

СУБМОДУЛЯРНОСТЬ В ЭКОНОМИКЕ

М. М. КОВАЛЁВ¹⁾, А. А. КОРОЛЁВА¹⁾¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Указано, что субмодулярность упрощает оптимизацию экономических процессов. Установлены основные свойства субмодулярных и сильносубмодулярных функций, а также их связь с тенденциями в экономических процессах – негативной синергией и взаимозаменяемостью. Описаны классы задач в экономике, моделируемые субмодулярными функциями. Продемонстрировано, как субмодулярность способствует принятию экономических решений.

Ключевые слова: субмодулярные функции; оптимизация; матрица Монжа; полиматроиды; субмодулярные полезности; субмодулярные игры.

SUBMODULARITY IN ECONOMICS

M. M. KOVALEV^a, A. A. KOROLEVA^a^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: M. M. Kovalev (kovalev@bsu.by)

Abstract. It is shown that submodularity simplifies the optimisation of economic processes. The main properties of submodular and strongly submodular functions and their connection with trends in economic processes (negative synergy and interchangeability) are established. Classes of problems in economics modeled by submodular functions are described. The contribution of submodularity to economic decision-making is demonstrated.

Keywords: submodular functions; optimisation; Monge matrix; polymatroids; submodular utilities; submodular games.

Образец цитирования:

Ковалёв ММ, Королёва АА. Субмодулярность в экономике. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2024;2:4–12.
EDN: SUPKQA

For citation:

Kovalev MM, Koroleva AA. Submodularity in economics. *Journal of the Belarusian State University. Economics*. 2024;2:4–12. Russian.
EDN: SUPKQA

Авторы:

Михаил Михайлович Ковалёв – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.
Анна Анатольевна Королёва – доктор экономических наук, доцент; декан экономического факультета.

Authors:

Mikhail M. Kovalev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
kovalev@bsu.by
Anna A. Koroleva, doctor of science (economics), docent; dean of the faculty of economics.
koroleva@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-2486-4749>

Введение

Экономисты исследуют математические модели применительно к каждому направлению экономической теории, поэтому одни и те же модели часто носят разные названия. В современной экономике классификацию математических моделей провести затруднительно еще и в силу того, что основой практически всех направлений экономической теории выступают модели. Д. Родрик отметил, что именно модели делают экономику наукой [1].

В Республике Беларусь в паспорте специальности 08.01.13 «Математические и инструментальные методы экономики» указано, что математические модели используются в таких областях исследования, как математическая экономика, эконометрика, прикладная статистика, теория игр, оптимизация, теория принятия решений, дискретная и финансовая экономика. Также они применяются в рамках изучения экономической динамики, равновесия и неравновесия, конкурентной экономики, монополии и олигополии; экономических отраслевых предприятий, домашних хозяйств, рынков спроса и предложения, способов обоснования инвестиционных решений; межотраслевого, межрегионального и межстранового социально-экономического анализа, построения интегральных социально-экономических индикаторов, глобальной экономики; финансового сектора экономики; национальной экономики; экономической конъюнктуры; трендов и циклов развития экономики; демографических процессов, рынка труда, качества жизни населения. В Российской Федерации в паспорте специальности 5.2.2 «Математические, статистические и инструментальные модели» выделены оптимизационные и теоретико-игровые модели, модели экономического равновесия, производственных функций, глобальной и отраслевой экономики, а также модель «затраты – выпуск». В белорусских программах-минимумах по этой специальности отмечено разбиение математических моделей на классы. При таком подходе важную роль играет применение эконометрических методов (методов оптимизации, случайных процессов и прогнозирования).

Для проведения исследований по тем или иным направлениям экономисты используют актуальный и эффективный математический аппарат. Его фундаментом являются различные функции, описывающие экономические процессы (например, линейная функция, производственная функция Кобба – Дугласа, выпуклая функция).

В настоящей работе продолжено начатое в монографии [2] и статьях [3; 4] изучение экономических процессов с помощью субмодулярных и супермодулярных моделей, включающих функцию Кобба – Дугласа, в применении к моделям оптимизации транспортных потоков. Кроме того, определено, что субмодулярность обобщает понятия «линейность» и «выпуклость».

Субмодулярность (супермодулярность)

Пусть Z_+^n – целочисленная решетка, т. е. решетка n -мерных целочисленных векторов с неотрицательными координатами, а для двух векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ $x \wedge y$ есть вектор с координатами $\min(x_i, y_i)$ и $x \vee y$ есть вектор с координатами $\max(x_i, y_i)$. Функция $f(x)$ на Z^n является субмодулярной (супермодулярной), если выполняется неравенство $f(x) + f(y) \geq (\leq) f(x \vee y) + f(x \wedge y)$. Модулярной называется функция, выступающая субмодулярной и одновременно супермодулярной.

Функция $\Delta_i^+ f(x) = f(x + e_i) - f(e_i)$, где $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, есть правый i -градиент $f(x)$, а функция $\Delta_i^- f(x) = f(x) - f(x - e_i)$ – левый i -градиент. Таким образом, функция $\Delta_{ij}^+ f(x) = \Delta_i^+ (\Delta_j^+ f(x))$ будет являться правым (i, j) -градиентом. Очевидно, что это аналоги первых и вторых производных по направлениям.

Сильносубмодулярной (в работе [5] такая функция на более общих координатных решетках называется координатно-выпуклой) считается функция $f(x)$, имеющая одно из следующих свойств:

1) $f(x)$ – субмодулярная функция, правый i -градиент не возрастает при росте координаты x_i для каждого i ;

2) правые i -градиенты – невозрастающие функции для каждого i ;

3) левые i -градиенты – неубывающие функции для каждого i ;

$$4) f(y) - f(x) = \sum_{i: y_i > x_i} |y_i - x_i| \Delta_i^+ f(x) + \sum_{i: y_i < x_i} |x_i - y_i| \Delta_i^- f(x \vee y);$$

5) правые (i, j) -градиенты $\Delta_{ij}^+(x)$ неположительны для любых x и всех i .

Аналогично определяется сильносупермодулярная функция. Первое названное выше свойство указывает на то, что у субмодулярной функции в отличие от сильносубмодулярной не хватает монотонности i -градиентов при изменении координаты x_i , хотя при изменении остальных координат она есть. Отметим, что в частном случае на булеане B^n (изоморфной решетке 2^N подмножеств множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$), т. е. в случае короткости цепей $\{0, 1\}$ булеана, требовать монотонность i -градиентов при изменении

координаты x_i теряет смысл, поэтому на булевой решетке классы субмодулярных и сильносубмодулярных функций совпадают. Для них перечисленные выше свойства изменяются следующим образом:

- 1) $f(x)$ – субмодулярная функция на 2^N , т. е. $f(x) + f(y) \geq f(x \cup y) + f(x \cap y)$ для любых $x, y \subseteq N$;
- 2) правые i -градиенты $\Delta_i^+ f(x) = f(x \cup i) - f(x)$ для всех i не возрастают;
- 3) левые i -градиенты $\Delta_i^- f(x) = f(x \setminus i) - f(x)$ для всех i не убывают;
- 4) $f(x) - f(y) = \sum_{i \in x \setminus y} \Delta_i^+ f(y) + \sum_{i \in y \setminus x} \Delta_i^- f(x \cup y)$;
- 5) правые (i, j) -градиенты $\Delta_{ij}^+ f(x) = f(x \cup i \cup j) - f(x \cup i) - f(x \cup j) + f(x)$ неположительны.

Сильносубмодулярные (сильносупермодулярные) функции на Z^n есть аналоги вогнутых (выпуклых) функций. В то же время сужение вогнутой (выпуклой) функции с R^n на Z^n не обязательно является сильносубмодулярной (сильносупермодулярной) функцией. Сужение же сепарабельной выпуклой функции $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ есть сильносупермодулярная функция. Другие примеры сильносубмодулярных функций и примеры их применения приведены в работах [2–5].

В экономике значимость рассматриваемых функций определяется следующим обстоятельством: супермодулярность свидетельствует о возрастании величины синергетического эффекта от объединения экономических процессов (положительный эффект масштаба), а субмодулярность указывает на возникновение негативного синергетического эффекта (диссинергия). Модулярность говорит об отсутствии синергетического эффекта от объединения экономических процессов.

Очевидным является свойство сохранять субмодулярность (супермодулярность, модулярность) при линейных комбинациях с неотрицательными коэффициентами. Оно дает возможность рассматривать конусы таких функций с их простой характеристикой через образующие [2–4; 6–9].

Субмодулярные функции

Сепарабельная функция. Сепарабельная функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (1)$$

является субмодулярной и одновременно супермодулярной на Z^n при любых $f_i(x_i)$, т. е. $f(x)$ – модулярная функция (более того, любая модулярная функция на Z^n может быть представлена в форме функции (1)). На B^n модулярная функция совпадает с линейной функцией

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i), \text{ где } x_i = 0 \vee 1.$$

Представим иную форму записи:

$$f(I) = \sum_{i \in I} c_i \text{ для любого } I \in 2^N.$$

Матрица Монжа как субмодулярная функция. Матрица $(c_{ij})_{m \times n}$ является субмодулярной (супермодулярной), как функция $f(i, j) = c_{ij}$ на подрешетке $Z^2(m, n)$ решетки Z^2 , если и только если

$$c_{ij} + c_{kl} \leq c_{il} + c_{kj} \text{ для всех } 1 \leq i < k \leq m, 1 \leq j < l \leq n. \quad (2)$$

Еще Г. Монж доказал, что транспортная задача подвозки грузов для армии Наполеона с матрицей, удовлетворяющей условию (2), решается «жадным» (фр. *glouton*, англ. *greedy*) алгоритмом. На рисунке представлены классы субмодулярных функций (матриц Монжа) на Z^2 . Описанием данных классов занимались авторы работ [6–9]. Их систематизация произведена в исследовании [2].

Рассмотрено большое количество оптимизационных моделей экономических процессов с матрицами Монжа (анти-Монжа). Основанные на этом свойстве алгоритмы поиска оптимальных решений были предложены многими учеными (см. публикации [10–15]).

Приведем новую модель в форме задачи целераспределения. Дано m целей, для поражения i -й из которых нужно b_i ракет. Ракеты, способные к пуску, находятся в пунктах j в количестве a_j штук. Известно, что эффективность ракеты из пункта j по цели i равна c_{ij} . Необходимо распределить ракеты по целям с максимальной эффективностью

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

при условиях $\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq b_i, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq a_j, j = 1, \dots, n, x_{ij} \geq 0.$



Классы субмодулярных функций (матриц Монжа) на Z^2
Classes of submodular functions (Monge matrices) on Z^2

Функция максимального (минимального) элемента. Функция $f(I) = \max(c_i : i \in I)$ субмодулярна, а функция $f(I) = \min(c_i : i \in I)$ супермодулярна для любого $c \in R^n$. Следовательно, функция $f(I) = \sum_{j=1}^n \max(c_{ij} : i \in I)$ является субмодулярной как сумма субмодулярных функций.

Векторная функция. Для вектора $\vec{c} \in R^n$ с элементами $c_1 \geq \dots \geq c_n \geq 0$ функция $f(I) = \sum_{i=1}^{|I|} c_i$ субмодулярна.

Субмодулярные процессы оптимизации размещения производств

Наиболее многочисленный класс субмодулярных задач появился при оптимизации таких экономических процессов, как размещение производств и транспортировка продуктов. В Вычислительном центре АН СССР В. П. Черенин, В. Р. Хачатуров и их ученики решали данные задачи в основном в отношении нефтяной промышленности, сводя их к оптимизации функции со свойством Черенина [17–20]. Данное свойство – свойство монотонности i -градиентов – стало основой метода последовательных расчетов, существенно сократившего перебор при поиске минимума субмодулярной функции.

Рассмотрим актуальную субмодулярную задачу размещения логистических центров без ограничения на мощность [2]. Пусть $b_1, \dots, b_m$ – потребность в товаре в пунктах $1, \dots, i, \dots, m$, а $N = \{1, 2, \dots, j, \dots, n\}$ – возможные участки размещения производств (складов). Необходимо выбрать множество мест расположения X так, чтобы достигался минимум функции

$$f(X) = \sum_{j \in X} d_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j \in X} x_{ij} c_{ij}$$

при условиях $\sum_{j \in X} x_{ij} = b_i$ для любого $i \in X$, $i = 1, \dots, m$, $x_{ij} \geq 0$ для любого $j \in X$, $i = 1, \dots, m$, где c_{ij} – транспортные затраты на доставку из пункта i в пункт j , а d_j – постоянные затраты на строительство завода (склада) в пункте j . Легко доказывается неубывание правых i -градиентов, а следовательно, супермодулярность функции $f(X)$.

Данная задача часто рассматривается с ограничением на число заводов (складов). Иногда представляют обобщение этой задачи на выпуклые функции транспортных затрат $c_{ij}(x_{ij})$ и выпуклые функции $d_j(x_j)$

от мощности x_i затрат на строительство заводов (складов) с разрывом в нуле (см., например, публикацию [5]). Другие примеры задач можно найти в работах¹ [21–23].

Субмодулярность функций полезности

В микроэкономике функции полезности играют важную роль: они количественно моделируют отношения предпочтения экономических агентов. Пусть экономический агент имеет отношение предпочтения $d_j(x_j)$ на множестве всех неделимых товаров подмножества 2^N и строит функцию полезности $u(I)$ со свойством монотонности. Если $A \supseteq B$, то $u(A) \geq u(B)$. Далее чаще всего предполагается аддитивность функции, т. е. $u(A) = \sum_{x \in A} u(x)$ (полезность множества товаров равна сумме своих частей). Значит, функция u является модулярной. Для расширения теории жесткое требование аддитивности стали ослаблять. Так, для взаимозаменяемых товаров считают, что $u(A \cup i) - u(A) \geq u(B \cup i) - u(B)$, если $A \subseteq B$ и $i \in B$, т. е. функция полезности обладает свойством убывающей предельной полезности, или монотонности правого i -градиента. Как было указано выше, это свойство эквивалентно определению субмодулярной функции. Таким образом, субмодулярность функции полезности является характеристикой взаимозаменяемых товаров.

Супермодулярность противоположна субмодулярности, т. е. она соответствует возрастающей предельной полезности. По этой причине супермодулярные функции полезности моделируют отношения предпочтения на множестве комплементарных благ.

Важно отметить, что при стандартном приеме агрегирования функций нескольких экономических агентов с неотрицательными весами агрегирующая функция сохраняет их свойство субмодулярности или супермодулярности. В работе [24] установлено, что функция чистой полезности $u(x) - p(x)$ со свойством увеличения цены $p(x)$ любого товара x , которое приводит к повышению спроса на оставшиеся товары, также является субмодулярной.

Оптимизация процессов с полиматроидным спросом из-за взаимозаменяемости товаров

Нижним $(P(r^-))$ или верхним $(P(r^+))$ полиматроидом называется множество, заданное на R^n ограничениями

$$r^-(I) \leq \sum_{i \in I} x_i \leq r^+(I) \text{ для любого } I \subseteq N, \quad (3)$$

где $r^-(I)$ – супермодулярная функция и $r^+(I)$ – субмодулярная функция. Если присутствуют нижнее и верхнее ограничения, то неравенство (3) задает пересечение нижнего и верхнего полиматроидов. Так как стандартные транспортные ограничения есть пересечение двух простых полиматроидов, введенные ограничения моделируют более сложные ситуации со взаимозаменяемостью поставщиков и потребителей и с генерируемыми этим свойством ограничениями спроса или предложения для любого множества городов I . Таким образом, полиматроидность допустимой области связана с валовой заменяемостью спроса или предложения.

В подобных задачах критерий оптимальности

$$\min(\max) \sum_{i=1}^n f_i(x_i),$$

выражающий затраты на удовлетворение спроса при соблюдении ограничений по предложению или прибыль от такого удовлетворения (3), является модулярным. В задачах минимизации затрат функции $f_i(x_i)$, как правило, выпуклы, а в задачах максимизации прибыли функции $f_i(x(i))$ обычно вогнуты. Также в большинстве подобных задач появляется требование неделимости товара, что приводит к рассмотрению задачи на целых точках пересечения полиматроидов (3).

В частном случае, когда нижний полиматроид заменен простыми ограничениями

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

максимизационная задача на целых точках верхнего полиматроида решается так, как показано в работе [5], а именно с использованием алгоритма координатного подъема

$$x^{t+1} = x^t + e_{i(t)}, \quad x^0 = (0, \dots, 0),$$

¹Редди С. К. Алгоритмы решения некоторых задач субмодулярной оптимизации : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. Минск, 1994. 16 с.

где $i(t)$ – координата, которой соответствует наибольший правый i -градиент: $\max \left\{ \Delta_i^+ f(x^t) = f_i x_i^t + e_i - f(x_i^t) \right\}$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Заметим, что частный случай этой задачи на 2^N называется линейной задачей оптимизации на матроиде. Она изучена Дж. Эдмондсом в 1970 г. [25].

Важный класс пересечений полиматроидов (3) составляют обобщенные полиматроиды, обладающие аналогом свойства матроидной замены: для любых $x, y \in P(r^-, r^+) \cap Z_+^n$ с $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ и $x_i < y_i$ существует такой j и $x_j > y_j$, что $x + e_i - e_j \in P(r^-, r^+)$. Математические аспекты теории обобщенных полиматроидов изучены в работе [5], в которой показано, что задачи минимизации выпуклой функции на целых точках обобщенного полиматроида решаются комбинацией бикоординатного и координатного спусков.

Использование субмодулярной функции свертки неравенств для коррекции индикаторов экономического процесса

Пусть экономический процесс удовлетворяет следующей системе неравенств в целых числах (неделимые товары, услуги и т. д.):

$$b'_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где все a_{ij} неотрицательны. Выясняется, что система (4) противоречива, и индикаторы b'_i и b_i необходимо скорректировать.

Введем функцию невязок $f(x_1, \dots, x_n)$ системы (4) следующим правилом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \left(\max \left\{ 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b'_i \right\} \right) + \min \left\{ 0, b'_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}.$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является сильносубмодулярной, что помогает найти точку ее минимума x^* . Если $f(x^*) = 0$, то система совместна. Если же $f(x^*) > 0$, то система была бы совместной со скорректированными индикаторами $b_i + \Delta b_i$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i'' + \Delta b_i'', \Delta b_i'' = \max \left\{ 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i'' \right\},$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i'' + \Delta b_i'', \Delta b_i'' = \max \left\{ 0, b_i'' - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right\}.$$

Приведем пример задачи коррекции несовместной системы неравенств. Пусть экономический процесс с целочисленными управляемыми переменными x_1 и x_2 удовлетворяет неравенствам $0 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 2$, $x_1 + 4x_2 \leq 10$, $32 \leq 3x_1 + 8x_2$. Субмодулярная функция невязок для них выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2) = \max \{0, x_1 - 6\} + \max \{0, x_2 - 2\} + \max \{0, x_1 + 4x_2 - 10\} + \\ + \max \{0, 32 - 3x_1 - 8x_2\} + \max \{0, -x_1\} + \max \{0, 1 - x_2\}.$$

Алгоритм координатного спуска дает приближенный минимум функции невязок $f(x_1, x_2) = 8$ в точке $(0, 4)$, для которой вектор возмущений $\Delta b' = (0, 0, 0)$ и вектор возмущений $\Delta b'' = (0, 2, 6)$. Процесс, не удовлетворяющий исходным неравенствам, будет соответствовать следующим неравенствам: $0 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 4$, $x_1 + 4x_2 \leq 16$, $32 \leq 3x_1 + 8x_2$. Если построенная для процесса скорректированная система не подходит, то нужно найти точный минимум $f(x_1, x_2) = 4$, достигающийся в нескольких точках, например в точке $(8, 2)$, для которой вектор возмущений $\Delta b' = (0, 0, 0)$ и вектор возмущений $\Delta b'' = (8, 0, 2)$.

Многоцелевая оптимизация. Сформулированный подход к задаче коррекции несовместной системы неравенств применим в многоцелевой оптимизации, когда по каждой цели процесса установлен индикатор b_i и по целям $1, \dots, m$ его желательно не превосходить, а по целям $m + 1, \dots, m + s$, наоборот, его следует превзойти. Такая проблема возникает в экономической безопасности, когда задаются пороговые индикаторы безопасности [26] или банком соблюдаются установленные пруденциальные нормативы. Выясняется, что всех целей достичь невозможно, поэтому необходимо скорректировать отдельные из них. Понятно, что цели могут иметь неотрицательные веса. Тогда функция свертки строится с их включением, что не нарушает ее сильной субмодулярности.

Построение консенсус-прогностической модели из нескольких эконометрических моделей. Пусть для зависимой переменной y построены (возможно, разными авторами) m эконометрических моделей i : $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i$, $i = 1, \dots, m$ от независимых переменных $x_1, \dots, x_n$ (понятно, что отдельные переменные не входят в каждое уравнение). Агрегируем эконометрические модели с неизвестными весами λ_i в консенсус-прогностическую функцию $\sum \lambda_i y_i$ и выберем исторический период $t = 1, \dots, T$, для которого известны значения зависимых переменных $y_i(t)$ и независимых переменных $x_i(t)$. В результате получаем систему неравенств

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i(t) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + a_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i(t), t = 1, \dots, T,$$

для нахождения решения $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ с помощью описанного выше приема минимизации сильносубмодулярной функции невязок с неизвестными λ_i . В результате оптимальное решение $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ дает консенсус-прогностическую функцию $y = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^* a_{ij} \right) x_j$.

Консенсус-прогностические функции были впервые введены в работе [27] для прогнозирования развития стран ЕАЭС, а в исследовании [2] они были успешно использованы для прогнозирования экспорта грузовых транспортных услуг в странах ЕАЭС. Предложенный подход к агрегации разных эконометрических моделей может широко применяться в прогнозировании.

Минимизация (максимизация) субмодулярных функций

Большинство описанных субмодулярных экономических процессов требуют минимизации или максимизации субмодулярных (супермодулярных) функций. Общеизвестно, что оптимизация функции имеет полиномиальные алгоритмы решения (см. публикацию [28]).

Максимизация субмодулярной (минимизация супермодулярной) функции NP – трудная задача, для решения которой существуют только переборные или приближенные алгоритмы. Однако свойства субмодулярной (супермодулярной) функции позволяют оценивать точность переборных и градиентных алгоритмов (обзор подходов см. в исследовании [5]). Современная теория минимизации (максимизации) субмодулярных функций описана в классических работах [28–32].

Субмодулярные игры

В теории кооперативных игр выделяют подкласс игр с эффектом снежного кома (англ. *snowball effect*). В таких играх характеристическая функция супермодулярна, поэтому у них существует непустое ядро и вектор Шепли лежит в этом ядре. Данные игры называются субмодулярными (иногда выпуклыми). Более того, ядро супермодулярной игры есть перестановочный полиматроид с вершинами $(Add\Pi_1, \dots, Add\Pi_n)$ для всевозможных порядков Π_i формирования большой коалиции.

Подробная информация о субмодулярных играх содержится в монографии В. И. Данилова [24]. Также в работе [33] он сделал попытку изучить целочисленную выпуклость, отличную от выпуклости, введенной в публикации [5]. Отметим, что экономические процессы с неделимыми товарами, лотами и услугами требуют использования математического аппарата на целочисленных решетках. Его предлагает складывающаяся теория субмодулярных функций² [34] и их применений в экономике.

Заключение

В настоящей работе показана широта использования субмодулярных функций при изучении экономических процессов. Очевидно, что данная тема требует дальнейших исследований.

Библиографические ссылки

1. Родрик Д. *Экономика решает: сила и слабость «мрачной науки»*. Головляницына Е, переводчик. Москва: Издательство Института Гайдара; 2016. 256 с.
2. Королёва АА. *Математический инструментальный анализа развития транспортной логистики в Беларуси*. Минск: БГУ; 2022. 279 с.
3. Королёва АА. От Монжа до современной оптимизации транспортных потоков. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2021;1:26–36.

²Писарук Н. Н. Введение в теорию игр : учеб. пособие. Минск : БГУ, 2016. 256 с.

4. Королёва АА. Субмодулярные функции в экономике и логистике. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2021;2:18–25.
5. Ковалёв ММ. *Матроиды в дискретной оптимизации*. Минск: УПСС; 2020. 222 с.
6. Демиденко ВМ. Коническая характеристика матриц Монжа. *Кибернетика и системный анализ*. 2004;4:87–98.
7. Гришунин В. Экстремальные лучи конуса субмодулярной функции. Москва: Центральный экономико-математический институт Академии наук УССР; 1982. 66 с.
8. Girlich E, Kovalev M, Moshchensky A. *Convexity and Monge arrays*. Magdeburg University [Preprint]; 1993. [22 p.].
9. Girlich E, Kovalev M, Zaporozhets A. *Subcones of submodular functions*. Otto von Guericke Universität Magdeburg [Preprint]; 1994. [28 p.].
10. Adler IJ, Hoffman A, Schmir R. Monge and feasibility sequences in general flow problems. *Discrete Applied Mathematics*. 1993;44:21–38. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90220-I.
11. Bein WW, Brucker P, Park J, Parthak P. Monge properties in higher dimensions. *Discrete Applied Mathematics*. 1995;58:97–109.
12. Burkard RE, Klinz B, Rudolf R. Perspectives of Monge properties in optimisation. *Discrete Applied Mathematics*. 1996;70(2): 95–161. DOI: 10.1016/0166-218X(95)00103-X.
13. Deineko V, Woeginger G. Some problems around travelling salesmen, dartboards, and eurocoins. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*. 2006;90:43–52.
14. Dietrich BL. Monge sequences, antimatroids, and the transportation problem with forbidden arcs. *Linear Algebra and Its Applications*. 1990;139:133–145. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90393-Q.
15. Shamir R. A fast algorithm for constructing Monge sequences in transportation problems with forbidden arcs. *Discrete Mathematics*. 1993;114:435–444. DOI: 10.1016/0012-365X(93)90382-4.
16. Черенин ВП. *Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов*. Новосибирск: [б. и.]; 1962. 21 с. (Материалы к Конференции по опыту и перспективам применения математических методов и электронных вычислительных машин в планировании).
17. Хачатуров ВР. *Алгоритмы максимизации супермодулярных функций и их применение в задачах оптимального распределения инвестиций в регионах* [диссертация]. Москва: Центральный экономико-математический институт РАН; 2002. 95 с.
18. Хачатуров ВР, Веселовский ВЕ, Злотов АВ, Калдыбаев СУ, Калиев ЕЖ, Коваленко АГ и др. *Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности*. Москва: Наука; 2000. 354 с.
19. Хачатуров ВР. *Математические методы регионального программирования*. Москва: Наука; 1989. 304 с. (Экономико-математическая библиотека).
20. Хачатуров ВР. *Некоторые вопросы и приложения метода последовательных расчетов к решению задач размещения производства* [диссертация]. Москва: Центральный экономико-математический институт Академии наук СССР; 1968. 164 с.
21. Монтлевич ВМ. О субмодулярности функции прибыли в одной из задач планирования перевозок. *Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия*. 2014;10:48–54.
22. Бродецкий ГЛ, Гусев ДА. *Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации*. Москва: Академия; 2012. 195 с.
23. Трубин В. Два класса задач определения местоположения в древовидных сетях. *Кибернетика*. 1983;4:84–87.
24. Данилов ВИ. *Лекции по теории игр*. Москва: Российская экономическая школа; 2002. 140 с.
25. Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In: Guy R, Hanani H, Sauer N, Schönheim J, editors. *Combinatorial structures and their applications. Proceedings of the Calgary international conference; 1969 June 2–14; Calgary, Canada*. New York: Gordon and Breach; 1970. p. 69–87.
26. Господарик ЕГ, Ковалёв ММ. Коллективная экономическая безопасность ЕАЭС: постановка проблемы, индикаторы, сводный индекс. *Белорусский экономический журнал*. 2022;2:23–33. EDN: GLZCZD.
27. Господарик ЕГ, Ковалёв ММ. *ЕАЭС – 2050: глобальные тренды и евразийская экономическая политика*. Минск: Издательский центр БГУ; 2015. 152 с.
28. Писарук НН. Представление решетки оптимальных решений в задаче минимизации субмодулярной функции. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1989;29(9):1426–1431. DOI: 10.1016/0041-5553(89)90188-2.
29. Fujishige S. Submodular systems and related topics. In: Korte B, Ritter K, editors. *Mathematical programming at Oberwolfach II*. Berlin: Springer-Verlag; 1984. p. 113–131 (Mathematical programming studies; volume 22).
30. Lovasz L. Submodular functions and convexity. In: Bachem A, Grötschel M, Korte B, editors. *Mathematical programming. The state of the art. Bonn, 1982*. Berlin: Springer-Verlag; 1983. p. 235–257.
31. Schrijver A. A combinatorial algorithm minimizing submodular function in strongly polynomial time. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 2000;80:346–355.
32. Topkis DM. *Supermodularity and complementarity*. Princeton: Princeton University Press; 1998. 272 p. (Frontiers of economic research).
33. Данилов ВИ. *Целочисленная выпуклость*. Москва: Центральный экономико-математический институт РАН; 2020. 19 с.
34. Topkis DM. Minimizing a submodular functions on a lattice. *Operations Research*. 1978;26(2):305–321. DOI: 10.1287/opre.26.2.305.

References

1. Rodrik D. *Ekonomika reshaet: sila i slabost' «mrachnoi nauki»* [Economics rules: the rights and wrongs of the «dismal science»]. Golovyanitsyna E, translator. Moscow: Gaidar Institute Press; 2016. 256 p. Russian.
2. Koroleva AA. *Matematicheskie instrumentarii analiza razvitiya transportnoi logistiki v Belarusi* [Mathematical tools for analysing the development of transport logistics in Belarus]. Minsk: Belarusian State University; 2022. 279 p. Russian.
3. Koroleva AA. From Monge to modern optimisation of transport flows. *Journal of the Belarusian State University. Economics*. 2021;1:26–36. Russian.
4. Koroleva AA. Submodular functions in economics and logistics. *Journal of the Belarusian State University. Economics*. 2021; 2:18–25. Russian.
5. Kovalev MM. *Matroidy v diskretnoi optimizatsii* [Matroids in discrete optimisation]. Minsk: URSS; 2020. 222 p. Russian.

6. Demidenko VM. [Conic characterisation of Monge matrices]. *Kibernetika i sistemnyi analiz*. 2004;4:87–98. Russian.
7. Grishukhin V. *Ekstremal'nye luchi konusa submodulyarnoi funktsii* [Extremal rays of the cone of a submodular function]. Moscow: Tsentral'nyi ekonomiko-matematicheskii institut Akademii nauk USSR; 1982. 66 p. Russian.
8. Girlich E, Kovalev M, Moshchensky A. *Convexity and Monge arrays*. Magdeburg University [Preprint]; 1993. [22 p.].
9. Girlich E, Kovalev M, Zaporozhets A. *Subcones of submodular functions*. Otto von Guericke Universität Magdeburg [Preprint]; 1994. [28 p.].
10. Adler IJ, Hoffman A, Schamir R. Monge and feasibility sequences in general flow problems. *Discrete Applied Mathematics*. 1993;44:21–38. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90220-I.
11. Bein WW, Brucker P, Park J, Parthak P. Monge properties in higher dimensions. *Discrete Applied Mathematics*. 1995;58:97–109.
12. Burkard RE, Klinz B, Rudolf R. Perspectives of Monge properties in optimisation. *Discrete Applied Mathematics*. 1996;70(2):95–161. DOI: 10.1016/0166-218X(95)00103-X.
13. Deineko V, Woeginger G. Some problems around travelling salesmen, dartboards, and eurocoins. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*. 2006;90:43–52.
14. Dietrich BL. Monge sequences, antimatroids, and the transportation problem with forbidden arcs. *Linear Algebra and Its Applications*. 1990;139:133–145. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90393-Q.
15. Shamir R. A fast algorithm for constructing Monge sequences in transportation problems with forbidden arcs. *Discrete Mathematics*. 1993;114:435–444. DOI: 10.1016/0012-365X(93)90382-4.
16. Cherenin VP. *Reshenie nekotorykh kombinatornykh zadach optimal'nogo planirovaniya metodom posledovatel'nykh raschetov* [Solving some combinatorial problems of optimal planning by the method of successive calculations]. Novosibirsk: [s. n.]; 1962. 21 p. (Materialy k Konferentsii po opytu i perspektivam primeneniya matematicheskikh metodov i elektronnykh vychislitel'nykh mashin v planirovani). Russian.
17. Khachaturov VR. *Algoritmy maksimizatsii supermodulyarnykh funktsii i ikh primeneniye v zadachakh optimal'nogo raspredeleniya investitsii v regionakh* [Algorithms for maximising supermodular functions and their application in problems of optimal investment distribution in regions] [dissertation]. Moscow: Tsentral'nyi ekonomiko-matematicheskii institut RAN; 2002. 95 p. Russian.
18. Khachaturov VR, Veselovskii VE, Zlotov AV, Kaldybaev SU, Kaliev EZh, Kovalenko AG, et al. *Kombinatornye metody i algoritmy resheniya zadach diskretnoi optimizatsii bol'shoi razmernosti* [Combinatorial methods and algorithms for solving high-dimensional discrete optimisation problems]. Moscow: Nauka; 2000. 354 p. Russian.
19. Khachaturov VR. *Matematicheskie metody regional'nogo programmirovaniya* [Mathematical methods of regional programming]. Moscow: Nauka; 1989. 304 p. (Ekonomiko-matematicheskaya biblioteka). Russian.
20. Khachaturov VR. *Nekotorye voprosy i prilozheniya metoda posledovatel'nykh raschetov k resheniyu zadach razmeshcheniya proizvodstva* [Some questions and applications of the method of sequential calculations to solving problems of production placement] [dissertation]. Moscow: Tsentral'nyi ekonomiko-matematicheskii institut Akademii nauk SSSR; 1968. 164 p. Russian.
21. Montlevich VM. On the submodularity of the profit function in a problem of transport planning. *Bulletin of Samara State University. Natural Science Series*. 2014;10:48–54. Russian.
22. Brodetskii GL, Gusev DA. *Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli v logistike: protsedury optimizatsii* [Economic and mathematical methods and models in logistics: optimisation procedures]. Moscow: Akademiya; 2012. 195 p. Russian.
23. Trubin V. [Two classes of location determination problems in tree networks]. *Kibernetika*. 1983;4:84–87. Russian.
24. Danilov VI. *Lektsii po teorii igr* [Lectures on the theory of games]. Moscow: New Economic School; 2002. 140 p. Russian.
25. Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In: Guy R, Hanani H, Sauer N, Schönheim J, editors. *Combinatorial structures and their applications. Proceedings of the Calgary international conference; 1969 June 2–14; Calgary, Canada*. New York: Gordon and Breach; 1970. p. 69–87.
26. Gospodarik CG, Kovalev MM. Collective economic security of the EAEU: statement of the problem, indicators, consolidated index. *Belarusian Economic Journal*. 2022;2:23–33. Russian. EDN: GLZCZD.
27. Gospodarik CG, Kovalev MM. *EAEU – 2050: global'nye trendy i evraziiskaya ekonomicheskaya politika* [EAEU – 2050: global trends and Eurasian economic policy]. Minsk: Publishing Centre of the Belarusian State University; 2015. 152 p. Russian.
28. Pisaruk NN. [Representation of the lattice of optimal solutions in the submodular function minimisation problem]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1989;29(9):1426–1431. Russian. DOI: 10.1016/0041-5553(89)90188-2.
29. Fujishige S. Submodular systems and related topics. In: Korte B, Ritter K, editors. *Mathematical programming at Oberwolfach II*. Berlin: Springer-Verlag; 1984. p. 113–131 (Mathematical programming studies; volume 22).
30. Lovasz L. Submodular functions and convexity. In: Bachem A, Grötschel M, Korte B, editors. *Mathematical programming. The state of the art. Bonn, 1982*. Berlin: Springer-Verlag; 1983. p. 235–257.
31. Schrijver A. A combinatorial algorithm minimizing submodular function in strongly polynomial time. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 2000;80:346–355.
32. Topkis DM. *Supermodularity and complementarity*. Princeton: Princeton University Press; 1998. 272 p. (Frontiers of economic research).
33. Danilov VI. *Tselochislennaya vypuklost'* [Integer convexity]. Moscow: Tsentral'nyi ekonomiko-matematicheskii institut RAN; 2020. 19 p. Russian.
34. Topkis DM. Minimizing a submodular functions on a lattice. *Operations Research*. 1978;26(2):305–321. DOI: 10.1287/opre.26.2.305.

Статья поступила в редакцию 15.10.2024.
Received by editorial board 15.10.2024.