с остаточными деформациями. Следует подчеркнуть, что выполнение иных предельных условий не исключает и проявления условий скольжения слоев.

Таким образом, для рассматриваемой модели блочной структуры в пространстве напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ условие наступления предельных состояний типа сдвига и неупругого деформирования слоев с остаточными деформациями представляет собой параллелепипед. Вид данного параллелепипеда (замкнутый или открытый) зависит от значений пределов упругости k_1, k_2 и k_{12} . Описанные здесь предельные состояния соответствуют достижению граней или ребер параллелепипеда.

Замечание. В качестве примера можно привести возможные варианты соотношений идеальной пластичности для такого параллелепипеда [37]:

- если $|\sigma_{12}| = k_{12}, |\sigma_1| < k_1, |\sigma_2| < k_2$, то $\varepsilon_1 = \lambda_1 \sigma_1, \varepsilon_2 = \lambda_2 \sigma_2$;
- если $|\sigma_{12}| < k_{12}, |\sigma_1| = k_1, |\sigma_2| < k_2$, то $\varepsilon_{12} = \lambda_{12} \tau_{12}$ и $\varepsilon_2 = \lambda_2 \sigma_2$;
- если $|\sigma_{12}| = k_{12}, |\sigma_1| = k_1, |\sigma_2| < k_2$, то $\varepsilon_2 = \lambda_2 \sigma_2$;
- если $|\sigma_{12}| = k_{12}, |\sigma_1| = k_1, |\sigma_2| = k_2$, то в этом случае деформации отыскиваются после определения перемещений.

12.4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

12.4.1. Молекулярное приближение в теории упругости эластомеров

В настоящее время изделия из резиноподобных материалов, как из натурального (НР), так и искусственного (ИР) каучука, нашли широкое применение и активно заменяют изделия из классических металлов и сплавов. Такие материалы называют *эластомерами*.

В качестве механических параметров для описания поведения эластомеров, в принципе, достаточно таких параметров, как «деформация растяжения» (или просто растяжение) и «функция релаксации» резиновой основы (каркаса). Такое свойство современных резин, как большая эластичность (упругость) — способность восстанавливать первоначальные размеры после больших деформаций, было несвойственно натуральному латексу до тех пор, пока Чарльз Гудьер не открыл процесс вулканизации резины в 1939 г. Новый материал сохраняет прочность и жесткость при больших растяжениях и обладает высокой скоростью восстановления первоначальной формы при снятии нагрузок.

Основными характеристиками эластомеров являются: свойство демпфирования, затухания (способность быстрого гашения больших деформаций); свойство восстановления первоначальной формы изделия и сохранения свойств упругости; способность достижения деформаций растяжения значительных величин без разрушения изделия.

В то время как термореактивная резина остается доминирующей в производстве различных видов и типов резины, трудности в технологическом процессе ее производства привели к разработке и широкому использованию *термопластичных эластомеров (ТПЭ)* — специальных пластмасс. Эти материалы легче поддаются обработке и непосредственно подлежат вторичной переработке. Хотя ТПЭ не так похожи на резину, как термореактивные материалы, они нашли широкое применение в промышленности (автомобильная отрасль, производство энергопоглощающих материалов и др.).

Механическое поведение эластомеров серьезно отличается от поведения классических металлов. Так, диаграмма поведения «напряжение — деформация» для таких материалов совершенно иная, чем для металлов. Кривая напряженно-деформированного состояния резины показывает нелинейное поведение материала с самого начала процесса деформации резины, в то время как, например, подобная кривая для стали на участке ниже предела текучести имеет линейный характер. Кроме того, деформация резинового образца достигает гораздо более высокой величины растяжения, чем у образца из стали. Многие резиновые и эластомерные материалы могут получить деформацию до 300–500 %.

Существуют специальные типы резины, которые не предназначены для деформаций таких больших величин. Например, такой тип резины используется для изготовления мячей для гольфа, которые намного жестче, чем резиновая лента. Максимальные деформации мячей для гольфа составляют порядка 40–50 %. Их строение предназначено для хорошего восстановления первоначальной формы и сохранения упругих свойств, а не для достижения деформаций растяжения больших величин.

Замечание. Причина, по которой резиновые материалы демонстрируют иное поведение, чем металлы, заключается в их структуре и характеристиках на субмикроскопическом уровне. У металлов кристаллические решетки атомов более или менее упорядочены. Молекулы каучукового материала, напротив, состоят из атомов углерода, связанных в длинную цепочку, напоминающую спутанную коллекцию отдельных кусков нити. Поскольку связь углерод — углерод ($C-C$) может совершать вращение, то эти запутанные длинноцепочечные полимеры могут перестраиваться в бесконечное число различных конфигураций (структур). В то время как случайную намотку можно рассматривать как пружину, истинная упругость требует присутствия поперечной связи, чтобы остановить процесс вязкого течения. В термореактивной резине такие поперечные связи обеспечиваются химическими связями. В термопластичных эластомерах функцию поперечных связей выполняет присутствие физического «запутывания нитей». Степень «сшивания» используется для контроля жесткости резины.

С точки зрения классической теории механики сплошных сред механическое поведение материалов на микроуровне не согласуется с гипотезой сплошности, являющейся базовой в механике сплошных сред. Вместе с тем механико-математическая модель упругого поведения резины на молекулярном уровне все же может быть построена, используя базовые положения теории упругости на макроскопическом уровне.

В данном разделе описан подход к построению модели упругого поведения резины на основе *первого принципа термодинамики* [46]. Соотношения «напряжения — деформации растяжения» получаются путем развития традиционного континуального подхода, на основе введения определенного выражения для плотности энергии деформации и используя ограничения на базовые соотношения, налагаемые вторым законом термодинамики.

Одно из главных различий между кристаллическим металлом и аморфным полимером заключается в том, что полимерные цепи имеют значительную свободу «самостоятельного перестроения». Термин «конфигурация» в данном контексте

используется для описания различных пространственных ориентаций цепочки. Физическая «легкость», с которой достигаются различные конфигурации, является результатом связи между атомами углерода. Когда атомы углерода соединяются, образуя полимерную цепочку, угол «склеивания» составляет $109,5^\circ$, но существует также степень свободы вращения вокруг оси связи. Для большинства макромолекул число атомов углерода может варьировать от 1000 до 100 000.

С каждой связью, имеющей определенную степень свободы при ориентировании, число конфигураций становится довольно большим. Вследствие значительного количества числа возможных конфигураций эффективным представляется использование аппарата статистической термодинамики для получения уравнений упругости резины на основании первых принципов термодинамики. Помимо большого числа конфигураций для одной цепочки существует еще одна причина, по которой использование статистического подхода представляется целесообразным: реальный полимер имеет большое количество различных индивидуальных цепочек, составляющих основную массу материала.

Рассмотрим одну конкретную молекулу, или полимерную цепочку и ее различные конфигурации (структуры). Количество различных конфигураций, которые может получить цепочка, зависит от расстояния, разделяющего ее концы. Если молекула состоит из n сегментов, каждый из которых имеет длину l , то общая длина молекулы будет равна $L = nl$. Если отдалять начальный и последний концы молекулы друг от друга, сохраняя постоянную общую длину молекулы, равную L , то в предельном случае («выстраивание» цепочки по прямой линии) получим: длина L означает, что существует только одна возможная конфигурация, сохраняющая цепь неповрежденной. По мере того как концы молекулы располагаются все ближе друг к другу, появляется все больше возможных конфигураций, которые может образовать цепочка. В данном случае можно использовать гауссово распределение количества конфигураций в зависимости от расстояния между концами цепочки. На рис. 12.6 показано, насколько больше конфигураций возможно при уменьшении расстояния между концами молекулы.

Молекулярное расстояние от начальной точки до конечной молекулы r находится путем сложения длин l всех сегментов (рис. 12.7).

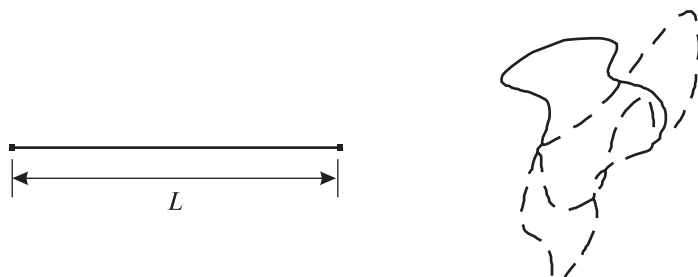


Рис. 12.6. Схематическое сравнение молекулярных конфигураций по мере изменения расстояния между концами молекулы. Пунктирные линии обозначают возможные конфигурации

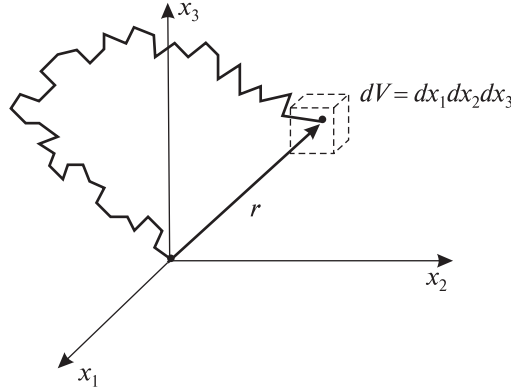


Рис. 12.7. Свободно соединенная цепочка с вектором r от начального до конечного положения молекулы

Алгебраическое сложение длин отрезков дает расстояние r от начальной до конечной точки цепочки, но ничего не говорит о собственно длине цепочки. Как уже было указано, если концы молекулы относительно близки, а сама молекула длинная, то может существовать множество конфигураций. Формула для величины квадрата вектора r по правилам векторного сложения записывается следующим образом:

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{l}_n)(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{l}_n), \quad (12.40)$$

где $\mathbf{l}_i$ — вектор, определяющий i -й сегмент молекулярной цепочки.

После выполнения операции умножения в правой части уравнения (12.40) данное уравнение записывается в таком виде:

$$r^2 = nl^2 = [\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3 + \dots + \mathbf{l}_{n-1} \mathbf{l}_n].$$

Это формула представляет собой квадрат «сквозных» (от начальной точки до конечной) векторов для одной молекулы полимера. В репрезентативном объеме материала имеется много цепочек, из которых можно сформировать среднее «сквозное» расстояние:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_1^N (nl^2 + [\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3 + \dots + \mathbf{l}_{n-1} \mathbf{l}_n]). \quad (12.41)$$

Слагаемое в правой части уравнения (12.41) в квадратных скобках считается равным нулю, исходя из следующей логики. Так как в пробе взято большое количество молекул, то разумно, что для каждого произведения $\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2$ найдется еще другой сегмент парного произведения, который будет равен его отрицательному значению. Пара «гасящих» сегментов не обязательно должна происходить из одной и той же молекулы. Таким образом, заключенное в квадратные скобки выражение в уравнении (12.41) считается суммирующимся до нуля, оставляя такое простое выражение для среднего «сквозного» расстояния:

$$\langle r^2 \rangle = nl^2. \quad (12.42)$$

Среднее «сквозное» расстояние показывает, сколько сегментов или атомов углерода находится в определенной цепочке. Для решения вопроса, как «сквозные» расстояния распределяются по всему полимеру, предполагается использовать гауссово распределение. Начало координат выбирается таким образом, чтобы оно находилось на одном конце репрезентативной цепочки. На рис. 12.7 показано это для одной цепочки, причем положение конечного конца цепочки в бесконечно малом объеме dV по отношению к начальному определяется вектором $\mathbf{r}$.

Вероятность того, что конец цепочки располагается в объеме dV , задается следующим выражением:

$$P(r)dr = \exp\left(-\left(r/\rho\right)^2\right) / \left(\sqrt{\pi}\rho\right)^3 dr,$$

где ρ — параметр распределения.

Используя данное представление, для распределения усредненного «сквозного» расстояния легко получить:

$$\langle r^2 \rangle_0 = \int_0^\infty r^2 P(r) dr = (3/2)\rho^2, \quad (12.43)$$

где подстрочный индекс «0» означает, что это внутреннее свойство цепочки, так как оно рассматривалось отдельно.

Когда цепочка помещается обратно в соединенную «сшитую» сеть цепочек, среднее «сквозное» расстояние записывается как $\langle r^2 \rangle_i$. Данное обозначение учитывает тот факт, что цепочка имеет ограничения, накладываемые на нее, будучи упакованной в ограниченный объем с другими цепочками.

Сравнивая уравнения (12.42) и (12.43), можно получить следующее выражение для параметра распределения ρ : $\rho = \sqrt{2n/3l}$.

Воспользовавшись вторым законом термодинамики, получаем, что силу, создаваемую при одноосном растяжении образца, можно записать в терминах свободной энергии Гельмгольца ψ :

$$F = \left. \frac{\partial \psi}{\partial L} \right|_{\theta, V}, \quad (12.44)$$

где F — сила, L — длина, индексы θ и V обозначают, что изменение длины происходит при постоянных температуре и объеме.

Используя выражение для свободной энергии ψ через внутреннюю энергию u и энтропию η в виде: $\psi = u - \eta\theta$ (здесь θ — температура), представление для силы F (12.44) записывается в терминах внутренней энергии и энтропии:

$$F = \frac{\partial u}{\partial L} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial L}. \quad (12.45).$$

Используя уравнение (12.45), можно выполнить некоторое сравнение металлов и идеальных резин.

В металлах кристаллическая структура остается неповрежденной, поскольку материал обладает свойством деформироваться без нарушения. Атомы перемещаются ближе или дальше от соседних атомов, создавая восстанавливающую силу, но от-

носительный порядок между атомами остается прежним. Второе слагаемое в уравнении (12.45) не вносит никакого вклада в значение усилия F , пока относительный порядок атомов остается неизменным.

Для идеальной резины изменение длины не влияет на внутреннюю энергию. Таким образом, первое слагаемое в уравнении (12.45) вследствие дифференцирования по параметру «длина» равно нулю. Однако растяжение образца увеличивает среднее расстояние от начального до конечного конца молекулы, уменьшая возможные конфигурации для всевозможных вариантов цепочек. Это уменьшение конфигураций приводит к отрицательному изменению энтропии по мере увеличения длины.

Энтропия для одной цепочки связана с конфигурацией посредством средней «сквозной» длины. Так как число конфигураций пропорционально вероятности на единицу объема $P(r)$, используя уравнение Больцмана, энтропию можно записать в таком виде:

$$\eta = \eta_0 + k \ln P(r) = \eta_0 + k \left[3 \ln(\sqrt{\pi} \rho) + (r/\rho)^2 \right], \quad (12.46)$$

где k — константа Больцмана.

Подставляя выражение для энтропии в виде (12.46) в уравнение (12.45), получаем для идеальной резины следующее выражение для одиночной силы сокращения цепочки («retractive force»):

$$F = 2k\theta r^2 / \rho^2.$$

Теперь рассмотрим полимер, к которому приложены силы, приводящие к относительным растяжениям λ_1 , λ_2 и λ_3 .

Работа, выполненная на каждой цепочке материала, является суммой работы, проделанной в каждом координатном направлении x_i :

$$W^{(i)} = \int_{x_i}^{\lambda^{(i)} x_i} f_i dx_i = \frac{2k\theta}{\rho^2} \int_{x_i}^{\lambda^{(i)} x_i} x_i dx_i = \frac{k\theta}{\rho^2} \left[\left(\lambda^{(i)} \right)^2 - 1 \right] x_i^2 \quad (\text{нет суммирования}).$$

Принимая во внимание работу, проделанную на всех цепочках, получаем суммарную работу в каждом координатном направлении:

$$\sum_n W^{(i)} = \frac{k\theta}{\rho^2} \left[\left(\lambda^{(i)} \right)^2 - 1 \right] \sum_n x_i^2 \quad (\text{нет суммирования}), \quad (12.47)$$

где последний член суммирования — число цепочек n , умноженное на начальное среднее «сквозное» расстояние в направлении x_i .

Предполагая, что резина изначально изотропна, получаем

$$\sum_n x_i^2 = n \langle x_i^2 \rangle_i = \frac{n}{3} \langle r^2 \rangle_i \quad (\text{нет суммирования}).$$

Подставляя это выражение и ρ из уравнения (12.43) в уравнение (12.47) и складывая слагаемые работы по трем координатным направлениям, получаем

$$W = \frac{nk\theta \langle r^2 \rangle_i}{\langle r^2 \rangle_0} \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \right].$$

В более удобном для использования виде это уравнение можно записать так:

$$W = \frac{nk\theta \langle r^2 \rangle_i}{\langle r^2 \rangle_0} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3],$$

где V – объем, а G – модуль сдвига, который определяется параметрами $N = n/V$ и $C = Nk\theta (\langle r^2 \rangle_i / \langle r^2 \rangle_0)$.

Для случая одноосного растяжения образца коэффициенты растяжения сводятся к следующим:

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_3 = (1/\sqrt{\lambda}),$$

где свойство «почти несжимаемости» материала было использовано в форме $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$.

Общая работа в этом случае

$$W = \frac{VG}{2} \left[\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right]. \quad (12.48)$$

Выражение (12.48) – выражение для работы, выполняемой на полимерных цепочках. Но это та же работа, которая выполняется внешними силами в предположении, что резина – идеальная. Таким образом, работа, определяемая уравнением (12.48), равна изменению свободной энергии Гельмгольца.

Для данного рассматриваемого случая растяжения образца до величины λ , сила, определяемая уравнением (12.44), задается так:

$$F = \frac{\partial \Psi}{\partial L} = \frac{dW}{dL} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dL}.$$

При деформации объем образца не изменяется, поэтому $V = A_0 L_0 = AL$, где A_0, L_0 – соответственно первоначальные площадь поперечного сечения и длина образца, A, L – текущие значения. Так как растяжение в данном случае равно $\lambda = L/L_0$, поэтому $d\lambda/dL = 1/L_0$.

Используя этот результат и продифференцировав уравнение (12.48), получаем

$$F = (VG/L_0) [\lambda - 1/\lambda^2] = A_0 G [\lambda - 1/\lambda^2].$$

Данное уравнение может быть переписано так:

$$f = F/A_0 = G [\lambda - 1/\lambda^2].$$

Материалы, удовлетворяющие этому уравнению, называются «нео-Гуковские» материалы.

12.4.2. Подход, использующий понятие энергии деформации при построении разрешающих уравнений нелинейной упругости

Теория, изложенная в предыдущем разделе, плохо описывает экспериментальные данные при больших деформациях эластомеров. Лучшее приближение к моделированию НДС резиноподобных материалов при их нагружении базируется на

предположении о существовании энергии деформации, которая является функцией градиента деформации в виде *тензора остаточных деформаций* $B_{ij} = F_{i,A} F_{j,A}$. Такой подход впервые был опубликован Альбертом Муни¹ (1940) и в дальнейшем развит в работах Рональда Ривлина² (1948). Фактически этот подход является предшественником молекулярного подхода, изложенного ранее.

Основой теории Муни и его последователей является положение о том, что изначально изотропный материал должен подчиняться определенным условиям симметрии относительно функционального представления для функции энергии деформации. Изложим концептуальные положения данного подхода.

Предполагается, что энергия деформации на единицу объема является изотропной функцией деформации в виде инвариантов тензора остаточных деформации I_1, I_2 и I_3 :

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \quad (12.49)$$

где

$$I_1 = B_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2} [B_{ii} B_{jj} - B_{ij} B_{ji}], \quad I_3 = \epsilon_{ijk} B_{li} B_{lj} B_{3k} = \det \{B_{ij}\}. \quad (12.50)$$

Если выбраны главные оси B_{ij} , то инварианты уравнения (12.50) записываются в терминах величин растяжений λ_1, λ_2 и λ_3 следующим образом:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (12.51)$$

Многие эластомеры при нагружении практически несжимаемы. Конечно, существование полностью несжимаемых материалов практически невозможно, вместе с тем большое число задач можно решить при введении предположения о несжимаемости рассматриваемого материала. При этом свойство несжимаемости при моделировании можно рассматривать как ограничение на градиент деформации. Несжимаемость материала моделируется добавлением функциональной зависимости между компонентами градиента деформации.

Для несжимаемого материала плотность остается постоянной. Это условие может быть представлено уравнением неразрывности в форме Лагранжа $\rho J = \rho_0$ или в форме Эйлера $v_{i,i} = 0$ (уравнение неразрывности в форме Эйлера имеет вид $\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0$, но так как плотность — постоянна, то $\dot{\rho} = 0$). Если в этом случае принять за базовое представление уравнения неразрывности в форме Лагранжа, то

$$J = \det \{F_{iA}\} = 1.$$

Рассмотренное условие несжимаемости является специальным условием. Поэтому исследуется более общий случай сплошности материала с внутренними ограничениями (связями). Предполагается общее ограничение формы материала в следующем виде:

$$\varphi(F_{iA}) = 0.$$

¹Муни Альберт (Mooney Albert, 1906–1986), американский ученый, инженер-механик в области самолетостроения.

²Ривлин Рональд Самуэль (Rivlin Ronald Samuel, 1915–2005), английский и американский физик, математик, представил основные результаты в области построения реологических моделей поведения резиноподобных материалов.

Так как $C_{AB} = F_{iA}F_{iB}$, данное условие может быть записано так:

$$\tilde{\varphi}(C_{AB}) = 0. \quad (12.52)$$

Выражение (12.52) представляет собой вторую форму учета внутреннего ограничения и имеет то преимущество, что она инвариантна при совмещенных движениях твердого тела.

Продифференцировав φ , получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} \dot{C}_{AB} = \frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} (\dot{F}_{iA} F_{iB} + F_{iA} \dot{F}_{iB}). \quad (12.53)$$

В выражении (12.53) принято, что частное дифференцирование по отношению к симметричному тензору приводит к симметричному тензору:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} + \frac{\partial \varphi}{\partial C_{BA}} \right).$$

Уравнение (12.53) может быть записано как

$$\varphi_{ij} D_{ij} = 0, \quad (12.54)$$

где φ_{ij} и D_{ij} определяются как

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2} F_{iA} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} + \frac{\partial \varphi}{\partial C_{BA}} \right) F_{jB}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Предположим, что напряжения строятся путем добавления компонентов напряжений $\hat{\sigma}_{ij}$, производных от составной ответной реакции, к компонентам случайных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$, возникающих в результате наличия внутреннего ограничения, т. е.

$$\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}.$$

Добавленные компоненты случайных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ считаются «неработающими», т. е.

$$\bar{\sigma}_{ij} D_{ij} = 0. \quad (12.55)$$

Сравнение уравнений (12.54) и (12.55) показывает, что как φ_{ij} , так и $\bar{\sigma}_{ij}$ ортогональны к D_{ij} , поэтому взаимосвязь между данными величинами может быть записана так:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda \varphi_{ij}. \quad (12.56)$$

Для несжимаемого материала $D_{ii} = 0$. Данное условие может быть записано следующим образом:

$$\delta_{ij} D_{ij} = 0. \quad (12.57)$$

Уравнение (12.57) эквивалентно (12.54), если в последнем уравнении в качестве φ_{ij} выбрать δ_{ij} : $\varphi_{ij} = \delta_{ij}$. Подставляя это в уравнение (12.56), получаем

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p \delta_{ij}. \quad (12.58)$$

Отметим, что в (12.58) скалярная величина была изменена, чтобы отразить термин давления, который она представляет.

Напряжения в несжимаемом материале могут быть записаны в таком виде:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}. \quad (12.59)$$

Второе слагаемое в уравнении (12.59) определяется из базовых соотношений Коши для полных напряжений. Поэтому

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + F_{iA} \left(\partial W / \partial F_{jA} \right), \quad (12.60)$$

где $J = 1$ для несжимаемого материала и W — энергии деформации единицы объема.

Уточнение представлений для напряжений Коши, определяемых уравнениями (12.60), зависит от принятия более конкретного выражения для энергии деформации W . Так, для несжимаемого материала $J = 1$, следовательно, $I_3 = 1$ и уравнение (12.49) может быть записано в виде

$$W = W(I_1, I_2).$$

Продифференцировав энергию деформации по правилу сложной функции, представление для компонент полных напряжений перепишем в виде:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + F_{iA} \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial F_{jA}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial F_{jA}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial F_{jA}} \right], \quad (12.62)$$

где инварианты I_1 и I_2 определяются уравнением (12.51).

Удобно записать I_1 и I_2 в терминах градиента деформации таким образом:

$$I_1 = F_{iA} F_{iA}, \quad I_2 = \frac{1}{2} [F_{iA} F_{iA} F_{jB} F_{jB} - F_{iA} F_{jA} F_{iB} F_{jB}], \quad I_3 = \det \{ F_{iA} \}. \quad (12.63)$$

Так как компоненты инвариантов I_1 и I_2 — независимые величины, то

$$\frac{\partial F_{iA}}{\partial F_{jP}} = \delta_{ip} \delta_{AP}. \quad (12.64)$$

Подставляя уравнения (12.64) и (12.63) в (12.62), получаем следующее выражение для компонент дополнительных напряжений Коши:

$$\hat{\sigma}_{ij} = I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \delta_{ij} + 2B_{ij} \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] + 2B_{ik} B_{jk} \frac{\partial W}{\partial I_2}. \quad (12.65)$$

В (12.65) включена зависимость напряжений от I_3 для последующих преобразований.

Используем теорему Гамильтона — Кэли¹ в следующей форме:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \gamma_0 \delta_{ij} + \gamma_1 B_{ij} + \gamma_2 B_{ik} B_{jk} = \gamma_2 I_3 B_{ij}^{-1} + (\gamma_0 - \gamma_2 I_2) \delta_{ij} + (\gamma_1 - \gamma_2 I_1) B_{ij}. \quad (12.66)$$

В результате имеем

$$\hat{\sigma}_{ij} = \left(I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} - I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \delta_{ij} + B_{ij} \frac{\partial W}{\partial I_1} + B_{ij}^{-1} I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2}. \quad (12.67)$$

В соответствии с условием несжимаемости: $I_3 = 1$ и $\partial W / \partial I_3 = 0$. Поскольку в выражении (12.62) для общего напряжения слагаемое, включающее давление, произ-

¹ Теорема Гамильтона — Кэли (Cayley — Hamilton) — известная теорема из теории матриц, названная в честь Уильяма Гамильтона и Артура Кэли.

вольно, поэтому первый член уравнения (12.67) может быть объединен со слагаемым, содержащим давление. Получаем следующее выражение для напряжений Коши:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + B_{ij} \frac{\partial W}{\partial I_1} + B_{ij}^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + B_{ij} \frac{\partial W}{\partial I_1} + c_{ij} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad (12.68)$$

где c_{ij} — тензор деформаций Коши, определяемый уравнением $c_{ij} = X_{A,i} X_{A,j}$.

С этой точки зрения энергия деформации предполагается как функция от I_1 и I_2 , но точная функциональная форма для энергии не уточняется.

С. Ривлин постулировал (1948), что энергия деформации должна быть представлена как общий полином от инвариантов I_1 и I_2 :

$$W = \sum C_{\alpha\beta} (I_1 - 3)^\alpha (I_2 - 3)^\beta. \quad (12.69)$$

Следует отметить, что энергия деформации записывается как функция от $(I_1 - 3)$ и $(I_2 - 3)$ чаще от I_1 и I_2 , чтобы обеспечить соответствие нулевых деформаций нулевой энергии деформации.

В зависимости от типа материала и деформации (т. е. от экспериментальных данных испытаний) выбирается количество слагаемых, используемых в уравнении (12.69). Например, выбирая $C_{10} = G$, а все другие коэффициенты равными нулю, получаем отклик «нео-Гуковского» материала, где G — модуль сдвига.

Напряжения оцениваются на основании уравнения (12.68), и такие представления используются в классических уравнениях движения $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$. В результате задача сводится к системе дифференциальных уравнений, к которым для получения единственного решения необходимо добавить соответствующие граничные условия. Неопределенное давление связано с уравнениями движения и находится при условии удовлетворения граничных условий.

12.4.3. Специальные выражения для энергии деформации

Прежде чем построить определяющие уравнения, описывающие поведение конструкций из эластомеров, необходимо выполнить тестирование, чтобы оценить константы, входящие в выражение для функции энергии деформации. Но до проведения испытаний следует выбрать конкретное выражение для энергии деформации. Это равносильно выбору количества ненулевых членов в уравнении (12.69) Муни — Ривлина для энергии деформации для адекватного описания отклика материала на внешнюю нагрузку.

Следует отметить, что помимо уравнения Муни — Ривлина, имеются и другие общие формы представления для энергии деформации. Но эти все представления все же в некотором роде эквивалентны представлению, предложенному Муни. Так как константы $C_{\alpha\beta}$ в уравнении (12.69) не представляют собой физические величины (такие, например, как модуль упругости), то по существу являются просто параметрами подгонки кривой испытаний.

Простейшим представлением для энергии деформации для эластомеров является упомянутая ранее однопараметрическая модель, называемая «нео-Гуковской».

В этом случае в качестве единственного параметра принимается модуль сдвига G , а энергия деформации зависит только от первого инварианта тензора деформации B_{ij} :

$$W = G(I_1 - 3). \quad (12.70)$$

Выбирая в качестве главных осей для тензора остаточных деформаций B_{ij} движение, имеющее главные деформации растяжения λ_1 , λ_2 и λ_3 , уравнение (12.70) можно записать в таком виде:

$$W = G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3).$$

Для одноосного случая деформации растяжения $\lambda_1^2 = \lambda^2$, $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \lambda^{-1}$ и, более того, если материал несжимаем, то $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$. Таким образом,

$$W = G(\lambda^2 + 2/\lambda - 3).$$

Подставляя это выражение в уравнение (12.68) для случая одноосного состояния, приходим к такому выражению для напряжений на единицу недеформированной площади:

$$f = P_{11} = \partial W / \partial \lambda = 2G(\lambda - 1/\lambda^2),$$

где P_{11} — символ Пиола¹ — Кирхгофа для напряжений для значения 11.

Для «нео-Гуковского» материала функция энергии деформации имеет простейшую форму и делает точные решения удобнее для использования.

Более общей моделью является *двухчленная, модель Муни — Ривлина*. В этом случае предполагается, что корректно представление для энергии деформации в виде линейной функции от первого и второго инварианта тензора остаточных деформаций. Тогда, предполагая материал изотропным и несжимаемым, энергия деформации может быть записана так:

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + 1/\lambda_3^2 - 3). \quad (12.71)$$

При одноосном состоянии главные деформации растяжения $\lambda_1^2 = \lambda^2$, $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \lambda^{-1}$. Подставляя эти деформации растяжения в уравнение (12.71) и дифференцируя по λ , получаем выражение для напряжения на единичной недеформированной площадке при одноосном состоянии:

$$f = P_{11} = \partial W / \partial \lambda = 2(\lambda - 1/\lambda^2)(C_1 + C_2/\lambda).$$

Формулы для напряжений Коши легко получаются, если заметить, что площадь в деформированной конфигурации может быть найдена путем масштабирования размеров в направлении x_2 и x_3 соответственно значений λ_2 и λ_3 .

Для одноосного случая это означает, что умножение силы на недеформированной площадке на величину растяжения λ дает следующее выражение для одноосного напряжения Коши:

$$\sigma_{11} = 2(\lambda^2 - 1/\lambda)(C_1 + C_2/\lambda).$$

¹ Пиола Габрио (Piola Gabrio, 1794—1850), итальянский математик и физик; занимался механикой сплошных сред, его имя связывают с тензорами Пиолы — Кирхгофа.

Воспользовавшись формулами классической теории упругости при одноосном растяжении вида $\lambda^2 = 1 + 2E_{11}$, получаем следующую формулу для напряжений в терминах деформаций:

$$\sigma_{11} = 2C_1 \left(1 + 2E_{11} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2E_{11}}} \right) + 2C_2 \left(\sqrt{1 + 2E_{11}} + \frac{1}{1 + 2E_{11}} \right). \quad (12.72)$$

Раскрывая ряды трех последних членов уравнения (12.72) и следуя предположению, что E_{11} — мало, получаем

$$\sigma_{11} = 6(C_1 + C_2)E_{11}.$$

Следовательно, в случае малых деформаций модуль упругости может быть записан как $E = 6(C_1 + C_2)$. Поскольку предполагается, что материал несжимаем, коэффициент Пуассона равен 0,5. Это означает, в силу уравнения $G = E/(2(1 + \nu))$, что для малых деформаций модуль сдвига равен $G = 3(C_1 + C_2)$.

Простая двухчленная модель Муни — Ривлина хорошо отражает отклик материала при малых и умеренных значениях растяжения, но при больших значениях растяжений требуются члены более высокого порядка. Некоторые из этих различных форм для функции энергии деформации связаны с конкретными именами. Например, для материала Огдена¹ предполагается представление энергии деформации в такой форме:

$$W = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left[\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3 \right].$$

Эта форма сводится к материалу Муни — Ривлина, если n принимает значения 1 и 2 при $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\mu_1 = 2C_1$ и $\mu_2 = 2C_2$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Раскройте суть метода возмущения линейно-упругих свойств, алгоритм метода возмущения линейно-упругих свойств решения задач для физически нелинейной упругой среды.
2. В чем состоит алгоритм решения задач для ортотропных сред методом возмущения изотропных упругих свойств?
3. Раскройте понятие «ауксетичный материал».
4. В чем состоит алгоритм построения уравнений поведения блочной среды в рамках МДТТ?
5. Эластомеры. Перечислите свойства эластомеров.
6. Понятие «нео-Гуковские» материалы. Дайте их описание.
7. В чем суть «молекулярного подхода» для описания состояния эластомеров?
8. Назовите выражения для энергии деформации.

¹ Модель материала Огден — модель гиперупругого материала, используемая для описания нелинейного поведения «напряжения — деформации» таких сложных материалов, как каучуки, полимеры и биологическая ткань. Модель разработана Раймондом Огденом (Raymond Ogden), британским ученым в области прикладной математики (механики деформируемого твердого тела).

13.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД А. А. ИЛЬЮШИНА

Рассмотрим метод решения задач линейной вязкоупругости, основанный на решении соответствующей задачи теории упругости и применении некоторых дополнительных, определяемых экспериментально, функций $g_{\beta}(t)$.

Анализируя аналитические формы решений задач идеальной упругости, А. А. Ильюшин сформулировал теорему, которая утверждает, что решение задачи идеальной упругости может быть представлено в следующей символической форме [61]:

$$u = f + \omega \varphi + \frac{1}{\omega} \psi + \frac{1}{1 + \beta_k \omega} \chi_k.$$

Здесь f, φ, ψ, χ_k — функции координат, внешних сил, заданных граничных перемещений и температуры; $\omega = 2G/3K$; параметры β_k — постоянные величины. В последнем слагаемом предполагается суммирование по индексу k .

Тогда решение соответствующей задачи линейной вязкоупругости в изображениях будет следующим ($\omega^* = 2G^*/3K$):

$$u^* = f^* + \omega^* \varphi^* + \frac{1}{\omega^*} \psi^* + \frac{1}{1 + \beta_k \omega^*} \chi_k^*. \quad (13.1)$$

Задача заключается в представлении решения (13.1) в оригиналах.

Введем такое обозначение для оператора: $g_{\beta k}^* \equiv 1/(1 + \beta_k \omega^*)$. Пусть изображениям $g_{\beta k}^*$ соответствует некоторая функция $g_{\beta k}(t)$. В этом случае обращение решения в оригиналы не представляет проблем:

$$u(t) = f(t) + \frac{2G}{3K} \left(\varphi(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right) + \\ + \frac{3K}{2G} \left(\psi(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \psi(\tau) d\tau \right) + \int_0^t g_{\beta k}(t-\tau) d\chi_k(\tau).$$

В работе [76] указана методика экспериментального определения функций $g_{\beta k}(t)$.

13.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

В данном разделе описан один из возможных подходов к учету реологических эффектов для неоднородных тел. К краевым задачам теории упругости неоднородных тел можно отнести широкий класс задач механики. Так, некоторые нелинейные задачи при использовании определенных методов последовательных приближений сводятся к решению задач теории упругости неоднородных тел.

В главе 6 изложен способ учета реологических эффектов для однородных тел в рамках классической теории упругости. Задачи линейной теории вязкоупругости для неоднородных тел можно свести к решению задач теории упругости неоднородных тел. Покажем это.

Связь между напряжениями и деформациями для анизотропного неоднородного линейного вязкоупругого тела определяется соотношениями вида [113]

$$\sigma_{ij} = \int_0^t \lambda_{ijkl}(t - \tau, x_s) d\varepsilon_{kl}(\tau). \quad (13.2)$$

Применяя к (13.2) преобразования Лапласа

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt, \quad (13.3)$$

получаем $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}(x_s) \bar{\varepsilon}_{kl}$, $\bar{C}_{ijkl} = p \bar{\lambda}_{ijkl}(x_s)$.

В этом случае для трансформант перемещений $\bar{u}_k$ уравнения равновесия в дифференциальной форме и краевые условия записываются так:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{C}_{ijkl} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) + \rho X_i = 0; \quad (13.4)$$

$$\bar{C}_{ijkl}(x_s) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} n_j \Big|_{S_\sigma} = \bar{q}_i(x_s); \quad \bar{u}_i \Big|_{S_u} = \bar{\varphi}_i(x_s). \quad (13.5)$$

Отметим, что соотношения (13.4) и (13.5) справедливы, если граница S тела и граница между частями S_σ , S_u поверхности S не изменяется со временем.

Таким образом, в указанных предположениях задача о деформировании вязкоупругого неоднородного тела сводится для преобразованных по Лапласу величин к краевой задаче (13.4), (13.5) теории упругости неоднородных тел [114].

Рассмотрим, например, задачу о деформировании изотропного неоднородного вязкоупругого тела. Пусть объемные свойства материала идеально упруги, а сдвиговые свойства вязкоупруги. Тогда

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} - \int_0^t \partial(t - \tau) e_{ij}(\tau) d\tau; \quad \theta = \sigma/K, \quad (13.6)$$

где s_{ij} , e_{ij} — девиаторы тензоров напряжений и деформаций, т. е.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \sigma_{ij}; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \theta \delta_{ij}/3. \quad (13.7)$$

Из (13.6) и (13.7) для тензора напряжений можно получить

$$\sigma_{ij} = K\theta\delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij} - \theta\delta_{ij}/3) - \int_0^t \partial(t-\tau)(\varepsilon_{ij} - \theta\delta_{ij}/3)d\tau. \quad (13.8)$$

Применяя к (13.8) преобразования Лапласа (13.3), определяем величины $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\bar{\mu}\bar{\varepsilon}_{ij}$, где $\bar{\lambda} = K - (2/3)G + (1/3)\bar{\partial}(p)$, $\bar{\mu} = G - (1/2)\bar{\partial}(p)$.

Следовательно, краевая задача для определения трансформант перемещений с использованием преобразованных по Лапласу уравнений равновесия и граничных условий приводится к такой краевой задаче:

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} + \bar{\mu} \Delta \bar{u}_i + \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \rho \bar{X}_i &= 0; \\ \left[\bar{\lambda} \bar{\theta} \delta_{ij} + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j \Big|_{S_\sigma} &= \bar{q}_i(x_s); \quad \bar{u}_i \Big|_{S_u} = \bar{\varphi}_i(x_s). \end{aligned}$$

Таким образом, краевая задача для определения перемещений свелась к краевой задаче теории упругости неоднородных сред относительно трансформант перемещения.

Приведем один из возможных вариантов построения разрешающих систем уравнений задач теории упругости неоднородных сред.

Сформулируем краевую задачу теории упругости для неоднородного тела. Требуется определить вектор $\bar{u}(x)$, удовлетворяющий в области $\bar{D} = D \cup S$ уравнениям равновесия вида [114]

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \rho X_i = 0, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (13.9)$$

при выполнении таких граничных условий на S :

$$\begin{aligned} \left[\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j \Big|_{S_\sigma} &= q_i(x_s); \\ u_i \Big|_{S_u} &= \varphi_i(x_s), \quad (i = \overline{1, m}), \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda(x_s)$ и $\mu = \mu(x_s)$ — коэффициенты Ламе, n_j — компоненты вектора внешней нормали, восстановленной в точке x_s поверхности S_σ ; S_σ и S_u — части поверхности S с заданными соответственно внешней нагрузкой q_i и перемещениями φ_i , причем $S = S_\sigma + S_u$; $m = 2$ или $m = 3$ — размерность пространства.

Дифференциальные уравнения равновесия (13.9) можно записать так:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu(x)} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -\rho \frac{X_i}{\mu(x)} - \frac{\theta}{\mu(x)} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - \frac{1}{\mu(x)} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (13.10)$$

Представление уравнения (13.10) соответствует уравнениям равновесия Ламе задач теории упругости. В [32] описаны процедуры построения систем разрешающих уравнений для (13.10), основываясь на методологии решения задач теории упругости.

Следует отметить, что в «псевдоупругих» задачах под вектором $u(x)$ понимаются либо трансформанта вектора перемещений $\bar{u}(x)$, либо вектор упругих фиктивных перемещений $u^y(x)$. Соответственно, в этом случае компоненты либо трансформант тензора напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$, либо самого тензора напряжений σ_{ij} определяются на основе закона Гука.

При решении большого круга задач механики требуется исследовать процессы в длительном временном интервале. Известно, что для вязкоупругих процессов при деформациях, значительно превышающих предел текучести, можно с большой степенью точности считать, что объемное расширение равно нулю.

Поэтому для таких процессов определение НДС тел при больших значениях t в построенной разрешающей системе уравнений следует принять $\theta = 0$. Следовательно, при поэтапном последовательном решении сформулированной ранее задачи и определении $\{u(x), \sigma(x)\}$ в моменты времени $t_1, t_2, \dots$ необходимо производить проверку выполнения неравенства $\sigma(x, t_i) > \sigma_y$, где σ_y – предел текучести материала. Выполнение данного условия в дальнейшем при определении $\{u(x), \sigma(x)\}$ как решения построенной разрешающей системы, дополнительное условие $\theta = 0$.

13.3. К ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ИЗОТРОПНЫХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ СРЕД

Замечание. Материал, изложенный в данном разделе, базируется на работе [115].

Свойства реальной среды в определяющих уравнениях ползучести задаются, как правило, одномерными моделями различной структуры. Поэтому вначале рассмотрим решение поставленной задачи для одномерного случая, когда напряжения и деформации являются не тензорами, а скалярами. Исходное состояние изотропной среды при простом нагружении для одномерных задач представим уравнением

$$\sigma = \varphi_0(\varepsilon) = g(\varepsilon)\varepsilon. \quad (13.11)$$

Рассматриваются упрочняющиеся среды, устойчивые в смысле постулата М. Друкера и удовлетворяющие такому условию [68]:

$$d\sigma d\varepsilon^p > 0, \quad (13.12)$$

где σ – истинное значение растягивающего напряжения; ε – соответствующая этому напряжению деформация; $\varphi_0(\varepsilon)$ – функция деформации, в общем случае нелинейная; $g(\varepsilon)$ – модуль пластичности; $d\varepsilon^p$ – приращение пластической компоненты деформации.

Для функции $g(\varepsilon)$ можно записать следующее выражение:

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} E & (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y); \\ \varphi'_0(\varepsilon) & (\varepsilon_y < \varepsilon \leq \varepsilon_b), \end{cases} \quad (13.13)$$

где $\varphi'_0(\varepsilon) > 0$ – производная от $\varphi_0(\varepsilon)$ по ε ; E – модуль упругости; $\varepsilon_y, \varepsilon_b$ – значения деформаций, соответствующих пределу текучести σ_y и временному сопротивлению σ_b .

Для построения модели ползучести используется *принцип подобия изохронных диаграмм ползучести*, сформулированный Ю. Н. Работновым [57]. Под изохронными понимаются диаграммы ползучести, перестроенные в координатах « σ – ε » по параметру времени t (рис. 13.1).

Вся совокупность изохрон хорошо аппроксимируется выражением вида:

$$\sigma = \varphi(\varepsilon)\theta(t) = \varphi(\varepsilon)(1 + at^b)^{-1}, \quad (13.14)$$

где a, b – экспериментально определяемые коэффициенты; $\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon^c$.

В общем случае явный вид функции $\theta(t)$ задается весовой функцией линейно-наследственного уравнения так, что при $t = 0$ описывается упругий участок диаграммы мгновенного деформирования $\varphi_0(\varepsilon)$. В соответствии с этим подобие в рамках (13.14) определяется как возможность смещения с диаграммы $\varphi_0(\varepsilon)$ на изохроны по абсиссе ε при заданном напряжении σ_0 (рис. 13.2, штрих-пунктир). Уравнение (13.14) – по существу уравнение релаксации.

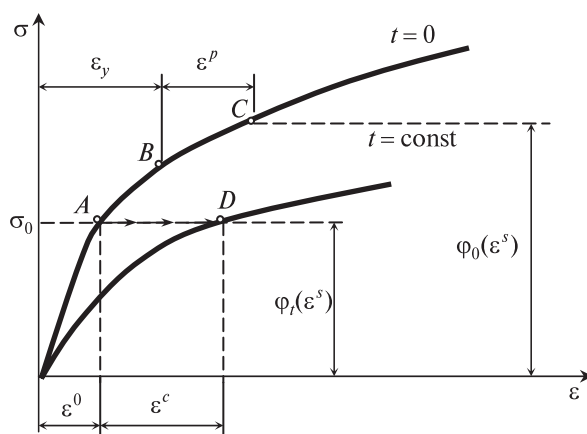


Рис. 13.1. Кривые ползучести

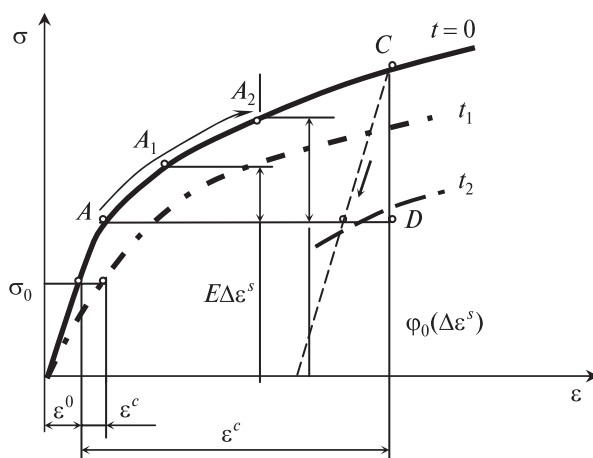


Рис. 13.2. Принцип подобия кривых ползучести

Другая формулировка условия подобия изохронных диаграмм ползучести может быть следующей. При фиксированном значении ε мгновенные значения функций склерономной $\varphi_0(\varepsilon^s)$ и реономной $\varphi_t(\varepsilon^r)$ компонент полной деформации эквивалентны и выполняется следующее условие:

$$\varphi_t(\varepsilon^r) \Big|_{\varepsilon=const} = \varphi_0(\varepsilon^s) = \sigma(1 + K^*), \quad (13.15)$$

где $\varepsilon^r = \varepsilon^0 + \varepsilon^e$, а $\varepsilon^0 = \sigma/E$ — упругая деформация от приложенного напряжения; $\varepsilon^s = \varepsilon^0 + \varepsilon^e$ при $\varepsilon^s < \varepsilon_y$ и $\varepsilon^s = \varepsilon_y + \varepsilon^p$ при $\varepsilon^s > \varepsilon_y$, K^* — интегральный оператор.

Из условия подобия (13.15) после несложных преобразований с учетом (13.11) получается уравнение ползучести, разрешенное относительно ε^c :

$$\varepsilon^c = \frac{\varphi_t(\varepsilon^r) - \varphi_0(\varepsilon_y)}{g(\varepsilon^s)} + (\varepsilon_y - \varepsilon^0). \quad (13.16)$$

В уравнении (13.16) деформация ползучести задается соотношением

$$\varepsilon^c = \begin{cases} \varepsilon^e - \varepsilon^0 & (\varepsilon^0 \leq \varepsilon^e \leq \varepsilon_y); \\ \varepsilon_y + \varepsilon^p - \varepsilon^0 & (0 \leq \varepsilon^p \leq \varepsilon_b - \varepsilon_y). \end{cases} \quad (13.17)$$

Определение полной скорости ползучести как частной производной по времени от выражения (13.16) приводит к следующему уравнению:

$$\dot{\varepsilon}^c = \frac{\partial [\varphi_t(\varepsilon^r) - \varphi_0(\varepsilon_y)]}{\partial t} \frac{1}{g(\varepsilon^s)}, \quad (13.18)$$

которое в общем случае переменного нагружения с учетом истории нагружения и соотношении (13.13) преобразуется к виду:

$$\dot{\varepsilon}^c = \frac{\partial [\psi(\sigma(\tau), (t - \tau)) - \varphi_0(\varepsilon_y)]}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi_0(\varepsilon^s)}{\partial \varepsilon^s} \right], \quad (13.19)$$

где ψ — функция ползучести, определяемая соотношением (13.15).

Практическое использование определяющих уравнений (13.18) и (13.19) предполагает конкретизацию весовых функций и функции $\varphi_0(s)$. В первой части это соответствует выбору структуры ядра интегрального оператора. Выбор должен удовлетворять наилучшему согласованию с экспериментом на ползучесть, что накладывает существенные ограничения на аналитические выражения для ядер и функций распределения [115]. В простейшем случае ядро интегрального оператора может быть выбрано в форме (13.14). Структура функции $\varphi_0(\varepsilon^s)$ определяется из результатов обработки экспериментальных диаграмм растяжения.

Условие подобия (13.15) принципиально отличается от (13.14), поскольку эквивалентность изохронной диаграммы и диаграммы мгновенного деформирования задается не по абсциссе ε , а по ординате $\varphi(\varepsilon)$ и линейное смещение заменяется нелинейной функцией (рис. 13.2, штриховая линия). В этом случае после мгновенного

нагружения по траектории OA заданным напряжением σ_0 деформация ползучести ε^c , определяемая согласно (13.19) за время t (точка D), накапливается по закону, определяемому изменением функции $\varphi_t(\varepsilon^r)$ и функции $\varphi_0(\varepsilon^s)$ до точки C . Из структуры (13.19) видно, что характер ползучести будет зависеть от особенностей деформационного упрочнения. В целом же значение будет иметь и упругий участок, а ползучесть рассчитываться поэтапно с учетом упругой и пластической компонент деформации в соответствии с (13.17).

Для реальных упрочняющихся сред, дифференцируя (13.11) по ε с учетом (13.12), можно записать в виде

$$d\sigma/d\varepsilon - \sigma/\varepsilon = g'(\varepsilon)\varepsilon \leq 0.$$

Следовательно, $d\sigma/d\varepsilon > 0$ или $d\sigma/d\varepsilon = \text{const}$.

В итоге общий случай упрочнения можно свести к линейному и нелинейному законам. Нелинейный закон чаще всего задается степенной функцией.

Рассмотрим особенности ползучести сред с различным характером деформационного упрочнения. Для анализа в качестве функции ползучести выберем простейший вариант ядра в форме, аналогичной (13.14). Для скорости ползучести $\dot{\varepsilon}^c$ при постоянном напряжении σ из (13.18) получаем:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = ab \frac{\sigma}{g(\varepsilon^s)} \frac{1}{t^{1-b}}, \quad (13.20)$$

где $a > 0$; $0 < b < 1$ [115].

Для изотропной среды с линейным упрочнением в упругой области $g(\varepsilon^s) = E$, а в пластичной области $g(\varepsilon^s) = E^* = \text{const}$, причем $E^* < E$. В этом случае скорость ползучести согласно (13.20) во всем диапазоне изменения t является убывающей функцией времени (при $t \rightarrow \infty \dot{\varepsilon}^c \rightarrow 0$) и кривая ползучести не имеет перегиба, поскольку вторая производная

$$\frac{d^2\varepsilon^c}{dt^2} = ab(b-1) \frac{\sigma}{g(\varepsilon^s)} \frac{1}{t^{2-b}}$$

всегда меньше нуля ($b-1 < 0$).

Следовательно, ползучесть линейно упрочняющейся среды неустановившаяся (рис. 13.3, кривая 1). В средах с четко выраженным переходом от упругого участка к участку с линейным упрочнением возникает эффект скачкообразного увеличения скорости ползучести при постоянном напряжении (рис. 13.3, кривая 2). Эффект вызван скачкообразным изменением в момент этого перехода модуля пластичности $g(\varepsilon)$ на величину $\Delta g(\varepsilon) = E - E^*$ и реализуется при достижении деформацией ползучести ε^c значений $\varepsilon_T - \varepsilon^0$. Из (13.20) также видно, чем меньше модуль упрочнения E^* , тем выше в этот момент скорость ползучести и при $E^* \rightarrow 0$ (неупрочняющиеся среды) $\dot{\varepsilon}^c \rightarrow \infty$ (кривая 3). Когда на диаграмме мгновенного деформирования $\varphi_0(\varepsilon^s)$ между упругим участком и участком упрочнения имеется переходная область, эффект скачкообразного увеличения скорости ползучести отсутствует (кривая 4).

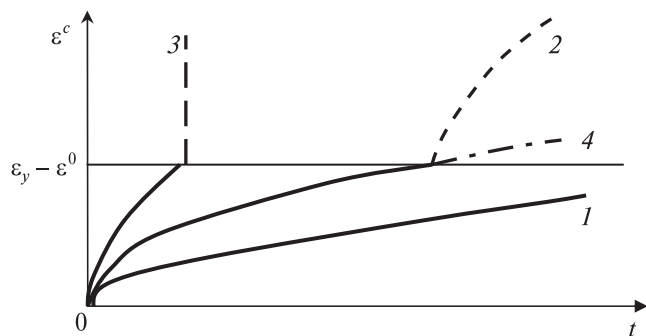


Рис. 13.3. Кривые ползучести
линейно упрочняющейся среды

Для изотропной среды со степенным упрочнением ползучесть в области деформаций $\varepsilon^c < \varepsilon_y - \varepsilon^0$, определяемая значением $g(\varepsilon^s) = E^* = \text{const}$, как и в предыдущем случае, является неустановившейся (рис. 13.4, кривая 1). В области деформаций $\varepsilon^c < \varepsilon_y - \varepsilon^0$ для скорости ползучести из (13.18) получаем

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = ab \left(\frac{1}{B} \right)^{1/m} \frac{\sigma}{m} \left[\sigma(1 + at^b) - E\varepsilon_T \right]^{(1-m)/m} \frac{1}{t^{1-b}}, \quad (13.22)$$

а для второй производной –

$$\frac{d^2\varepsilon^c}{dt^2} = ab \left(\frac{1}{B} \right)^{1/m} \frac{\sigma}{m} \left[\sigma(1 + at^b) - E\varepsilon_T \right]^{(1-m)/m} \left\{ \frac{(1-m)}{m} \frac{ab\sigma t^b}{\sigma(1 + at^b) - E\varepsilon_T} - (1-b) \right\} \frac{1}{t^{2-b}},$$

которая в момент времени

$$t^* = \left[\frac{(1-b)}{a(b/m-1)} \cdot (1 - \sigma_y/\sigma) \right]^{1/b} \quad (13.23)$$

принимает нулевое значение.

В (13.22) – (13.23) $B > 0$; $m < 1$ – параметры упрочнения в степенном законе. Следовательно, на кривой ползучести имеется точка перегиба, скорость ползучести после точки перегиба становится возрастающей и система уравнений (13.20) и (13.22) описывает все три стадии ползучести (рис. 13.4, кривая 2). Для нелинейно-упругих сред ($\sigma_y = 0$)

$$t^* = \left[\frac{(1-b)}{a(b/m-1)} \right]^{1/b}$$

и точки перегиба на кривой ползучести не зависят от напряжений.

Дополнительным условием существования точки перегиба на кривой ползучести согласно (13.23) является выполнение неравенства $b > m$, поскольку $\sigma < \sigma_T$ (начальное состояние является упругим). При $b < m$ уравнение (13.23) теряет смысл и точка перегиба определяется по моменту достижения деформацией ползучести ε^c величины $\varepsilon_y - \varepsilon^0$ (кривая 3).

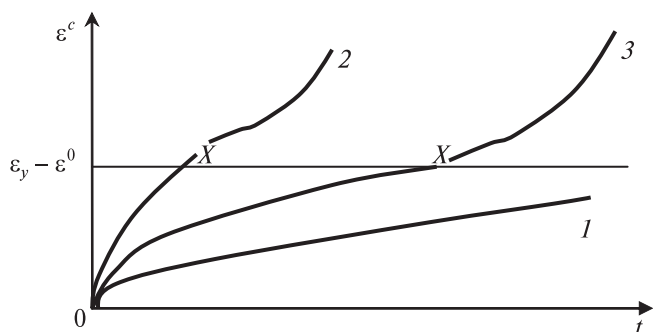


Рис. 13.4. Кривые ползучести изотропной среды со степенным упрочнением

Исходное деформационное упрочнение среды учитывается введением в определяющие уравнения (13.18) и (13.19) скорости упрочнения $\dot{\varphi}_0'(\varepsilon^s)$. С уменьшением величины $\dot{\varphi}_0'(\varepsilon^s)$ скорость ползучести $\dot{\varepsilon}^c$ возрастает ($\dot{\varepsilon}^c \rightarrow \infty$) и условие

$$\left. \frac{\partial \varphi_0'(\varepsilon^s)}{\partial \varepsilon^s} = \frac{\partial \varphi_t'(\varepsilon^r)}{\partial \varepsilon^r} \right|_{t=\text{const}} \rightarrow 0 \quad (13.24)$$

может рассматриваться в качестве критерия разрушения при ползучести. Условие (13.24) соответствует моменту потери устойчивости деформирования и реализуется в средах со степенным упрочнением.

Рассмотрим случай сложного напряженного состояния.

Решение задач ползучести при сложном напряженном состоянии в рамках подходов, рассмотренных в данном пункте, строится на основе гипотезы «единой кривой ползучести» (см., например, [57; 116; 117]). Очевидным условием достоверности такой и аналогичной гипотез является выполнение принципа подобия. В [115] показано, что при построении теории эффективно использовать подобие изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования, что позволяет обобщить одномерную модель ползучести (13.18) на сложное напряженное состояние на основе гипотезы «единой кривой деформирования».

Уравнение упрочняющейся среды (13.11) в этом случае записывается в виде

$$\bar{\sigma} = \Phi(\bar{\varepsilon}) = g(\bar{\varepsilon})\bar{\varepsilon}, \quad (13.25)$$

где $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ — обобщенные напряжение и деформация; $\Phi(\bar{\varepsilon})$ — известная функция свойств материала; $g(\bar{\varepsilon})$ — функция, не зависящая от вида напряженного состояния и $g(\bar{\varepsilon}) \equiv g(\varepsilon)$.

Замечание. В качестве $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$ могут быть использованы соответственно интенсивности напряжений и деформаций, а также октаэдрическое касательное напряжение и октаэдрический сдвиг.

При построении *определяющих уравнений ползучести для трехмерных полей напряжений и деформаций* будем использовать следующие допущения:

- среда считается несжимаемой вплоть до разрушения;
- предполагается справедливым закон течения (13.12), не содержащий, однако, скрытых переменных параметров;

• обобщенная скорость ползучести связана с обобщенным напряжением той же зависимостью, что и в одномерном случае.

Таким образом, для скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ в общем случае напряженного состояния, исходя из (13.12), (13.18) и (13.25), получаем:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} - \frac{\dot{\varepsilon}_i^c(\sigma_i)}{\sigma_i} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ii} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_i^c = \frac{\partial [\Phi_i(\varepsilon_i^r) - \sigma_i]}{\partial t} \frac{1}{g(\varepsilon_i)}, \quad (13.26)$$

где $\dot{\varepsilon}_i^c$ — интенсивность скоростей деформаций; σ_i — интенсивность напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера. В (13.26) использовано условие начала пластичности Хубера — Мизеса.

Итак, описана процедура построения теории ползучести, основанная на уточненном принципе подобия изохронных диаграмм, которая может рассматриваться как попытка механического обобщения концепций уравнений состояния и нелинейной наследственности. Теория позволяет учесть исходное деформационное упрочнение среды, описать третью стадию ползучести, учесть предысторию и цикличность нагружения.

13.4. ПРИНЦИП ТЕМПЕРАТУРНО-ВРЕМЕННОЙ АНАЛОГИИ

Характеристики ползучести большого круга материалов (например, наполненных полимеров), как правило, существенно зависят от температуры. С повышением температуры эффект ползучести возрастает, что дает возможность использовать опыты при повышенных температурах на ограниченных отрезках времени для прогнозирования реологических свойств на длительное время.

Опыты при постоянной температуре показывают, что кривые $\sigma \sim \varepsilon$ располагаются тем выше, чем больше скорость нагружения. Если испытания проводятся при постоянной скорости нагружения, но при разных температурах, то диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ располагаются тем выше, чем ниже температура. Этот факт позволил установить между временем и температурой связь, получившую название *температурно-временной аналогии*. Наглядное представление о ее сущности можно получить из рассмотрения семейства кривых ползучести при разных температурах и одном и том же напряжении (рис. 13.5). В координатах $E\varepsilon/\sigma \sim \ln t$ эти кривые показаны на рис. 13.6 [61].

Принцип температурно-временной аналогии (или температурно-временной суперпозиции) применительно к явлению ползучести утверждает, что кривые ползучести при температурах $T_1 > T_s$, $T_2 > T_1$, $T_3 > T_2$, ... могут быть совмещены с кривой ползучести при температуре T_s путем их смещения вдоль оси логарифма времени (см. рис. 13.6) на определенные отрезки $\psi(T_1)$, $\psi(T_2)$, $\psi(T_3)$, ... соответственно. Очевидно, $\psi(T_s) = 0$. Функция $\psi(T)$ находится для данного материала экспериментально в соответствии с ее определением.

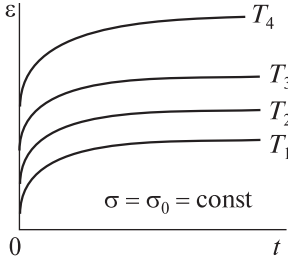


Рис. 13.5. Кривые ползучести при разных температурах

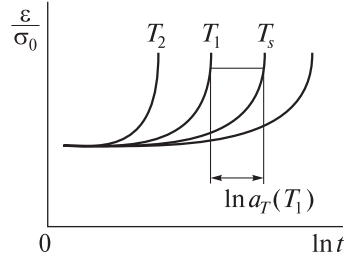


Рис. 13.6. Кривые ползучести при разных температурах в координатах $E\varepsilon/\sigma \sim \ln t$

Кроме возможности прогнозирования принцип температурно-временной аналогии дает возможность учесть влияние температуры на физико-механические свойства материала путем введения *модифицированного времени* t' . В самом деле, пусть $J_1 = J_1(t) = J^* \ln(t)$ есть уравнение кривой ползучести $\varepsilon/\sigma_0 \sim t$ для данной температуры T_s . В соответствии с принципом температурно-временной аналогии можно записать

$$J_1(t, T) = J^* (\ln t + \psi(T)), \quad J_1(t, T_s) = J^* (\ln t). \quad (13.27)$$

Функция $\psi(T)$ обладает следующими свойствами: $\psi(T_s) = 0$, $\psi(T) > 0$ при $T > T_s$, $\psi(T_s) < 0$, $\psi(T) < 0$ при $T < T_s$, $d\psi/dT > 0$. Если положить $\psi(T) = -\ln a_T(T)$, то $a_T(T_s) = 1$, $0 < a_T(T) < 1$ при $T > T_s$, $a_T(T_s) > 1$ при $T < T_s$. Этими свойствами обладает функция

$$\ln a_T = C_1 \frac{T - T_s}{C_2 + T - T_s}, \quad (13.28)$$

где C_1, C_2 — положительные константы, определяемые для каждого материала экспериментально.

Величину a_T иногда называют функцией температурно-временного смещения или коэффициентом смещения.

Замечание. Соотношение (13.28) известно как *уравнение Вильямса — Ландела — Ферри* [118]. Величину a_T иногда называют функцией температурно-временного смещения или коэффициентом смещения.

Учитывая выражение (13.27), введем модифицированное время соотношением:

$$\ln t' = \ln t - \ln a_T(T),$$

или

$$t' = t/a_T(T). \quad (13.29)$$

При этом из формулы (13.27) следует

$$J_1(t, T) = J^* (\ln t') = J_1(t') = J_1(t/a_T).$$

Здесь существенно, что $J_1 = J_1(t)$ — податливость при температуре T_s .

Таким образом, при введении модифицированного времени удастся избежать необходимости составления аналитического выражения для $J_1(t, T)$ при наличии температуры T . Этот прием дает возможность распространить эффективные методы решения задач теории линейной вязкоупругости на случай термовязкоупругих моделей.

Соотношение (13.29) для модифицированного времени справедливо для случая, когда температура не изменяется в течение всего опыта. Если же температура является функцией времени, то указанный прием естественно использовать для малого отрезка времени dt аналогично соотношению (13.29):

$$dt' = \frac{dt}{a_T(T)}, \quad t' = \int_0^t \frac{dt}{a_T(T)}. \quad (13.30)$$

В основе введения модифицированного времени лежит принцип температурно-временной аналогии. Этот принцип многократно проверялся экспериментально для многих полимерных материалов в области физической линейности и получил удовлетворительное подтверждение. Однако следует отметить, что при решении конкретных задач принцип температурно-временной аналогии (13.29)–(13.30) широко используется и в случае физической нелинейности материалов.

13.5. О ТЕОРИИ СТАРЕНИЯ

В инженерной практике получили широкое применение *технические теории ползучести*, отражающие реономные свойства материалов при введении времени в соотношения между напряжениями и деформациями. Для изучения НДС материалов, у которых свойства изменяются значительным образом, со временем используют *теорию старения*. Наиболее ярким представителем таких материалов является бетон.

Согласно этой теории одномерные определяющие уравнения имеют следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma, t), \quad f(\sigma, t) = f_1(\sigma)f_2(t) = B\sigma^n f_2(t). \quad (13.31)$$

В (13.31) константы B , n и функция $f_2(t)$ определяются по кривым ползучести материала.

Соотношения (13.31) показывают, что материал как бы меняет свои свойства со временем, т. е. «старее». Этим можно объяснить название теории. Важно, что *теория старения учитывает изменение возраста бетона, но не учитывает длительности приложения нагрузки*.

13.6. К РАСЧЕТУ ТРЕТЬЕЙ СТАДИИ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ С УЧЕТОМ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Как уже упоминалось, большинство существующих сегодня методов феноменологического описания третьей стадии ползучести и разрушения материалов базируются, как правило, на введении в уравнения типа теории упрочнения параметра, характеризующего степень поврежденности материала. Такого типа кинетические соотношения обладают всеми недостатками теории упрочнения при нестационарном нагружении (занижение деформации ползучести при ступенчатом увеличении нагрузки, невозможность описания обратной ползучести при полной разгрузке и др.) [124].

Далее, базируясь на работах [119, 120], описан подход к построению определяющих реологических соотношений для материалов при наличии трех стадий ползучести, который позволяет устранить отмеченные выше недостатки теории упрочнения.

Ю. П. Самарин¹ для описания первой и второй стадий ползучести предложены такие уравнения [121]:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) + v(t) + w(t); \\ u(t) &= \sum_k u_k(t), \quad v(t) = \sum_k v_k(t), \\ \dot{u}_k(t) &= \lambda_k [a_k \sigma^m(t) - u_k(t)], \\ \dot{v}_k(t) &= \begin{cases} \lambda_k [b_k \sigma^m(t) - v_k(t)], & b_k \sigma^m(t) > v_k(t), \\ 0, & b_k \sigma^m(t) \leq v_k(t), \end{cases} \\ \dot{w}(t) &= c \sigma^n(t), \end{aligned} \quad (13.32)$$

где p — деформация ползучести; u, v, w — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие p ; $\lambda_k, a_k, b_k, c, m, n$ — константы, являющиеся характеристиками материала (методика, для определения данных констант, изложена в [122]).

Для описания третьей стадии ползучести вводится гипотеза, согласно которой увеличение скорости деформации ползучести связывается с процессом микроразрушения материала и уменьшением истинного (эффективного) сечения образца [57]. В результате истинные напряжения в материале растут и, как следствие, повышается скорость ползучести. Необходимо различать *обычное напряжение* $\sigma_0(t) = F(t)/S_0$ и *истинное напряжение* $\sigma(t) = F(t)/S$, где $F(t)$ — растягивающее усилие; S_0 и S — площади поперечного сечения образца без учета и с учетом микроразрушений (соответственно).

Предполагается, что истинное напряжение пропорционально величине работы истинного напряжения на деформации ползучести. В таком случае связь σ и σ_0 задается в виде

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \omega), \quad (13.33)$$

$$\dot{\omega} = \alpha \cdot \sigma \cdot p, \quad (13.34)$$

где ω — параметр поврежденности, $\alpha = \text{const}$.

Таким образом, для описания деформации ползучести при наличии трех стадий в качестве напряжения в уравнениях (13.32) нужно использовать истинное напряжение, задаваемое системой уравнений (13.33), (13.34).

Для определения коэффициента поврежденности α выполняется минимизация следующего выражения:

$$J(\alpha) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \frac{1}{v_j - 1} \sum_{i=1}^{v_j} [p_j^*(t_i) - p_j(t_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (13.35)$$

где $p_j^*(t_i), p_j(t_i)$ — экспериментальные и расчетные значения деформации ползучести j -й реализации; t_i — значения времени, при которых фиксировалась деформация ползучести.

¹ Самарин Юрий Петрович (1936–2000), советский и российский ученый-математик, механик.

Замечание. Экспериментальная проверка уравнений (13.32)–(13.35) была проведена при стационарных ($\sigma_0 = \text{const}$) и нестационарных ($\sigma_0 \neq \text{const}$) режимах нагружения [119, 120].

В случае отсутствия первой стадии ползучести ($u(t) = v(t) = 0$) решение системы уравнений (13.32)–(13.35) при $\sigma_0 = \text{const}$ имеет вид:

$$p(t) = -\frac{1}{n\alpha\sigma_0} \ln |1 - n\sigma_0^{n+1}\alpha ct|.$$

Для прогнозирования времени до разрушения в данном случае в качестве критерия принимается величина удельной работы истинного напряжения σ на деформации ползучести:

$$A(t) = \int_0^t \sigma dp, \quad (13.36)$$

т. е. время до разрушения определяется из уравнения $A(t) = A^*$, где A^* – критическая величина работы. Из уравнений (13.32)–(13.34) и (13.36) можно получить

$$A(t) = \frac{1}{\alpha} \left[(1 - n\sigma_0^{n+1}\alpha ct)^{-1/n} - 1 \right]. \quad (13.37)$$

Теоретические значения времени до разрушения t_2^* находятся из (13.37) при $A = A^*$.

14.1. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ А. А. ИЛЬЮШИНА

Замечание. Материал в данном разделе излагается по монографии В. В. Москвитина [123].

В основе законов, устанавливающих связи между напряжениями и деформациями в общем случае сложного нагружения лежат:

- условие однозначности;
- постулат изотропии;
- принцип запаздывания векторных и скалярных свойств;
- гипотеза о разгрузке;
- постулат пластичности.

Данные положения формулировались с учетом следующих предположений:

1. В исходном состоянии тело изотропно.
2. Считается, что в достаточно малой окрестности любой точки деформированного тела состояние является однородным; при этом процессы изменения во времени однородной деформации окрестности точки неоднородно деформируемого тела и однородной деформации образца конечных размеров при одинаковых напряжениях и внешних условиях протекают одинаково.
3. Деформации считаются настолько малыми, что их квадратами по сравнению с самими величинами можно пренебречь.
4. Исключаются из рассмотрения реономные свойства материала.

Рассмотрим кратко основные положения общей математической теории пластичности, сформулированные А. А. Ильюшиным [65].

1. *Условие однозначности.* При заданном начальном состоянии, известном изменении во времени внешних параметров (температуры, дозы облучения и т. п.) и заданном процессе деформирования (изменении во времени тензора деформаций) тензор напряжений в каждый момент времени определяется однозначно.

Необходимость введения этого условия связана с тем, что невозможно, например, в двух опытах осуществить одинаковое изменение внешних параметров, одина-

ковые процессы деформаций. Это, в свою очередь, приведет к отклонениям в значениях тензора напряжений. Условие же однозначности по существу постулирует, что отклонения в значениях тензора напряжений малы, если малы отклонения в значениях внешних параметров и тензора деформаций.

2. *Векторное представление процесса деформации и постулат изотропии.* Как известно, тензор деформаций ε_{ij} , связанный с фиксированной декартовой системой координат $x = (x_1, x_2, x_3)$, можно представить в виде суммы девиаторной и шаровой частей: $\varepsilon_{ij} = \vartheta_{ij} + \varepsilon \delta_{ij}$, причем среди значений ϑ_{ij} лишь пять независимых, так как первый инвариант девиатора равен нулю: $\vartheta_{11} + \vartheta_{22} + \vartheta_{33} = 0$.

Аналогичным образом представлен тензор напряжений $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij}$. Так как шаровые части связаны между собой простейшей зависимостью $\sigma = 3K\varepsilon$, то в дальнейшем считаем, что задан процесс в напряжениях или деформациях, если заданы соответственно величины $s_{ij}(t)$, $\vartheta_{ij}(t)$ в любой момент времени t . Заметим, что давление $p = -\sigma$ в экспериментальных исследованиях $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ можно отнести к внешним параметрам, как, например, температуру.

Поскольку среди величин ϑ_{ij} только пять независимых, то удобно для векторного представления девиатора деформаций ввести пространство пяти переменных ε_k , в котором определенным образом введена метрика (пятимерное евклидово пространство ε_5). В этом пространстве выберем единичный ортогональный репер $\mathbf{e}_k$ ($\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k = \delta_{ki}$), в котором зададим пятимерный вектор деформации

$$\mathfrak{A} = \varepsilon_k \mathbf{e}_k, \quad (14.1)$$

тождественный девиатору ϑ_{ij} , т. е. должно быть выполнено условие

$$\vartheta_{ij} \vartheta_{ij} = \mathfrak{A}^2 = \varepsilon_k \varepsilon_k. \quad (14.2)$$

Очевидно, из соотношения (14.2) пять компонентов ε_k определяются через шесть составляющих ϑ_{ij} неоднозначно. Рассмотрим один из возможных подходов к их определению. За величины ε_3 , ε_4 , ε_5 удобно принять следующие:

$$\varepsilon_3 = \sqrt{2}\vartheta_{12}, \quad \varepsilon_4 = \sqrt{2}\vartheta_{23}, \quad \varepsilon_5 = \sqrt{2}\vartheta_{31}.$$

При этом из (14.1), (14.2) следует

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \vartheta_{11}^2 + \vartheta_{22}^2 + \vartheta_{33}^2, \quad \vartheta_{11} + \vartheta_{22} + \vartheta_{33} = 0.$$

Нетрудно проверить, что эти уравнения будут удовлетворены, если принять

$$\begin{aligned} \sqrt{3/2}\vartheta_{11} &= \varepsilon_1 \cos \beta + \varepsilon_2 \sin \beta, \quad \sqrt{3/2}\vartheta_{22} = -\varepsilon_1 \sin(\beta + \pi/6) + \varepsilon_2 \cos(\beta + \pi/6), \\ \sqrt{3/2}\vartheta_{33} &= \varepsilon_1 \sin(\beta - \pi/6) - \varepsilon_2 \cos(\beta - \pi/6). \end{aligned} \quad (14.3)$$

В свою очередь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1/\sqrt{2} &= \varepsilon_{11} \cos(\beta + \pi/6) - \varepsilon_{22} \sin \beta, \quad \varepsilon_2/\sqrt{2} = \varepsilon_{11} \sin(\beta + \pi/6) + \varepsilon_{22} \cos \beta, \\ \varepsilon_3 &= \sqrt{2}\vartheta_{12}, \quad \varepsilon_4 = \sqrt{2}\vartheta_{23}, \quad \varepsilon_5 = \sqrt{2}\vartheta_{31}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Входящую в эти соотношения величину β будем считать постоянной, так как при изменении параметра β происходит вращение вектора $\mathfrak{A}(\varepsilon_k)$ в плоскости координатных векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

При изменении в процессе нагружения величин ϑ_{ij} изменяются во времени и величины ε_k . При этом конец вектора деформации $\mathfrak{A}$ описывает в пространстве дефор-

маций кривую, которую будем называть *траекторией деформации*. Квадрат элемента дуги этой траектории будет:

$$ds^2 = d\varepsilon_k d\varepsilon_k = d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij},$$

при этом $s(t) = \int_0^t e dt$, $e^2 = e_{ij} e_{ij}$, $e_{ij} = d\varepsilon_{ij} / dt$.

Теперь можно вместо времени t ввести длину дуги s и рассматривать вектор ε как функцию s .

Внутренняя геометрия траектории деформации определяется движением по ней так называемого пятигранника Френе. Для его построения введем в каждой точке траектории деформации свой неортогональный репер

$$\varepsilon^k = d^k \varepsilon / ds^k \quad (k=1, 2, \dots, 5),$$

считая при этом $\varepsilon(s)$ достаточное число раз дифференцируемой функцией. Эти пять векторов, вообще говоря, линейно независимы. Построим по ним местный ортогональный репер $\mathbf{q}_k$.

За $\mathbf{q}_1$ примем

$$\mathbf{q}_1 = d\varepsilon / ds,$$

единичный вектор, направленный по касательной к траектории деформации. Последующий вектор представим в виде

$$\mathbf{q}_2 = d^2 \varepsilon / ds^2 + \alpha_1 \mathbf{q}_1,$$

причем величину α_1 найдем из условия ортогональности $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$. Продолжая аналогичным образом, определим $\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5$. Нормируя $\mathbf{q}_k$, найдем единичные векторы искомого сопровождающего пятигранника Френе:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2 / q_2, \dots, \mathbf{p}_5 = \mathbf{q}_5 / q_5.$$

Из приведенного построения видно, что $\mathbf{p}_k$ представляют собой линейные комбинации векторов ε^k . В свою очередь, ε^k линейно выражаются через $\mathbf{p}_k$, причем коэффициенты в этих соотношениях зависят от четырех скалярных величин

$$\kappa_{kk} = \left(d\varepsilon^k / ds^k \right) \left(d\varepsilon^k / ds^k \right). \quad (14.5)$$

Приведем обобщенные формулы Френе, выражающие производные $d\mathbf{p}_k / ds$ через $\mathbf{p}_k$:

$$d\mathbf{p}_k / ds = -\kappa_{k-1} \mathbf{p}_{k-1} + \kappa_k \mathbf{p}_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, 5), \quad \kappa_0 = \kappa_5 = 0, \quad (14.6)$$

где $\kappa_1(s), \dots, \kappa_4(s)$ — параметры кривизны и кручения, которые выражаются через скалярные величины κ_{kk} (14.5). Величины $\kappa_1(s), \dots, \kappa_4(s)$ являются характеристиками внутренней геометрии траектории деформации; иначе говоря, траектория деформации с точностью до положения в пространстве деформаций ε_5 определяется однозначно заданием $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \kappa_3(s), \kappa_4(s)$.

Используя обобщенные формулы Френе (14.6), можно производную любого порядка вектора $\varepsilon(s)$ по s и интеграл любой кратности от $\varepsilon(s)$ по s (траектории, для которых существует бесконечное число производных ε по s), выразить через $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_5$.

Поэтому любой векторно-линейный оператор $L(\varepsilon)$ над ε по s с коэффициентами, зависящими от κ_k и s , можно представить в виде

$$L(\varepsilon) = \lambda_k \mathbf{p}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (14.7)$$

где λ_k функционально зависят от $\kappa_1, \dots, \kappa_4$ и s . Следовательно, $L(\varepsilon)$ определяется только внутренней геометрией траектории деформации, т. е. оператор $L(\varepsilon)$ является инвариантом преобразования вращения и отражения в пространстве деформаций $\mathcal{E}_5$.

В силу большой общности оператора $L(\varepsilon)$ любой физический вектор, связанный с траекторией деформации и представленный в форме (14.7), также будет определяться внутренней геометрией траекторий деформации.

Среди физических величин нас в первую очередь интересует вектор напряжений σ , который может быть построен аналогично вектору деформаций ε . При заданном давлении $p = -\sigma$ напряжения определяются пятью независимыми компонентами тензора девиатора напряжений s_{ij} .

Введем пространство напряжений, в котором задается вектор напряжений σ с координатами $\sigma_1, \dots, \sigma_5$, причем последние связаны с s_{ij} соотношениями, аналогичными выражениям (14.4):

$$\begin{aligned} \sigma_1 / \sqrt{2} &= s_{11} \cos(\beta + \pi/6) - s_{22} \sin \beta, \quad \sigma_2 / \sqrt{2} = s_{11} \sin(\beta + \pi/6) + s_{22} \cos \beta, \\ \sigma_3 &= \sqrt{2} s_{12}, \quad \sigma_4 = \sqrt{2} s_{23}, \quad \sigma_5 = \sqrt{2} s_{31}. \end{aligned}$$

Девиатор s_{ij} выражается через σ_k по формулам, аналогичным (14.3).

В пространстве напряжений конец вектора σ будет описывать траекторию, которую будем называть *траекторией нагружения*.

В силу сказанного ранее, вектор напряжений σ в каждой точке траектории деформации может быть представлен в виде (14.6):

$$\sigma = \lambda_k \mathbf{p}_k, \quad (14.8)$$

причем λ_k в общем случае являются скалярными функционалами параметров кривизны и кручения по длине дуги s :

$$\lambda_k = \lambda_k \{ \kappa_m(\xi), \xi \}_{\xi=0}^{\xi=s} \quad (k=1, \dots, 5; m=1, \dots, 4).$$

В приложениях удобно использовать не векторную запись, а соотношения между тензором напряжений σ_{ij} и тензором деформаций ε_{ij} :

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k,$$

где ε_{ij}^k — базис, связанный с ε_{ij} , например, такими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij}^k = \int_0^t f_k(t, \tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau.$$

Здесь f_k — заданные линейно независимые функции. В (14.8) A_k являются функционалами инвариантов тензора деформаций ε_{ij} .

Если вектор напряжений σ задавать его модулем σ и углами $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ ориентации σ во введенном ранее естественном ортогональном репере $\mathbf{p}_k$ траектории деформации, то можно записать:

$$\sigma = \Phi \{ \kappa_m(\xi), \xi \}_{\xi=0}^{\xi=s}, \quad \alpha_i = \alpha_i \{ \kappa_m(\xi), \xi \}_{\xi=0}^{\xi=s},$$

причем среди α_i независимых величин — четыре.

Совокупность траектории деформации, физических векторов, связанных с траекторией деформации в каждой ее точке, и скалярных величин — температуры T , давления p и т. п. — называется *образом процесса нагружения тела в пространстве деформаций*. С использованием понятия образа процесса сформулирован постулат изотропии, который лежит в основе представления (14.8): образ процесса нагружения в пятимерном пространстве деформаций $\mathfrak{E}_5$ определяется только внутренней геометрией траектории деформации и скалярными величинами — давлением $p(s)$, температурой $T(s)$ и др.

В силу постулата изотропии образ процесса нагружения инвариантен относительно преобразований вращения и отражения в пространстве деформаций $\mathfrak{E}_5$. Это обстоятельство позволяет сократить число экспериментов по исследованию упругопластических свойств материала при произвольных сложных нагружениях, включая и переменные нагружения.

Постулат изотропии проверялся экспериментально и к настоящему времени получил убедительное обоснование. Здесь следует отметить работы В. С. Ленского¹ [124] и других авторов. Большей частью это были опыты с тонкостенными трубками, которые испытывали растяжение и кручение (в том числе с изменением направления кручения) в любой последовательности.

При соответствующем выборе системы координат в рассматриваемом случае для несжимаемого материала будем иметь: $\mathfrak{e}_{11} = \varepsilon_{11}$, $\mathfrak{e}_{22} = \mathfrak{e}_{33} = -\varepsilon_{11}/2$, $\mathfrak{e}_{12} = \gamma_{12}/2$, где γ_{12} — деформация сдвига. Принимая в формулах (10.30) $\beta = 0$, получим

$$\mathfrak{e}_1 = \sqrt{3/2}\mathfrak{e}_{11} = \sqrt{3/2}\varepsilon_{11}, \quad \mathfrak{e}_3 = \sqrt{2}\mathfrak{e}_{12} = \sqrt{1/2}\varepsilon_{12}, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_4 = \mathfrak{e}_5 = 0.$$

Таким образом, в нашем случае только два компонента вектора деформации отличны от нуля. Ими на плоскости $\mathfrak{e}_1 \sim \mathfrak{e}_3$ задается процесс деформаций по произвольной программе.

3. *Принцип запаздывания векторных и скалярных свойств*. Ориентация и модуль вектора напряжений относительно траектории деформации определяются не всей историей процесса деформирования из начального состояния, а лишь некоторым конечным участком траектории деформации (*след запаздывания*), непосредственно предшествующим рассматриваемому моменту.

Обозначим величину следа запаздывания через h , которая в зависимости от материала колеблется в пределах $(3-10)\varepsilon_y$, где ε_y — предел текучести по деформации при чистом растяжении. Рекомендуется определять величину h из опытов по анализу векторных свойств, поскольку свойство ограниченной «памяти» скалярных свойств проявляется на меньших участках траектории деформации.

С учетом принципа запаздывания векторных и скалярных свойств функционалы λ_k в представлении (14.8) запишутся в виде

$$\lambda_k = \lambda_k \{ \kappa_m(\xi) \}_{\xi=s-h}^{\xi=s}.$$

Принцип запаздывания скалярных и векторных свойств особенно важен при исследовании циклических нагружений, поскольку в этом случае длина дуги тра-

¹ Ленский Виктор Степанович (1913–1998), советский и русский механик, профессор МГУ, известен теоретическими и особенно экспериментальными работами в области пластичности.

ектории деформации, в отличие от самих деформаций, при большом числе циклов может быть значительной, и учет всей предыстории представляется крайне затруднительным.

Траекториями простого нагружения (деформирования) будем называть траектории в пространстве деформаций, для которых единичный вектор ε/ε постоянен (не изменяется в процессе нагружения). По сути, это прямые, проходящие через начало координат. Все другие траектории будем называть *траекториями сложного нагружения (деформирования)*.

Заметим, что и в пространстве напряжений траектория в случае простого нагружения есть прямая линия, проходящая через начало координат. Введенные здесь более строгие формулировки полностью согласуются с принимавшимися ранее.

4. *Гипотеза о разгрузке и деформационная анизотропия.* Допускается возможность представления тензора напряжений в виде суммы упругой и пластической частей:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (14.9)$$

При этом тензор упругих деформаций связан с тензором напряжений обобщенным законом Гука, который для изотропного материала можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon^e \delta_{ij} = s_{ij}/2G, \quad \varepsilon^e = \sigma/3K, \quad (14.10)$$

где $\varepsilon^e = (\varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e)/3$; G — модуль сдвига; K — модуль объемной деформации.

Предположим, что среднее напряжение σ пропорционально относительному изменению объема:

$$\sigma = 3K\varepsilon. \quad (14.11)$$

Сравнивая (14.10) и (14.11), заключаем, что $\varepsilon = \varepsilon^p$, а значит, относительное изменение объема ε^p за счет пластической части деформации в этом случае равно нулю. Поэтому соотношение (14.9) можно записать и для девиаторов:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p.$$

Отсюда следует соотношение и для вектора деформации $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$.

Будем говорить, что на некотором участке траектории деформации осуществляется разгрузка, если на этом участке вектор ε^p остается постоянным. Поэтому можно заключить, что при продолжении нагружения из некоторой точки M траектории деформации (такой, что в этой точке $d\varepsilon^p/ds \neq 0$) всевозможные траектории разобьются на два множества.

Траектории одного множества обладают тем свойством, что при движении по ним вектор пластической деформации остается неизменным, т. е. происходит разгрузка. При движении вдоль траектории другого множества изменяется и вектор пластической деформации ε^p , иначе говоря, осуществляется активное нагружение (активная деформация).

Траектории активной деформации и разгрузки в пятимерном пространстве $\mathcal{E}_5$ разделены некоторой поверхностью $F(\varepsilon) = 0$, проходящей через точку M . Эту поверхность будем называть *поверхностью текучести*, а соответствующую поверхность в пространстве напряжений — *поверхностью нагружений*. Вид поверхности текучести и поверхности нагружений зависит от предшествующего (до точки M) участка активного нагружения.

Изменение коэффициентов упругости вследствие пластического деформирования (*деформационная анизотропия*) наблюдал еще Баушингер. Учет влияния активного нагружения на их величину занимались многие исследователи. На важность изменения коэффициентов упругости в теории пластичности (особенно в теории течения) указал А. А. Ильюшин. Количественно изменение коэффициентов упругости при пластическом деформировании может достигать 15–20 %.

5. *Постулат пластичности.* Работа вектора напряжений W_σ по любой траектории, замкнутой в пространстве деформаций, равна нулю, если на всей траектории не происходит изменение вектора пластической деформации ε^p , и положительна, если хотя бы на некоторых участках траектории вектор пластической деформации не остается постоянным.

Математически это может быть представлено следующим образом: работа вектора напряжений W_σ на любом замкнутом в $\mathcal{E}_5$ по деформациям процессе неотрицательна:

$$W_\sigma = \oint \sigma_k d\varepsilon_k = \oint s_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0.$$

Этот постулат пластичности отвечает на следующий вопрос: существует ли на данной траектории участок активной деформации?

Если рассмотреть процесс нагружения, замкнутый не по деформациям, а по напряжениям, и определить соответствующую работу W'_σ , то окажется [31], что всегда $W'_\sigma \geq W_\sigma$. Из условия $W_\sigma \geq 0$ следует $W'_\sigma \geq 0$.

Полная работа напряжений может быть представлена в виде

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int s_{ij} d\varepsilon_{ij} + 3 \int \sigma d\varepsilon.$$

Если $\sigma = 3K\varepsilon$ и процесс является замкнутым по деформациям, то второй интеграл равен нулю (нет приращений объемных пластических деформаций), поэтому $W = W_\sigma$, и из условия $W_\sigma \geq 0$ в этом случае следует $W \geq 0$.

Из условия $W \geq 0$ следует, что если $F(\varepsilon) = 0$ — уравнение поверхности текучести, то в любой точке на поверхности

$$d\varepsilon^p = D \operatorname{grad}(dF(\varepsilon)) d\lambda.$$

Приращение пластической деформации направлено по нормали к поверхности F . Здесь D — некоторый функционал, определяемый предысторией деформирования, λ — параметр нагружения. Это соотношение обычно называют *ассоциированным с поверхностью текучести $F(\varepsilon) = 0$ законом текучести*. Оно является основой при построении различных вариантов теории течения.

14.2. БИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Определяющие уравнения билинейной теории упругости [125] в случае сложного напряженного состояния учитывают пластическую сжимаемость материала таким образом, чтобы соотношения между деформациями и напряжениями для пластического тела были билинейными. Эти соотношения для процесса активного пластического нагружения (когда $dJ_2/dt > 0$, $dJ_2/dt > 0$, где $J_2 = 0,5s_{ij}s_{ij}$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений) имеют вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu_1} s_{ij} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} \right) (s_{ij} - s_{ij}^0), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3K_1} \sigma_{ij} + \left(\frac{1}{2K_2} - \frac{1}{2K_1} \right) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0),$$

где σ_{ij}^0 — тензор начальных напряжений, отвечающий точкам перехода материала в пластическое состояние; μ_1, K_1 — соответственно модули деформации формы и объема; μ_2, K_2 — постоянные материала в пластическом состоянии:

$$\mu_2 = E_2 / (2(1 + \nu_2)), \quad 3K_2 = E_2 / (1 - 2\nu_2). \quad (14.12)$$

Как известно, коэффициент ν_2 определяется из опыта на одноосное растяжение как отношение поперечной пластической деформации к продольной: $\nu_2 = -\varepsilon_2^p / \varepsilon_1^p$.

Таким образом, ν_2 и соответственно μ_2 в соотношениях (14.12) играют роль коэффициента Пуассона и модуля сдвига в пластической области.

Уравнения билинейной теории в случае одноосного напряженного состояния переходят в соотношения деформационной теории пластичности. Применение билинейной теории в задачах сложного напряженного состояния имеет то преимущество по отношению к другим теориям пластичности, что ее уравнения одинаковым образом интегрируются как в упругой, так и в пластической областях (ввиду одинаковых линейных зависимостей между девиаторами деформаций и напряжений и шаровыми составляющими тензоров как в области упругих, так и в области пластических деформаций). В этом состоит удобство теории, так как возможны эффективные построения решений многих граничных задач. Вместе с тем эта теория связана с некоторым упрощением физической природы задач.

14.3. ПЕРЕМЕННЫЕ НАГРУЖЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

При оценке работы несущих элементов конструкций под воздействием циклически изменяющихся силовых нагрузок в условиях температурных, радиационных и других физико-механических полей возникают специфические проблемы. Они связаны с определением соответствующих напряжений и деформаций, формулированием условий достижения предельных состояний: нарушение прочности, появление недопустимых перемещений и т. п.

Характерной особенностью циклических деформаций упругопластических тел, в отличие от упругих, является влияние предыстории нагружения на деформированное состояние в данный момент времени. Далее рассмотрен один класс *простых переменных нагружений* (в том числе при температурных и радиационных воздействиях), для которого указана возможность построения решения краевой задачи теории пластичности на любом полуцикле, если известно решение при нагружении из естественного состояния.

В настоящее время для аналитического описания диаграмм циклического деформирования упругопластических материалов могут быть использованы различные подходы. Рассмотрим основы теории В. В. Москвитина [73]. Приведем условия, при выполнении которых будут справедливы уравнения типа теории малых упругопластических деформаций, используемые Москвитиным для описания повторных и знакопеременных нагружений.

1. Разгрузка и последующее повторное нагружение до точки, соответствующей началу разгрузки, происходят линейно, вдоль прямой $O'M$ (рис. 14.1). Площадь петли гистерезиса для большинства материалов мала и в дальнейшем не учитывается.

2. При повторном нагружении в направлении $O'M$ пластические деформации начнут изменяться в том случае, когда будет достигнута точка M . Дальнейшее нагружение будет проходить вдоль $M'M$, причем кривая $ОММ'$ характеризует упругопластические свойства материала в его исходном состоянии. Таким образом, в этом случае нагружение будет происходить так же, как если бы не было разгрузки. Предел текучести при этом является величиной переменной, зависящей от предшествующего напряженного и деформированного состояний.

3. Будем считать, что прямая $O'M$ параллельна прямой упругого нагружения из исходного состояния, т. е. что пластическое деформирование не изменяет величины упругих постоянных, характеризующих упругие свойства материала.

4. Знакопеременное нагружение до появления новых пластических деформаций происходит вдоль прямой $O'N$, являющейся продолжением прямой $O'M$. Внутренняя геометрия кривой последующего пластического деформирования NN' зависит, вообще говоря, от положения точки M на диаграмме $ОММ'$.

В дальнейшем *циклическими* (или *переменными*) *нагружениями* тел будем называть такие изменения во времени силовых внешних параметров, когда во всем теле или в его конечных областях происходит чередование нагружения и разгрузки. Говоря о «нагружении тела из естественного состояния», будем иметь в виду, что оно не подвергалось предшествующему деформированию, в нем отсутствуют какие-либо напряжения и деформации до приложения нагрузки.

Рассмотрим твердое тело, не имеющее начальных напряжений и деформаций. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ на тело начинают действовать объемные F'_i и на части внешней границы S_σ — поверхностные силы R'_i . Эти силы и граничное перемещение u'_{0i} на части границы S_u вызывают в теле напряжения σ'_{ij} , деформации ϵ'_{ij} и перемещения u'_i . При этом в теле появляются области пластических деформаций. В упругих областях справедлив закон Гука:

$$s'_{ij} = 2G\epsilon'_{ij}, \quad \sigma' = 3K\epsilon', \quad (14.13)$$

где s'_{ij} , ϵ'_{ij} — компоненты девиаторов; σ' , ϵ' — шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; G , K — модули сдвиговой и объемной деформаций.

Для тех областей твердого тела, где появились пластические деформации, связь девиаторов можно представить в таком виде:

$$s'_{ij} = 2G\epsilon'_{ij} f'(\epsilon'_u, a'_k),$$

где $f'(\epsilon'_u, a'_k)$ — функция пластичности, введенная А. А. Ильюшиным; ϵ'_u — интенсивность деформации; a'_k — аппроксимационные параметры, определяемые внутренней геометрией кривой деформирования.

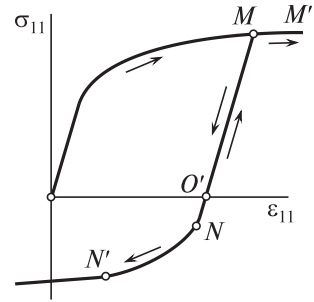


Рис. 14.1. Кривая переменного нагружения упругопластических тел

На границе областей упругих и пластических деформаций должно выполняться условие пластичности $\varepsilon'_u = \varepsilon'_y$ (ε'_y — деформационный предел пластичности при нагружении из естественного состояния).

Таким образом, в деформируемом теле связь между напряжениями и деформациями представима в виде

$$s'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}f'(\varepsilon'_u, a'_k), \quad \sigma' = 3K\varepsilon', \quad (14.14)$$

где функцию пластичности следует положить $f'(\varepsilon'_u, a'_k) = 1$ в тех областях, где $\varepsilon'_u \leq \varepsilon'_y$.

К соотношениям (14.13), (14.14) следует добавить дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия, а также соотношения Коши в предположении малости деформаций:

$$\sigma'_{ij,j} + \rho F'_i = 0, \quad \sigma'_{ij}l_j = R'_i \text{ на } S_\sigma, \quad u'_i = u'_{0i} \text{ на } S_u, \quad 2\varepsilon'_{ij} = u'_{i,j} + u'_{j,i}, \quad (14.15)$$

где l_j — направляющие косинусы нормали к части поверхности S_σ .

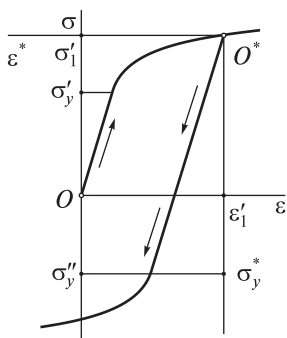


Рис. 14.2. Диаграмма циклического нагружения материала

Пусть теперь, начиная с некоторого момента времени $t = t_1$, осуществляется мгновенная разгрузка и последующее нагружение усилиями F''_i, R''_i с граничным перемещением u''_{0i} . При этом будем считать, что эти силы и перемещения обратные по знаку к силам и перемещениям, которые были перед началом разгрузки. Схематично такой процесс показан на рис. 14.2. Указанные воздействия вызывают в теле напряжения σ''_{ij} , деформации ε''_{ij} и перемещения u''_i , для которых остаются справедливыми соотношения (14.15):

Связь напряжений с деформациями для них запишем в виде

$$s''_{ij} = 2G\varepsilon''_{ij}f''(\varepsilon''_{u1}, \varepsilon''_u, a''_k), \quad \sigma'' = 3K\varepsilon''. \quad (14.16)$$

Здесь $f''(\varepsilon''_{u1}, \varepsilon''_u, a''_k)$ — функция пластичности при повторном знакопеременном нагружении, зависящая от предшествующей разгрузки интенсивности деформаций ε''_{u1} , текущей интенсивности деформаций ε''_u и аппроксимационных параметров a''_k , описывающих кривую деформирования второго полуцикла. Функцию пластичности следует положить $f'' = 1$ в тех областях, где не появились новые пластические деформации, т. е. $\varepsilon''_u \leq \varepsilon''_y$ по модулю, ε''_y — деформационный предел пластичности, соответствующий σ''_y при повторном нагружении. Характеристики $\varepsilon''_y, \sigma''_y$ зависят, вообще говоря, от значений интенсивностей деформации и напряжения ε''_{u1} и σ''_{u1} , существовавших непосредственно перед началом разгрузки, конкретной, — от того, происходило ли в данной точке тела пластическое деформирование или нет.

Уравнения (14.15), выписанные относительно $\sigma''_{ij}, \varepsilon''_{ij}$ и u''_i , и (14.16) определяют краевую задачу для величин с двумя штрихами. Ее сложность заключается в зависимости искомого решения от точки разгрузки ($\varepsilon''_{u1}, \sigma''_{u1}$), так как в каждой точке необходимо ставить свою краевую задачу и получать свое решение.

Рассмотрим один из подходов, позволяющий избежать этих трудностей. Введем разности для момента времени $t > t_1$:

$$\sigma^*_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}, \quad \varepsilon^*_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}. \quad (14.17)$$

Аналогичные разности вводятся для девиаторов и шаровых частей тензоров напряжений и деформаций. Величины с одним штрихом соответствуют своим значениям перед разгрузкой.

В областях тела, где появились новые пластические деформации, девиаторы тензоров напряжений и деформаций со звездочками связаны соотношениями

$$s_{ij}^* = 2G\partial_{ij}^* f^*(\varepsilon_u^*, \varepsilon'_{ul}, a_k^*). \quad (14.18)$$

Здесь $f^*(\varepsilon_u^*, \varepsilon'_{ul}, a_k^*)$ — некоторая новая универсальная функция, описывающая нелинейность диаграммы деформирования $\sigma^* \sim \varepsilon^*$. На линейном участке $f^* = 1$.

Следует отметить, что первая попытка сравнения кривой повторного знакопеременного деформирования с соответствующей кривой при первом нагружении была предпринята Е. К. Мазингом¹ в 1926 г. Он предположил, что эти кривые совпадают, если f^* построить в осях с удвоенным масштабом и обратным направлением, т. е. $f^* \equiv 2f(\varepsilon_u^*/2)$.

В этом случае вид кривой повторного нагружения не зависит от величины предшествующей деформации ε'_{ul} .

Теория Мазинга подвергалась экспериментальной проверке. Результаты не подтвердили предположение Мазинга для всего исследуемого диапазона начальных деформаций, особенно при их значительной величине. Однако для начальных деформаций вблизи предела текучести принцип Мазинга удовлетворительно описывает повторные нагружения.

В начале 1950-х гг. В. В. Москвитин обобщил гипотезу Мазинга, введя масштабные коэффициенты $\alpha_n \neq \beta_n$, определяемые экспериментально:

$$\sigma_n^* = \alpha_n f'(\varepsilon_u^*/\beta_n). \quad (14.19)$$

Другое предположение, высказанное Москвитиным впоследствии, заключалось в возможности описания кривой f^* функцией такого же аналитического вида, что и при нагружении из естественного состояния, но с другими аппроксимационными параметрами a_k^* , определяемыми экспериментально. Следовательно, если $f' \equiv f'(\varepsilon'_u, a'_k)$, то

$$f^* \equiv f'(\varepsilon_u^*, a_k^*), \quad (k = 1, \dots, m), \quad (14.20)$$

где m — число параметров.

Вводя достаточное количество постоянных, можно удовлетворить предположению (14.20) с достаточной степенью точности, что, в свою очередь, позволит использовать гипотезу Москвитина о переменном нагружении практически для произвольных кривых циклического деформирования. Таким образом, если принять соотношения (14.19) или (14.20), то это позволит избавиться от зависимости кривой повторного знакопеременного нагружения от точки разгрузки.

Выпишем остальные уравнения для величин со звездочками. У шаровых тензоров связь остается линейной во всем теле, так как и при первом (14.14), и при втором (14.16) нагружениях она везде принималась линейной:

$$\sigma^* = 3K\varepsilon^*. \quad (14.21)$$

¹Мазинг Евгений Карлович (1880—1944), советский учёный, специалист в области двигателей внутреннего сгорания; доктор технических наук, заслуженный деятель науки и техники РСФСР.

К соотношениям (14.18)–(14.21) следует присоединить дифференциальные уравнения равновесия, граничные условия и соотношения Коши, следующие из линейности соотношений (14.15):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^* + \rho F_i^* &= 0, \quad F_i^* = F_i' - F_i'', \quad \sigma_{ij}^* l_j = R_i^*, \quad R_i^* = R_i' - R_i'' \quad \text{на } S_\sigma, \\ u_i^* &= u_{0i}^* = u_{0i}' - u_{0i}'' \quad \text{на } S_u, \quad 2\varepsilon_{ij}^* = u_{i,j}^* + u_{j,i}^*. \end{aligned} \quad (14.22)$$

При этом считается, что части внешней границы тела S_σ и S_u , на которых задаются соответственно напряжения и перемещения, сохраняются теми же, что и при предшествующем нагружении.

Дополнительно будем предполагать, что при переменном нагружении пластические деформации не распространяются на области, в которых при прямом нагружении возникают только упругие деформации.

Соотношения (14.18)–(14.22) образуют новую краевую задачу для величин со звездочками, причем для описания функции f^* принимается либо *обобщенный принцип Мазинга – Москвитина* (14.19), либо предположение (14.20).

Сравнивая соотношения (14.13)–(14.15) для тела при нагружении из естественного состояния и соотношения для величин со звездочками (14.18)–(14.22), можно отметить, что они совпадают с точностью до обозначений. Поэтому решение задачи для величин со звездочками можно получить из известного решения задачи, соответствующей нагружению из естественного состояния, путем некоторых замен.

Например, если известно перемещение $u_i' = u_i'(x, \varepsilon_u', \varepsilon_y', a_k')$, то соответствующее перемещение со звездочкой будет $u_i^* = u_i'(x, \varepsilon_u^*, \varepsilon_y^*, a_k^*)$, где $\varepsilon_y^* = \varepsilon_y' - \varepsilon_y''$. Тогда искомое перемещение при повторном знакопеременном нагружении определяется из соотношения типа (14.17):

$$u_i'' = u_i' - u_i^*. \quad (14.23)$$

Напряжения и деформации также вычисляются по формулам, подобным (14.23).

Полученный результат можно распространить на случай любого n -го циклического нагружения. Пусть при n -м нагружении внешними силами F_i^n , R_i^n при граничных перемещениях u_{0i}^n возникают напряжения σ_{ij}^n , деформации ε_{ij}^n и перемещения u_i^n . При этом должны удовлетворяться уравнения равновесия, граничные условия и соотношения Коши:

$$\sigma_{ij,j}^n + \rho F_i^n = 0, \quad \sigma_{ij}^n l_j = R_i^n \quad \text{на } S_\sigma, \quad u_i^n = u_{0i}^n \quad \text{на } S_u, \quad 2\varepsilon_{ij}^n = u_{i,j}^n + u_{j,i}^n. \quad (14.24)$$

Введем следующие разности:

$$\sigma_{ij}^{*n} = (-1)^n (\sigma_{ij}^{n-1} - \sigma_{ij}^n), \quad \varepsilon_{ij}^{*n} = (-1)^n (\varepsilon_{ij}^{n-1} - \varepsilon_{ij}^n), \quad u_i^{*n} = (-1)^n (u_i^{n-1} - u_i^n).$$

Тогда оказываются справедливыми и соотношения типа (14.24) для величин со звездочками:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^{*n} + \rho F_i^{*n} &= 0, \quad F_i^{*n} = (-1)^n (F_i^{n-1} - F_i^n), \\ \sigma_{ij}^{*n} l_j &= R_i^{*n} \quad \text{на } S_\sigma, \quad u_i^{*n} = u_{0i}^{*n} \quad \text{на } S_u, \end{aligned} \quad (14.25)$$

$$R_i^{*n} = (-1)^n (R_i^{n-1} - R_i^n), \quad u_{0i}^{*n} = (-1)^n (u_{0i}^{n-1} - u_{0i}^n), \quad 2\varepsilon_{ij}^{*n} = u_{i,j}^{*n} + u_{j,i}^{*n}.$$

Примем, что при любом n -м переменном нагружении связь между шаровыми составляющими тензоров напряжений и деформаций остается упругой. Повторяя предыдущее предположение о возможности описания кривых $s'_{ij} \sim \varepsilon'_{ij}$ и $s^{*n}_{ij} \sim \varepsilon^{*n}_{ij}$ либо с помощью обобщенного принципа Мазинга – Москвитина, либо функциями нелинейности одинакового аналитического вида

$$s^{*n}_{ij} = 2G\varepsilon^{*n}_{ij}\alpha_n f'(\varepsilon^*_{ij}/\alpha_n), \quad s^{*n}_{ij} = 2G\varepsilon^{*n}_{ij} f'(\varepsilon^*_{ij}, a^{*n}_{ij}), \quad (14.26)$$

закключаем, что решение задачи для величин со звездочками в (14.25), (14.26) при любом n -м переменном нагружении можно получить из решения задачи, соответствующей нагружению из естественного состояния.

Например, если известно перемещение $u'_i = u'_i(x, \varepsilon'_u, \varepsilon'_y, a'_k)$, то соответствующая величина со звездочкой $u^{*n}_i = u'_i(x, \varepsilon^{*n}_u, \varepsilon^{*n}_y, a^{*n}_k)$.

Искомое перемещение u^{*n}_i найдем, обобщая выражение (14.23):

$$u^{*n}_i = u'_i - \sum_{k=2}^n (-1)^k u^{*k}_i. \quad (14.27)$$

Напряжения и деформации вычисляются по формулам типа (14.27).

В соотношениях (14.26) $\alpha_n \equiv \alpha(n)$ – масштабные коэффициенты циклического упрочнения, определяемые из экспериментов. Для циклически упрочняющихся материалов следует принять $\alpha_n > 2$, для разупрочняющихся – $\alpha_n < 2$, для циклически идеальных материалов – $\alpha_n = 2$ (последний случай соответствует принципу Мазинга).

14.4. ЦИКЛИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим в рамках теории малых упругопластических деформаций процесс неизотермического нагружения из естественного состояния твердого деформируемого тела внешними силами F_i , R_i при граничном перемещении u_{0i} . Температура $T(x, t)$ отсчитывается от некоторого начального состояния T_0 .

Примем, что зависимость между средним напряжением, относительным изменением объема и температурой имеет вид

$$\sigma = 3K(T)(\varepsilon - \alpha_0 T), \quad \alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \alpha(T) dT, \quad (14.28)$$

где $\alpha(T)$ – коэффициент линейного теплового расширения; K – модуль объемной деформации, который может зависеть от температуры.

Соотношения между девиаторами напряжений и деформаций имеют различный вид в зависимости от того, происходит ли активное нагружение, разгрузка или возникают новые (вторичные) пластические деформации. Если в некоторой области тела V'' не происходит изменения пластических слагаемых деформаций, то соответствующая зависимость имеет вид

$$s_{ij} - s'_{ij} = 2G(T)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij}), \quad (14.29)$$

где s'_{ij} , ε'_{ij} – девиаторы напряжений и деформаций перед началом разгрузки; G – зависящий от температуры модуль сдвига.

В области V'_e , где не появлялись пластические деформации, будет справедлив закон Гука $s_{ij} = 2G(T)\varepsilon_{ij}$.

В области V'_p пластических деформаций при активном нагружении из естественного состояния справедливо соотношение $s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}f(\varepsilon_u, T)$, причем здесь учтено, что универсальная функция пластичности может содержать температуру T .

Наконец, в области V''_p вторичных пластических деформаций, появляющихся в результате разгрузки, примем соотношения в следующей форме:

$$s_{ij} - s'_{ij} = 2Gf^*(\varepsilon_u^*, T)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij}). \quad (14.30)$$

При $\varepsilon_u^* \leq \varepsilon_y^*$ следует $f^* = 1$, и зависимость (14.30) переходит в (14.29).

Запишем соотношения на границах указанных областей. На границе Γ_1 зон V'_e и V'_p должно выполняться следующее условие:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_y(T) = \sigma_y(T)/2G(T). \quad (14.31)$$

На границе Γ_2 областей V'_e и V''_e начинается разгрузка, что соответствует условию $\partial\varepsilon_u/\partial t < 0$.

На границе областей V''_e и V''_p справедливо соотношение

$$\varepsilon_u^* = \varepsilon_y^*(T) = \sigma_y^*(T)/2G(T).$$

Отметим еще, что в областях активного нагружения соответствующие интенсивности деформации не должны убывать:

$$\partial\varepsilon_u/\partial t \geq 0 \text{ в области } V'_p, \quad \partial\varepsilon_u^*/\partial t \geq 0 \text{ в области } V''_p.$$

Приведенные соотношения позволяют различать процессы нагружения и разгрузки.

К выписанным уравнениям (14.28)–(14.30) присоединяем уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия.

Температура $T(x, t)$ в случае несвязанной задачи термопластичности должна удовлетворять уравнению теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_0(T) \operatorname{grad} T) + W^*, \quad T(x, 0) = T_0, \quad (14.32)$$

где ρ — плотность; c — удельная теплоемкость; λ_0 — коэффициент теплопроводности; W^* — интенсивность источников тепла.

К уравнению (14.32) следует добавить граничные условия, которые мы здесь не конкретизируем.

Таким образом, задача термопластичности с учетом разгрузок и вторичных пластических деформаций поставлена в рамках теории малых упругопластических деформаций. На изменения во времени внешних нагрузок, граничных перемещений и температуры накладываются ограничения, требующие, чтобы соответствующие траектории нагружения не относились к классу существенно сложных.

Заметим, что здесь рассмотрен общий случай, когда осуществляется взаимодействие внешних нагрузок с нестационарными температурными полями. Представляет интерес случай свободных тел, в которых переменные нагружения осуществляются исключительно за счет изменения во времени градиентов температурных полей. При этом возникает явление термической усталости, когда элементы конструкций разрушаются после небольшого числа циклов изменения температуры.

14.5. ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате в них возникает объемная деформация θ_I , изменяются упругие и особенно пластические характеристики вещества.

Нейтрон, обладающий достаточной кинетической энергией, проходя через кристаллическую решетку, образует на своем пути первичные, вторичные и т. д. атомы отдачи. Выбитые из кристаллической решетки, они оставляют вакантные места и, в конце концов, останавливаются в междоузлиях, что ведет к образованию в решетке парных дефектов Френкеля «атом внедрения — вакансия». Атом может быть выбит из узла, когда он получит некоторую пороговую энергию E_d . Если атом получает энергию, меньшую E_d , то она рассеивается на возбуждение колебаний решетки (нагревание) без образования смещений. Взаимодействие нейтронов с ядрами кроме упругого рассеяния может сопровождаться захватом нейтронов и делением ядер. При каждом акте распада выделяется энергия и образуются новые химические элементы.

Нас интересует механическая сторона этого процесса, возможность отражения в постановках и решениях краевых задач влияния нейтронного облучения на НДС упругопластического тела.

Рассмотрим начально однородное изотропное тело, занимающее полупространство $z \geq 0$. Если на границу ($z = 0$) параллельно оси z падают нейтроны с одинаковой средней энергией и интенсивностью φ_0 , нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), то интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости $z = \text{const}$, составляет [61]

$$\varphi(z) = \varphi_0 e^{-\mu z}. \quad (14.33)$$

Величина μ называется *макроскопическим эффективным сечением*. Для любого химического элемента $\mu = \sigma n_0 = \sigma(A_0 \rho / A)$ и имеет порядок 1/см, причем здесь σ — эффективное сечение, отнесенное к одному ядру, n_0 — число ядер в 1 см^3 , A_0 — число Авогадро, ρ — плотность, A — атомный вес.

Если φ_0 не зависит от времени, то в соответствии с формулой (14.33) к моменту времени t через сечение z пройдет интегральный поток:

$$I(z) = \varphi_0 t e^{-\mu z}. \quad (14.34)$$

В линейном приближении можно считать, что изменение объема вещества прямо пропорционально потоку $I(z)$ [76] и, следовательно: $\theta_I = BI(z)$, где B — константа, получаемая из опыта.

Величина $I_0 = \varphi_0 t$ дает суммарный поток нейтронов на единицу площади поверхности тела. В реакторах φ_0 имеет порядок $10^{17} - 10^{18}$ нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), а I_0 достигает значений $10^{23} - 10^{27}$ нейтрон/ м^2 , причем θ_I достигает значений порядка 0,1. Следовательно, в зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала величина B может быть порядка $10^{-28} - 10^{-24} \text{ м}^2/\text{нейтрон}$.

Зависимость модуля упругости, пределов текучести, прочности и всей диаграммы растяжения от I_0 различных энергий исследована экспериментально после облучения образцов в атомных реакторах. Опыты свидетельствуют, что, как правило, модуль

упругости изменяется слабо (возрастает на 1,5–5 %). Что касается пределов прочности и особенно текучести, то они весьма чувствительны в отношении облучения.

Для массивных тел с плоской границей число проходящих на глубине z под этой границей нейтронов за время t определяется формулой (14.34), поэтому предел текучести будет переменным по толщине z . На поверхности тела ($z = 0$) влияние радиации на предел пластичности σ_y вполне удовлетворительно описывается *формулой радиационного упрочнения* вида [2]:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left[1 + A(1 - \exp(-\xi I_0))^{1/2} \right],$$

где σ_{y0} – предел пластичности необлученного материала; A, ξ – константы материала, получаемые из эксперимента. На глубине z эта формула принимает вид

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left[1 + A(1 - \exp(-\xi I))^{1/2} \right],$$

где величина потока $I(z)$ описывается формулой (14.34). Соответствующие величины деформации обозначим через $\varepsilon_{y0}, \varepsilon_y$.

Рассмотрим процесс комплексного воздействия на деформируемое твердое тело внешних силовых и радиационных нагрузок.

Пусть в начальный момент времени на тело, находящееся в естественном состоянии, начинают действовать внешние силы F'_i, R'_i при граничном перемещении u'_{0i} и одновременно нейтронный поток величиной $I_0 = \varphi t$. Предполагается, что под этим комплексным воздействием в теле появляются области пластических деформаций. Изменением модулей упругости материала за счет нейтронного облучения пренебрегаем. Возникающие в теле напряжения, деформации и перемещения помечаем одним штрихом вверху.

В упругих областях твердого тела справедлив закон Гука и выполняются соотношения $s'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}, \sigma' = K(3\varepsilon' - BI)$.

Для тех областей твердого тела, где появились пластические деформации, связь девиаторов в случае простых нагружений можно представить в виде $s'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}f'(\varepsilon'_u, I, a'_k)$. Здесь $f'(\varepsilon'_u, I, a'_k)$ – универсальная функция пластичности, зависящая от интенсивности деформаций ε'_u , величины нейтронного потока I и аппроксимационных параметров a'_k .

Таким образом, в деформируемом теле связь между напряжениями и деформациями при активном нагружении из естественного состояния и воздействии нейтронного потока представляется в виде

$$s'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}f'(\varepsilon'_u, I, a'_k), \sigma' = K(3\varepsilon' - BI), \quad (14.35)$$

причем функцию пластичности следует положить $f'(\varepsilon'_u, I, a'_k) = 1$ в тех областях, где $\varepsilon'_u \leq \varepsilon'_y$, ε'_y – предел текучести по деформациям на момент деформирования.

При достаточно быстром, мгновенном приложении силовой нагрузки упрочняющее воздействие облучения не успеет сказаться, и возникшие области пластических деформаций будут такими же, как и без воздействия нейтронного потока. Однако если активное нагружение происходит достаточно медленно, то внешние слои тела окажутся со временем упрочненными, и в них области пластического деформирования могут оказаться меньше либо будут отсутствовать вовсе, по сравнению с необлученным телом. Может возникнуть эффект, когда первые пластические де-

формации появятся не на внешней упрочненной поверхности, а под ней, где интенсивность деформаций велика, а предел текучести не успел возрасти.

Таким образом, по своему воздействию на упругопластические тела радиационное облучение противоположно тепловому, которое уменьшает предел текучести материала и ведет к увеличению зон пластического деформирования при статически эквивалентных нагрузках.

К соотношениям (14.35) добавим дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия, а также соотношения Коши в предположении малости деформаций:

$$\sigma'_{ij,j} + \rho F'_i = 0, \quad \sigma'_{ij} l_j = R'_i \quad \text{на } S_\sigma, \quad u'_i = u'_{0i} \quad \text{на } S_u, \quad 2\varepsilon'_{ij} = u'_{i,j} + u'_{j,i}. \quad (14.36)$$

В дальнейшем будем полагать, что изменения во времени внешних нагрузок и граничных перемещений происходит таким образом, что соответствующие траектории нагружения не относятся к классу существенно сложных нагружений, а радиационный рост предела пластичности не превышает роста интенсивности деформаций в облучаемых точках твердого тела, что препятствовало бы образованию пластических деформаций.

Пусть, начиная со времени $t = t_1$, воздействие нейтронного потока прекращается ($\varphi = 0$), а внешние силы изменяются таким образом, что во всех точках пластически деформируемых областей тела V_p' происходит разгрузка и последующее переменное нагружение объемными F_i'' и поверхностными R_i'' силами (на S_σ) при граничном перемещении u_{0i}'' (на S_u). Уровень облучения тела остается постоянным и равным его значению перед разгрузкой $I_1 = \varphi t_1$. Предел пластичности в точках тела зависит от координаты z и становится равным $\sigma_y'(I_1(z))$.

Предположим, что краевая задача (14.33)–(14.36) решена. Обозначим соответствующие напряжения, деформации и перемещения, как и раньше, через σ_{ij}'' , ε_{ij}'' , u_i'' . Для величин перед началом разгрузки сохраним обозначения σ_{ij}' , ε_{ij}' , u_i' .

Запишем уравнения состояния. В зонах V_e' и V_e'' разгрузки и упругого деформирования справедливы соотношения

$$s_{ij}^* = 2G\varepsilon_{ij}^*, \quad \varepsilon_u^* \leq \varepsilon_y^*(I_1), \quad s_{ij}^* = s_{ij}' - s_{ij}'', \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij}''. \quad (14.37)$$

В области V_p'' , где в процессе переменного нагружения происходит изменение пластических деформаций, должны быть справедливыми зависимости

$$s_{ij}^* = 2Gf^*(\varepsilon_u^*, I_1, a_k^*)\varepsilon_{ij}^*. \quad (14.38)$$

Во всех точках тела объемная деформация сохраняется упругой. Следовательно, перед началом разгрузки и для текущего состояния выполняются равенства $\sigma' = K(3\varepsilon' - BI_1)$, $\sigma'' = K(3\varepsilon'' - BI_1)$, откуда следует $\sigma^* = 3K\varepsilon^*$.

Уравнения равновесия, граничные условия и соотношения Коши для величин σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* будут:

$$\sigma_{ij,j}^* + \rho F_i^* = 0, \quad F_i^* = F_i' - F_i''; \quad (14.39)$$

$$\sigma_{ij}^* l_j = R_i^*, \quad R_i^* = R_i' - R_i'', \quad \text{на } S_\sigma, \quad u_i^* = u_{0i}' - u_{0i}'', \quad \text{на } S_u; \quad (14.40)$$

$$2\varepsilon_{ij}^* = u_{i,j}^* + u_{j,i}^*.$$

Соотношения (14.37)–(14.40) образуют новую краевую задачу для величин со звездочками. Предположим, что функцию f^* в любой точке кривой деформирования можно приблизить функцией f' , т. е. описать таким же аналитическим выражением, только с другими параметрами a_k^* :

$$f^* = f'(\varepsilon_u^*, a_k^*, I_1).$$

Сравнивая после этого соотношения (14.35)–(14.36) для тела при нагружении из естественного состояния и соотношения для величин со звездочками (14.37)–(14.40), отмечаем, что они совпадают с точностью до обозначений. Поэтому решение задачи для величин со звездочками можно получить из известного решения задачи, соответствующей нагружению из естественного состояния, путем некоторых замен. Например, если известно перемещение $u_i' = u_i'(x, \varepsilon_u', \varepsilon_y', I, a_k')$, то соответствующее перемещение u_i^* : $u_i^* = u_i'(x, \varepsilon_u^*, \varepsilon_y^*, I_1, a_k^*)$, а искомое перемещение при повторном знакопеременном нагружении определяется из соотношения (14.37): $u_i'' = u_i' - u_i^*$.

Напряжения и деформации вычисляются по подобным формулам.

Полученный результат можно распространить на случай любого n -го циклического нагружения (*теорема о циклических нагружениях упругопластических тел в нейтронном потоке*).

15.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Все более широкое применение получают изделия из полимерных материалов. Поведение последних при различных видах нагружения, в особенности при повышенных напряжениях, совершенно не соответствует линейным моделям вязкоупругих сред. Такие материалы отчетливо проявляют физически нелинейные свойства. Некоторые подходы для описания поведения таких сред в приближении «неклассических» моделей упругости рассмотрены в данном учебном пособии ранее. Здесь же остановимся на моделях нелинейного вязкопластичного поведения материалов.

15.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЯЗКОУПРУГИЕ СРЕДЫ

В настоящее время математический аппарат линейной вязкоупругости разработан достаточно полно и широко применяется в практических приложениях. Однако сфера его применения для ряда полимерных материалов ограничена областью малых деформаций, а, например, для таких материалов, как нити и волокна, имеющих высокую степень ориентации и подавляющее большинство которых вырабатывается из кристаллизующихся полимеров с высокой температурой стеклования, линейные соотношения вообще не применимы. Поэтому наряду с развитием линейной теории развивалось и продолжает развиваться ее обобщение на случай нелинейного поведения материалов.

Попытки описания деформационного поведения тел, обладающих нелинейной вязкоупругостью, привели к необходимости обобщения принципа суперпозиции Больцмана на суперпозицию откликов с учетом предыстории деформирования. Так, в ряде работ (например, [126]) для материалов, имеющих подобные кривые релаксации напряжения, предложено применять уравнение вида

$$\sigma(t) = \varphi(\varepsilon(t)) - \int_0^t R(t - \Theta) \varphi(\varepsilon(\Theta)) d\Theta,$$

где $\varphi(\varepsilon(t))$ — некоторая эмпирическая функция деформации.

Для материалов, у которых подобны изохронные кривые (т. е. зависимости, построенные по кривым релаксации при фиксированных t), большое распространение получила наследственная нелинейная теория вязкоупругости, основанная на уравнении Работнова [57] типа

$$\psi[\sigma(t)] = \varepsilon(t) - \int_0^t R(t - \Theta) \varepsilon(\Theta) d\Theta,$$

где $\psi[\sigma]$ — эмпирическая функция напряжения.

Уход от линейной теории вязкоупругости в сторону нелинейной объясняется тем, что теоретической основой построения разнообразных методов расчётного прогнозирования напряженно-деформированных состояний полимерных материалов в области неразрушающих нагрузок считается кинетическая природа процессов деформирования [127]. При этом механические воздействия являются активирующими, ускоряют внутренние реакции микромеханизмов протекающих процессов, уменьшая времена запаздывания и времена релаксации.

В общем случае нелинейная теория вязкоупругости может быть представлена уравнениями Фреше — Вольтерра, частным случаем которого является разработанный Персо нелинейный принцип суперпозиции, обобщивший постулаты Больцмана [128]:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \int_0^t R(t - \Theta, \varepsilon(\Theta)) d\Theta.$$

Здесь $R(t, \varepsilon)$ — нелинейное ядро релаксации.

Еще одним уравнением нелинейной теории вязкоупругости является уравнение Москвитина [129]. Данное уравнение учитывает накопление повреждений, используя линейное уравнение Вольтера с модифицированным по накопленным повреждениям временем:

$$\varphi(\varepsilon_u) K = f(\sigma_u, \sigma) \sigma + \int_0^t U(t - \tau) f(\sigma_u, \sigma) \sigma(\tau) d\tau.$$

Здесь $\varphi(\varepsilon_u)$ — искомая функция от деформации.

Наличие нелинейности в уравнениях вязкоупругости в виде функции от деформации или напряжения существенно усложняет задачу по сравнению с линейным вариантом вязкоупругих свойств. Рассмотрим один из наиболее распространенных и достаточно простых подходов к учету нелинейных вязкоупругих свойств материалов. Уравнения связи напряжений и деформаций принимаем в виде

$$s_{ij} = 2G \left(f(\varepsilon_u) \varepsilon_{ij} - \int_0^t R(t - \tau) f(\varepsilon_u) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma = 3K\varepsilon. \quad (15.1)$$

Здесь s_{ij} , ε_{ij} — девиаторы тензоров напряжений и деформаций; σ , ε — средние напряжение и деформация; G , K — мгновенно-упругие модули сдвига и объемной деформации; функция $R(t)$ — ядро релаксации.

Физическую нелинейность материала описывает универсальная функция $f(\varepsilon_u)$, причем $f(\varepsilon_u) = 1$, если интенсивность деформаций ε_u не превышает некоторого порогового значения ε_s : $\varepsilon_u \leq \varepsilon_s$.

Физические уравнения (15.1) выражают следующее: после того как интенсивность деформаций в рассматриваемой точке достигает некоторого порогового значения ε_s , поле деформаций ε_{ij} в данный момент времени определяется не только мгновенным и предшествующими значениями напряжения s_{ij} , но зависит также от вида самого деформированного состояния. Изменение объема принимается упругим. Разрешив (15.1) относительно s_{ij} , получаем:

$$2Gf(\varepsilon_u)\varepsilon_{ij} = s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau)s_{ij}(\tau)d\tau, \quad 3K\varepsilon = \sigma, \quad (15.2)$$

где $\Gamma(t)$ — ядро ползучести.

Рассмотрим методику определения функции нелинейности $f(\varepsilon_u)$ по экспериментальным кривым ползучести. Пусть, например, известны результаты опытов на ползучесть при чистом сдвиге (рис. 15.1).

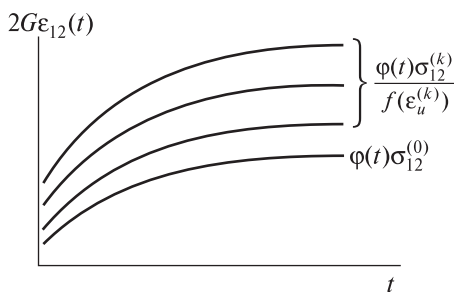


Рис. 15.1. Результаты опытов на ползучесть при чистом сдвиге

При этом шесть уравнений (15.2) сведутся к одному, поскольку $\varepsilon_{ij} = 0$ для всех значений i и j , кроме одной компоненты $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}$, и аналогично $s_{ij} = 0$, кроме $s_{12} = \sigma_{12}$. Здесь $2\varepsilon_{12}$ — относительный сдвиг, σ_{12} — соответствующее касательное напряжение. В нашем случае $\varepsilon_u = (2/\sqrt{3})\varepsilon_{12}$.

Нижняя кривая на рис. 15.1 соответствует линейному поведению материала ($\varepsilon_u \leq \varepsilon_s$) при постоянном напряжении $\sigma_{12}^{(0)}$. Вдоль нее справедливо соотношение

$$2G\varepsilon_{12}^{(0)}(t) = \sigma_{12}^{(0)} \left(1 + \int_0^t \Gamma(t-\tau)d\tau \right). \quad (15.3)$$

Эту кривую можно использовать и для определения ядра ползучести:

$$\int_0^t \Gamma(t-\tau)d\tau = \frac{2G\varepsilon_{12}^{(0)}(t)}{\sigma_{12}^{(0)}} - 1.$$

Для остальных кривых из (15.2) следует:

$$2Gf(\varepsilon_u^{(k)})\varepsilon_{12}^{(k)}(t) = \sigma_{12}^{(k)} \left(1 + \int_0^t \Gamma(t-\tau)d\tau \right), \quad (15.4)$$

где $\sigma_{12}^{(k)}$ — постоянное напряжение вдоль k -й кривой ($k = 1, 2, 3$).

Левые и правые части уравнения (15.4) разделим на соответствующие части соотношения (15.3). После элементарных преобразований получим экспериментальные значения функции нелинейности в различные моменты времени:

$$f(t) = \sigma_{12}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(0)}(t) / \left(\sigma_{12}^{(0)} \varepsilon_{12}^{(k)}(t) \right).$$

Так как в каждый момент времени известна интенсивность деформаций $\varepsilon_u(t)$ и функция нелинейности $f(t)$, то можно построить экспериментальную кривую $f \sim \varepsilon_u$, сопоставляя их значения для одного и того же t . После чего определяются константы в принятой аппроксимационной формуле для функции нелинейности.

Нелинейные уравнения связи напряжений и деформаций можно принять и в другом виде:

$$2G\varepsilon_{ij} = g(\sigma_u)s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau)g(\sigma_u)s_{ij}(\tau)d\tau, \quad 3K\varepsilon = \sigma, \quad (15.5)$$

где $g(\sigma_u)$ — универсальная функция интенсивности напряжений, определяемая экспериментально.

Отметим, что уравнения (15.1) и (15.5) не эквивалентны друг другу. Тот или иной способ учета физической нелинейности материала выбирается в зависимости от свойств материала и имеющихся экспериментальных данных.

15.3. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ВЛИЯНИЕ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Высоконаполненные полимеры обладают рядом специфических физико-механических свойств, таких, например, как зависимость деформирования от величины и знака гидростатического давления σ (увеличение микродефектов при всестороннем растяжении и их «залечивание» при сжатии). Эти особенности не учитываются рассмотренными моделями (15.1) и (15.5), в которых разделяются соотношения между девиаторами и шаровыми частями тензоров напряжений и деформаций. Простейшие уравнения, учитывающие влияния объемного напряжения и температуры $T = T(x, t)$, отсчитываемой от некоторого начального значения T_0 , могут быть введены путем естественного обобщения предыдущих соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\sigma, T)s_{ij} &= 2G \left(f(\varepsilon_u, T)\varepsilon_{ij} - \int_0^t R(t-\tau)f(\varepsilon_u, T)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau \right), \\ \varphi_2(\sigma, T)\sigma &= 3K(\varepsilon - \alpha T). \end{aligned} \quad (15.6)$$

Здесь уравнения для девиаторных величин и их вторых инвариантов (интенсивностей деформаций ε_u) теперь содержат и первые инварианты тензора напряжений σ . Это и позволяет учесть различное поведение полимеров при растяжении и сжатии. Разрешив соотношения (15.6) относительно деформаций, получим

$$2Gf(\varepsilon_u, T)\varepsilon_{ij} = \varphi_1(\sigma, T)s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varphi_1(\sigma, T)s_{ij}(\tau)d\tau, \quad 3K(\varepsilon - \alpha T) = \varphi_2(\sigma, T)\sigma. \quad (15.7)$$

Предполагается, что функции f , φ_1 и φ_2 в соотношениях (15.6), (15.7) являются универсальными, не зависящими от вида напряженного состояния. Они определяются экспериментально. Влияние температуры на физико-механические свойства можно в ряде случаев учесть, как известно, с помощью температурно-временной аналогии либо, как это показано далее, непосредственной обработкой опытных данных.

Если рассматриваемая среда не релаксирует, то ядра в соотношениях (15.6) и (15.7) равны нулю. В этом случае эти уравнения описывают модель склерономной термоупругопластической среды, свойства которой определяются функциями f , φ_1 и φ_2 :

$$s_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_u = \frac{3Gf(\varepsilon_u, T)}{\varphi_1(\sigma, T)} \varepsilon_u, \quad \sigma = \frac{3K(\varepsilon - \alpha T)}{\varphi_2(\sigma, T)}.$$

Если здесь положить $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ и убрать температуру, то получим уравнения теории малых упругопластических деформаций.

15.4. ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ СРЕДЫ

Многие металлы и сплавы при повышенных температурах кроме пластичности проявляют и явно выраженные реономные свойства. Такие среды будем называть *вязкоупругопластическими*. Рассмотрим одну модель, позволяющую описать подобное поведение материалов. Физические уравнения состояния при наличии температурного поля $T(x, t)$ принимаем следующие:

$$s_{ij} = 2G(T) \left(\varphi(\varepsilon_u, T) \varepsilon_{ij} - \int_0^t R(t - \tau, T) f(\varepsilon_u, T) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma = 3K(T)(\varepsilon - \alpha T). \quad (15.8)$$

Здесь $\varphi(\varepsilon_u, T)$ — функция пластичности, $f(\varepsilon_u, T)$ — универсальная функция реономной нелинейности материала.

Альтернативными к (15.8) будут выражения деформаций через напряжения:

$$2G(T) \varepsilon_{ij} = \varphi_1(\sigma_u, T) s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t - \tau, T) g(\sigma_u, T) s_{ij}(\tau) d\tau, \quad 3K(T)(\varepsilon - \alpha T) = \sigma. \quad (15.9)$$

Здесь отмечено, что от температуры могут зависеть мгновенные модули упругости $G(T)$ и $K(T)$, ядра ползучести $\Gamma(t, T)$ и релаксации $R(t, T)$, а также функции пластичности $\varphi(\varepsilon_u, T)$, $\varphi_1(\sigma_u, T)$ и универсальные функции физической нелинейности $f(\varepsilon_u, T)$, $g(\sigma_u, T)$. При этом $\varphi(\varepsilon_u, T) = 1$, если $\varepsilon_u \leq \varepsilon_y(T)$; $\varphi_1(\sigma_u, T) = 1$, если $\sigma_u \leq \sigma_y(T)$; $f(\varepsilon_u, T) = 1$, если $\varepsilon_u \leq \varepsilon_s(T)$; $g(\sigma_u, T) = 1$, если $\sigma_u \leq \sigma_s(T)$.

Для общей постановки задачи о нагружении из естественного состояния необходимо присоединить к уравнениям (15.8) или (15.9), которые справедливы только при активном нагружении, уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия.

15.5. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ

Присоединяем к уравнениям (15.8) уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G(T) \left(\varphi(\varepsilon_u, T) \varepsilon_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) f(\varepsilon_u, T) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma = 3K(T)(\varepsilon - \alpha T), \\ \sigma_{ij,j} + \rho F_i &= 0, \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \\ u_i &= u_{i0}(x) \text{ на } S_u, \quad \sigma_{ij} l_j = R_i \text{ на } S_\sigma. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Решение задач термовязкоупругопластичности связано с решением системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (15.10), что представляет собой чрезвычайно сложную математическую задачу, об аналитическом решении которой говорить не приходится. Поэтому можно воспользоваться *методом последовательных приближений*, который базируется на методе упругих решений Ильюшина. Представляем для этого функции пластичности и физической нелинейности в виде

$$\varphi(\varepsilon_u, T) = 1 - \omega(\varepsilon_u, T), \quad f(\varepsilon_u, T) = 1 - \omega_1(\varepsilon_u, T), \quad (15.11)$$

где $0 \leq \omega < 1$, $0 \leq \omega_1 < 1$; причем $\omega(\varepsilon_u) = 0$, если $\varepsilon_u \leq \varepsilon_y$ и $\omega_1(\varepsilon_u) = 0$, если $\varepsilon_u \leq \varepsilon_y$.

Подставляем (15.11) в (15.10). Тогда физические соотношения становятся следующими:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G(T) \left((1 - \omega(\varepsilon_u, T)) \varepsilon_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) (1 - \omega_1(\varepsilon_u, T)) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right), \\ \sigma &= 3K(T)(\varepsilon - \alpha T). \end{aligned} \quad (15.12)$$

Таким образом, при $\omega = \omega_1 = 0$ уравнения (15.12) описывают линейные термовязкоупругие свойства материалов.

Как и в задачах теории пластичности, записываем дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия, разложив тензор напряжений на девиаторную и шаровую части:

$$s_{ij,j} + \sigma_{,i} + \rho F_i = 0, \quad (15.13)$$

$$u_i = u_{i0}(x) \text{ на } S_u, \quad s_{ij} l_j + \sigma l_i = R_i \text{ на } S_\sigma. \quad (15.14)$$

Задачу термовязкоупругопластичности решаем в перемещениях. С этой целью подставляем компоненты девиатора и шаровой части тензора напряжений (15.12) в уравнения равновесия (15.13) и силовые граничные условия (15.14) и учитываем соотношения Коши. В итоге получаем следующие обобщенные уравнения Ламе и граничные условия:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \mu \Delta u_i + \rho F_i - F_{\omega i} - 3K\alpha T_{,i} &= 0, \\ \lambda \theta l_i + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) l_j &= R_i + R_{\omega i} + 3K\alpha T l_i. \end{aligned}$$

Здесь

$$F_{\omega i} = 2G \left(\omega \varepsilon_{ij} + \int_0^t R(t-\tau, T) f(\varepsilon_u, T) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right)_{,j};$$

$$R_{\omega i} = 2G \left(\omega \varepsilon_{ij} + \int_0^t R(t-\tau, T) f(\varepsilon_u, T) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right) l_j.$$

За нулевое приближение принимаем $\omega^{(0)} = f^{(0)} = 0$. Тогда $F_{\omega i} = R_{\omega i} = 0$ и для определения первого приближения $u_i^{(1)}$ имеем обычную задачу линейной термоупругости. По найденным перемещениям $u_i^{(1)}$ определяются величины:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_u^{(1)}, \omega^{(1)} \equiv \omega(\varepsilon_u^{(1)}, T), f^{(1)} \equiv f(\varepsilon_u^{(1)}, T), F_{\omega i}^{(1)}, R_{\omega i}^{(1)}.$$

Для любого k -го приближения имеют место следующие уравнения равновесия и граничные условия:

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i}^{(k)} + \mu \Delta u_i^{(k)} + \rho F_i - F_{\omega i}^{(k-1)} - 3K\alpha T_{,i} = 0, \quad (15.15)$$

$$\lambda \theta^{(k)} l_i + \mu (u_i^{(k)}_{,j} + u_j^{(k)}_{,i}) l_j = R_i + R_{\omega i}^{(k-1)} + 3K\alpha T l_i, \quad (15.16)$$

причем $F_{\omega i}^{(k-1)}, R_{\omega i}^{(k-1)}$ известны, так как определяются предшествующим $(k-1)$ -м приближением.

Уравнения (15.15) и граничные условия (15.16) являются линейными относительно неизвестных перемещений $u_i^{(k)}$. Они отличаются от соответствующих уравнений теории термоупругости тем, что в них к внешним силам F_i, R_i добавляются фиктивные силы $F_{\omega i}^{(k-1)}, R_{\omega i}^{(k-1)}$. Это позволяет по известному решению соответствующей задачи теории упругости построить решение упругопластической задачи в рекуррентном виде.

Для обеспечения сходимости рассмотренного метода последовательных приближений необходимо, чтобы параметр ω , связанный с функцией $\varphi(\varepsilon_u)$ соотношением (15.11), и функция нелинейности $f(\varepsilon_u)$ были малыми по сравнению с единицей. Если дополнительно принять $\varphi(\varepsilon_u) \equiv f(\varepsilon_u)$, то указанный процесс построения приближений в изображениях ничем не будет отличаться от процесса построения приближений в рассмотренном ранее методе упругих решений Ильюшина в теории малых упругопластических деформаций (см. разд. 10.9). В последнем случае известны доказательства сходимости метода. Поэтому можно говорить о сходимости и в рассматриваемом случае. Доказательство сходимости метода упругих решений для несжимаемой нелинейной вязкоупругой среды дано в работе [130].

При построении решений задачи в изображениях для любого приближения удобно объемные $F_i + F_{\omega i}^{(k-1)}$ и поверхностные $R_i + R_{\omega i}^{(k-1)}$ силы разложить в ряд по известным функциям. В этом случае решения в любом приближении будут отличаться только постоянными величинами.

Метод последовательных приближений в форме, отличной от рассмотренного варианта, получим, если за нулевое приближение принять $\omega^{(0)} = 0$ и $\omega_1^{(0)} = 1 - f^{(0)} = 0$. В этом случае первое приближение $u_i^{(1)}$ определяется как решение обычной зада-

чи линейной термовязкоупругости. Для k -го приближения имеет место задача линейной термовязкоупругости с некоторыми другими дополнительными «внешними» нагрузками $F_{\omega i}^{(k-1)}$, $R_{\omega i}^{(k-1)}$, которые вычисляются по результатам предыдущего $(k - 1)$ -го приближения и служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материала.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Приведите уравнение Работнова нелинейной теории вязкоупругости.
2. Приведите уравнения Фреше – Вольтерра нелинейной теории вязкоупругости.
3. Приведите уравнение Москвитина нелинейной теории вязкоупругости.
4. Приведите пример модели, описывающей поведение вязкоупругопластических материалов.
5. В чем состоит метод последовательных приближений для задач вязкоупругопластичности?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Старовойтов Э. И.* Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Гомель : БелГУТ, 2001. 344 с.
2. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В.* Теория упругости и пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.
3. *Журавков М. А.* Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Минск : БГУ, 2002. 456 с.
4. *Старовойтов, Э. И.* Соппротивление материалов. Гомель : БелГУТ, 2004. 376 с.
5. *Громыко А. О., Громыко О. В., Журавков М. А., Медведев Д. Г.* Механика сплошной среды. Криволинейные брусья, пластины и оболочки : курс лекций / под общ. ред. М. А. Журавкова. Минск : БГУ, 2005. 364 с.
6. *Журавков М. А.* Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований : курс лекций. Минск : БГУ, 2008. 247 с.
7. *Старовойтов Э. И.* Соппротивление материалов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.
8. *Сосновский Л. А., Журавков М. А., Щербаков С. С.* Введение в трибофатику. Минск : БГУ, 2010. 77 с.
9. *Босяков С. М., Журавков М. А.* Решение задач механики в пакете Structural Mechanics компьютерной системы Mathematica. Минск : БГУ, 2011. 295 с.
10. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В.* Теория упругости и пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. 416 с.
11. *Журавков М. А., Старовойтов Э. И.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности : учеб. пособие. Минск : БГУ, 2011. 543 с.
12. *Сосновский, Л. А., Журавков М. А., Щербаков С. С.* Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций. Минск : БГУ, 2011. 488 с.
13. *Старовойтов, Э. И.* Механика материалов. Гомель : БелГУТ, 2011. 380 с.
14. *Громыко О. В., Журавков М. А., Медведев Д. Г., Громыко Ан. О., Громыко Ал. О.* Соппротивление материалов : курс лекций / под общ. ред. М. А. Журавкова. Минск : БГУ, 2013. 535 с.
15. *Журавков М. А., Круподеров А. В., Щербаков С. С.* Гранично-элементное моделирование в механике : учеб. пособие. Минск : БГУ, 2014. 174 с.
16. *Журавков М. А., Романова Н. С.* Оценка физико-механических свойств биоматериалов. Механико-математическое моделирование и технологии наноиндентирования / LAP LAMBERT Academic Publishing RU. Germany, Saarbrügge, 2017. 196 с.
17. *Старовойтов Э. И., Журавков М. А., Леоненко Д. В.* Трехслойные стержни в терморadiационных полях. Минск : Беларус. навука, 2017. 275 с.
18. *Родионов В. Н., Сизов И. А., Цветков В. М.* Основы геомеханики. М. : Недра, 1986. 301 с.

19. *Казикаев Д. М., Козырев А. А., Каспарьян Э. В., Иофис М. А.* Управление геомеханическими процессами при разработке месторождений полезных ископаемых : учеб. пособие. М. : Горная книга, 2016. 490 с.
20. *Баклашов И. В.* Деформирование и разрушение породных массивов. М. : Недра, 1988. 271 с.
21. *Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.* Моделирование процессов деформирования самонапряженных образцов горных пород // ФТПРПИ. 2017. № 1. С. 15–24.
22. *Рычков Б. А.* Условие текучести, дилатансия и разрушение горных пород // ФТПРПИ. 2001. № 1. С. 63–70.
23. *Победра Б. Е.* Механика композиционных материалов. М. : Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
24. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.
25. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М. : МГУ, 1976. 368 с.
26. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М. : Машиностроение, 1980. 375 с.
27. *Алфутов Н. А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М. : Машиностроение, 1991. 334 с.
28. *Гусенков А. П., Москвитин Г. В.* Анализ некоторых подходов к описанию циклических диаграмм деформирования // Машиноведение. 1973. № 4. С. 59–67.
29. *Светлицкий В. А.* Механика абсолютно гибких стержней. М. : МАИ, 2001. 222 с.
30. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. Киев : Вища школа, 1975. 216 с.
31. *Победра Б. Е., Георгиевский Д. В.* Лекции по теории упругости. М. : Эдиториал УРСС, 1999. 208 с.
32. *Журавков М. А., Мартыненко М. Д.* Сингулярные решения и интегральные уравнения в механике деформируемых сред. Минск : БГУ, 1999. 358 с.
33. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 708 с.
34. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1968. 628 с.
35. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
36. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1979. 744 с.
37. *Снеддон И. Н., Бери Д. С.* Классическая теория упругости. М. : ГИФМЛ, 1961. 220 с.
38. *Теребушко О. И.* Основы теории упругости и пластичности. М. : Наука, 1984. 319 с.
39. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М. : Наука, 1979. 560 с.
40. *Толоконников Л. А.* Механика деформируемого твердого тела. М. : Высш. шк., 1979. 319 с.
41. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. Л. ; М. : ГТТИ, 1934. 172 с.
42. *Филин А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. М., 1975. Т. 1. 832 с.
43. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. М. : Гостехиздат, 1947. 300 с.
44. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. N.-Y. : Dover Publ. INC, 1968. 457 p.
45. *Новацкий В.* Теория упругости. М. : Мир, 1975. 872 с.
46. *Mase G. T., Mase G. E.* Continuum mechanics for engineers. CRC Press LLC, 1999. 380 p.
47. *Bertram A., Glüge R.* Solid Mechanics. Theory, Modeling, and Problems. Springer International Publishing Switzerland, 2015. 331 p.
48. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М. : Наука, 1974. 312 с.
49. *Савін Г. М.* Еlemenти механіки спадкових середовищ. Київ : Київ. держ. ун-т, 1970. Вип. II : Реологічні тіла з загальним законом лінійного деформування. 137 с.

50. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М. : Наука, 1973. Т. 2. 391 с.
51. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М. : Мир, 1986. 360 с.
52. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
53. *Бленд Д.* Линейная теория вязкоупругости. М. : Мир, 1965. 197 с.
54. *Бриджмен П.* Физика высоких давлений. М. : ОНТИ, 1935.
55. *Работнов Ю. Н.* Введение в механику разрушения. М. : Наука, 1987. 80 с.
56. *Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М. : Высш. шк., 1983. 349 с.
57. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
58. *Вульфсон С. З.* Температурные напряжения в бетонных массивах с учетом ползучести бетона // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 1. С. 162–165.
59. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М. : Высш. шк., 1976. 277 с.
60. *Havriliak S. A., Negami S.* A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers // Polymer. 1967. Vol. 8, № 4. P. 161–210.
61. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М. : Наука, 1970. 280 с.
62. *Айтиалиев Ш. М., Ержанов Ж. С.* Об определении напряжений и перемещений вокруг выработки в условиях ползучести горных пород // Реологические вопросы механики горных пород. Алма-Ата : Наука, 1964.
63. *Ержанов Ж. С.* Теория ползучести горных пород и ее приложения. Алма-Ата : Наука, 1964.
64. *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых тел. М. : Наука, 1984. 1027 с.
65. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
66. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
67. *Александров А. В., Потапов В. Д.* Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. шк., 1990. 400 с.
68. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М. : Наука, 1969. 420 с.
69. *Кийко И. А.* Теория пластического течения. М. : МГУ, 1978. 75 с.
70. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М. : МГУ, 1979. 206 с.
71. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М. : Машиностроение, 1968. 400 с.
72. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М. : Гостехиздат, 1956. 407 с.
73. *Москвитин В. В.* Циклическое нагружение элементов конструкций. М. : Наука, 1981. 344 с.
74. *Биргер И. А.* Некоторые математические методы решения инженерных задач. М. : Оборонгиз, 1956. 151 с.
75. *Победря Б. Е., Георгиевский Д. В.* Основы механики сплошной среды : курс лекций. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 272 с.
76. *Lurie S. A., Vasiliev V. V.* The biharmonic problem in the theory of elasticity. Gordon and Breach Publishers. 1995. 265 p.

77. *Васильев В. В.* Сингулярные решения в задачах механики и математической физики // Механика твердого тела. 2018. № 4. С. 48–65.
78. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 424 с.
79. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М. : Машиностроение, 1980. 411 с.
80. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М. : Высш. шк., 1977. 423 с.
81. Разрушение / под ред. А. Ю. Ишлинского. М. : Мир, 1975. Т. 2 : Математические основы теории разрушения. 766 с.
82. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Обобщенная теория упругости // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 16–27.
83. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Новое решение осесимметричной контактной задачи теории упругости // Изв. РАН. МДТТ. 2017. № 5. С. 12–21.
84. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 61–67.
85. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М. : Наука, 1974. 640 с.
86. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Метод квазифункций Грина // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск : Изд-во Днепропетров. ун-та, 1979. С. 188–196.
87. *Мартыненко М. Д., Журавков М. А.* Метод квазифункций Грина в механике деформируемого твердого тела. Минск : Университетское, 1993. 180 с.
88. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев : Наук. думка, 1982. 551 с.
89. *Журавков М. А., Мартыненко М. Д.* Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Минск : Университетское, 1995. 255 с.
90. *Ишлинский А. Ю.* О перемещениях упругой полуплоскости // Учен. зап. МГУ. 1940. Вып. 39. С. 83–86.
91. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М. : Мир, 1987. 524 с.
92. *Галин Л. А.* Контактная задача теории упругости. М. : Гостехиздат, 1953.
93. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М. : Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1995. 352 с.
94. *Александров В. М., Ромалис Б. Л.* Контактные задачи в машиностроении. М. : Машиностроение, 1986. 173 с.
95. *Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А. В., Кренев Л. И., Трубчик И. С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 240 с.
96. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В.* Волны в сплошных средах : учеб. пособ. для вузов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.
97. *Шемякин Е. И.* Динамические задачи теории упругости и пластичности. М. : ННЦПП-ИГД им. А. А. Скочинского, 2007. 207 с.
98. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М. : Наука, 1974. Т. IV.
99. *Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В.* Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. Гомель : БелГУТ, 2003. 367 с.
100. *Германович Л. Н., Черепанов Г. П.* О критериях разрушения материалов с дефектами // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 330–340.
101. *Drucker D. C.* Plasticity // Structural Mechanics. N. Y. : Pergamon Press, 1960. P. 407–455.
102. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // В кн. Разрушение. М. : Мир, 1975. Т. 2 : Математические основы теории разрушения. С. 336–520.

103. *Ивлев Д. Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности : избранные работы. Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2005. 357 с.
104. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев : Наук. думка, 1976.
105. *Витвицкий П. М., Попина С. Ю.* Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. Киев : Наук. думка, 1980. 186 с.
106. *Batdorf S. B., Crose J. G.* A statistical theory for the fracture of brittle structures subjected to nonuniform polyaxial stresses // J. Appl. Mech. 1974. Vol. 41, № 2. P. 459–464.
107. *Головчан В. Т.* Об одном варианте статистической теории хрупкого разрушения // Прикладная механика. 1989. Т. 25, № 1. С. 101–106.
108. *Журавков М. А., Zubovich B. C.* Устойчивость и сдвигение массивов горных пород. М. : РУДН, 2009. 432 с.
109. *Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.* Ауксетики : модели и приложения // Вести НАН Беларуси. 2003. № 4. С. 58–68.
110. *Almgren R. E.* An isotropic three dimensional structure with Poisson's ration = -1 // J. Elasticity, 15 (1985). P. 427–430.
111. *Чанышев А. И., Ефименко Л. Л.* Математические модели блочных сред в задачах механики. Ч. 1. Деформация слоистой среды // ФТПРПИ. 2003. № 3. С. 72–84.
112. Компьютерное моделирование в геомеханике / М. А. Журавков [и др.] ; под общ. ред. М. А. Журавкова. Минск : БГУ, 2008. 443 с.
113. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.
114. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М. : МГУ, 1976. 368 с.
115. *Голуб В. П.* К теории ползучести изотропных исходно упрочняющихся сред // Прикладная механика. 1989. Т. 25, № 2. С. 90–100.
116. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М. : Физматгиз, 1960. 455 с.
117. *Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев : Наук. думка, 1981. 496 с.
118. *Williams M. L., Landel R. F., Ferry J. D.* The Temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids // J. Amer. Chem. Soc. 1955. Vol. 77. P. 370.
119. *Радченко В. П., Хренов С. М.* Метод расчета третьей стадии ползучести материалов при растяжении с учетом индивидуальных деформационных свойств // Ползучесть и длительная прочность конструкций : сб. науч. тр. Куйбышев : КПТИ, 1986. С. 56–65.
120. *Еремин Ю. А., Радченко В. П., Самарин Ю. П.* Расчет индивидуальных деформационных свойств элементов конструкций в условиях ползучести // Машиноведение. 1984. № 1. С. 67–72.
121. *Самарин Ю. П.* Об одном обобщении метода разделения деформации в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. С. 60–63.
122. *Самарин Ю. П.* Построение экспоненциальных аппроксимации для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. 1974. № 9. С. 24–27.
123. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М. : Наука, 1972. 327 с.
124. *Ленский В. С.* Введение в теорию пластичности. М. : МГУ, 1968. Вып. 1. 109 с. ; 1969. Вып. 2. 91 с.
125. *Новацкий В. К.* Волновые задачи теории пластичности. М. : Мир, 1978.

126. *Havriliak S., Negami S. A.* A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers // *Polymer*. 1967. Vol. 8, № 4. P. 161–210.
127. *Сталевич А. М., Рюм Л. Е.* Обобщение способов определения силовой функции ползучести для синтетических нитей // *Изв. высш. учеб. заведений. Технология текстил. пром-ти*. 1980. № 2. С. 10–14.
128. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М. : ИЛ, 1963. 535 с.
129. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М. : Наука, 1972. 328 с.
130. *Победра Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // *Упругость и неупругость*. М. : Изд-во МГУ, 1973. Вып. 3. С. 95–172.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель Нильс Хенрик (Abel N. H.) *гл. 6*
Александров Анатолий Петрович *гл. 11*
Альманси Э. (Almansi E.) *гл. 9*

Баклашов Игорь Владимирович *гл. 1*
Батдорф (Batdorf, S. B.) *гл. 11*
Баушингер Иоганн (Bauschinger I.) *гл. 7, гл. 11*
Белл Джеймс Фредерик (James Frederick Bell) *гл. 7*
Бельтрами Эудженио (Beltrami E.) *гл. 4, гл. 10, гл. 11*
Бернулли Якоб (Bernoulli J.) *введение*
Бессель Фридрих Вильгельм (Bessel F. W.) *гл. 8*
Бетти Энрико (Betti E.) *гл. 5, гл. 9*
Биргер Исаак Аронович *гл. 7*
Больцман Людвиг (Boltsmann L.) *введение, гл. 6, гл. 7, гл. 12*
Боткин А. И. *гл. 11.*
Бриджмен П. У. (Бриджман) (Percy Williams Bridgman) *гл. 6*
Бубнов Иван Григорьевич *введение, гл. 5*
Бужинский Владимир Марьянович *гл. 11*
Буссинеск Жозеф Валентен (Boussinesq J. V.) *введение, гл. 9*
Бюргерс Иоханнес (Ян) Мартинус (Johannes Martinus Burgers) *гл. 6*

Вейбулл Валодди (Waloddi Weibull) *гл. 11*
Вейерштрасс К. Т. В. (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) *гл. 6*
Видеман Густав Генрих (Viedemann G. H.) *гл. 7*
Власов Василий Захарович *введение*
Волков Сергей Дмитриевич *гл. 11*
Вольтерра Вито (Volterra V.) *гл. 6, гл. 10, гл. 13*
Вульфсон Иосиф Исаакович *гл. 6*

Гадолин Аксель Вильгельмович *введение*
Галеркин Борис Григорьевич *введение, гл. 5*
Галилей Галилео (Galileo Galilei) *введение, гл. 11*
Гамильтон Уильям Роуан (Hamilton W. R.) *гл. 7, гл. 10*
Гаусс Карл Фридрих (Gauss C. F.) *гл. 4, гл. 5*
Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (Helmholtz G. L. F.) *гл. 8, гл. 9, гл. 10*
Генки Генри (Heinrich Hencky) *гл. 7*
Генри Джозеф (Joseph Henry) *гл. 11*
Герц Генрих Рудольф (Hertz H. R.) *введение, гл. 9*
Горшков Анатолий Герасимович *гл. 10*
Грасгоф Франц (Franz Grashof) *гл. 11*
Грин Джордж (Green J.) *гл. 4, гл. 9*
Гриффитс Алан Арнольд (Alan Arnold Griffith) *гл. 11*
Гук Роберт (Hooke R.) *введение, гл. 1, гл. 4, гл. 5, гл. 6*

Давиденков Николай Николаевич *гл. 11*
Дирак Поль Адриен Морис (Dirac P. E. M.) *гл. 9, гл. 10*
Дирихле Петер Густав Лежен (Dirichlet P. G. L.) *гл. 4*
Дишингер Франс (Franz Dischinger) *гл. 6*
Дошинский Г. А. *гл. 11*
Друкер Д. (drucker D. C.) *введение, гл. 6, гл. 7, гл. 11*
Дуффинг Г. (Duffing G.) *гл. 6*
д'Аламбер Жан Лерон (d'Alembert J. L. R.) *гл. 10*

Жермен Софи (Germain S.) *введение*
Журавский Дмитрий Иванович *введение*
Журков Серафим Николаевич *гл. 11*

- Зоммерфельд Арнольд Иоганнес Вильгельм (Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld) *гл. 9*
- Ивлев Дюис Данилович *гл. 11*
- Ильюшин Алексей Антонович *введение, гл. 2, гл. 7, гл. 13, гл. 14*
- Инглис Эдвард Чарльз (Charles Edward Inglis) *гл. 1*
- Ирвин Джордж Рэнкин (George Rankine Irwin) *гл. 2.3*
- Ишлинский Александр Юльевич *введение, гл. 2.1, гл. 2.3*
- Карман Теодор (Karman Th.) *введение, гл. 2*
- Карсон Джордан Карсон (J. Carson Mark) *гл. 6*
- Кастильяно Карло Альберто (Castigliano C. A.) *гл. 4, гл. 5*
- Качанов Лазарь Маркович *гл. 6, гл. 11*
- Кельвин (Томсон Уильям) лорд (Kelvin lord) *введение, гл. 3, гл. 6, гл. 9*
- Кирхгофф Густав Роберт (Kirchhoff G. R.) *введение, гл. 4*
- Клапейрон Бенуа Поль Эмиль (Clapeyron B. P. E.) *введение, гл. 4*
- Клюшников Владимир Дмитриевич *гл. 8*
- Колосов Гурий Васильевич *введение*
- Колтунов Михаил Андреевич *гл. 6*
- Коновалов Анатолий Николаевич *гл. 4*
- Коссера (братья) Эжен Морис Пьер и Франсуа (Cossera E. M. P., Cossera F.) *гл. 2*
- Коши Огюстен Луи (cauchy A. L.) *введение, гл. 2, гл. 4*
- Кристоффель Эльвин Бруно (Elwin Bruno Christoffel) *гл. 10*
- Кристоффель Эльвин Бруно (Elwin Bruno Christoffel) *гл. 10, гл. 14*
- Кронеcker Леопольд (Cronecker L.) *гл. 2, гл. 10.*
- Крупенников Григорий Алексеевич *гл. 2*
- Кулон Шарль Огюстен (Coulomb C. A.) *гл. 1, гл. 7, гл. 11*
- Кэли Артур (Cayley A.) *гл. 12*
- Лагранж Жозеф Луи (Lagrange J. L.) *введение*
- Ламе Габриель (Lamé G.) *введение, гл. 4*
- Лаплас Пьер-Симон (Pierre-Simon de Laplace) *гл. 4*
- Леви-Чивита Т. (Levi-Civita T.) *гл. 9*
- Леви Морис (Maurice Lévy) *гл. 7*
- Лейбниц Готфрид Вильгельм (Gottfried Wilhelm Leibniz) *гл. 11*
- Ленский Виктор Степанович *гл. 7, 11, 13*
- Липатов Лев Николаевич *гл. 11*
- Ляв О. Э. Х. (Love A. E. H.) *введение, гл. 9*
- Мазинг Евгений Карлович *гл. 11*
- Майнер А. *гл. 11*
- Макдональд Г. М. (Hector Munro Macdonald) *гл. 8*
- Маклорен Колин (Colin Maclaurin) *гл. 9*
- Максвелл Д. К. (Maxwell J. C.) *введение, гл. 3, гл. 4, гл. 6, гл. 9*
- Мартыненко Михаил Дмитриевич *гл. 9*
- Мах Эрнст (Ernst Mach) *гл. 9*
- Мизес Рихард (Mises R.) *введение, гл. 3, гл. 7, гл. 11*
- Миндлин Р. Д. (Raymond David Mindlin) *гл. 9*
- Мичелл Джон Генри (Michell J. H.) *гл. 4, гл. 2*
- Мор Кристиан Отто (Christian Otto Mohr) *гл. 1, гл. 11*
- Москвитин Виктор Васильевич *гл. 7, гл. 14, гл. 15*
- Муни Эл У. (Albert W. Mooney) *гл. 12*
- Мухелишвили Николай Иванович *введение, гл. 4*
- Мэсинг (Masing) *гл. 7*
- Навье Анри (Navier H.) *введение, гл. 4*
- Надаи Арпад Людвиг (Nadai A. L.) *введение, гл. 2*
- Нейбер Х. (Neuber Heinz) *гл. 9*
- Нейман Ф. Е. (Neumann F. E.) *гл. 4*
- Новожилов Валентин Валентинович *введение, гл. 11, гл. 12*
- Норель Бронислав Константинович *гл. 2, гл. 4.*
- Ньютон Исаак (Newton I.) *гл. 2, гл. 4, гл. 6*
- Огден Раймонд (Ogden Raymond) *гл. 12*
- Орован Эгон (Egon Orowan) *гл. 11*
- Остроградский Михаил Васильевич *введение, гл. 5*
- Пальмгрен А. *гл. 11*
- Панин Виктор Евгеньевич *гл. 2*
- Папкович Петр Федорович *введение, гл. 9*
- Петровский Иван Георгиевич *гл. 4*

- Пиола Габрио (Piola G.) *гл. 12*
 Пифагор Самосский (Πυθαγόρας) *гл. 4*
 Плескачевский Юрий Михайлович *гл. 12*
 Победря Борис Ефимович *гл. 4, гл. 7, гл. 8*
 Пойтинг Джон Генри (John Henry Poynting) *гл. 6*
 Прандтль Людвиг (Prandtl L.) *гл. 7, гл. 11*
 Проценко Владимир Сидорович *гл. 9*
 Пуассон Симеон Дени (Poisson S. D.) *гл. 1, гл. 12*

 Работнов Юрий Николаевич *введение, гл. 6, гл. 11, гл. 14*
 Рвачев Владимир Логвинович *гл. 9*
 Рейс Иоганн Филипп (Johann Philipp Reis) *гл. 2, гл. 7, гл. 10*
 Ренкин У. Д. М. (William John Macquorn Rankine) *гл. 11*
 Ржаницын Алексей Руфович *гл. 6*
 Ривлин Р. С. (Ronald Samuel Rivlin) *гл. 3*
 Ритц Вальтер (Ritz W.) *гл. 5*
 Робинсон Д. Б. (Robinson, D. B.) *гл. 11*
 Рэлей лорд (Rayleigh J. W. S.) *гл. 5, гл. 10*

 Садовский Михаил Александрович *гл. 8*
 Самарин Юрий Петрович *гл. 13*
 Сен-Венан Адемар Жан Клод (Saint-Venant A. J. C.) *введение, гл. 3, гл. 4, гл. 7, гл. 11*
 Сомильяна Карло (Somigliana Carlo) *гл. 9*
 Стилтес Томас Иоаннес (T. J. Stieltjes) *гл. 6*
 Стокс Джордж Габриэль (Stokes G. G.) *гл. 3, гл. 10*
 Стокли Джордж Джонстон (George Johnstone Stoney) *гл. 10*

 Тарлаковский Дмитрий Валентинович *гл. 10*
 Тарстон Роберт Генри (Thurston R. H.) *гл. 7*
 Тейлор Брук (Brook Taylor) *гл. 6, гл. 8*
 Тимошенко Степан Прокофьевич *введение*
 Тихонов Андрей Николаевич *гл. 8*
 Треска Анри Эдуард (Tresca H. E.) *гл. 3, гл. 7, гл. 11*
 Треффц Эрих (Trefftz E.) *гл. 4, гл. 9*

 Файлон Л. Н. Г. (Filon L. N. G.) *гл. 4*
 Фламан А. (Flamant A.) *гл. 9*
 Фойгт В. (Voigt W.) *введение, гл. 3, гл. 6*
 Фреше Морис Рене (Maurice Rene Frechet) *гл. 6, гл. 15*
 Фридман Александр Александрович *гл. 11*
 Фурье Жан Батист Жозеф (Fourier J. B. J.) *гл. 9*

 Хевисайд (Heaviside O.) *гл. 6, гл. 10*
 Хенки Г. (Hencky H.) *введение, гл. 7, гл. 11, гл. 14*
 Хубер М. Т. (Huber M. T.) *введение, гл. 7, гл. 3*

 Черутти В. (Cerruti Valentino) *гл. 9*
 Чирков Сергей Ефимович *гл. 3*

 Шемякин Евгений Иванович *гл. 2, гл. 2*
 Штрикман Шмуэль *гл. 1*

 Эйлер Леонард (Euler L.) *введение, гл. 3, гл. 5, гл. 8*
 Эри Джордж Биделл (Airy G. B.) *гл. 4*

 Юнг Томас (Young T.) *гл. 1, гл. 4*

 Ягн Юлий Иванович *гл. 11*

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Акустическое сопротивление
(жесткость) 24
Амплитуда волны 383
Анизотропия материала 28, 494
Ассоциированный закон пластического
течения 88
Ауксетики 22, 451
- Базисные векторы 47
Блочная структура твердого тела 456
Билинейная теория упругости 495
- Вариационный метод Бубнова –
Галеркина 143
– – Рэлея–Ритца 142
– принцип в динамике 360
– – Кастильяно 138
– – Лагранжа 134
– – Ритца – Лагранжа 143
Вектор деформации 490
– напряжений 47, 492
– перемещения 303
– силы 46
Виртуальная(ые) (возможные)
деформации 134
– напряжения 138
– перемещения 135
– работа 135
– силы 138
Волна(ы) 342
– Лява 345, 388
– напряжений 348
– поверхностные Рэлея 24, 344, 384
– поперечные 24, 343, 379
– плоские 344, 378
– прогрессивные 383
– – в плоском слое 392
– продольные 24, 343, 379
– сильного разрыва (ударные) 344, 382
– слабого разрыва 356
– Стовли 345
– сферические 344
– – расходящиеся и сходящиеся 366
– ударная 344, 381
– упругие 344
Волновая поверхность 347
Волновое уравнение 345
Время релаксации 153, 154
Вязкоупругие модели дифференциального
типа 161
– – интегрального типа 162
Вязкоупругие среды 88, 148
– – линейные 88
– – нелинейные 507
Вязкоупругопластические среды 512
- Гармонические колебания 371
– – собственные 371
– – вынужденные 371
Гипотеза о малости деформаций 83
Главные значения тензора деформаций 64
– – – напряжений 53
Главные оси тензора деформаций 64
– – – напряжений 36
Гипотеза (ы) градиентальности 221
– идеальной упругости 96
– Мазинга 499
– малости деформаций 47
– накопления повреждений Генри 442
– Неймана 105
– Пальмгрена – Майнера 440
– однородности и сплошности 96
– теории малых упругопластических
деформаций 86, 211

- упрочнения 212
- Граничные задачи МДТТ 107
- Девиатор тензора деформаций 79
 - – напряжений 59
- Деформация (и) 61
 - главные 64
 - конечная 63
 - линейная 63
 - объемная 64
 - пластическая 199
 - сдвиговые 90
- Деформационный критерий прочности 20
- Деформационная теория
 - пластичности 199
- Диаграмма Прандтля 205
 - с линейным упрочнением 205
- Дилатансия 27
- Динамические свойства материалов 23
- Динамические условия совместности 355
- Динамическими функции Грина (функции влияния) 365
- Длина волны 343
- Единственность решения задачи теории
 - упругости 102
 - – – – пластичности 216
- Задача граничная 104
 - Буссинеска 311
 - вязкоупругопластичности 512
 - Дирихле 111
 - Кельвина 268
 - Коши динамики упругого тела 352
 - линейной вязкоупругости 187
 - Миндлина 323
 - Неймана 130
 - о волнах Рэлея 389
 - – прогрессивных волнах 383
 - Стокса 365
 - термоупругости 106
 - – теории упругости в напряжениях 111
 - – – – в перемещениях 108
 - – – – динамическая 350
 - – малых упругопластических деформаций 211
 - – пластического течения 220
 - Фламана 268
 - Черутти 319
- Закон взаимности 49
 - Гука 86, 90, 97, 99
 - Ньютона 46, 85
- Идеально упругое тело 98
- Изображение Лапласа – Карсона 187
- Изотропность 28
- Инварианты тензора напряжений 56
 - – деформаций 73
- Интенсивность тензора деформаций 73
 - – напряжений 60
 - приращений пластических деформаций 221
- Квазифункция Грина 290
- Кинематические условия совместности 356
- Кинетические уравнения поврежденности 443
- Концепция поврежденности 440
 - – Качанова – Работнова 440
 - – Робинсона 441
- Колебания 342
 - вынужденные 169
 - собственные 371
- Континуум Коссера 52
- Коэффициент (угол) внутреннего трения 18
 - объемного расширения 21
 - пластичности 27, 202
 - поперечных деформаций 21
 - Пуассона 21
 - хрупкости 27
- Крип 26
- Критерий квазисплошности 44
 - наибольшего касательного напряжения 426
 - наибольших линейных деформаций 426
 - наибольших нормальных напряжений 424
 - прочности 424
 - упрочнения Д. Друкера 222
- Линейная вязкоупругая среда 88
- Линейные наследственные среды 88
- Масштабный фактор 28, 423
- Материал «нео-Гуковский» 468
 - Огдена 474

- Матрица тензора деформаций 64
 – — модулей упругости 101
 – Муни – Ривлина 472
 – Мэсинга 203
 Метод Бубнова – Галеркина 143
 – вариационный Ритца – Лагранжа 143
 – вариационный Рэлея – Ритца 142
 – возмущения линейно-упругих свойств 474
 – дополнительных деформаций 218, 245
 – дополнительных нагрузок 218, 238
 – квазифункций Грина 289
 – Кельвина 299
 – Лагранжа 143
 – Папковича – Нейбера 294, 303
 – переменных параметров упругости 248
 – последовательных приближений Ильюшина 216
 – — — в задачах вязкоупруго-пластичности 512
 – Ритца 142
 – Сен-Венана 206
 – Треффца 291
 – упругих решений Ильюшина 512
 – «шагов» в теории пластического течения 250
 – экспериментально-теоретический Ильюшина 475
 Модель Бюргерса вязкоупругого тела 157
 – вязкоупругости дифференциального типа 161
 – — интегрального типа 162
 – вязкопластичности 204
 – вязкоупругопластичности 511
 – Генки 202
 – Кельвина – Фойгта 84
 – линейного твердого тела 156
 – Максвелла 156
 – накопленного разрушения 160
 – пластического течения 220
 – поврежденности 439
 – Пойтинга 156
 – Прандтля 202
 – предельного состояния 421
 – разрушения Качанова – Работнова 165
 – твердо-пластического поведения среды 197
 – упругопластического тела 503
 – Фойхта 153
 Модуль девиатора деформаций
 – — напряжений 58
 – сдвига 21
 – упругости 21
 – — динамический 25
 – Юнга (продольной упругости) 26
 Нагружение простое 60, 209
 – сложное 60, 209
 Наклеп 199
 Напряжения 46
 – главные 55
 – касательные 47
 – максимальные касательные 55
 – на косой площадке 53
 – октаэдрические 56
 – нормальные 47
 – податливости (текучести) 197
 – эффективные 165
 Напряженное состояние 39
 – плоское 55
 – трехмерное 55
 – линейное 55
 Наследственность 26, 180
 Нелинейная (физически) упругая среда 447
 – (геометрически) теория упругости 462
 – вязкоупругость 475
 «Нео-Гуковские» материалы 472
 Неравенство Рэлея 375
 Обобщенный(ые) критерии прочности 424
 – принцип Мазинга – Москвитина 500
 Обобщенный закон Гука 99
 Однородный материал 28
 Однородная задача теории упругости 107
 – — — — в напряжениях 113
 Октаэдрические напряжения 56
 Ортотропная среда 102
 Параметр(ы) Ламе 100
 – Надаи – Лодэ 429
 – Одквиста 167
 Перемещения 134
 Пластичность 197
 – идеальная 198
 Плоские задачи теории упругости 116
 Плоское деформированное состояние 116

- напряженное состояние 116
- – – обобщенное 116
- Поверхность предельная 197
- текучести 198
- Повреждения 164
- Поврежденность 440
- Податливость материала 459
- Ползучесть 146
- изотропных упрочняющихся сред 478
- линейная 152
- установившаяся 151
- неуставившаяся 151
- нелинейная 164
- Полные диаграммы деформирования 36
- Постановка задачи теории упругости 108
- – – – в напряжениях 111
- – – – в перемещениях 108
- Постулат Друкера 423
- Потенциал пластический
- упругий 98
- – по напряжениям 98
- упругого перемещения 295
- Потенциальная энергия деформации 98
- – – – дополнительная 98
- Предел длительной прочности 34
- Предел текучести 34, 198
- – условный 199
- Предельная поверхность 422
- – разрушения 422
- Представления Треффца 291
- Папковича – Нейбера 294
- Преобразование Лапласа 187
- Лапласа – Карсона 187
- Фурье 305
- Принцип (ы) вариационные 134
- – Гамильтона 360
- – Кастильяно (возможных сил) 103
- – Лагранжа (возможных перемещений) 134
- Вольтерра 164
- д'Аламбера 348
- Мазинга 499
- Мазинга – Москвитина 500
- минимума потенциальной энергии 137
- напряжений Эйлера и Коши 96
- подобия изохронных диаграмм ползучести 479
- потенциальной энергии 136
- Сен-Венана 83
- температурно-временной аналогии 484
- Процесс деформирования активный 212
- – пассивный 222
- Прочность длительная
- растяжение 18
- срез 19
- на раскалывание 21
- Путь деформирования 97
- нагружения 97
- Пятигранник Френе 491
- Работа виртуальная сил внешних 135
- – – внутренних 135
- Режим заданной деформации 31
- Режим заданной нагрузки 31
- Резольвента ядра 182
- – Абеля 184
- – Дуффинга 183
- Колтунова 184
- – Ржаницына 184
- – экспоненциального 184
- Резонанс 375
- Релаксация 26, 146
- Реологические свойства 32
- Реономные свойства 147
- Решение(я) Буссинеска второго рода 299
- Кельвина 293
- Миндлина 323
- сингулярные 267
- Фламана 268, 327
- фундаментальные теории упругости 283
- частные уравнений Ламе 217, 291
- – – Лапласа 279
- – – теплопроводности 106
- – эллиптических уравнений 279
- Робастность 265
- Р-функции 289
- Сила инерции 349
- массовая 303
- объемная 367
- поверхностная 375
- сосредоточенная 282
- Символы Дирака 282
- Кронекера 48
- Леви – Чивиты 299
- Пиола – Кирхгофа 473
- Сингулярные решения 267

- Скорость дозвуковая 397
 – транзвуковая 397
 – сверхзвуковая 397
 Сложное нагружение 209
 Собственные значения 371
 – колебания 371
 – формы колебаний 372
 – частоты 371
 Соотношения Коши 107
 Сплошная среда 45
 Структурные модели (схемы) 83, 148
 – реологические модели 148
 Существование решения задачи теории упругости 111
 Сходимость метода упругих решений 217
 Сцепление 18
- Теорема Альманси 292
 – взаимности Бетти 285
 – Вольтерра 164
 – Гамильтона – Кэли 360
 – Кастильяно 103
 – Клапейрона 103
 – Лагранжа – Дирихле 137
 – о простом нагружении 210
 Тензор Грина волнового уравнения 405
 – девиатор деформаций 65
 – девиатор напряжений 65
 – деформаций 65
 – шаровой деформаций 469
 – модулей упругости 101
 – напряжений 46
 – шаровой 57
 – остаточных деформаций 469
 – перемещений Грина 405
 Теория анизотропных тел 456
 – билинейной упругости 495
 – деформационная пластичности 495
 – континуума Коссера 52
 – линейной вязкоупругости 162
 – линейных наследственных сред 26
 – малых упругопластических деформаций 86
 – пластического течения 88
 – пластичности 197
 – – Ильюшина 211
 – прочности 418
 – старения 486
 – упругости 96
- – билинейная 495
 – – динамическая 349
 – – нелинейная 462
 – – эластомеров 462
 Термовязкоупругопластичность 511
- Угол внутреннего трения 19
 Удельная потенциальная энергия деформации 98
 – энергия формоизменения 421
 – энергия изменения объема 128
 Упрочнение (наклеп) 199
 – изотропное 201
 – кинематическое 201
 – деформационное 207
 Упругий потенциал 376
 Уравнение(я) Бельтрами – Мичелла 111
 – бигармоническое 273
 – Вильямса – Ландела – Ферри 485
 – волновое 345
 – Гельмгольца 272
 – Ламе 350
 – – динамических задач теории упругости 350
 – Лапласа 106
 – линейной вязкоупругости 180
 – неразрывности 82
 – обобщенной теории упругости 271
 – предельного состояния 92
 – Прандтля – Рейса 224
 – равновесия в напряжениях 52
 – Рэлея – Ритца 143
 – Сен-Венана – Мизеса 208
 – совместности деформаций 66
 – совместности в напряжениях 113
 – совместности в напряжениях для плоских задач 119
 – сплошности 67
 – теплопроводности 106
 Условие (я) излучения Зоммерфельда 384
 – процесса активного 210
 – – пассивного 210
 – Мизеса 87
 – несжимаемости 175
 – пластичности 205
 – пластичности Хубера – Мизеса – Хенки 207
 – сыпучей среды 87

- Треска – Сен-Венана 206
- упрочнения 225
- устойчивости процесса пластического деформирования 222
- Устойчивость модели 265

Формула (ы) Герца 317

- Клапейрона 102
- Сомильяны 288

Фронт волны 346

- передний 347
- задний 347

Фундаментальное решение 279

- нестационарных процессов 361
- теории упругости 279
- Кельвина 332
- эллиптического уравнения 279
- уравнений эластостатики 283
- уравнения бигармонического 290
 - волнового 290
 - Лапласа 290
 - теплопроводности 290

Функция бигармоническая 120

- гамма-функция Эйлера 290
- Грина волнового уравнения 290
- Грина динамические 362
- Грина первой краевой задачи эластостатики 285
- Грина второй краевой задачи эластостатики 286
- Грина смешанной краевой задачи эластостатики 287
- Грина для эллиптического уравнения 281
- Папковича – Нейбера 294
- пластичности 198
- ползучести 146
- релаксации 146

– Треффца 291**– Эри 120****Характеристическая плоскость 356****Хрупкое разрушение 419****Хрупкость 27****Частные решения 291****Числа Маха 397****Экспериментально-теоретический метод****А. А. Ильюшина 475****Эластомеры 462****– термопластичные 462****Элемент Кулона 197****Элементарный объем 29****Эллиптическое уравнение 281****Энергия деформации 98****– внутренняя 98****– дополнительная удельная 98****– изменения объема удельная 98****– потенциальная тела 98****– дополнительная 98****– формоизменения удельная 101****Эффект Баушингера 200****Эффективные характеристики 43****Ядро ползучести 181****– Абея 184****– Вульфсон – Колтунова 185****– Гаврильяка-Негами 185****– дробно-экспоненциальное
Работнова 184****– Колтунова 184****– Ржаницына 184****– степенное Дуффинга 183****– степенное общего вида 185****– экспоненциальное 182****– релаксации 182**

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
ВВЕДЕНИЕ.....	8
 Часть 1. КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	
Глава 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ И ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ	17
1.1. Основные механические характеристики материалов и твердых тел	17
1.2. Классификация материалов по характеру деформирования от внешнего механического воздействия	26
1.3. О масштабном факторе	28
1.4. Полные диаграммы деформирования и разрушения при одноосном сжатии и растяжении	30
1.5. О критериях прочности материалов с учетом стадии запредельного деформирования.....	36
1.6. Эффективные механические характеристики структурно-неоднородного объекта механики деформируемого твердого тела	37
Контрольные вопросы	43
 Глава 2. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ.....	 44
2.1. Определяющие понятия механики сплошных сред.....	44
2.2. Тензор напряжений	46
2.3. Свойства тензора напряжений.....	49
2.4. Уравнения равновесия деформируемого твердого тела	51
2.5. Условия равновесия на границе	52
2.6. Главные оси и главные значения тензора напряжений.....	53
2.7. Максимальные касательные напряжения	55
2.8. Девиатор и шаровая часть тензора напряжений	57
2.9. Деформации и перемещения. Тензор деформаций.....	61
2.10. Главные оси и главные значения тензора деформаций.....	64
2.11. Девиатор и шаровая часть тензора деформаций	65
2.12. Уравнения совместности деформаций.....	66
2.13. Об инвариантах напряженного и деформированного состояний в математических моделях механики сплошных сред.....	68
Контрольные вопросы	71
Контрольные задания	74

Глава 3. О МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	82
3.1. Полная система уравнений для описания состояния среды в рамках моделей МДТТ.....	82
3.2. Физические соотношения, определяющие поведение твердого деформируемого тела.....	83
Контрольные вопросы	95
Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	96
4.1. Основные понятия и определения.....	96
4.2. Закон Гука	99
4.3. Формула Клапейрона. Теорема Клапейрона. О существовании и единственности решения задачи теории упругости	102
4.3.1. Формула Клапейрона.....	102
4.3.2. Теорема Клапейрона	103
4.3.3. О существовании и единственности граничных задач теории упругости.....	104
4.4. Термоупругость	105
4.5. Граничные задачи теории упругости.....	107
4.6. Постановка задачи теории упругости в перемещениях	108
4.7. Постановка задачи теории упругости в напряжениях.....	111
4.7.1. Задача в напряжениях как краевая задача для переопределенной системы и ее упрощения	111
4.7.2. Выделение базовой системы уравнений	112
4.8. Однородная задача теории упругости в напряжениях	113
4.9. Постановки задачи теории упругости в цилиндрической и сферической системах координат	114
4.10. Плоские задачи теории упругости	116
4.10.1. Плоское деформированное состояние	116
4.10.2. Плоское напряженное состояние	118
4.10.3. Уравнения совместности в напряжениях для плоских задач в напряжениях	119
4.10.4. Функция напряжений Эри.....	120
4.11. Примеры исследования НДС простейших деформируемых тел в рамках моделей теории упругости.....	121
Контрольные вопросы	127
Контрольные задания	130
Глава 5. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	134
5.1. Принцип возможных перемещений Лагранжа	134
5.2. Принцип возможных сил Кастильяно.....	138
5.3. Теоремы Кастильяно	140
5.4. Теорема взаимности Бетти	141
5.5. Вариационный метод Рэлея – Ритца.....	142
5.6. Метод Бубнова – Галеркина.....	143
5.7. Метод Ритца – Лагранжа	143
Контрольные вопросы	144

Глава 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД С РЕОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

6.1. Ползучесть и релаксация	146
6.2. Математические модели реологических тел	148
6.2.1. Структурные реологические модели	148
6.2.2. Разрушение (повреждение) при ползучести	164
6.2.3. Общие замечания к построению математических моделей реологических сред	166
6.2.4. Построение реологических уравнений в общем случае пространственной деформации	172
6.3. Реологические уравнения линейной вязкоупругости	180
6.3.1. Общие понятия	180
6.3.2. Примеры видов ядер ползучести и релаксации	181
6.3.3. Принцип Вольтерра	186
Контрольные вопросы	190
Контрольные задания	191

Глава 7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

7.1. Модели твердо-пластического поведения среды	197
7.2. Пластичность материалов при растяжении и сжатии	198
7.3. Упругопластические модели поведения материала	202
7.4. Модели вязкопластичности	204
7.5. Условия пластичности	205
7.6. Простое и сложное нагружения	209
7.7. Гипотезы теории малых упругопластических деформаций	211
7.8. Постановка задач теории малых упругопластических деформаций	215
7.9. Метод упругих решений	216
7.10. Теория пластического течения	220
7.11. Геометрическая интерпретация процесса нагружения	226
7.12. Связь между теорией течения и деформационной теорией	230
7.13. Некоторые обобщения и выводы теории пластического течения	230
7.14. Обобщения и выводы. Постановка и общие методы решения основных задач теории пластичности	234
7.14.1. Постановка задач теории пластичности	234
7.14.2. Общие методы решения задач теории пластичности	238
Контрольные вопросы	250

Глава 8. О ПОСТАНОВКЕ И МОДЕЛИРОВАНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

8.1. Общие положения математического моделирования в механике деформируемого твердого тела	254
8.2. Общие требования к построению определяющих уравнений при проведении математического моделирования в механике деформируемого твердого тела	263
8.3. О сингулярных решениях в задачах механики	267
Контрольные вопросы	276

Часть 2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава 9. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	279
9.1. Фундаментальные решения эллиптических уравнений	279
9.2. Тензор перемещений Грина	281
9.3. Формулы Соммильяны	288
9.4. Метод квазифункций Грина решения задач механики деформируемого твердого тела	289
9.5. Метод Треффца	291
9.6. Представление Папковича – Нейбера	294
9.7. Потенциал упругого перемещения	295
9.8. Действие массовых сил в неограниченном теле	299
9.9. Первая краевая задача для упругого полупространства	304
9.10. Вторая краевая задача для упругого полупространства	307
9.11. Задача Буссинеска	311
9.12. Формулы Герца	317
9.13. Задача Черутти	319
9.14. Общий случай действия нагрузки на поверхности полупространства	322
9.15. Задача Миндлина	323
9.16. О перемещениях упругой полуплоскости. Решение Фламана	327
9.17. Некоторые обобщения	332
Контрольные задания	336
 Глава 10. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	 342
10.1. Общие понятия, определения	342
10.2. Волновое уравнение	345
10.3. Фронт волны, волновые поверхности	346
10.4. Волны напряжений	348
10.5. Модельные задачи динамики упругого тела	348
10.5.1. Общие замечания	348
10.5.2. Задача Коши и граничные задачи динамики упругого тела	352
10.5.3. Кинематические и динамические условия совместности системы Ламе. Поверхность разрыва	355
10.5.4. Вариационный принцип в динамике	360
10.6. Фундаментальные решения нестационарных процессов	361
10.7. Задача Стокса (задача динамики о действии силы в безграничной упругой среде)	365
10.8. Собственные и вынужденные гармонические колебания	371
10.8.1. Собственные колебания упругих тел	372
10.8.2. Вынужденные колебания упругих тел	374
10.9. Неравенство Рэлея и метод Ритца	375
10.10. Мгновенная нагрузка и мгновенное обращение направления действия	377
10.11. Распространение плоских волн в неограниченной упругой среде	378
10.12. Распространение ударных волн в неограниченных упругих телах	381
10.13. Прогрессивные волны	383
10.14. Волны Рэлея	384
10.15. Волны Лява	388

10.16. Прогрессивные волны в плоском слое.....	392
10.17. Полуплоскость под действием движущейся поверхностной силы.....	396
10.18. Модельные задачи о распространении возмущений в упругом пространстве.....	405
10.19. Модельные задачи о распространении нестационарных возмущений в упругой плоскости	410
10.20. Модельные задачи о распространении объемных и начальных возмущений в полубесконечной упругой среде.....	412
10.21. Модельная задача о деформировании упругого слоя, находящегося на полуплоскости.....	415
Контрольные вопросы	416

Глава 11. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА.....

11.1. Общие положения	418
11.2. Предельные поверхности разрушения.....	421
11.3. Критерии прочности, предельные поверхности разрушения которых – многогранники.....	424
11.4. Критерии прочности, предельные поверхности которых – поверхности вращения	430
11.5. Обобщенные критерии прочности	436
11.6. Описание разрушения твердых тел на основе теории поврежденности	439
11.6.1. Гипотеза Пальмгрена – Майнера.....	440
11.6.2. Концепция поврежденности Робинсона.....	441
11.6.3. Гипотеза накопления повреждений Генри.....	442
11.6.4. Кинетические уравнения поврежденности	443
Контрольные вопросы	444

Часть 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава 12. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....

12.1. Решение задач для гетерогенных нелинейных упругих сред путем сведения их к эффективным упругим средам	447
12.1.1. Решение задач для физически нелинейной упругой среды методом возмущения линейно-упругих свойств	447
12.1.2. Решение задач для ортотропных сред методом возмущения изотропных упругих свойств	450
12.2. Механико-математические модели для описания НДС в телах с учетом внутренней структуры в рамках МДТТ. Модель деформирования ауксетичного материала	451
12.3. Описания НДС тел блочной структуры в целом как сплошных деформируемых тел с различными внутренними связями между элементами	456
12.4. Нелинейная теория упругости	462
12.4.1. Молекулярное приближение в теории упругости эластомеров.....	462
12.4.2. Подход, использующий понятие энергии деформации при построении разрешающих уравнений нелинейной упругости	468
12.4.3. Специальные выражения для энергии деформации	472
Контрольные вопросы	474

Глава 13. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ.....	475
13.1. Экспериментально-теоретический метод А. А. Ильюшина	475
13.2. Решение задач линейной теории вязкоупругости для неоднородных тел путем сведения к решению задач теории упругости неоднородных тел.....	476
13.3. К теории ползучести изотропных упрочняющихся сред	478
13.4. Принцип температурно-временной аналогии	484
13.5. О теории старения	486
13.6. К расчету третьей стадии ползучести материалов при растяжении с учетом индивидуальных деформационных свойств материала	486
Глава 14. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ	489
14.1. Основы общей математической теории пластичности А. А. Ильюшина	489
14.2. Билинейная теория упругости	495
14.3. Переменные нагружения упругопластических тел	496
14.4. Циклические нагружения в температурном поле	501
14.5. Циклическое деформирование упругопластических тел в нейтронном потоке	503
Глава 15. МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ.....	507
15.1. Общие замечания.....	507
15.2. Нелинейные вязкоупругие среды	507
15.3. Уравнения нелинейной вязкоупругости, учитывающие влияние вида напряженного состояния	510
15.4. Вязкоупругопластические среды	511
15.5. Метод последовательных приближений в задачах вязкоупругопластичности	512
Контрольные вопросы	514
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ	515
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	521
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	524

Учебное издание

Журавков Михаил Анатольевич
Старовойтов Эдуард Иванович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
МЕХАНИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *Е. А. Логвинович*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *В. П. Явуз*
Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*

Подписано в печать 05.11.2021. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 43,21. Уч.-изд. л. 50,3. Тираж 90 экз. Заказ 314.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.