

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра био- и наномеханики

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой био и
наномеханики

30 января 2025 г. М.Г. Ботогова

СОГЛАСОВАНО

Декан механико-математического
факультета

30 января 2025 г.
МП С.М. Босяков

Сопротивление материалов и основы строительной механики

Электронный учебно-методический комплекс для специальности
6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование»

Регистрационный № 2.4.2-24 / 576

Автор:

Босяков С.М., доктор физико-математических наук, профессор.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
16.01.2025 г., протокол № 6.

Минск 2025

УДК 539.3/.6(075.8)+624.04(075.8)
Б 859

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 6 от 16.01.2025 г.

Решение о депонировании вынес Совет механико-математического факультета.
Протокол № 4 от 17.12.2024.

А в т о р:

Босяков Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета БГУ,

Рецензенты:

кафедра теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета (заведующий кафедрой Журавков М.А., доктор физико-математических наук, профессор);

Мартыненко Т.М., доцент кафедры промышленной безопасности Университета гражданской защиты, кандидат физико-математических наук.

Босяков, С. М. Сопротивление материалов и основы строительной механики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» / С. М. Босяков ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. био- и наномеханики. – Минск : БГУ, 2025. – 88 с. : ил. – Библиогр.: с. 87.

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Сопротивление материалов и основы строительной механики» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование». В ЭУМК содержатся теоретические материалы по расчету напряженного состояния в точке, по определению напряжений при растяжении-сжатии, изгибе, чистом сдвиге и кручении, при сложном сопротивлении, по применению энергетических методов для определения упругих перемещений, а также по другим основным разделам сопротивления материалов и строительной механики. Приведены практические и индивидуальные задания по основным разделам учебного курса.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	6
1.1. Конспект лекций	6
1.1.1. Потенциальная энергия деформированных тел. Линейная зависимость между обобщенными силами и обобщенными перемещениями упругого тела	6
1.1.2. Потенциальная энергия для различных случаев упругого деформирования. Применение энергетического метода для определения упругих перемещений	9
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	48
2.1. Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов.....	48
2.2. Примерная тематика индивидуальных заданий.	66
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ.....	85
3.1. Примерный перечень вопросов к зачету по учебной дисциплине «Сопротивление материалов и основы строительной механики»	85
3.2. Примерный перечень вопросов к экзамену по учебной дисциплине «Сопротивление материалов и основы строительной механики»	85
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	87
4.1. Рекомендуемая литература	87
4.2. Электронные ресурсы.....	88

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

С развитием науки и техники узкоспециальные знания довольно быстро устаревают. Для решения возникающих принципиально новых актуальных задач научные работники и инженеры обязательно должны обладать хорошей подготовкой в области фундаментальных наук. Это требует постоянного всестороннего совершенствования вузовского образования. Наиболее перспективный путь лежит именно в повышении значимости общенаучных дисциплин в учебных планах подготовки будущих научных работников и инженеров, в совершенствовании преподавания таких фундаментальных дисциплин, как физика, математика и механика.

Как фундаментальная наука сопротивление материалов и основы строительной механики была и остается не только одной из дисциплин, дающей углубленные знания о природе. Она также служит средством воспитания у будущих специалистов необходимых творческих навыков к построению математических моделей, происходящих в природе и технике процессов, к выработке способностей к научным обобщениям и выводам.

Цель курса «Сопротивление материалов и основы строительной механики» – повышение уровня профессиональной компетентности в решении проблем механики в различных сферах трудовой деятельности.

Программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» и рассчитана на изучение дисциплины в 3 и 4 семестрах. Курс имеет общенаучную и профессиональную направленность.

Программа соответствует первой ступени обучения в системе многоуровневого образования по механике.

Общенаучная направленность состоит в том, что студенты знакомятся с современными методами и приемами решения задач сопротивления материалов и строительной механики.

Задачей курса является подготовка высококвалифицированных специалистов, способных ставить и решать задачи из различных областей прочности, жесткости, устойчивости и колебаний элементов конструкций.

Учебно-воспитательный процесс при изучении курса сопротивления материалов и основ строительной механики должен быть организован таким образом, чтобы он давал возможность будущему специалисту приобрести основные профессиональные качества:

- сформировать установку на творческую профессиональную деятельность;
- развить профессиональное мышление, которое обеспечило бы будущему специалисту возможность свободно оперировать профессиональными знаниями, видеть проблемы и пути их решения в самостоятельной практической деятельности, выбирать оптимальные пути их решения и методы их осуществления;

- воспитывать в себе активную профессиональную позицию, умение вырабатывать и обосновывать свой подход в решении задач.

Требования к уровню усвоения содержания учебной дисциплины определены образовательным стандартом высшего образования по механике первой степени по циклу общепрофессиональных и специальных дисциплин, в котором указаны, с учетом компетентности подхода, общенаучные умения, система предметных знаний и комплекс предметных умений.

Выпускник должен **знать** следующие разделы курса:

- основные законы, постулаты и аксиомы сопротивления материалов и механики деформируемого твердого тела;
- растяжение-сжатие брусьев, расчетная модель детали или элемента конструкции;
- расчет простейших плоских стержневых систем;
- статически неопределимые системы;
- механические свойства материалов;
- понятие допустимых напряжений;
- напряжения и деформации при плоском напряженном состоянии;
- деформации сдвига. практические расчеты на сдвиг;
- напряжения и деформации при кручении бруса круглого сечения;
- кручение брусьев некруглого сечения;
- геометрические характеристики плоских фигур;
- изгиб прямого бруса;
- напряжения при поперечном изгибе;
- дифференциальное уравнение упругой линии бруса при изгибе;
- общий случай напряженного состояния упругого твердого тела;
- практические случаи возникновения сложного напряженного состояния;
- проверка прочности при объемном напряженном состоянии;
- теории прочности;
- определение перемещений по методу Максвелла–Мора;
- стержневые конструкции: фермы и рамы;
- расчет статически неопределимых систем по методу сил;
- кривой изгиб;
- внецентренное растяжение;
- совместное действие изгиба и кручения;
- прочность при переменных напряжениях;
- практические методы расчета на прочность с учетом усталости;
- основы теории колебаний упругих систем;
- собственные колебания с затуханием и вынужденные колебания системы с одной степенью свободы;
- напряжения при ударе;
- устойчивость упругих систем;

уметь:

- составлять расчетную модель детали или элемента конструкции;

- выполнять расчет напряженно-деформированного состояния при растяжении-сжатии брусьев и при сдвиге;
- выполнять расчет сил и перемещений простейших плоских стержневых систем и статически неопределимых систем;
- определять допустимые напряжения и коэффициенты запаса прочности;
- вычислять напряжения и деформации при плоском напряженном состоянии;
- определять напряжения и деформации при кручении бруса круглого сечения и при поперечном изгибе;
- вычислять геометрические характеристики плоских фигур;
- использовать дифференциальное уравнение упругой линии бруса при расчете прогибов при изгибе;
- осуществлять проверку прочности при объемном напряженном состоянии по основным теориям прочности;
- определять перемещения в стержневых конструкциях, фермах и рамах с использованием метода Максвелла–Мора и способа Верещагина;
- выполнять расчет статически неопределимых систем по методу сил;
- оценивать прочность при переменных напряжениях и при ударе;
- оценивать устойчивость упругих систем.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Конспект лекций

1.1.1. Потенциальная энергия деформированных тел. Линейная зависимость между обобщенными силами и обобщенными перемещениями упругого тела

При упругих деформациях приращение потенциальной энергии деформированного тела равно приращению работы внешних сил по деформации тела (работе деформации):

$$\delta U = \delta A,$$

или

$$\delta(U - A) = 0, \quad (1)$$

где δA – приращение работы внешних сил, δU – приращение потенциальной энергии деформированного тела.

Пусть на деформируемое тело действуют обобщенные силы $P_1, P_2, \dots, P_n$, которым соответствуют обобщенные перемещения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Под обобщенной силой будем понимать любую силу (или совокупность сил), являющуюся активной или реактивной силой, находящуюся в равновесии и определяемую одним активным силовым фактором, названием которого обозначается вся обобщенная сила (две равные и противоположно направленные силы, вызывающие растяжение или сжатие стержня, изгибающая пара сил, крутящая пара сил). За обобщенное перемещение, соответствующее данной обобщенной силе, принимается величина, на которую необходимо умножить эту силу для вычисления ее работы при условии, что сила при вызываемых ею перемещениях останется постоянной (абсолютное удлинение стержня, угол поворота сечения, угол закручивания).

Приращение работы деформации выразим следующим образом:

$$\delta A = P_1 \delta(\delta_1) + P_2 \delta(\delta_2) + \dots + P_n \delta(\delta_n),$$

$\delta(\delta_i)$ – бесконечно малые приращения перемещений.

Поскольку бесконечно малое перемещение можно заменить дифференциалом, имеем

$$dA = P_1 d\delta_1 + P_2 d\delta_2 + \dots + P_n d\delta_n. \quad (2)$$

Определим приращение дополнительной работы деформации:

$$\delta A_\partial = \delta_1 \delta P_1 + \delta_2 \delta P_2 + \dots + \delta_n \delta P_n,$$

где δP_i – бесконечно малые приращения сил P_i .

Отсюда

$$dA_\partial = \delta_1 dP_1 + \delta_2 dP_2 + \dots + \delta_n dP_n. \quad (3)$$

Сравним работу деформации и дополнительную работу деформации на примере растяжения стержня. В этом случае обобщенной силой является совокупность двух растягивающих сил, приложенных к стержню, обобщенное перемещение – абсолютное удлинение $\delta_1 = \Delta l$. Тогда

$$dA = P_1 d\delta_1 = Pd(\Delta l), \quad dA_\partial = \delta_1 dP_1 = \Delta l dP.$$

Отсюда

$$A = \int_0^l Pd(\Delta l), \quad A_\partial = \int_0^P \Delta l dP.$$

Предположим, что зависимость между P и Δl описывается диаграммой растяжения OA , показанной на рисунке 1. Тогда работа деформации определяется площадью OAB , дополнительная работа деформации – площадью OAC .

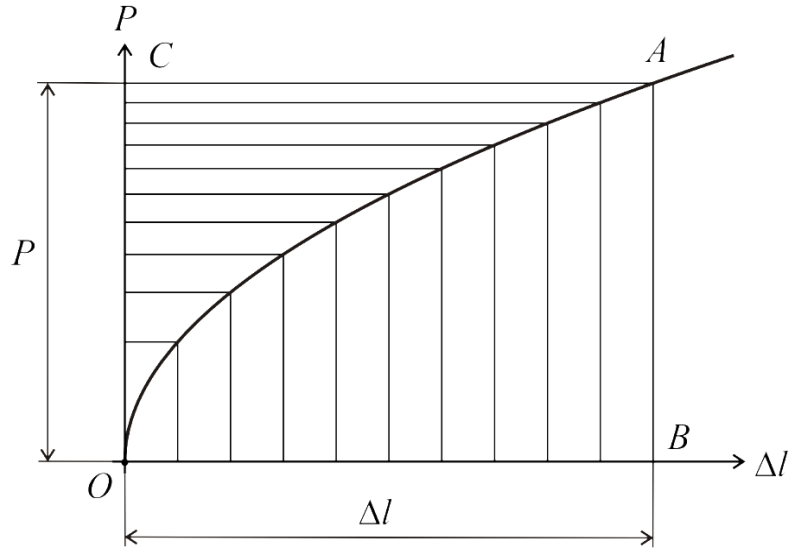


Рисунок 1 – Диаграмма растяжения

Поскольку работа деформации может рассматриваться как функция от обобщенных перемещений, а дополнительная работа деформации – как функция от обобщенных сил, имеем

$$dA = \frac{\partial A}{\partial \delta_1} d\delta_1 + \frac{\partial A}{\partial \delta_2} d\delta_2 + \dots + \frac{\partial A}{\partial \delta_n} d\delta_n, \quad (4)$$

$$dA_\partial = \frac{\partial A_\partial}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial A_\partial}{\partial P_2} dP_2 + \dots + \frac{\partial A_\partial}{\partial P_n} dP_n. \quad (5)$$

Из равенств (2) и (4), (3) и (5) получим

$$\frac{\partial A}{\partial \delta_i} = P_i, \quad (6)$$

$$\frac{\partial A_\partial}{\partial P_i} = \delta_i. \quad (7)$$

При упругих деформациях на основании формулы (1) из соотношения (6) следует

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда обобщенные силы и обобщенные перемещения упругого тела связаны между собой линейными зависимостями:

$$\delta_i = \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \dots + \delta_{in}P_n, \quad (9)$$

$$P_i = P_{i1}\delta_1 + P_{i2}\delta_2 + \dots + P_{in}\delta_n, \quad (10)$$

где δ_{ik} , P_{ik} – постоянные величины, $i, k = \overline{1, 3}$. При $P_1 = P_2 = \dots = P_{k-1} = P_{k+1} = \dots = P_n = 0$ и $P_k = 1$ получаем $\delta_i = \delta_{ik}$. Следовательно, δ_{ik} – обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе P_i , вызванное только действием силы $P_k = 1$. Аналогично, P_{ik} – значение обобщенной силы P_i при $\delta_k = 1$ и остальных перемещениях равных нулю.

Далее рассмотрим только простое нагружение, когда силы и перемещения изменяются пропорционально некоторому параметру. В этом случае

$$\frac{P_i}{P_{0i}} = \frac{\delta_i}{\delta_{0i}} = k,$$

где P_{0i} , δ_{0i} – окончательные величины обобщенных сил и перемещений, $0 \leq k \leq 1$.

Отсюда

$$P_i = kP_{0i}, \quad dP_i = P_{0i}dk, \\ \delta_i = k\delta_{0i}, \quad d\delta_i = \delta_{0i}dk,$$

Тогда из формул (2) и (3) следует

$$dA = dU = kP_{01}\delta_{01}dk + kP_{02}\delta_{02}dk + \dots + kP_{0n}\delta_{0n}dk = \\ = (P_{01}\delta_{01} + P_{02}\delta_{02} + \dots + P_{0n}\delta_{0n})kdk, \\ dA_\partial = k\delta_{01}P_{01}dk + k\delta_{02}P_{02}dk + \dots + k\delta_{0n}P_{0n}dk = \\ = (P_{01}\delta_{01} + P_{02}\delta_{02} + \dots + P_{0n}\delta_{0n})kdk,$$

или

$$U = A_\partial = \sum_{i=1}^n P_{0i}\delta_{0i} \int_0^1 kdk.$$

Окончательно получим (для краткости принимаем $P_{0i} \equiv P_i$ и $\delta_{0i} \equiv \delta_i$):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i. \quad (11)$$

Выражение (11) называется теоремой Клайперона. Также отметим, что на основании $U = A_\partial$ и формулы (7) следует теорема Кастильяно:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}. \quad (12)$$

С учетом выражений (12) и (9) получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\frac{\partial U}{\partial P_k} \right) = \frac{\partial \delta_k}{\partial P_i} = \\ = \frac{\partial}{\partial P_i} (\delta_{k1}P_1 + \delta_{k2}P_2 + \dots + \delta_{ki}P_i + \dots + \delta_{kn}P_n) = \delta_{ki},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial P_k \partial P_i} &= \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \right) = \frac{\partial \delta_i}{\partial P_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial P_k} (\delta_{i1} P_1 + \delta_{i2} P_2 + \dots + \delta_{ik} P_k + \dots + \delta_{in} P_n) = \delta_{ik}.\end{aligned}$$

Поскольку U – однозначная функция обобщенных сил

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_k \partial P_i},$$

отсюда

$$\delta_{ki} = \delta_{ik}. \quad (13)$$

Таким образом, обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе P_k , от действия обобщенной силы $P_i = 1$ равно обобщенному перемещению, соответствующему обобщенной силе P_i , от действия обобщенной силы $P_k = 1$ (теорема о взаимности перемещений).

Аналогично, из формул (8) и (10) следует теорема о взаимности обобщенных сил:

$$P_{ki} = P_{ik}, \quad (14)$$

где P_{ki} – k -ая обобщенная сила, получаемая при обобщенном перемещении $\delta_i = 1$, P_{ik} – i -ая обобщенная сила при обобщенном перемещении $\delta_k = 1$.

1.1.2. Потенциальная энергия для различных случаев упругого деформирования. Применение энергетического метода для определения упругих перемещений

При растяжении (сжатии) $U = \frac{1}{2} S \Delta l$, где S – совокупность двух растягивающих (сжимающих) сил, приложенных к концам стержня, Δl – абсолютное удлинение. Известно, что $\Delta l = \frac{Sl}{EF}$. Тогда $U = \frac{S^2 l}{2EF}$. Если конструкция состоит из n_1 растянутых (сжатых) стержней, будем иметь

$$U = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{S_i^2 l_i}{2E_i F_i}. \quad (15)$$

При кручении $U = \frac{1}{2} M_k \theta$, где M_k – пара сил, θ – угол закручивания.

Поскольку $\theta = \frac{M_k l}{GJ_p}$ (G – модуль сдвига, J_p – полярный момент инерции), то

$U = \frac{(M_k)^2 l}{2GJ_p}$. Если имеется n_2 скручиваемых стержней, выражение для

потенциальной энергии принимает вид

$$U = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(M_k)_i^2 l_i}{2G_i (J_\rho)_i}. \quad (16)$$

При изгибе приращение потенциальной энергии можно представить в следующем виде:

$$dU = \frac{1}{2} M \delta_M + \frac{1}{2} Q \delta_Q, \quad (17)$$

где M – изгибающий момент, Q – поперечная сила.

Найдем обобщенное перемещение δ_M . Имеем

$$\delta_M = d\theta,$$

где $d\theta$ – угол поворота одного сечения относительно другого. Учтем, что длина рассматриваемого участка балки

$$\begin{aligned} dx &= \rho d\theta, \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{M}{EJ}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta_M = \frac{M dx}{EJ}. \quad (18)$$

При нахождении обобщенного перемещения δ_Q одно сечение балки предположим неподвижным. Для любой площадки другого сечения сдвигающее усилие будет $Q = \int_F \tau dF$. Под действием этого усилия происходит чистый сдвиг на величину

$$\delta_Q = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx. \quad (19)$$

Подставим выражения (18), (19) в формулу (17):

$$dU = \frac{1}{2} M \frac{M dx}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{G} dx \int_F \tau dF = \frac{1}{2} \frac{M^2 dx}{EJ} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{G} dx \int_F \frac{(S_{y0})^2}{b^2 J^2} dF.$$

Обозначим $\frac{K}{F} = \int_F \frac{(S_{y0})^2}{b^2 J^2} dF$. Тогда

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EJ} + K \frac{Q^2 dx}{2GF}.$$

Для всей балки длиной l

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int_0^l K \frac{Q^2 dx}{2GF}.$$

Отсюда для конструкции, состоящей из n_3 изгибаемых элементов

$$U = \sum_{i=1}^{n_3} \left(\int_0^{l_i} \frac{M_i^2 dx}{2E_i J_i} + \int_0^{l_i} K_i \frac{Q_i^2 dx}{2G_i F_i} \right). \quad (20)$$

Окончательно на основании выражений (15), (16) и (20) получим

$$U = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{S_i^2 l_i}{2E_i F_i} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(M_k)_i^2 l_i}{2G_i (J_\rho)_i} + \sum_{i=1}^{n_3} \left(\int_0^{l_i} \frac{M_i^2 dx}{2E_i J_i} + \int_0^{l_i} K_i \frac{Q_i^2 dx}{2G_i F_i} \right). \quad (21)$$

Рассмотрим конструкцию, состоящую из n_1 растянутых (сжатых), n_2 скрученных и n_3 изогнутых стержней. Пусть конструкция подвергается действию обобщенных сил $P_1, P_2, \dots, P_n$. На основании теоремы Кастильяно (12) найдем обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе P_r :

$$\delta_r = \frac{\partial U}{\partial P_r} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{S_i l_i}{E_i F_i} \frac{\partial S_i}{\partial P_r} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(M_k)_i l_i}{G_i (J_\rho)_i} \frac{\partial (M_k)_i}{\partial P_r} + \sum_{i=1}^{n_3} \left(\int_0^{l_i} \frac{M_i dx}{E_i J_i} \frac{\partial M_i}{\partial P_r} + \int_0^{l_i} K_i \frac{Q_i dx}{G_i F_i} \frac{\partial Q_i}{\partial P_r} \right).$$

Будем предполагать между усилиями и обобщенными силами линейную зависимость:

$$S_i = \sum_{r=1}^n S_{ir} P_r, \quad (M_k)_i = \sum_{r=1}^n (M_k)_{ir} P_r, \quad M_i = \sum_{r=1}^n M_{ir} P_r, \quad Q_i = \sum_{r=1}^n Q_{ir} P_r, \quad (22)$$

где S_{ir} – растягивающее (сжимающее) усилие в i -ом стержне от силы $P_r = 1$, $(M_k)_{ir}$ – крутящий момент в i -ом стержне от силы $P_r = 1$, M_{ir} – изгибающий момент в i -ом стержне от силы $P_r = 1$, Q_{ir} – поперечная сила в i -ом стержне от силы $P_r = 1$.

С учетом (22) окончательно получим

$$\delta_r = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{S_i S_{ir} l_i}{E_i F_i} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(M_k)_i (M_k)_{ir} l_i}{G_i (J_\rho)_i} + \sum_{i=1}^{n_3} \left(\int_0^{l_i} \frac{M_i M_{ir} dx}{E_i J_i} + \int_0^{l_i} K_i \frac{Q_i Q_{ir} dx}{G_i F_i} \right). \quad (23)$$

Рассмотрим применение формулы (23) на примере нахождения угла поворота опорного сечения A балки, изображенной на рисунке 2.

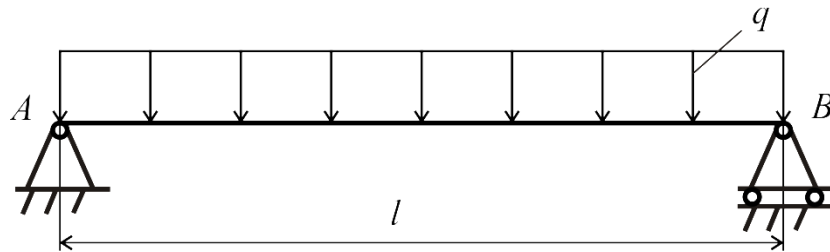


Рисунок 2 – Схема нагружения балки

Угол поворота является обобщенным перемещением, соответствующим обобщенной паре сил $M_0 = 1$, приложенной в этом сечении:

$$\delta_r = \theta_A = \int_0^l \frac{M M_r dx}{EJ} + \int_0^l K \frac{Q Q_r dx}{GF}.$$

Здесь M , Q – изгибающий момент и поперечная сила от основной нагрузки, M_r , Q_r – изгибающий момент и поперечная сила при $M_0 = 1$. Расчетные схемы для нахождения M , Q и M_r , Q_r представлены на рис. 3 и 4.

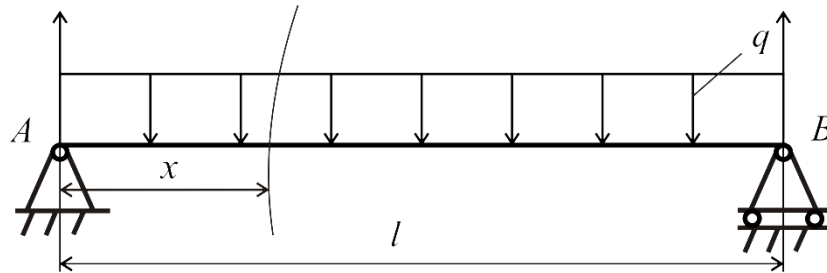


Рисунок 3 – Расчетная схема балки от основной нагрузки

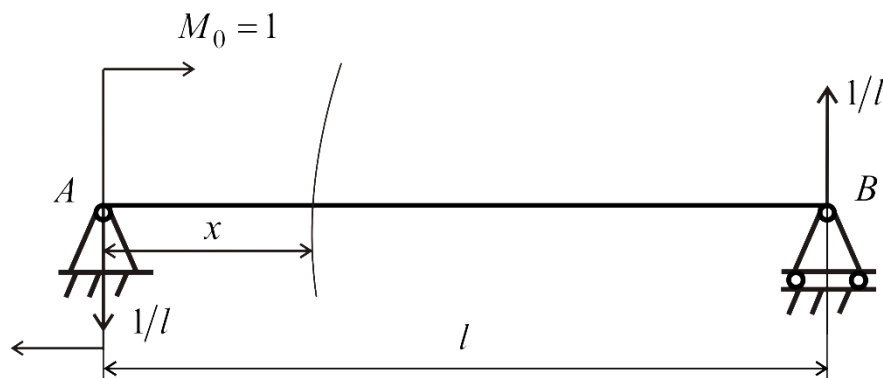


Рисунок 4 – Расчетная схема балки от момента $M_0 = 1$

В соответствии с расчетными схемами имеем

$$Q = \frac{ql}{2} - qx = \frac{q(l-2x)}{2}, \quad M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx(l-x)}{2},$$

$$Q_r = -\frac{1}{l}, \quad M_r = \frac{1}{l}(l-x).$$

Тогда

$$\theta_A = \int_0^l \frac{qx(l-x)^2}{2lEJ} dx + K \int_0^l \frac{q(l-2x)}{2lGF} dx = \frac{ql^3}{24EJ}.$$

Заметим, что поперечная сила не влияет на угол поворота.

Правило Верещагина. Заметим, что при вычислении перемещений на основании формулы (23) необходимо вычислять интегралы вида $\int_0^l f_1(x) f_2(x) dx$. Для этого используют следующий графоаналитический прием.

Пусть эпюра функции $f_1(x)$ имеет любое криволинейное очертание с центром тяжести в точке C , эпюра функции $f_2(x)$ – прямолинейное, в частности так, как это показано на рис. 5.

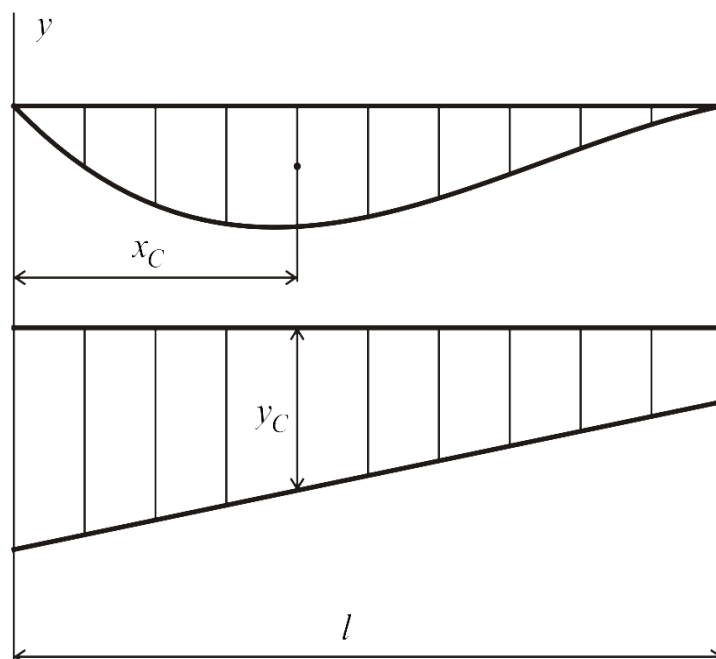


Рисунок 5. – Эпюры с криволинейным и прямолинейным очертаниями

Тогда $f_2(x) = ax + b$, следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx &= \int_0^l f_1(x)(ax + b) dx = \\ &= a \int_0^l x f_1(x) dx + b \int_0^l f_1(x) dx = a F_1 x_C + b F_1 = F_1(ax + b), \end{aligned}$$

где F_1 – площадь криволинейной фигуры, $F_1 x_C$ – статический момент этой площади.

Учтем, что $ax_C + b = y_C$. Тогда

$$\int_0^l f_1(x) f_2(x) dx = F_1 y_C.$$

Таким образом, если эпюра изменения одной функции имеет произвольное очертание, а второй – прямолинейное, то интеграл произведения этих функций численно равен произведению площади первой эпюры на находящуюся под ее центром тяжести ординату второй эпюры. Этот прием перемножения эпюр называется правилом Верещагина. Заметим, что он применяется в случае, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются непрерывными функциями.

В качестве примера найдем прогиб точки С балки, изображенной на рис. 6.

Согласно формуле (23) имеем

$$\begin{aligned}
 y_C &= \int_0^{l/2} \frac{M_1 M_{01}}{EJ} dx + \int_0^{l/2} \frac{M_2 M_{02}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(M_0 - \frac{M_0 x}{l} \right) \frac{x}{2} dx + \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \frac{M_0 x}{l} \frac{x}{2} dx = \\
 &= \frac{M_0}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) x dx + \frac{M_0}{2lEJ} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{M_0}{2EJ} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} \right) \Bigg|_0^{l/2} + \frac{M_0 x^3}{6lEJ} \Bigg|_0^{l/2} = \\
 &= \frac{M_0}{2EJ} \left(\frac{l^2}{8} - \frac{l^3}{24l} + \frac{l^3}{24l} \right) = \frac{M_0 l^2}{16EJ}.
 \end{aligned}$$

По правилу Верещагина, умножая эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки, представленную на рис. 7, на эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки, получим (нагружение балки единичной нагрузкой показано на рис. 8, соответствующая ей эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 9):

$$\begin{aligned}
 y_C &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_0}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{8} + \frac{1}{2} \frac{M_0}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{3} \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \frac{M_0}{2} \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{4} \right) = \\
 &= \frac{M_0 l^2}{EJ} \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{48} \right) = \frac{M_0 l^2}{16EJ} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{M_0 l^2}{16EJ}.
 \end{aligned}$$

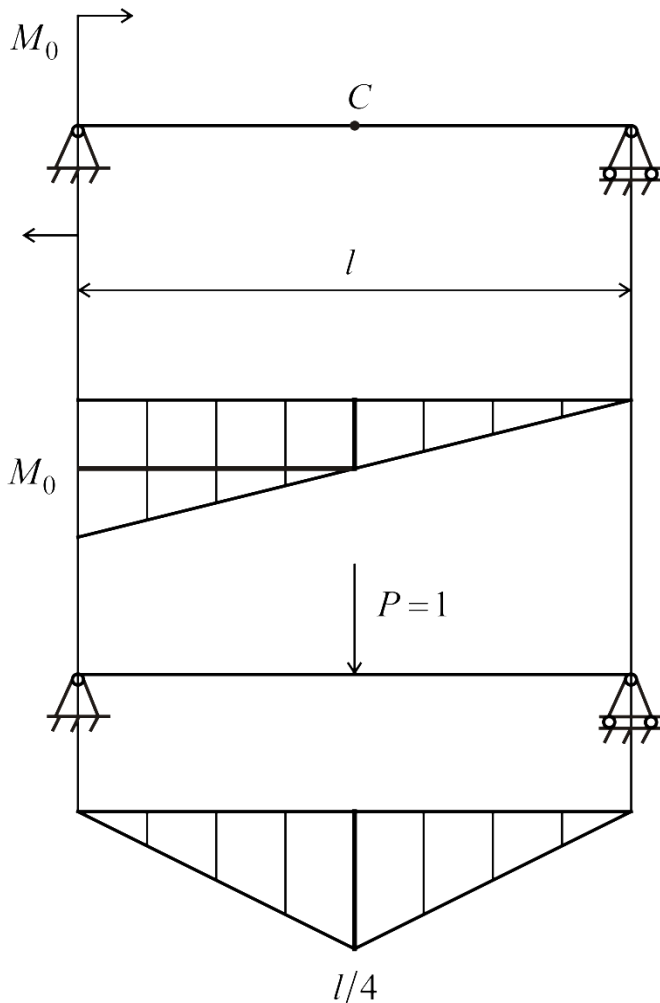


Рисунок 6 – Схема нагружения балки

Рисунок 7 – Эпюра изгибающих моментов для балки, нагруженной основной нагрузкой

Рисунок 8 – Схема нагружения балки единичной силой

Рисунок 9 – Эпюра изгибающих моментов для балки, нагруженной единичной силой

Если учесть то обстоятельство, что обе эпюры ограничены прямыми, можно выполнить умножение эпюры изгибающих моментов от единичной нагрузки на эпюру изгибающих моментов от основной нагрузки. Для этого найдем произведение площади треугольника, показанного на рис. 9, на ординату центра тяжести этого треугольника на эпюре, изображенной на рис. 7. В результате получим:

$$y_C = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{M_0}{2} = \frac{M_0 l^2}{16EJ}.$$

Таким образом, в случае, если обе перемножаемые эпюры очерчиваются прямыми линиями, выполняется коммутативность умножения эпюр по правилу Верещагина.

Общие методы расчета статически неопределимых конструкций. Общий метод расчета любой статически неопределимой системы можно получить на основании теоремы Кастильяно и линейной зависимости между обобщенными силами и обобщенными перемещениями.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из растянутых (или сжатых) стержней, имеющую n лишних неизвестных $X_1, X_2, \dots, X_n$. На основании выражения (15) имеем

$$U = \sum_{i=1}^{n_i} \frac{S_i^2 l_i}{2E_i F_i}.$$

С учетом линейной зависимости между усилиями в стержнях и обобщенными силами, имеем

$$S_i = S_{i1}X_1 + S_{i2}X_2 + \dots + S_{in}X_n + S_{ip}, \quad (24)$$

где S_{ik} – усилие в i -ом стержне от обобщенной силы $X_k = 1$, S_{ip} – усилие в том же стержне от нагрузки на конструкцию. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_k} &= \sum_{i=1}^n \frac{S_i l_i}{E_i F_i} \frac{\partial S_i}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^n \frac{(S_{i1}X_1 + S_{i2}X_2 + \dots + S_{in}X_n) l_i}{E_i F_i} S_{ik} = \\ &= X_1 \sum_{i=1}^n \frac{S_{i1} S_{ik} l_i}{E_i F_i} + X_2 \sum_{i=1}^n \frac{S_{i2} S_{ik} l_i}{E_i F_i} + \dots + X_n \sum_{i=1}^n \frac{S_{in} S_{ik} l_i}{E_i F_i} + \sum_{i=1}^n \frac{S_{ip} S_{ik} l_i}{E_i F_i}. \end{aligned} \quad (25)$$

На основании формулы (23) имеем

$$\sum_{i=1}^n \frac{S_{i1} S_{ik} l_i}{E_i F_i} = \delta_{k1}, \sum_{i=1}^n \frac{S_{i2} S_{ik} l_i}{E_i F_i} = \delta_{k2}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{S_{in} S_{ik} l_i}{E_i F_i} = \delta_{kn}, \sum_{i=1}^n \frac{S_{ip} S_{ik} l_i}{E_i F_i} = \delta_{kp},$$

где δ_{kj} – обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе X_k , при действии силы $X_j = 1$, δ_{kp} – то же от действия только нагрузки.

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial X_k} = 0$, то при $k = \overline{1, n}$ на основании соотношений (25)

следует, что лишние неизвестные удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1p} &= 0, \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2p} &= 0, \\
&\dots \\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{np} &= 0.
\end{aligned}
\tag{26}$$

Таким образом, расчет любой статически неопределимой системы сводится к составлению и решению системы уравнений (26) (канонической системы метода сил). После этого усилия в элементах конструкций вычисляются с помощью формулы (24). Коэффициенты системы (26) вычисляются на основании формулы (23) и правила Верещагина.

Поскольку в заданной статически неопределимой системе дополнительные связи отсутствуют, для нахождения перемещений δ_k следует учесть, что $\delta_i = 0$. В этом случае получим канонические уравнения метода перемещений:

$$\begin{aligned}
S_{11}X_1 + S_{12}\delta_2 + \dots + S_{1n}\delta_n + S_{1p} &= 0, \\
S_{21}\delta_1 + S_{22}\delta_2 + \dots + S_{2n}\delta_n + S_{2p} &= 0, \\
&\dots \\
S_{n1}\delta_1 + S_{n2}\delta_2 + \dots + S_{nn}\delta_n + S_{np} &= 0.
\end{aligned}
\tag{27}$$

Заметим, что для применения уравнений (27) необходимо вывести выражения усилий через перемещения.

Рассмотрим пример расчета дважды статически неопределимой рамы, показанной на рис. 10 (жесткость рамы постоянна и равна EJ). Выберем основную систему так, как это показано на рис. 11.

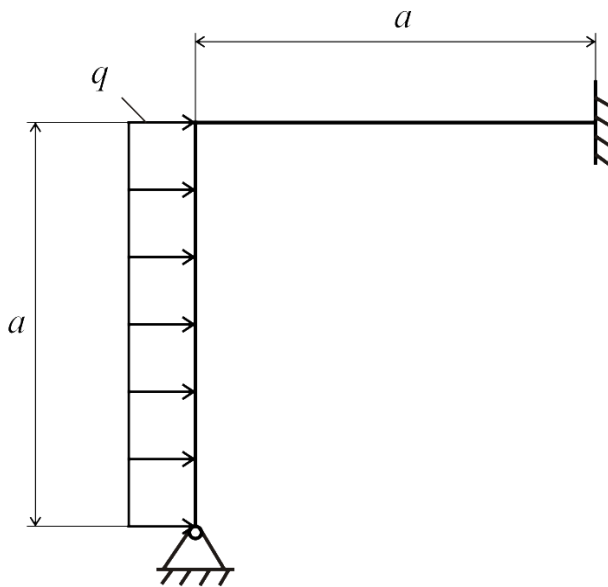


Рисунок 10 – Статически неопределимая рама

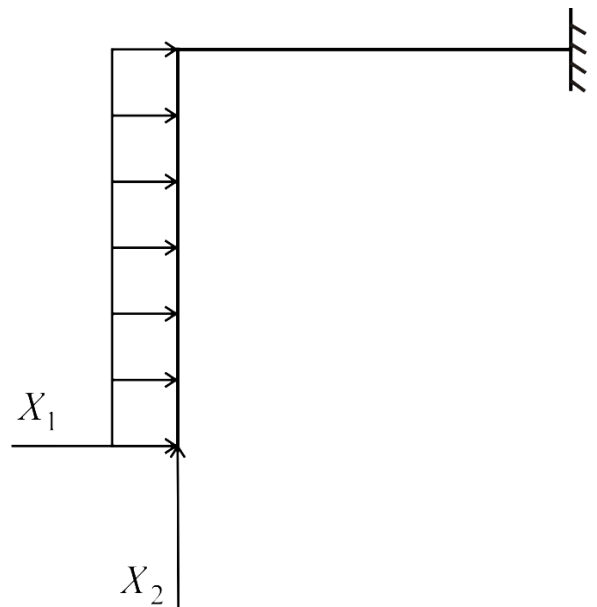


Рисунок 11 – Основная система

Канонические уравнения (26) в этом случае принимают вид:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2p} &= 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Для нахождения коэффициентов δ_{11} , δ_{22} и $\delta_{12} = \delta_{21}$ выполним построение эпюр изгибающих моментов от единичных сил и от заданной нагрузки. Единичные силы, заданная нагрузка и соответствующие эпюры показаны на рис. 12 – 17.

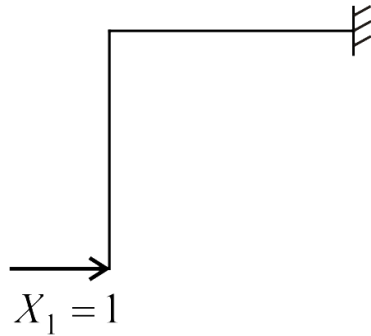


Рисунок 12 – Единичная нагрузка $X_1 = 1$

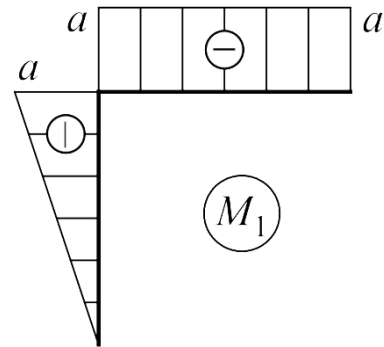


Рисунок 13 – Эпюра M_1 от единичной нагрузки $X_1 = 1$

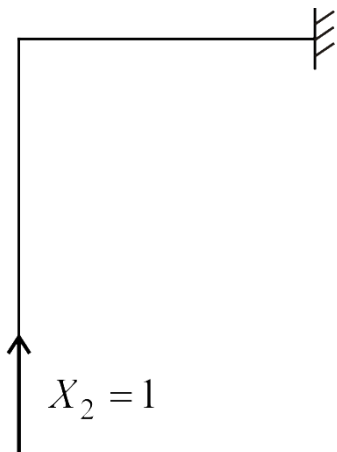


Рисунок 14 – Единичная нагрузка $X_2 = 1$

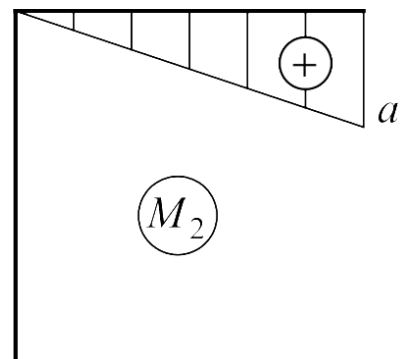


Рисунок 15 – Эпюра M_2 от единичной нагрузки $X_2 = 1$

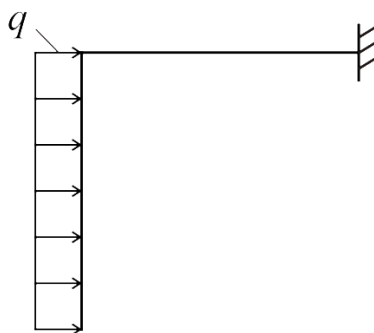


Рисунок 16 – Заданная нагрузка

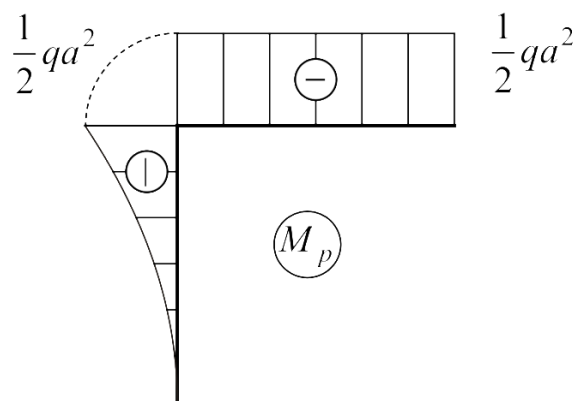


Рисунок 17 – Грузовая эпюра M_p от заданной нагрузки

Умножим по правилу Верещагина сами на себя эпюры M_1 и M_2 . В результате будем иметь

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a \right) = \frac{4a^3}{3EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a = \frac{a^3}{3EJ}.$$

Для нахождения обобщенного перемещения δ_{12} (и δ_{21}) перемножим эпюры M_1 и M_2 :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^3}{2EJ}.$$

Чтобы определить свободные члены системы (28), умножим грузовую эпюру M_p на эпюры M_1 и M_2 :

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{3a}{4} + \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot a \right) = \frac{5qa^4}{8EJ}, \quad \delta_{2p} = -\frac{1}{EJ} \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EJ}.$$

Подставим найденные величины перемещений в канонические уравнения (28). После преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{5}{8} qa &= 0, \\ -\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 - \frac{1}{4} qa &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$X_1 = -\frac{3}{7} qa, \quad X_2 = \frac{3}{28} qa.$$

С учетом найденных реактивных сил построим эпюру изгибающих моментов для исходной рамы. На рисунке 18 обозначены внешние силы, приложенные к раме. Эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 19.

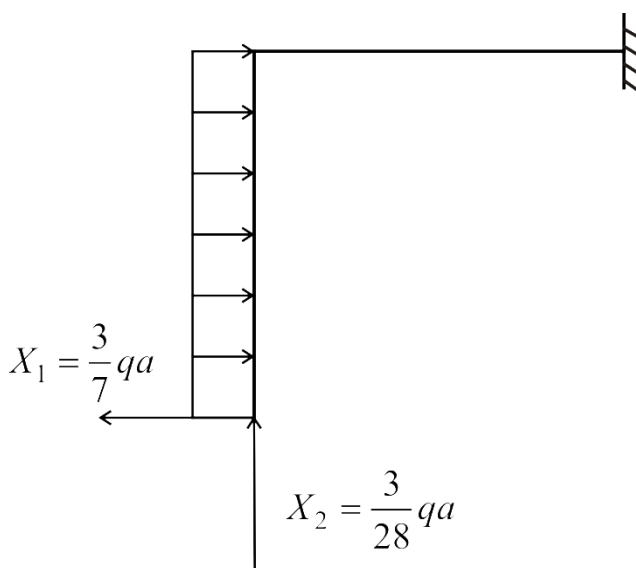


Рисунок 18 – Внешняя нагрузка

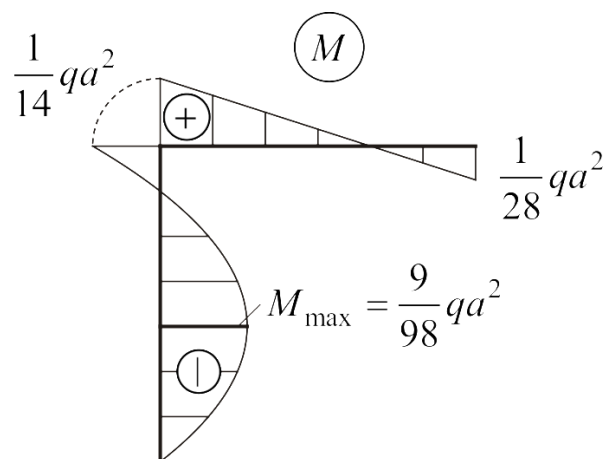


Рисунок 19 – Эпюра изгибающих моментов для дважды статически неопределимой рамы

Заметим, что в одном из сечений рамы возникает максимальный изгибающий момент, который можно найти, определив координату точки пересечения эпюры поперечных сил с базовой линией.

Неразрезные балки. Теорема о трех моментах. Неразрезной является балка на многих опорах, из которых одна неподвижна, а остальные подвижны. Пример неразрезной балки приведен на рисунке 20.

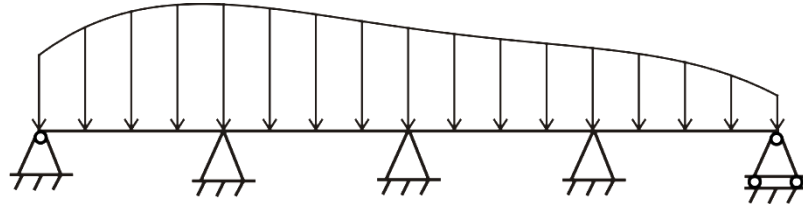


Рисунок 20 – Неразрезная балка

При расчете неразрезной балки для перехода к статически определимой основной системе в сечениях над опорами ставят шарниры. Неизвестными при этом будут моменты пар сил, приложенные к концам пролетов над опорами (опорные моменты) и препятствующие свободному повороту соответствующих сечений так, как это показано на рис. 21.

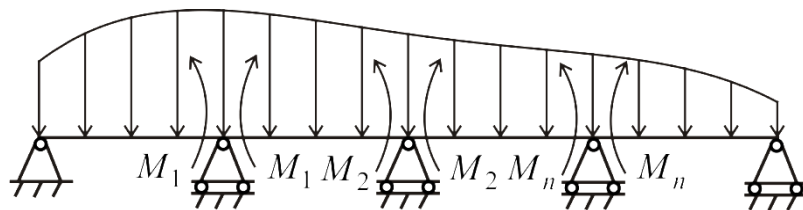


Рисунок 21 – Опорные моменты

Далее рассмотрим k -ый и $k+1$ -ый пролеты неразрезной балки с моментами инерции, нагруженные произвольной нагрузкой J_k и J_{k+1} . Схема нагружения пролетов и эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 22.

На k -ой опоре имеем равенство углов поворота

$$\theta_{k,k} + \theta_{k+1,k} = 0, \quad (29)$$

где $\theta_{k,k}$ – угол поворота сечения k -го пролета над опорой k , $\theta_{k+1,k}$ – угол поворота $(k+1)$ -го пролета балки над опорой k .

Воспользуемся следующими известными соотношениями

$$\theta_{k,k} = \frac{Q_{k,k}^{(F)}}{EJ_k} = -\frac{R_{k,k}^{(F)}}{EJ_k}, \quad (30)$$

$$\theta_{k+1,k} = \frac{Q_{k+1,k}^{(F)}}{EJ_{k+1}} = -\frac{R_{k+1,k}^{(F)}}{EJ_{k+1}}, \quad (31)$$

где $Q_{k,k}^{(F)}$, $R_{k,k}^{(F)}$ – поперечная сила и опорная реакция на k -ой опоре от фиктивной нагрузки k -го пролета, $Q_{k+1,k}^{(F)}$, $R_{k+1,k}^{(F)}$ – поперечная сила и опорная реакция от фиктивной нагрузки $k+1$ -го пролета.

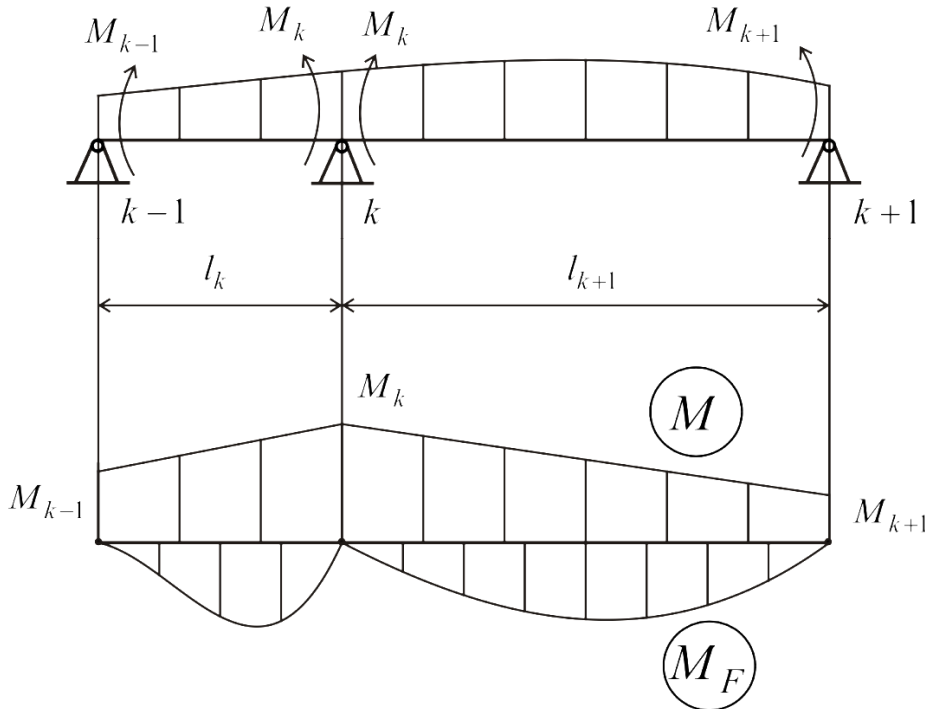


Рисунок 22 – Схема нагружения k -го и $k+1$ -го пролетов, а также эпюра M изгибающих моментов от действия опорных моментов и эпюра M_F изгибающих моментов от заданной нагрузки

Имеем

$$R_{k,k}^{(F)} = R_{k,k}^{(F,0)} + \frac{1}{2} \cdot M_{k-1} l_k \cdot \frac{1}{3} \cdot l_k \cdot \frac{1}{l_k} + \frac{1}{2} \cdot M_k l_k \cdot \frac{2}{3} \cdot l_k \cdot \frac{1}{l_k},$$

$$R_{k+1,k}^{(F)} = R_{k+1,k}^{(F,0)} + \frac{1}{2} \cdot M_k l_{k+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_{k+1} \cdot \frac{1}{l_{k+1}} + \frac{1}{2} \cdot M_{k+1} l_{k+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot l_{k+1} \cdot \frac{1}{l_{k+1}}.$$

Здесь $R_{k,k}^{(F,0)} = \frac{A_k c_{k-1}}{l_k EJ_k}$ – реакция k -ой опоры от фиктивной нагрузки k -го пролета, интенсивность которой определяется эпюрой моментов от нагрузки этого пролета; $R_{k+1,k}^{(F,0)} = \frac{A_{k+1} c_{k+1}}{l_{k+1} EJ_{k+1}}$ – реакция $k+1$ -ой опоры от фиктивной нагрузки, интенсивность которой определяется эпюрой моментов от внешней нагрузки $k+1$ -го пролета; A_k , A_{k+1} – площади эпюр изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки на пролетах k и $k+1$ соответственно; c_{k-1} , c_{k+1} – расстояние от центров тяжести эпюр до опор $k-1$ и $k+1$ соответственно; l_k , l_{k+1} – длины пролетов k и $k+1$ соответственно.

Раскрытие статической неопределимости с применением теоремы о трех моментах. Тогда, на основании равенства (29) с учетом формул (30) и (31), получим

$$-\frac{1}{EJ_k} \left(R_{k,k}^{(F,0)} + \frac{1}{6} M_{k-1} l_k + \frac{1}{3} M_k l_k \right) = \frac{1}{EJ_{k+1}} \left(R_{k+1,k}^{(F,0)} + \frac{1}{3} M_k l_{k+1} + \frac{1}{6} M_{k+1} l_{k+1} \right),$$

или

$$M_{k-1} \frac{l_k}{J_k} + 2M_k \left(\frac{l_k}{J_k} + \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} \right) + M_{k+1} \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} = -6 \left(\frac{R_{k,k}^{(F,0)}}{J_k} + \frac{R_{k+1,k}^{(F,0)}}{J_{k+1}} \right). \quad (32)$$

Соотношение (32) называется теоремой о трех моментах.

При равной длине пролетов и моментов инерции равенство (32) принимает вид:

$$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = -\frac{6}{l} \left(R_{k,k}^{(F,0)} + R_{k+1,k}^{(F,0)} \right). \quad (33)$$

Если неразрезная балка имеет n пролетов, то, полагая k от 1 до $n-1$ в уравнениях (32) или (33), получим $n-1$ уравнений для нахождения опорных моментов.

После нахождения опорных моментов, зависимости изгибающих моментов и поперечных сил от продольной координаты z для k -го пролета, показанного на рисунке 23, определяются следующим образом:

$$M(z) = M_0(z) + M_{k-1} + \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} z, \quad (34)$$

$$Q(z) = Q_0(z) + \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k}, \quad (35)$$

где $M_0(z)$, $Q_0(z)$ – изгибающий момент и поперечная сила только от действия нагрузки в данном пролете.

В качестве примера применения теоремы о трех моментах рассмотрим задачу, согласно условию которой, необходимо раскрыть статическую неопределимость неразрезной балки, представленной на рисунке 24, вычислить опорные моменты, а также построить эпюры Q и M ($P = 60$ кН, $q = 40$ кН/м, $a = 2,9$ м, $b = 4,6$ м).

Построим эпюру изгибающих моментов, рассматривая каждый пролет как простую балку на двух шарнирных опорах. Нумерация опор и эпюры изгибающих моментов показаны на рисунке 25.

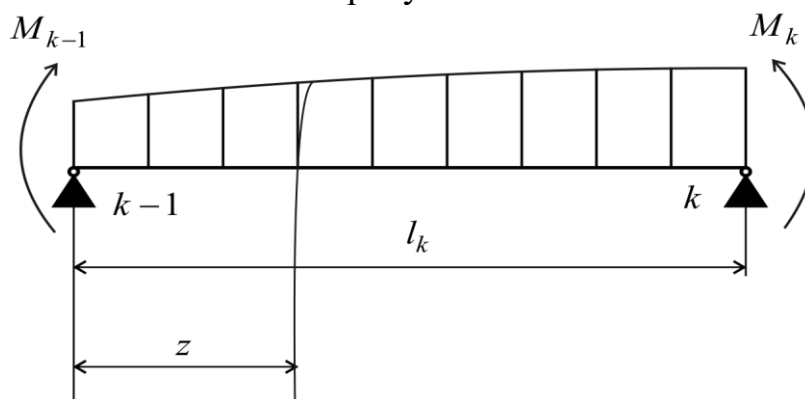


Рисунок 23 – Опорные моменты, действующие на k -ый пролет

Согласно уравнению (32) при равенстве моментов инерции для трех пролетов имеем

$$M_{k-1}l_k + 2M_k(l_k + l_{k+1}) + M_{k+1}l_{k+1} = -6\left(R_{k,k}^{(F,0)} + R_{k+1,k}^{(F,0)}\right).$$

Отсюда получим следующие два уравнения для первой и второй опор

$$M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -6\left(R_{1,1}^{(F,0)} + R_{2,1}^{(F,0)}\right),$$

$$M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = -6\left(R_{2,2}^{(F,0)} + R_{3,2}^{(F,0)}\right).$$

На основании схемы нагружения

$$M_0 = M_3 = 0, \quad l_1 = l_3 = b, \quad l_2 = 2a,$$

$$R_{1,1}^{(F,0)} = R_{3,2}^{(F,0)} = 0, \quad R_{2,1}^{(F,0)} = R_{2,2}^{(F,0)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2} \cdot 2a \cdot a \cdot \frac{1}{2a} = \frac{Pa^2}{4}.$$

Тогда

$$2M_1(2a + b) + M_2 \cdot 2a = -\frac{3}{2}Pa^2,$$

$$M_1 \cdot 2a + 2M_2(2a + b) = -\frac{3}{2}Pa^2.$$

После решения системы получаем

$$M_1 = M_2 = -\frac{3Pa^2}{4(3a + b)}.$$

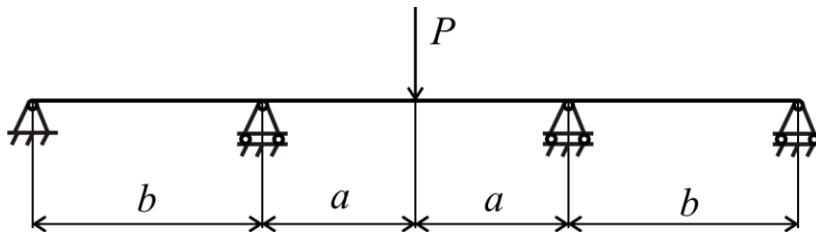


Рисунок 24
Нерезная балка

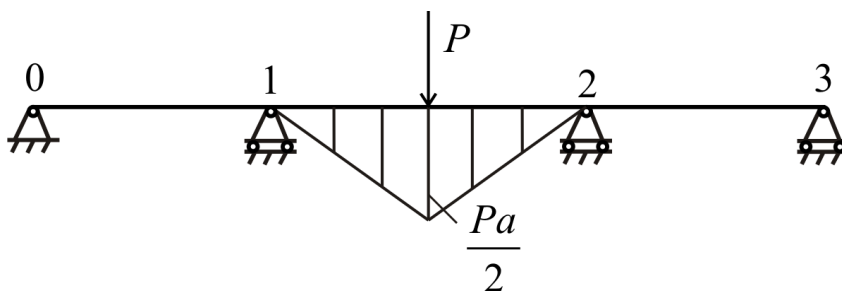


Рисунок 25 – Эпюры
изгибающих моментов
для простых
однопролетных балок

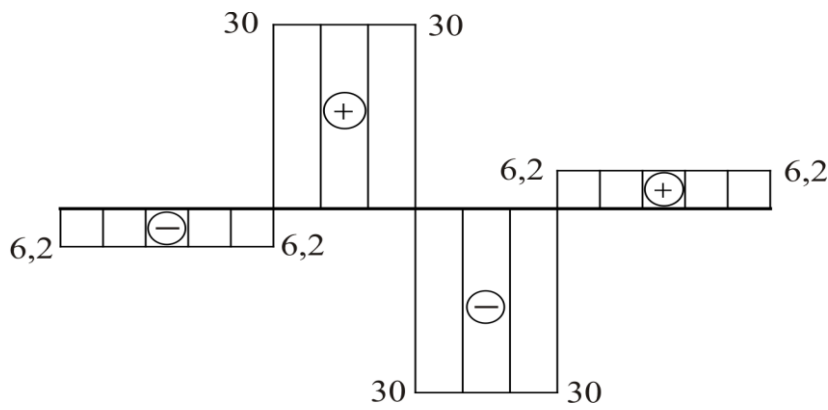


Рисунок 26 – Эпюра поперечных сил Q для неразрезной балки, кН

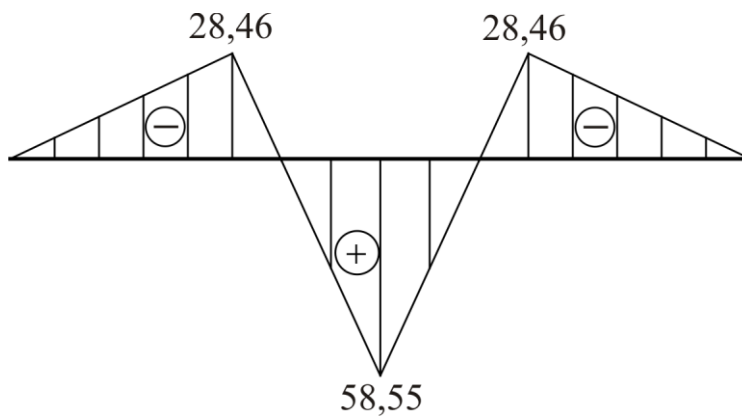


Рисунок 27 – Эпюра изгибающих моментов M для неразрезной балки, кН·м

С учетом этого сформулируем функции $M(z)$ и $Q(z)$ на основании соотношений (34) и (35) для разных пролетов (переменная z для всех пролетов изменяется слева направо).

Пролет 0–1, при $0 \leq z \leq b$.

$$M(z) = 0 + M_0 + \frac{M_1 - M_0}{b} \cdot z = \frac{M_1 z}{b} = -\frac{3Pa^2 z}{4b(3a + b)},$$

$$M(0) = 0, \quad M(b) = -\frac{3Pa^2}{4(3a + b)} = -28,46 \text{ кН·м.}$$

$$Q(z) = 0 + \frac{M_1 - M_0}{b} = \frac{M_1}{b} = -\frac{3Pa^2}{4b(3a + b)},$$

$$Q(0) = Q(b) = -\frac{3Pa^2}{4b(3a + b)} = -6,2 \text{ кН.}$$

Пролет 1–2, при $0 \leq z \leq a$.

$$M(z) = \frac{P}{2} \cdot z + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{a} \cdot z = \frac{Pz}{2} - \frac{3Pa^2}{4(3a + b)},$$

$$M(0) = -\frac{3Pa^2}{4(3a + b)} = 28,46 \text{ кН·м,}$$

$$M(a) = \frac{Pa}{2} - \frac{3Pa^2}{4(3a+b)} = \frac{Pa}{2} \left(1 - \frac{3a}{2(3a+b)} \right) = \frac{Pa(3a+2b)}{4(3a+b)} = 58,55 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$Q(z) = \frac{P}{2} + \frac{M_2 - M_1}{a} = \frac{P}{2},$$

$$Q(0) = Q(a) = \frac{P}{2} = 30 \text{ кН}.$$

Результат построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов представлен на рисунках 26 и 27 соответственно.

Опорная реакция неразрезной балки равна разности поперечных сил, действующих в сечениях, расположенных справа и слева от опоры в непосредственной близости от нее (величине скачка в эпюре поперечных сил в сечении над опорой). С учетом этого, опорные реакции для рассматриваемой неразрезной балки $R_0 = R_4 = -6,2 \text{ кН}$, $R_1 = R_2 = 30 - (-6,2) = 36,2 \text{ кН}$.

Расчет кривых брусьев. Рассмотрим расчет плоских кривых брусьев (брусьев, имеющих криволинейные оси, расположенные в одной плоскости). К ним относятся крюки, проушины, звенья цепей и другие конструкции. Напряжения в кривых брусьях определяются по-разному для брусьев малой кривизны (высота h поперечного сечения менее $r/5$) и большой кривизны (высота h превышает $r/5$). Радиус кривизны бруса и высота поперечного сечения обозначены на рисунке 28.

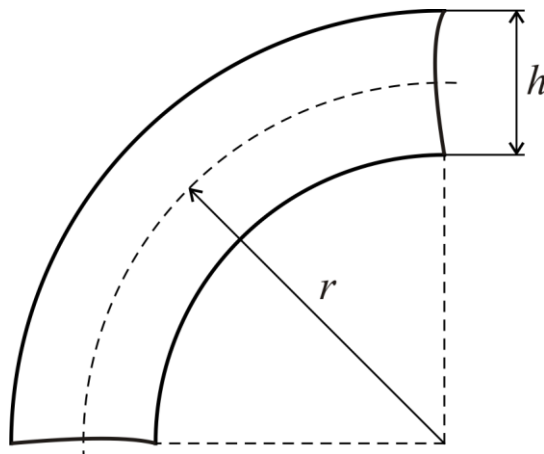


Рисунок 27 – Радиус кривизны r и высота h поперечного сечения кривого бруса

Определим нормальные напряжения в брусьях большой кривизны для случая чистого изгиба. Для этого выделим из бруса бесконечно малый элемент $A_1A_2A_3A_4$, ограниченный углом $d\varphi$ и показанный на рисунке 28.

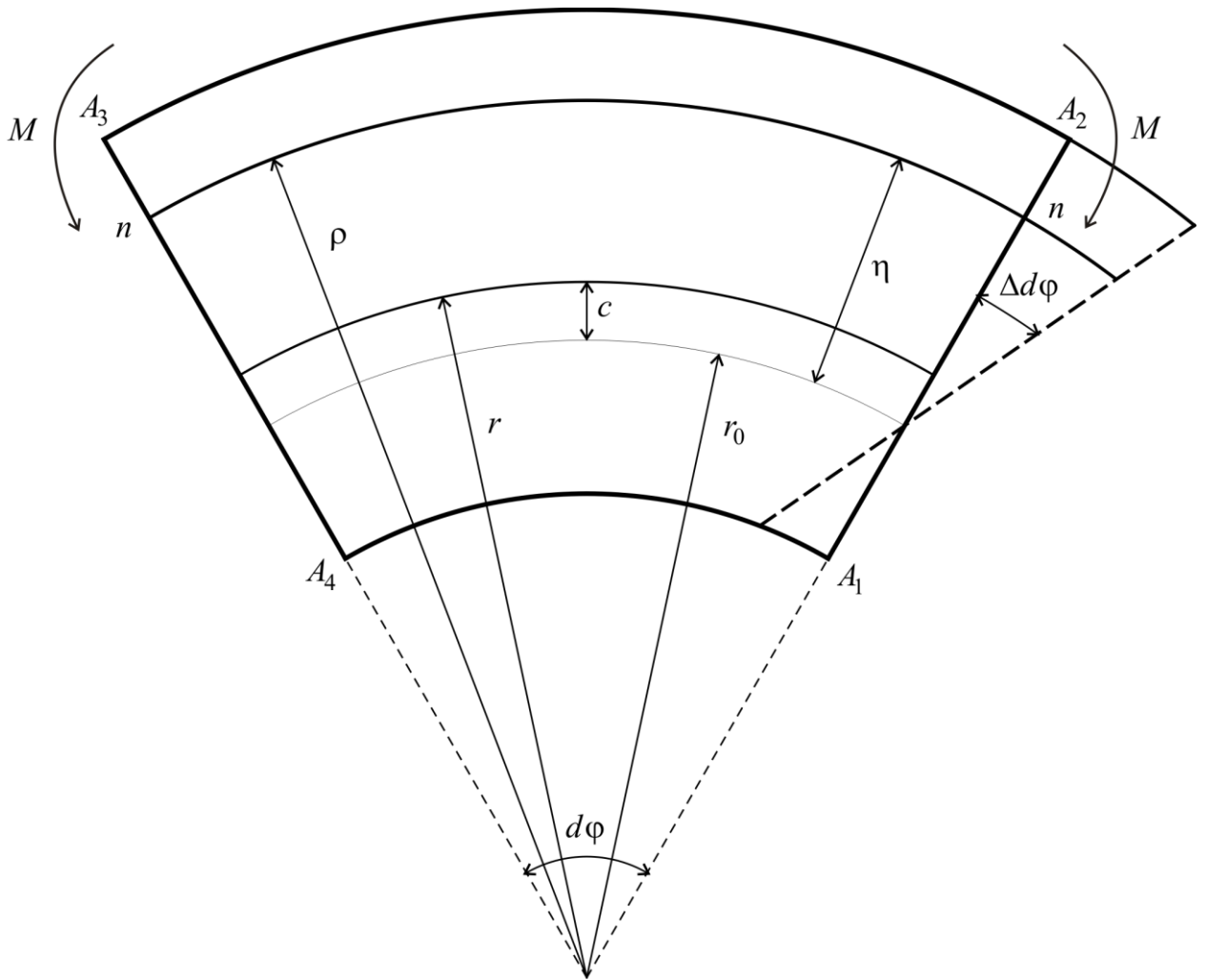


Рисунок 28 – Малый элемент кривого бруса

В результате деформации чистого изгиба сечение A_1A_2 поворачивается на угол $\Delta d\varphi$. Волокно $n-n$ длиной $\rho d\varphi$ (ρ – радиус кривизны) удлинится на величину $\eta \Delta d\varphi$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\eta \Delta d\varphi}{\rho d\varphi}.$$

Напряжения в этом волокне

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E \eta \Delta d\varphi}{\rho d\varphi}. \quad (36)$$

Выделим элемент dF площади F поперечного сечения A_1A_2 кривого бруса. Поскольку элементарная сила, действующая на этот элемент равна σdF , уравнение равновесия примет вид:

$$\int_F \sigma dF = 0,$$

или с учетом формулы (36)

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E \int_F \frac{\eta dF}{\rho} = 0.$$

Отсюда получим

$$\int_F \frac{\eta dF}{\rho} = 0. \quad (37)$$

Равенство (37) показывает, что нейтральная ось кривого бруса не проходит через центр тяжести поперечного сечения. Пусть r_0 – радиус кривизны нейтрального слоя. Тогда

$$\int_F \frac{(\rho - r_0) dF}{\rho} = \int_F dF - r_0 \int_F \frac{dF}{\rho} = F - r_0 \int_F \frac{dF}{\rho} = 0.$$

Отсюда

$$r_0 = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}}. \quad (38)$$

Тогда расстояние c от нейтрального слоя до центра тяжести поперечного сечения

$$c = r - r_0 = r - \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}}.$$

Поскольку сумма моментов относительно нейтральной оси равна нулю, имеем

$$M - \int_F \eta \sigma dF = 0,$$

или с учетом формул (36), (37) и равенства $\eta = \rho - r_0$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E \int_F \frac{\eta^2 dF}{\rho} &= \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E \int_F \frac{\eta(\rho - r_0) dF}{\rho} = \\ &= \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E \left(\int_F \eta d\varphi - r_0 \int_F \frac{\eta dF}{\rho} \right) = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E \int_F \eta d\varphi = M. \end{aligned}$$

Здесь $\int_F \eta d\varphi = Fc$ – статический момент поперечного сечения относительно нейтральной оси. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E F c &= M, \\ \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} &= \frac{M}{E F c}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставим выражение (39) в формулу (36)

$$\sigma = \frac{M}{F c} \cdot \frac{\eta}{\rho} = \frac{M}{F c} \cdot \frac{\rho - r_0}{\rho}. \quad (40)$$

Схематичный вид эпюры напряжений для кривого бруса в случае чистого изгиба, построенный в соответствии с формулой (40), показан на рисунке 29.

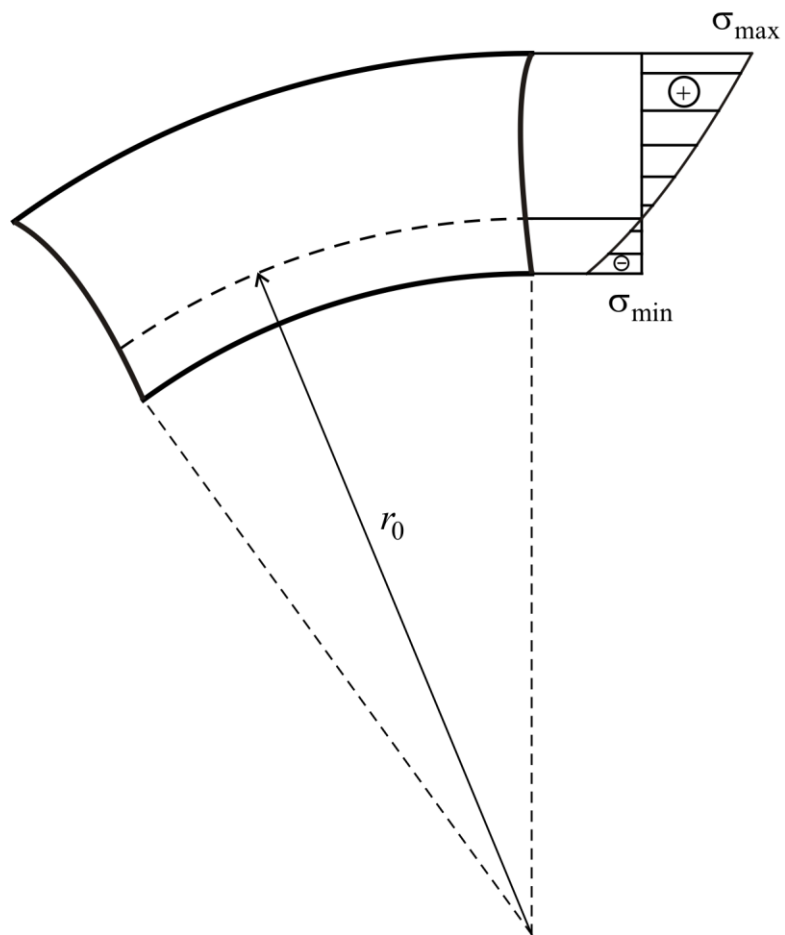


Рисунок 29 – Схематичный вид эпюры нормальных напряжений для кривого бруса

На практике радиус r_0 вычисляется на основании известных формул для различных форм поперечных сечений. В качестве примера найдем r_0 для прямоугольного поперечного сечения, показанного на рисунке 30.

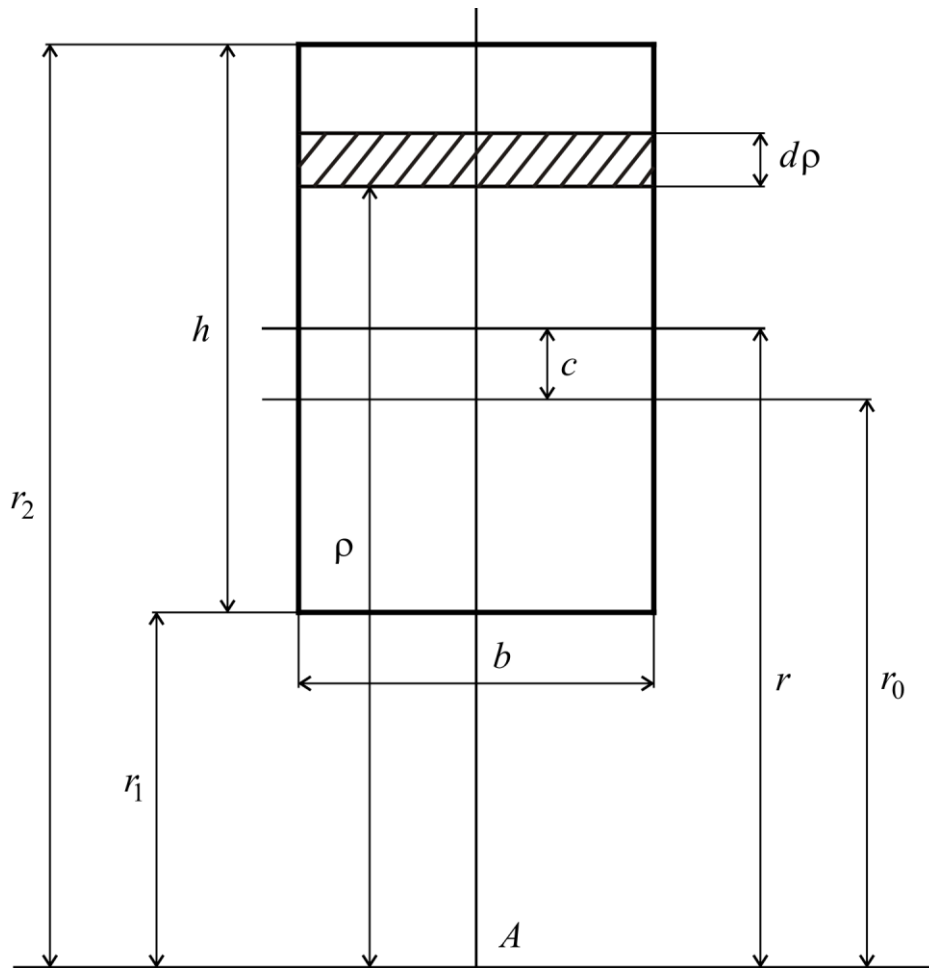


Рисунок 30 – Прямоугольное поперечное сечение кривого бруса
(точка A – центр кривизны бруса)

В соответствии с формулой (38) и обозначениями, принятыми на рисунке 30, имеем

$$r_0 = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} = \frac{bh}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{b d\rho}{\rho}} = \frac{bh}{b \ln(\rho) \Big|_{r_1}^{r_2}} = \frac{h}{\ln(r_2) - \ln(r_1)} = \frac{h}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Устойчивость деформируемого состояния тел. Устойчивость первого рода – нарушение устойчивости равновесия деформируемых тел, происходящее вследствие отклонений от формы равновесия, которые не могут быть вызваны действующей нагрузкой.

Устойчивость второго рода – нарушение устойчивости, происходящее вследствие того, что сопротивление деформированию с возрастанием нагрузки уменьшается или остается постоянным ввиду возникновения пластических деформаций.

Наиболее общий случай потери устойчивости первого рода для сжатых стержней любого профиля – изгибная форма устойчивости.

Рассмотрим прямолинейный стержень с шарнирно-закрепленными концами, показанный на рисунке 31, сжатый силой P .

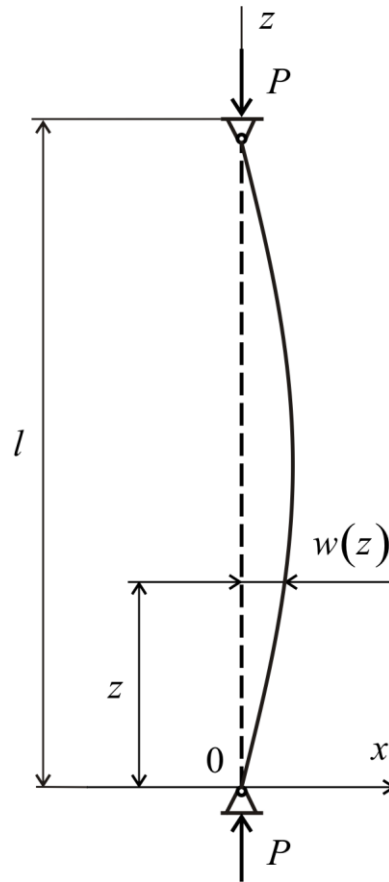


Рисунок 31 – Стержень с шарнирно-закрепленными концами

Отклонение от прямолинейно формы равновесия состоит в искривлении оси стержня. В этом случае для любого сечения имеем

$$M(z) = Pw(z). \quad (41)$$

На основании дифференциальной зависимости между прогибом и изгибающим моментом (J – момент инерции сечения относительно нейтральной оси)

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EJ},$$

или с учетом формулы (41)

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = -\frac{Pw(z)}{EJ}.$$

Обозначим

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Тогда

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \alpha^2 w(z) = 0.$$

Отсюда

$$w(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Из граничных условий имеем

$$\begin{aligned} w|_{z=0} &= C_1 = 0, \\ w|_{z=l} &= C_2 \sin(\alpha l) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\sin(\alpha l) = 0.$$

Это выражение описывает критическое состояние и позволяет найти критическую силу

$$\frac{Pl^2}{EJ} = \pi^2 k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Практический интерес представляет наименьшая критическая сила ($k = 1$):

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (42)$$

Формула (42) впервые получена Л. Эйлером, поэтому критическая сила P_{kr} называется также эйлеровой критической силой.

Поскольку вид уравнения оси искривленного стержня и граничные условия зависят от способа закрепления концов стержня, критическая сила также зависит от закрепления концов. Далее рассмотрим различные условия закрепления. В частности, стержень, заделанный одним концом, в соответствии с тем как это показано на рисунке 32.

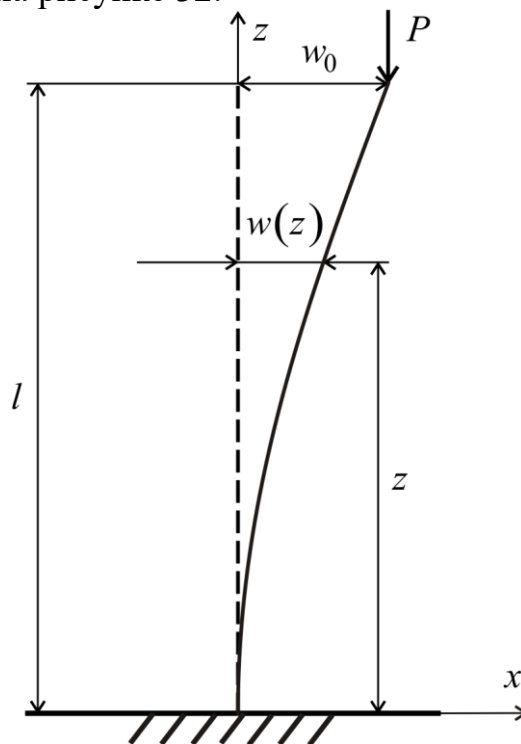


Рисунок 32 – Стержень, заделанный одним концом

В этом случае имеем

$$M(z) = P(w_0 - w(z)),$$

где w_0 – прогиб свободного конца стержня.

Тогда

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = \frac{P(w_0 - w(z))}{EJ},$$
$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \alpha^2 w(z) = \alpha^2 w_0.$$

Отсюда

$$w(z) = C_1 \cos(\alpha z) + C_2 \sin(\alpha z) + w_0.$$

Используем граничные условия

$$w|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0.$$

Тогда

$$C_1 + w_0 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, критическая сила определяется из уравнения

$$\cos(\alpha l) = 0,$$
$$\alpha l = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}.$$

Определение критической нагрузки для стержней с различными условиями закрепления концов. В случае, когда один конец стержня заделан, а другой шарнирно закреплен, как это показано на рисунке 33, имеем

$$M(z) = Pw(z) + R(l - z),$$

где R – реакция шарнира.

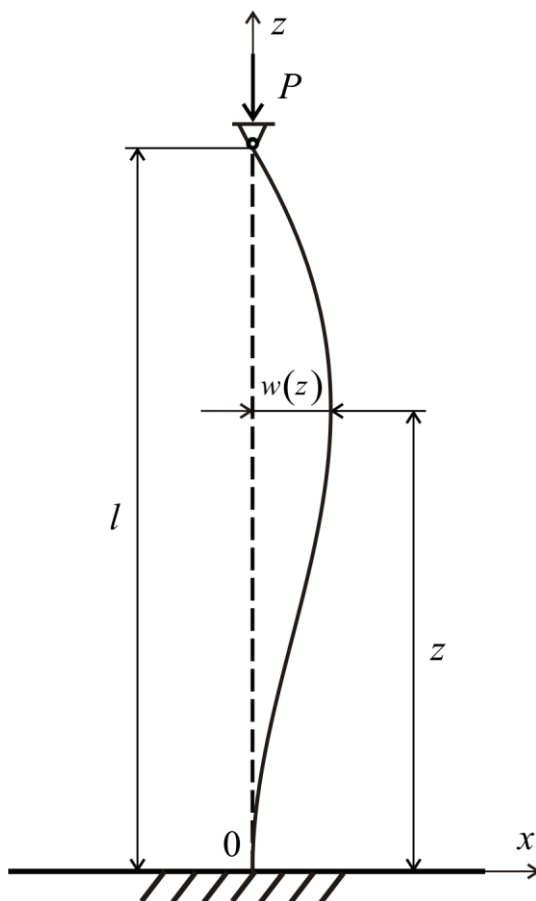


Рисунок 33 – Стержень, с одним шарнирно закрепленным и другим заделанным концом

Дифференциальная зависимость между прогибом и изгибающим моментом принимает вид

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = -\frac{Pw(z)}{EJ} - \frac{R(l-z)}{EJ},$$

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \alpha^2 w(z) = -\frac{R(l-z)}{EJ},$$

$$w(z) = C_1 \cos(\alpha z) + C_2 \sin(\alpha z) - \frac{R(l-z)}{P}.$$

Граничные условия имеют вид

$$w|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=l} = 0.$$

Отсюда получаем

$$C_1 - \frac{Rl}{P} = 0,$$

$$\alpha C_2 + \frac{R}{P} = 0,$$

$$C_1 \cos(\alpha l) + C_2 \sin(\alpha l) = 0.$$

Из первого и второго уравнений следует соответственно

$$C_1 = \frac{Rl}{P}, C_2 = -\frac{R}{\alpha P}.$$

Подставляя эти константы в третье уравнение будем иметь

$$\alpha l = \operatorname{tg}(\alpha l).$$

Наименьший положительный корень этого уравнения равен

$$\alpha l \approx 4,493.$$

Отсюда

$$P_{kr} = 20,19 \frac{EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{0,4888l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}.$$

В случае защемления двух концов стержня имеем

$$M(z) = Pw(z) + R(l - z) + M,$$

где R – опорная реакция, M – опорный момент.

Стержень с двумя заделанными концами показан на рисунке 34.

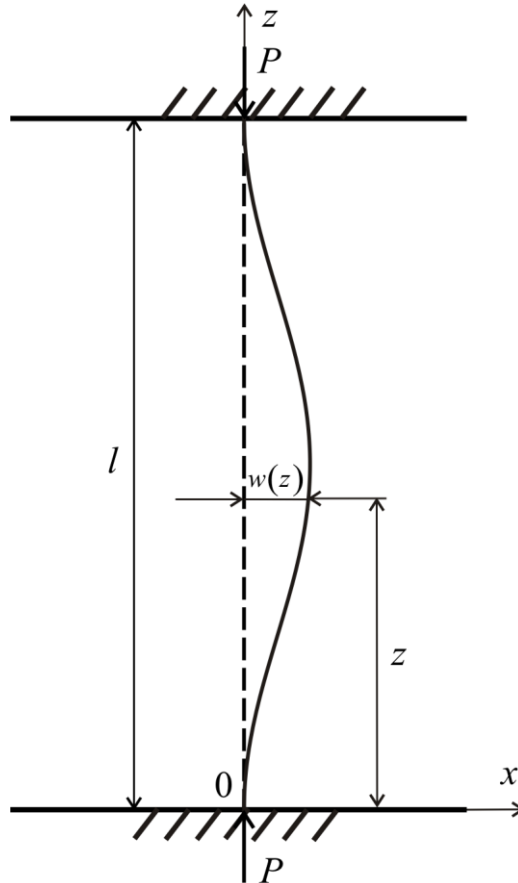


Рисунок 34 – Стержень с двумя заделанными концами

Дифференциальное уравнение относительно прогибов принимает вид

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \alpha^2 w(z) = -\frac{R(l - z)}{EJ} - \frac{M}{EJ},$$

$$w(z) = C_1 \cos(\alpha z) + C_2 \sin(\alpha z) - \frac{R(l-z)}{P} - \frac{M}{P}.$$

Граничные условия формулируются следующим образом

$$w|_{z=0} = 0, \left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, w|_{z=l} = 0, \left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=l} = 0.$$

Отсюда приходим к следующей системе уравнений

$$C_1 - \frac{Rl}{P} - \frac{M}{P} = 0,$$

$$\alpha C_2 + \frac{R}{P} = 0,$$

$$C_1 \cos(\alpha l) + C_2 \sin(\alpha l) - \frac{M}{P} = 0,$$

$$\alpha(C_2 \cos(\alpha l) - C_1 \sin(\alpha l)) + \frac{R}{P} = 0.$$

Выразим из первого и второго уравнений системы опорную реакцию и опорный момент и подставим в третье и четвертое уравнения

$$C_1 \cos(\alpha l) + C_2 \sin(\alpha l) - C_1 - \alpha l C_2 = 0,$$

$$C_1 \sin(\alpha l) - C_2 \cos(\alpha l) + C_2 = 0,$$

или

$$C_1(\cos(\alpha l) - 1) + C_2(\sin(\alpha l) - \alpha l) = 0,$$

$$C_1 \sin(\alpha l) + C_2(1 - \cos(\alpha l)) = 0.$$

Полученная система является системой линейных алгебраических однородных уравнений относительно неизвестных констант интегрирования C_1 , C_2 и имеет решение, если ее определитель, составленный из коэффициентов при этих константах равен нулю

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha l) - 1 & \sin(\alpha l) - \alpha l \\ \sin(\alpha l) & 1 - \cos(\alpha l) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$-1 + 2\cos(\alpha l) - \cos^2(\alpha l) - \sin^2(\alpha l) + \alpha l \sin(\alpha l) = 0,$$

$$2 - 2\cos(\alpha l) - \alpha l \sin(\alpha l) = 0,$$

$$4\sin^2\left(\frac{\alpha l}{2}\right) - 2\alpha l \sin\left(\frac{\alpha l}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha l}{2}\right) = 0,$$

$$\sin\left(\frac{\alpha l}{2}\right)\left(2\sin\left(\frac{\alpha l}{2}\right) - \alpha l \cos\left(\frac{\alpha l}{2}\right)\right) = 0.$$

Отсюда следует

$$\sin\left(\frac{\alpha l}{2}\right) = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha l}{2}\right) = \frac{\alpha l}{2}.$$

Наименьшими положительными корнями этих уравнений являются соответственно

$$\alpha l = 2\pi,$$

или

$$\alpha l = 8,986.$$

Окончательно для критической силы будем иметь

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}.$$

Таким образом, критическую силу в случае любого закрепления концов стержня можно определить по формуле (42), если в ней длину стержня заменить длиной полуволны синусоиды, по которой изгибается стержень при данном закреплении. Обозначим длину полуволны l_0 . Тогда $P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$.

В рассмотренных нами случаях имеем:

а) при шарнирном закреплении концов, показанном на рисунке $l_0 = l$,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (\text{количество длин полуволн показано на рисунке 35, а});$$

б) при заделке одного конца стержня $l_0 = 2l$, $P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$

(количество длин полуволн показано на рисунке 35, б);

в) при шарнирном закреплении одного конца стержня и защемлении другого конца $l_0 = 0,7l$, $P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}$ (количество длин полуволн показано на рисунке 35, в);

г) при заделке двух концов стержня $l_0 = 0,5l$, $P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}$

(количество длин полуволн показано на рисунке 35, г);

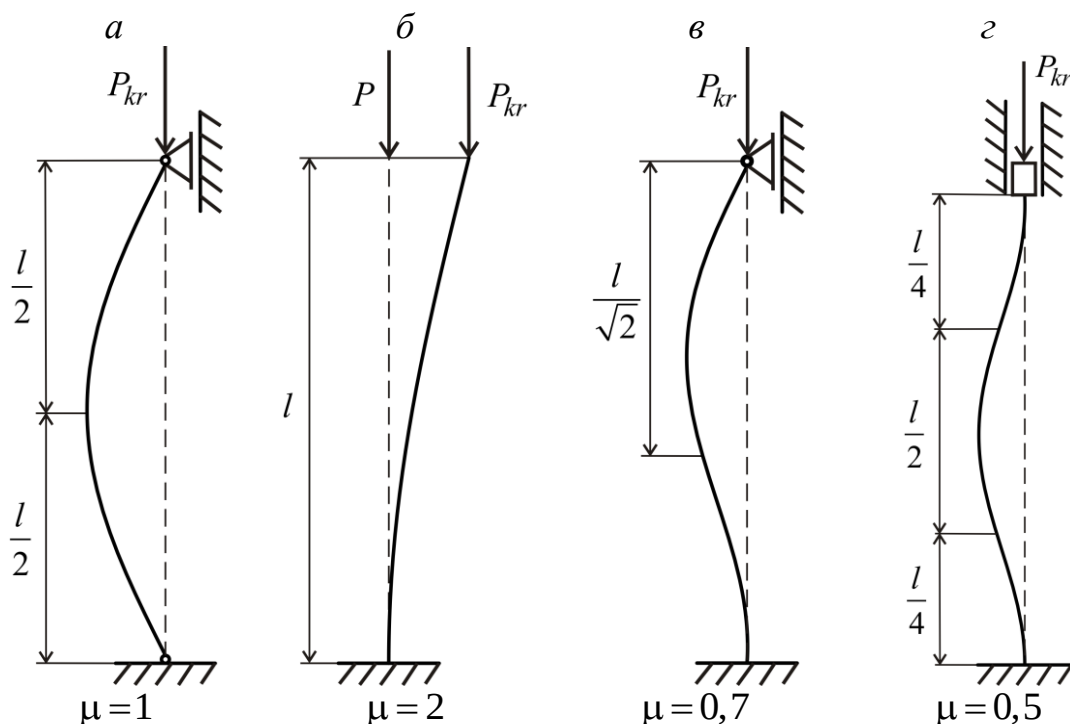


Рисунок 35 – Количество длин полуволн для стержней с различными закреплениями концов

Таким образом, формула Эйлера (42) для определения критической силы принимает вид:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (43)$$

где μ – коэффициент приведения длины.

Для шарнирно закрепленного стержня $\mu = 1$, для стержня с заделанными концами $\mu = 1/2$; для стержня с одним заделанным и другим свободным концом $\mu = 2$; для стержня с одним заделанным и другим шарнирно закрепленным концом $\mu = 0,7$.

Отметим, что по формуле (43) критическую силу следует вычислять по значению главного центрального момента инерции $I_{\min}$ (за исключением случаев, когда закрепления концов стержня в различных плоскостях различны).

Критические напряжения. Практические расчеты на устойчивость. Определим критическое сжимающее напряжение:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 F},$$

или

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2},$$

где $\lambda = \mu l / i$ – гибкость стержня, $i = \sqrt{J/F}$ – радиус инерции.

Напряжения σ_{kr} не должны превышать предел пропорциональности σ_{pr} :

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}.$$

Отсюда

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}.$$

Таким образом, $\lambda_{pr} \geq \pi \sqrt{E/\sigma_{pr}}$ является предельной гибкостью и соответствует наименьшему значению гибкости, при котором применима формула Эйлера.

Критические силы и критические напряжения для стержней, гибкость которых ниже предельной, определяются по эмпирическим формулам, в частности по формуле Ясинского:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda,$$

где a, b – экспериментально определяемые коэффициенты (для стали $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа). На рисунке 36 приведена зависимость напряжения σ_{kr} от гибкости λ для стали 3 (предел пропорциональности $\sigma_{pr} = 200$ МПа, предел текучести $\sigma_t = 240$ МПа).

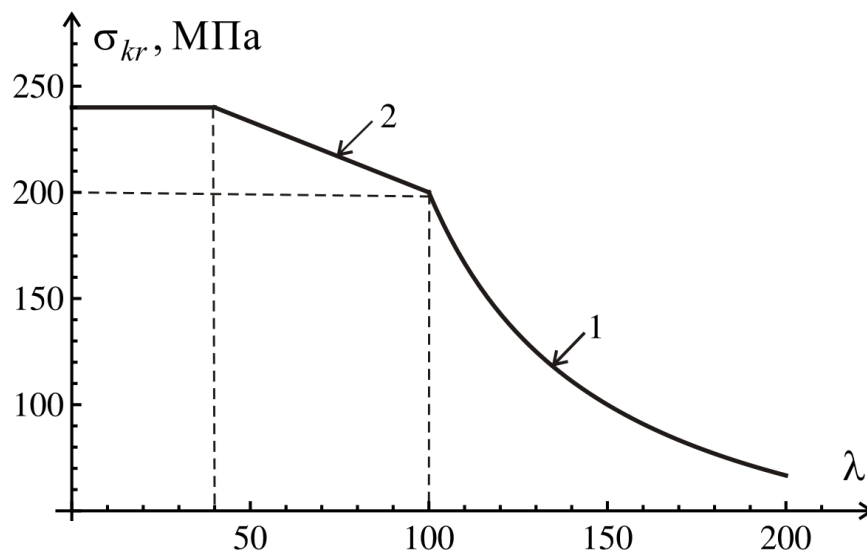


Рисунок 36 – Зависимость критических напряжений от гибкости для стали 3

При малой гибкости напряжения σ_{kr} считается постоянным и равным пределу текучести σ_t .

Для сжатых стержней, кроме условия прочности, должно быть выполнено условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_u],$$

где $[\sigma_u]$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость, которое принимается с запасом от критического напряжения

$$[\sigma_u] = \frac{\sigma_{kr}}{k_u},$$

k_u – коэффициент запаса устойчивости.

Выразим допускаемое напряжение $[\sigma_u]$ через допускаемое напряжение $[\sigma]$, принимаемое при расчетах на прочность

$$[\sigma_u] = \varphi[\sigma],$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней (коэффициент продольного изгиба), зависящий от материала стержня и его гибкости.

Рассмотрим последовательность расчета сжатых стержней на примере определения размеров прямоугольного поперечного сечения деревянной стойки, сжатой силой $P = 50$ Н ($h/b = 3$, $[\sigma] = 8$ МПа, $l = 3$ м). Один конец стойки заделан, другой свободен ($\mu = 2$). Схема нагружения показана на рисунке 37.

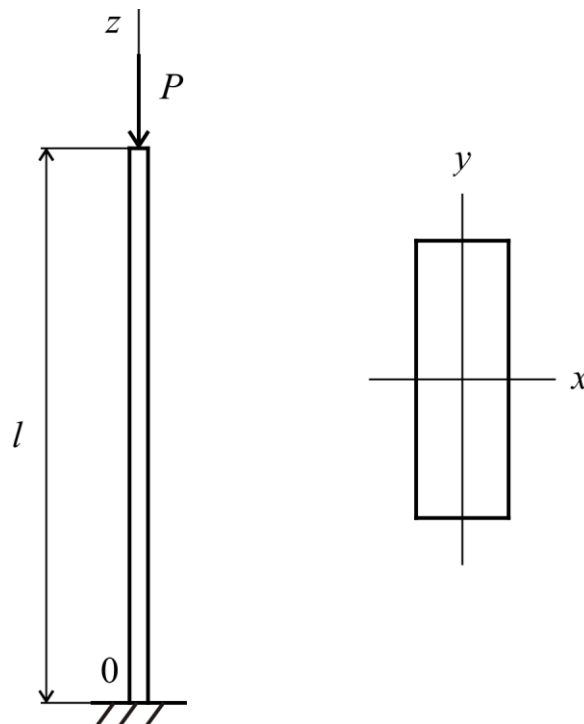


Рисунок 37 – Схема нагружения деревянной стойки

Опасной является потеря устойчивости в плоскости xOz , поскольку в этой плоскости $J = J_{\min} = J_y = \frac{hb^3}{12}$. При изгибе в этой плоскости гибкость имеет наибольшее значение:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{hb^3}{12F}}} = \frac{\mu l \sqrt{12}}{b} = \frac{20,8}{b}.$$

В первом приближении принимаем произвольное значение коэффициента продольного изгиба $\varphi = 0,5$. Тогда

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{50000}{0,5 \cdot 8 \cdot 10^6} = 0,0125 \text{ м}^2 = 125 \text{ см}^2.$$

Отсюда

$$b = \sqrt{\frac{125}{3}} \approx 6,45 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{20,8}{0,0645} \approx 322.$$

Из таблицы, связывающей коэффициент продольного изгиба и гибкость, что при $\lambda = 322$ коэффициент $\varphi < 0,08$, значит выбранное значение φ сильно завышено.

Во втором приближении принимаем $\varphi = 0,1$. Тогда

$$F = \frac{50000}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^6} = 0,0625 \text{ м}^2 = 625 \text{ см}^2.$$

$$b = \sqrt{\frac{625}{3}} \approx 14,4 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{20,8}{0,144} \approx 144.$$

При $\lambda = 144$ получаем $\varphi = 0,152$, значит, значение $\varphi = 0,1$ является заниженным.

В третьем приближении принимаем $\varphi = \frac{0,1 + 0,152}{2} \approx 0,13$. Тогда

$$F = \frac{50000}{0,13 \cdot 8 \cdot 10^6} = 0,0481 \text{ м}^2 = 481 \text{ см}^2.$$

$$b = \sqrt{\frac{481}{3}} \approx 12,7 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{20,8}{0,127} \approx 164.$$

При $\lambda = 164$ получаем $\varphi = 0,117$.

В четвертом приближении принимаем $\varphi = \frac{0,117 + 0,13}{2} \approx 0,124$. Тогда

$$F = \frac{50000}{0,124 \cdot 8 \cdot 10^6} = 0,0504 \text{ м}^2 = 504 \text{ см}^2.$$

$$b = \sqrt{\frac{504}{3}} \approx 13,0 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{20,8}{0,13} \approx 160.$$

При $\lambda = 160$ получаем значение $\varphi = 0,12$.

В пятом приближении принимаем $\varphi = \frac{0,124 + 0,12}{2} \approx 0,122$. Тогда

$$F = \frac{50000}{0,122 \cdot 8 \cdot 10^6} = 0,0512 \text{ м}^2 = 512 \text{ см}^2.$$

$$b = \sqrt{\frac{512}{3}} \approx 13,07 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{20,8}{0,1307} \approx 159.$$

При $\lambda = 159$ получаем значение $\varphi = 0,122$, совпадающее с коэффициентом φ , принятым в данном приближении. Окончательно принимаем $b = 13,07 \text{ см}$, $b = 39,21 \text{ см}$. Напряжения в поперечном сечении стойки

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{50000}{0,1307 \cdot 0,3921} \approx 0,976 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение $[\sigma_u] = \varphi[\sigma] \approx 0,976 \text{ МПа}$. Таким образом, условие устойчивости выполняется.

Динамические нагрузки и динамические напряжения. Динамические нагрузки – нагрузки, вызывающие появление сил инерции в результате деформаций или движения элементов системы.

Расчет на динамические нагрузки выполняется при проектировании конструкций, находящихся под действием ударной или вибрационной нагрузки.

Ударной называется нагрузка, которая характеризуется изменением скорости тела, которое наносит удар, в течении малого промежутка времени (удар предполагается неупругим).

Приближенная теория удара основывается на том, что эпюра перемещений, системы от груза P при ударе в любой момент времени подобна эпюре перемещений, возникающих от статического действия этого же груза. В этом случае

$$\frac{\Delta_z}{(\Delta_z)_{\text{ст}}} = \frac{\Delta}{\Delta_{\text{ст}}} = k_d,$$

где Δ_z , Δ – динамические прогибы от удара грузом P в сечениях балки z и в месте падения груза; $(\Delta_z)_{\text{ст}}$, $\Delta_{\text{ст}}$ – статические прогибы от силы P в тех же сечениях; k_d – динамический коэффициент.

Рассмотрим расчет на удар в случаях, когда масса упругого тела, подвергающегося удару, очень мала. Пусть Δ – наибольшее перемещение системы по направлению груза P . Тогда

$$P(h + \Delta) = U,$$

где h – высота падения груза; U – потенциальная энергия системы.

Определим потенциальную энергию системы как работу, совершенную статически приложенной силой Pk_d :

$$U = \frac{1}{2} \cdot Pk_d \cdot \Delta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(h + \Delta) &= \frac{1}{2} \cdot Pk_d \cdot \Delta, \\ 2(h + \Delta) &= \Delta k_d. \end{aligned}$$

Поскольку $k_d = \frac{\Delta}{\Delta_{\text{ст}}}$, получим

$$\begin{aligned} 2(h + k_d \Delta_{\text{ст}}) &= k_d^2 \Delta_{\text{ст}}, \\ k_d^2 - 2k_d &= \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}, \\ (k_d - 1)^2 &= \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}} + 1, \\ k_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}. \end{aligned}$$

Выразим высоту падения груза через его скорость v в момент удара (g – ускорение свободного падения):

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Тогда

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (44)$$

где $\Delta_{\text{ст}}$ – перемещение от статически действующей силы P в точке ее приложения.

Динамические напряжения определяются следующим образом

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\text{ст}}, \quad (45)$$

где $\sigma_{\text{ст}}$ – напряжения от статически действующей силы P .

Рассмотрим два случая ударного действия силы P .

1. Продольный удар, вызывающий деформацию сжатия бруса постоянного поперечного сечения F (l – длина бруса, E – модуль упругости материала, из которого изготовлен брус, l – длина бруса). В этом случае $\Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl}{EF}$. Тогда на

основании формул (44) и (45) получим $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2 EF}{gPl}}$,

$$\sigma_d = -\frac{P}{F} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2 EF}{gPl}} \right).$$

2. Изгибающий удар грузом P , падающим с высоты h на середину шарнирно закрепленной балки длиной l . Поскольку в этом случае $\Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EJ}$,

динамический коэффициент $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96hEJ}{Pl^3}}$. Наибольшие динамические напряжения в точках поперечного сечения балки следует определяются максимальным изгибающим моментом $M = \frac{Pl}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96hEJ}{Pl^3}} \right)$.

Рассмотрим расчет на удар с учетом массы упругой системы, подвергающейся удару, в случае, когда система обладает сосредоточенной массой Q/g (Q – вес системы), расположенной в месте падения груза P . При этом будем различать три характерных момента:

1. Момент, предшествующий соприкосновению груза P с упругой системой, когда скорость груза P равна v , а скорость груза Q равна нулю.
2. Момент соприкосновения груза P с системой; скорость s груза P равна скорости движения упругой системы в месте удара.
3. Момент, когда упругая система получает наибольшее перемещение, а скорости груза P и упругой системы равны нулю.

Моменту времени, в который система получает наибольшее перемещение Δ в месте падения груза P , вызванное его ударным действием и силой Q , соответствует наибольшее значение потенциальной энергии системы

$$U = \frac{Q\Delta_1}{2} + \frac{(P+Q)c^2}{2g} + (P+Q)\Delta_2, \quad (46)$$

где $\frac{Q\Delta_1}{2}$ – потенциальная энергия системы до удара; $\frac{(P+Q)c^2}{2g}$ – кинетическая энергия груза и системы в момент их соприкосновения; $(P+Q)\Delta_2$ – работа сил P и Q при перемещении Δ_2 системы после удара.

Перемещения Δ_1 и Δ_2 обозначены на рисунке 38.

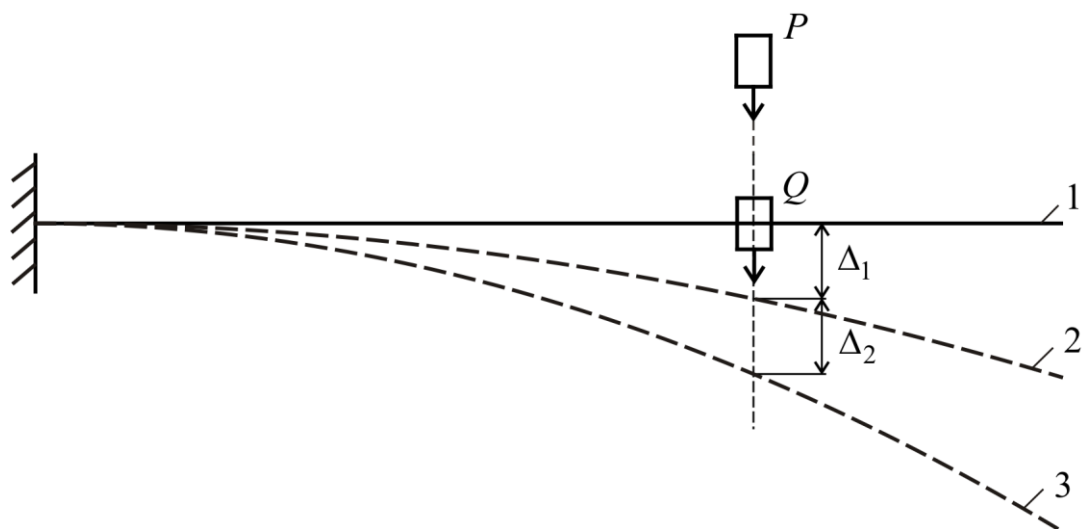


Рисунок 38 – Перемещения упругой системы:
 1 – положение упругой системы без сосредоточенной массы;
 2 – эпюра вертикальных перемещений от сосредоточенной силы Q ;
 3 – эпюра вертикальных перемещений при ударе

Будем считать, что грузы P и Q действуют на систему с наибольшей силой, равной $Pk_d + Q$. Тогда потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2}(Pk_d + Q)\Delta, \quad (47)$$

где $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, k_d – динамический коэффициент, учитывающий инерцию грузов P и Q .

Приравняем выражения (46) и (47). Одновременно в формулу (46) подставим скорость c , определенную по закону сохранения количества движения следующим образом

$$\frac{Pv}{g} = \frac{(P+Q)c}{g},$$

$$c = \frac{Pv}{P+Q}.$$

В результате будем иметь

$$Q\Delta_1 + \frac{P^2c^2}{g(P+Q)} + 2(P+Q)\Delta_2 = (Pk_d + Q)\Delta. \quad (48)$$

Пусть $\Delta_{ст}$ – прогиб системы от статического действия груза P . Тогда

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_{ст}} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_{ст}} = \frac{Pk_d}{P} = k_d.$$

Отсюда

$$\Delta_1 = \frac{Q\Delta_{ст}}{P}, \quad \Delta_2 = k_d\Delta_{ст}, \quad \Delta = \left(\frac{Q}{P} + k_d\right)\Delta_{ст}. \quad (49)$$

Подставим перемещения (49) в выражение (48):

$$\frac{Q^2}{P} \Delta_{\text{ст}} + \frac{P^2 v^2}{g(P+Q)} + 2(P+Q)k_{\text{д}} \Delta_{\text{ст}} = (Pk_{\text{д}} + Q) \left(\frac{Q}{P} + k_{\text{д}} \right) \Delta_{\text{ст}},$$

$$P \Delta_{\text{ст}} k_{\text{д}}^2 - 2P \Delta_{\text{ст}} k_{\text{д}} = \frac{P^2 v^2}{g(P+Q)},$$

$$k_{\text{д}}^2 - 2k_{\text{д}} = \frac{Pv^2}{g \Delta_{\text{ст}} (P+Q)},$$

$$k_{\text{д}}^2 - 2k_{\text{д}} + 1 = 1 + \frac{Pv^2}{g \Delta_{\text{ст}} (P+Q)},$$

$$(k_{\text{д}} - 1)^2 = 1 + \frac{Pv^2}{g \Delta_{\text{ст}} (P+Q)},$$

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{Pv^2}{g \Delta_{\text{ст}} (P+Q)}},$$

или

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \Delta_{\text{ст}} \left(1 + \frac{Q}{P} \right)}}. \quad (50)$$

Определим наибольшие напряжения с учетом массы системы, подвергающейся удару:

$$\sigma_{\text{max}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}}^{(P)} + \sigma_{\text{ст}}^{(Q)}, \quad (51)$$

где $\sigma_{\text{ст}}^{(P)}$, $\sigma_{\text{ст}}^{(Q)}$ – напряжения от действия статических нагрузок P и Q .

Рассмотрим удар по упругой системе с распределенной массой. Найдем кинетическую энергию движения элемента системы массой $\frac{dQ}{g}$ после удара:

$$W = \int_Q \frac{c_x^2}{2g} dQ.$$

Заменим систему с распределенной массой, системой с приведенной массой $\beta \frac{Q}{g}$, сосредоточенной в месте удара (β – коэффициент приведения). Из

условия равенства кинетических энергий двух систем найдем

$$\int_Q \frac{c_x^2}{2g} dQ = \beta \frac{Q}{2g} c^2,$$

$$\beta = \frac{Q}{Qc^2},$$

или

$$\beta = \frac{1}{Q} \int_Q \left(\frac{(\Delta_z)_{\text{ст}}}{\Delta_{\text{ст}}} \right)^2 dQ,$$

где $(\Delta_z)_{\text{ст}}$ – перемещение элементарной массы от статического действия силы P , $\Delta_{\text{ст}}$ – перемещение точки под грузом P от его статического действия.

Динамический коэффициент примет вид

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \Delta_{\text{ст}} \left(1 + \frac{\beta Q}{P} \right)}}. \quad (52)$$

Максимальные напряжения при ударе по системе с распределенной массой определяются в соответствии с формулой (51).

Найдем коэффициент β для двух следующих частных случаев.

1. Продольный удар, вызывающий сжатие бруса постоянного поперечного сечения F , показанного на рисунке 39. В этом случае (перемещения $(\Delta_z)_{\text{ст}}$ и $\Delta_{\text{ст}}$ также обозначены на рисунке 39)

$$(\Delta_z)_{\text{ст}} = \frac{Pz}{EF}, \quad \Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl}{EF},$$

$$dQ = \rho F dz, \quad Q = \rho Fl,$$

где ρ – плотность материала бруса. Тогда

$$\beta = \frac{1}{\rho Fl} \int_Q \left(\frac{z}{l} \right)^2 \rho F dz = \frac{1}{l^3} \int_Q z^2 dz = \frac{1}{3}.$$

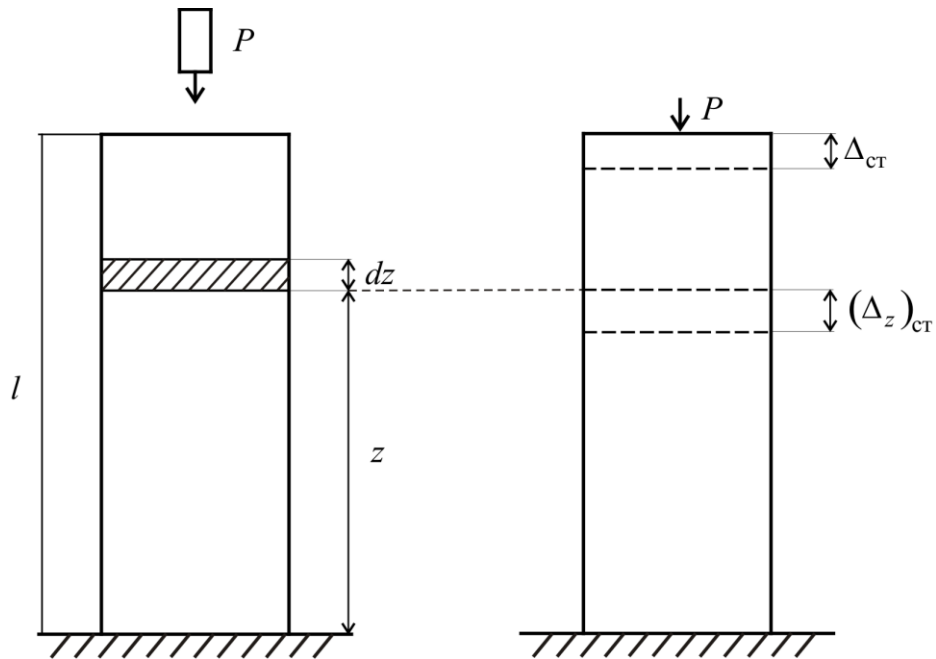


Рисунок 39 – Продольный удар

2. Изгибающий удар грузом P посередине шарнирно закрепленной балки длиной l , показанной на рисунке 40.

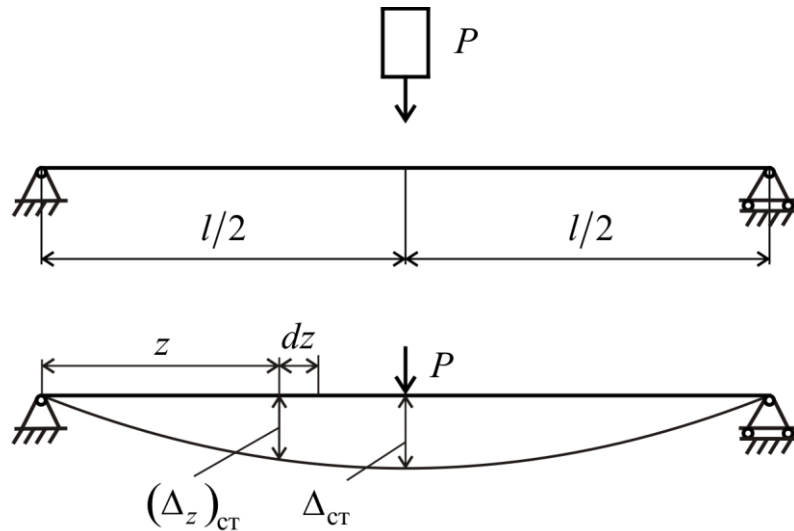


Рисунок 40 – Изгибающий удар

В соответствии с обозначениями, принятыми на рисунке 40, имеем

$$(\Delta_z)_{\text{ст}} = \frac{Pz}{EJ} \left(\frac{l^2}{16} - \frac{z^2}{12} \right), \quad \Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EJ},$$

$$dQ = \frac{Qdz}{l}.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{1}{Q_0} \int_0^l \frac{z^2}{l^6} (3l^2 - 4z^2)^2 \frac{Q}{l} dz = \frac{17}{35}.$$

Также в качестве примера рассмотрим вычисление наибольших нормальных напряжений в поперечном сечении шарнирно закрепленной балки (двутавр № 20), на середину которой с высоты $h = 0,04$ м падает груз $P = 4$ кН, без учета и с учетом собственного веса балки. Длина балки $l = 2$ м, модуль упругости $E = 200$ ГПа, осевой момент инерции $J = 2370$ см⁴, осевой момент сопротивления $W = 237$ см³, вес погонного метра $\rho = 280$ Н/м. Расчетная схема задачи показана на рисунке 41.

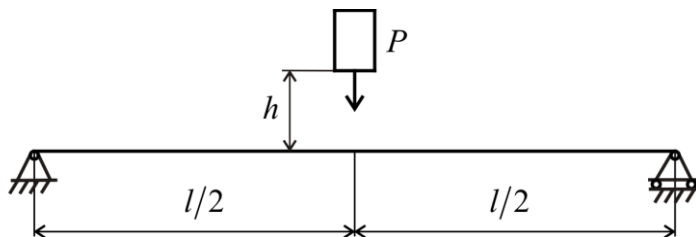


Рисунок 40 – Удар по шарнирно закрепленной балке

Прогиб середина балки

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EJ} \approx 0,0141 \text{ см.}$$

Без учета собственного веса находим

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4}{0,0141}} \approx 24,8.$$

В соответствии со схемой нагружения

$$M_{\text{max}} = \frac{Pl}{4}.$$

Тогда максимальные напряжения от статического действия груза P :

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} = \frac{Pl}{4W} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 2}{4 \cdot 237 \cdot 10^{-6}} \approx 8,45 \text{ МПа.}$$

Отсюда

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\text{ст}} = 24,8 \cdot 8,45 = 209,56 \text{ МПа.}$$

С учетом собственного веса находим

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}} \left(1 + \beta \frac{Q}{P} \right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4}{0,0141 \left(1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{560}{4000} \right)}} \approx 24,1,$$

где $Q = \rho \cdot l = 280 \cdot 2 = 560 \text{ Н}$ – вес балки.

Найдем динамические напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_d &= k_d \sigma_{\text{ст}}^{(P)} + \sigma_{\text{ст}}^{(Q)} = k_d \cdot \frac{M_{\text{max}}}{W} + \frac{ql^2}{8W} = \frac{k_d Pl}{W} + \frac{ql^2}{8W} = \\ &= \frac{24,1 \cdot 4000 \cdot 2}{4 \cdot 237 \cdot 10^{-6}} + \frac{280 \cdot 2^2}{8 \cdot 237 \cdot 10^{-6}} \approx (203,4 + 0,6) \cdot 10^6 = 204 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

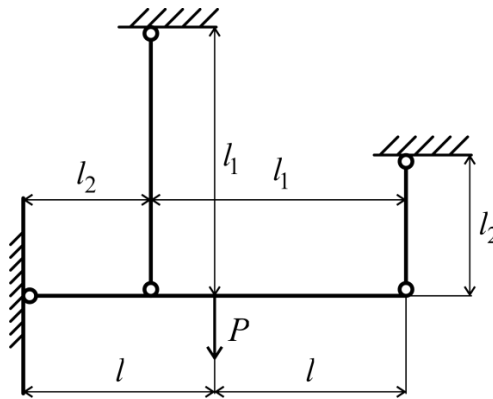
Как следует из последнего расчета, влияние собственного веса несущественно.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

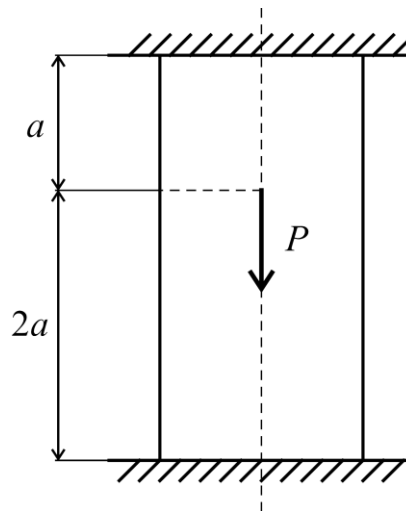
2.1. Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Напряженное состояние тел.

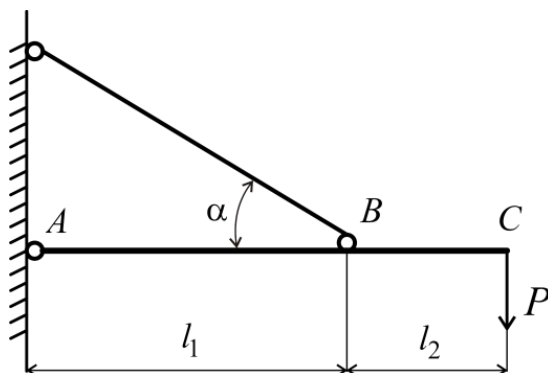
1. Абсолютно жесткий брус AC , нагруженный силой $P = 300$ кН, шарнирно закреплен в точке A и подвешен на двух стальных стержнях с сечениями $F_1 = 5$ см², $F_2 = 10$ см². Длины стержней $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м, $l = 1,5$ м, модуль упругости стержня $E = 210$ ГПа. Найти напряжения в стержнях.



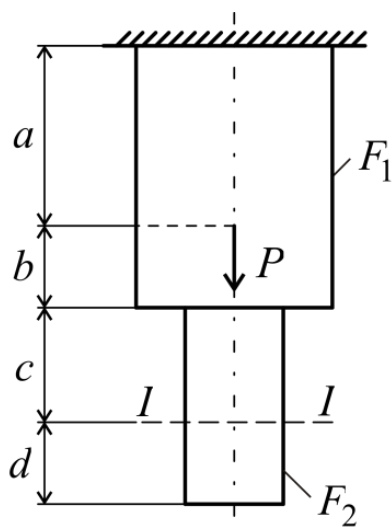
2. Стальной стержень постоянного поперечного сечения, защемленный обоими концами, нагружен силой $P = 30$ кН. Площадь поперечного сечения стержня $F = 20$ см². Построить эпюры продольных сил и перемещений. Модуль упругости $E = 200$ ГПа, $a = 5$ см.



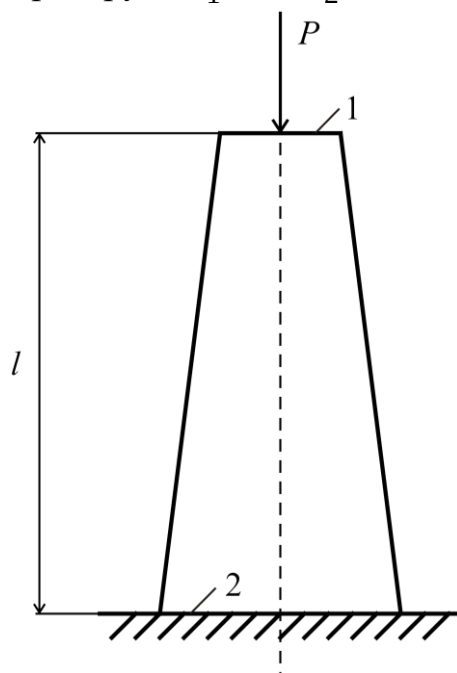
3. Абсолютно жесткий брус AC прикреплен в точке A к неподвижному шарниру, а в точке B поддерживается стальной тягой BD , имеющей площадь сечения F . К концу C бруса приложена сила P . Определить вертикальное перемещение точки C .



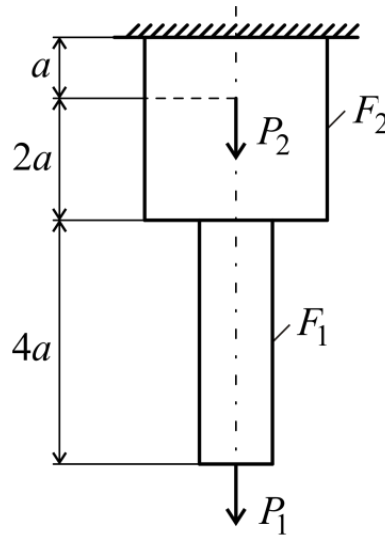
4. Стальной стержень ($E = 200$ ГПа, $\rho = 7800$ кг/м³) находится под действием силы $P = 2$ кН и собственного веса. Найти перемещение сечения $I-I$, если $F_1 = 20$ см², $F_2 = 10$ см², $a = 200$ см, $b = 100$ см, $c = 150$ см и $d = 120$ см.



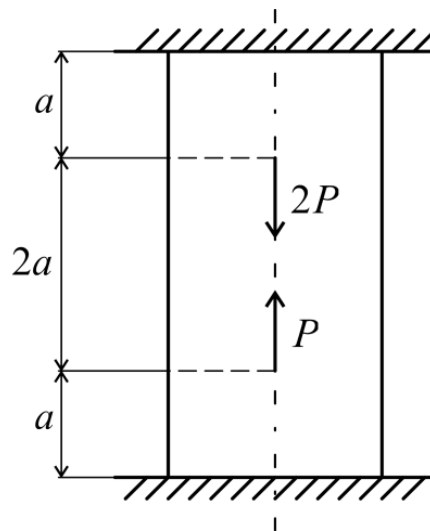
5. Определить перемещение верхнего конца стального бруса, имеющего форму усеченного конуса и нагруженного силой $P = 50$ кН. Модуль упругости $E = 200$ ГПа, линейные размеры бруса $d_1 = 2$, $d_2 = 10$, $l = 50$ см.



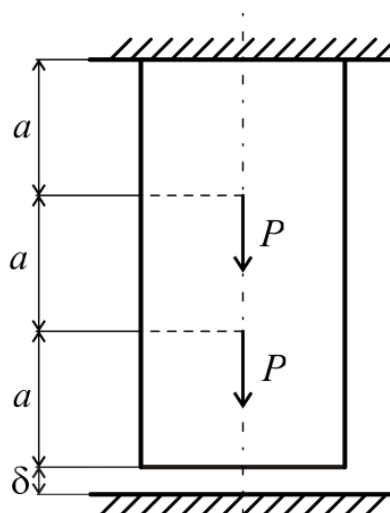
6. Для стального бруса построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса и перемещений этих сечений. Задачу решить без учета собственного веса. Принять $E = 200$ ГПа, $a = 50$ см, $P_1 = 20$ кН, $P_2 = 40$ кН, $F_1 = 2$ см², $F_2 = 5$ см².



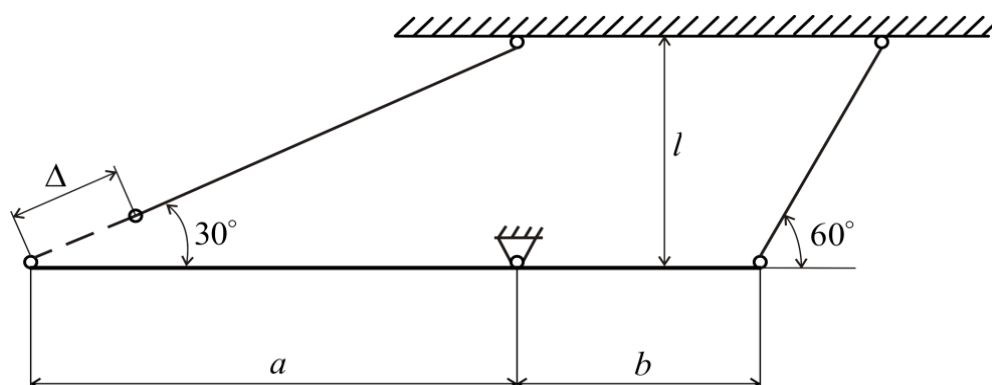
7. Стержень постоянного поперечного сечения (площадь сечения F), зажатый обоими концами, нагружен силами $P_1 = P$ и $P_2 = 2P$. Построить эпюры продольных сил и перемещений.



8. Определить напряжения в сечениях стержня, показанного на рисунке. Плоскости A и B абсолютно неподатливы. Принять $a = 0,5$ м, $F = 100$ см², $P = 1,5$ МН, $\delta = 0,1$ мм, $E = 200$ ГПа. Зазор δ имеет указанный размер до приложения нагрузки P . После ее приложения он закрывается.

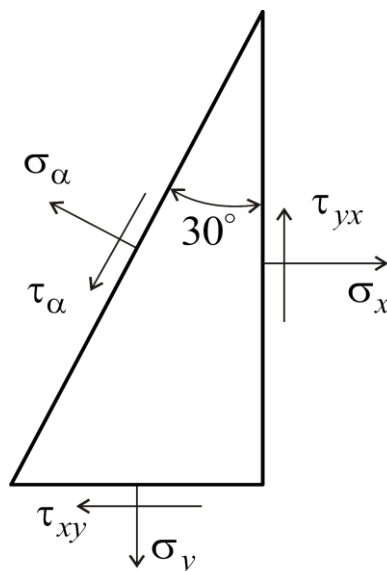


9. Жесткий брус, изображенный на рисунке, прикреплен к фундаменту при помощи шарнира C и двух стальных тяг одинакового поперечного сечения. Левая тяга выполнена короче проектного размера на величину $\Delta = 5$ мм. Определить напряжения в тягах после сборки конструкции. Геометрические размеры конструкции $a = 3$ м, $b = 1$ м и $l = 2$ м.

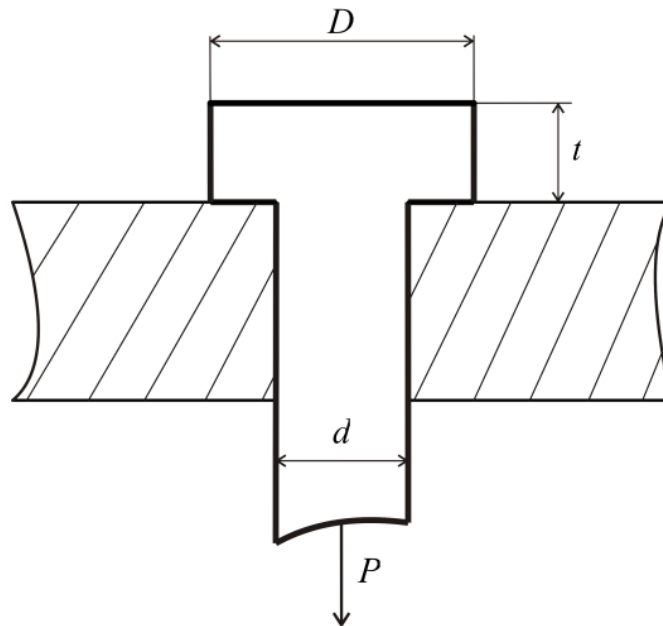


Напряжения и деформации при плоском напряженном состоянии.

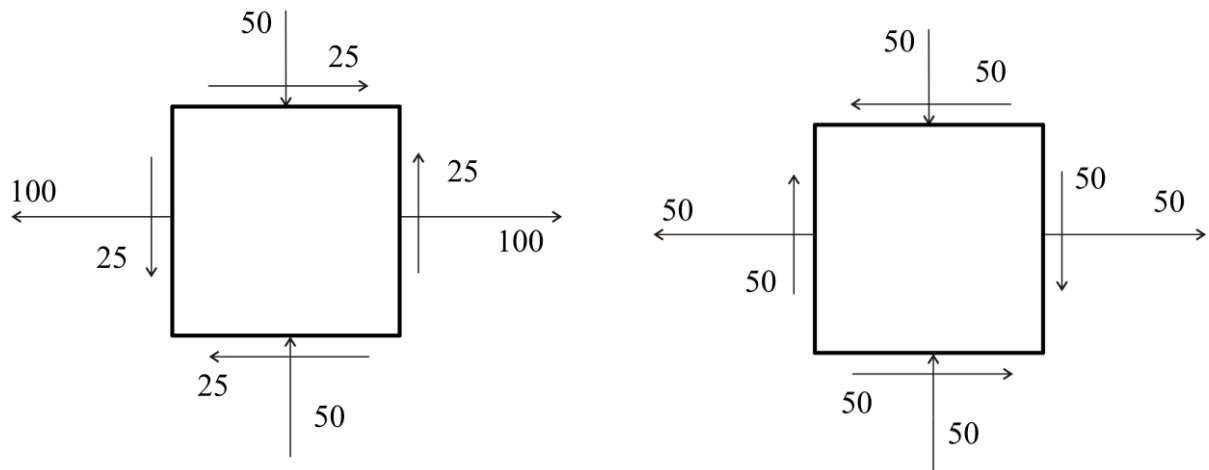
1. Для напряженного состояния, изображенного на рисунке, определить напряжения σ_x и σ_y . Напряжения $\sigma_\alpha = 40,9$, $\tau_\alpha = -77,5$, $\tau_{xy} = -\tau_{yx} = 25$ МПа.



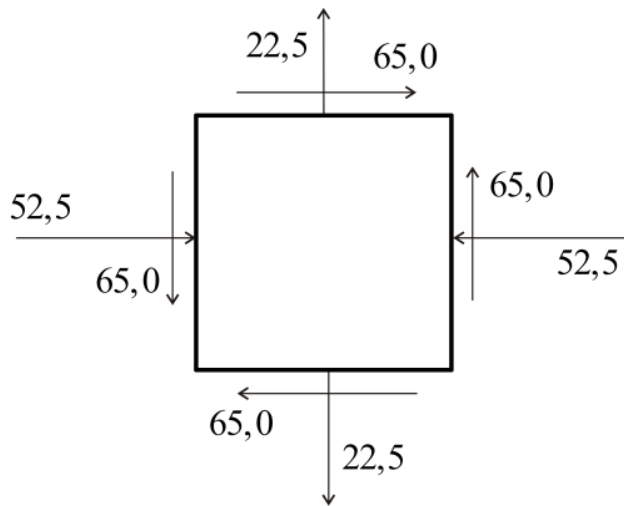
2. Болт диаметром $d = 10$ см, работающий на растяжение, опирается головкой на лист. Определить диаметр головки D и ее высоту t , если растягивающие напряжения в сечении болта 100 МПа, напряжения смятия по площади опирания головки 40 МПа, напряжения среза головки 50 МПа.



3. Установить в каких случаях плоского напряженного состояния, из показанных на рисунке, имеется чистый сдвиг. Определить для этих случаев напряжения $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$, $\tau_{\max}$ и $\tau_{\min}$, положения главных площадок и площадок чистого сдвига. Значения напряжений на схеме сформулированы в МПа.



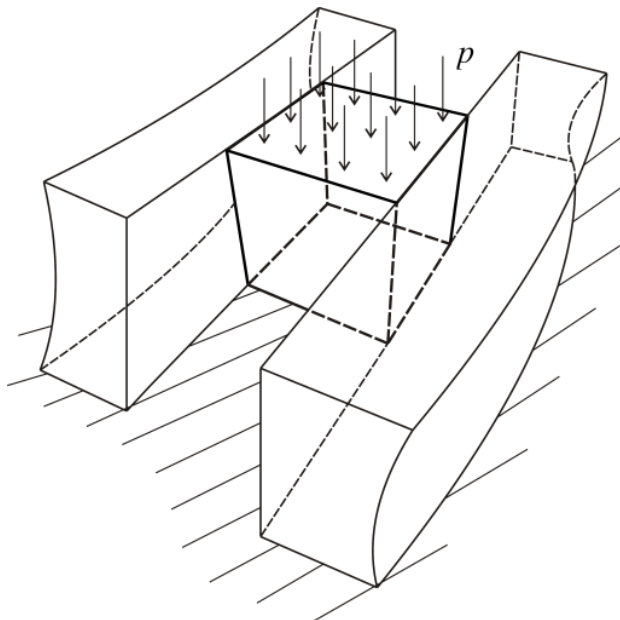
4. Для напряженного состояния, изображенного на рисунке, найти главные нормальные и наибольшие касательные напряжения, а также определить положения площадок, по которым эти напряжения действуют (значения напряжений приведены в МПа).



Объемное напряженное состояние.

1. В толстой плите, деформацией которой пренебрегаем, высверлено на некоторую глубину цилиндрическое гнездо диаметром 2 см, в которое плотно, без зазоров, вставлен стальной цилиндрический стержень ($E = 210$ ГПа). Затем этот стержень нагружается сжимающей силой 20 кН. Определить три главных напряжения в стержне.

2. Стальной кубик, вставленный без зазоров между жесткими стенками и опирающийся нижней гранью на неподвижное основание, сжимается нагрузкой p (МПа). Коэффициент Пуассона $\mu = 0.30$. Вычислить напряжения по боковым граням и деформации ребер кубика, пренебрегая трением кубика о жесткие стенки.



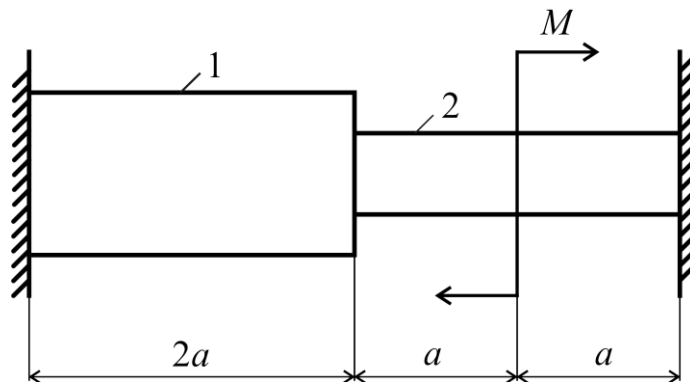
Напряжения и деформации при кручении.

1. Вал диаметром 9 см передает мощность 67,5 кВт. Определить предельное число оборотов вала, если допускаемое касательное напряжение составляет 60 МПа.

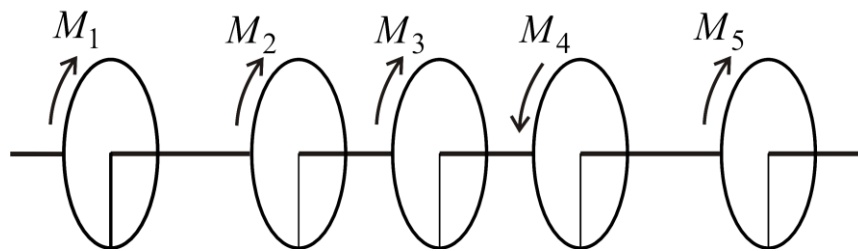
2. Определить диаметр сплошного стального вала круглого поперечного сечения, передающего крутящий момент 16 кНм, если допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau] = 80$ МПа, допустимый угол закручивания $[\varphi] = 0,6^\circ$ на один метр длины вала. Модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Кручение брусьев круглого поперечного сечения.

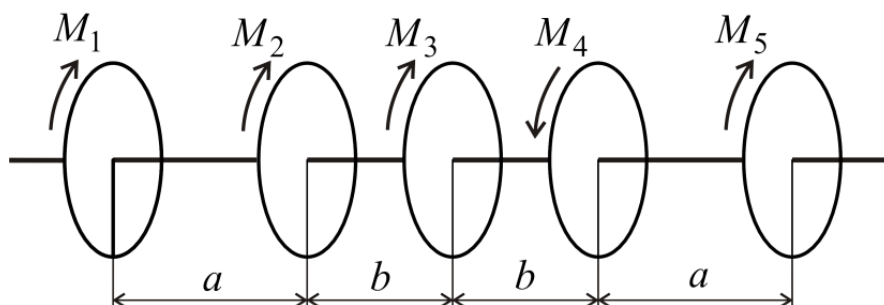
1. Построить эпюру крутящих моментов и углов поворота для круглого бруса ступенчато-переменного сечения жестко закрепленного по концам, при действии на него скручивающего момента $M = 2$ кН·м, модуль сдвига $G = 80$ ГПа, $a = 50$, $d_1 = 10$, $d_2 = 6$ см.



2. На стальной вал через 5 шкивов действуют пары сил, показанные на рисунке. Построить эпюру крутящего момента и подобрать диаметр вала при $[\tau] = 90$ МПа. Крутящие моменты $M_1 = 1$, $M_2 = M_5 = 2$, $M_3 = 3$, $M_4 = 8$ кН·м. Модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

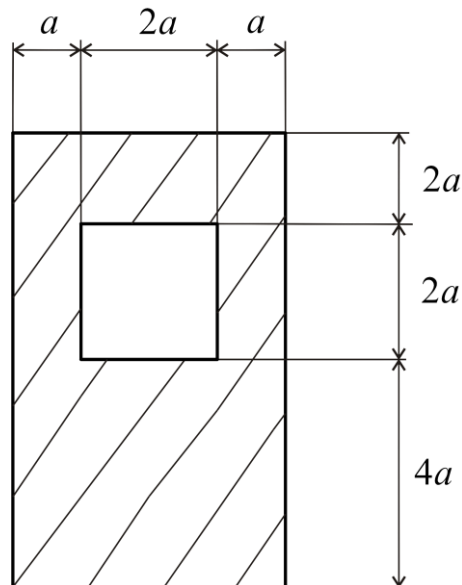


3. На стальной вал через пять шкивов действуют пары сил, показанные на рисунке ($M_1 = 1$, $M_2 = M_5 = 2$, $M_3 = 3$, $M_4 = 8$ кН·м, $a = 120$ мм, $b = 90$ мм, $E = 210$ ГПа). Определить величину угла поворота правого концевого сечения вала по отношению к левому.

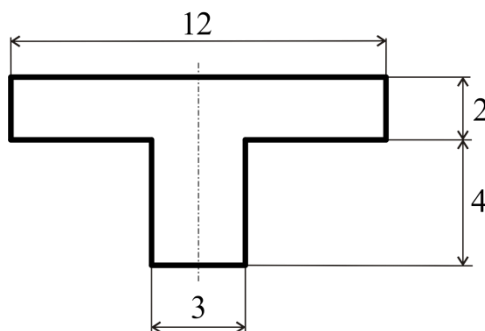


Геометрические характеристики плоских сечений.

1. Вычислить моменты сопротивления трубчатого прямоугольного сечения относительно центральных осей.

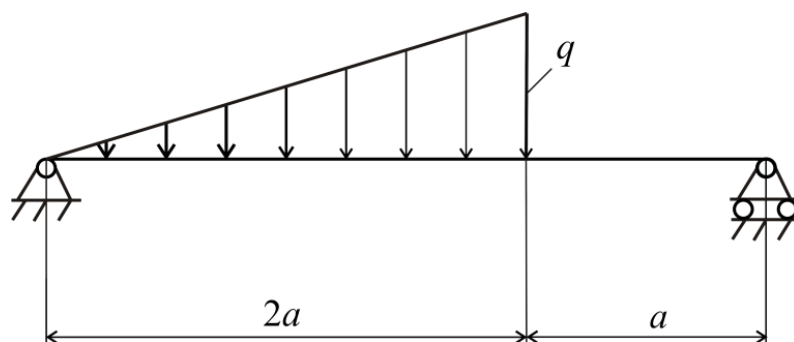


2. Определить величины главных центральных моментов инерции для таврового сечения, изображенного на рисунке (геометрические размеры сформулированы в см).

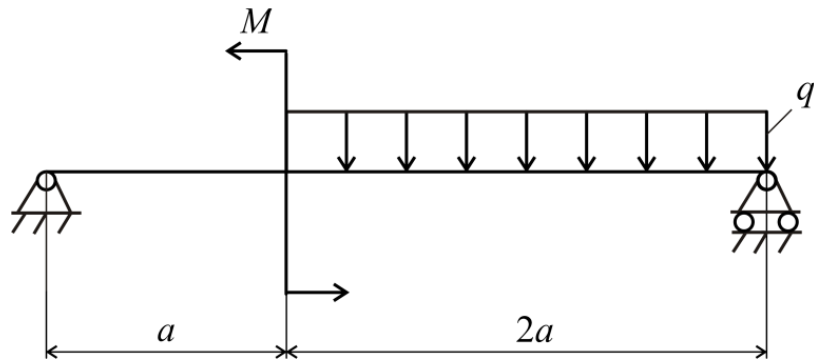


Изгиб прямого бруса.

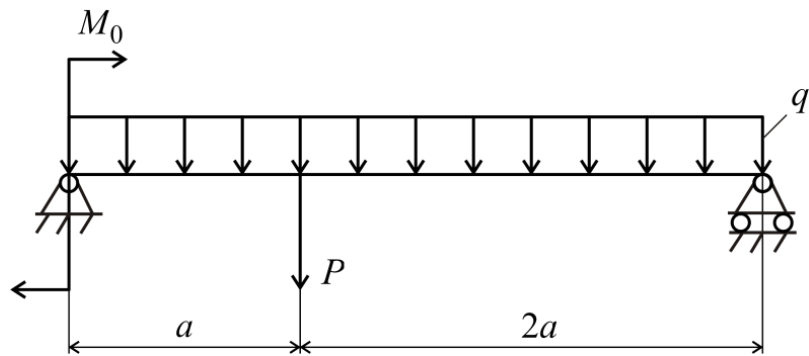
1. Построить эпюры Q и M для балки на двух опорах пролетом $l = 3a$, несущей нагрузку, распределенную по длине $2a$ по закону треугольника.



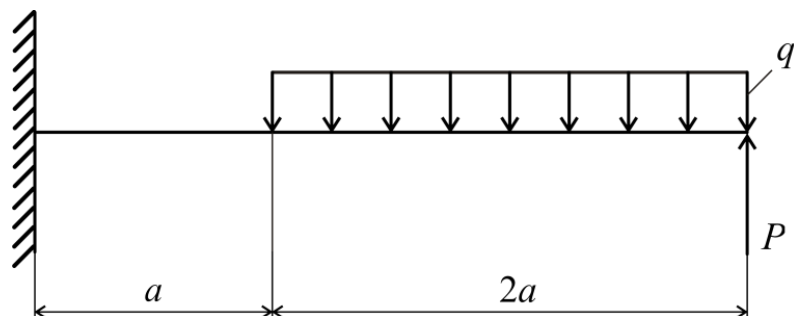
2. Для шарнирно опертой по концам балки, нагруженной, как показано на рисунке, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. При построении принять $M = qa^2$.



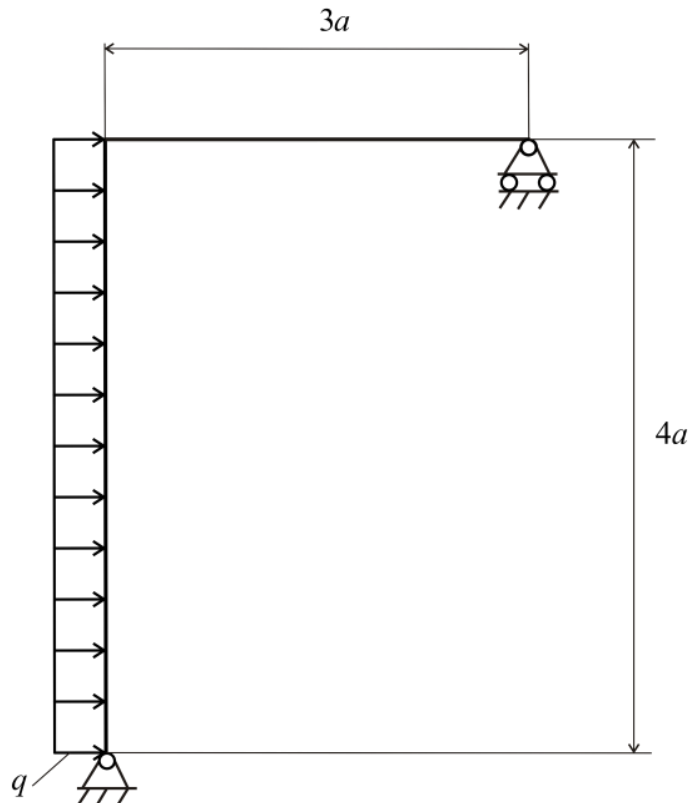
3. Для балки на двух опорах пролетом $l = 3a$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , парой сил с моментом $M_0 = qa^2$ и сосредоточенной силой $P = qa$ построить эпюры Q и M .



4. Консоль длиной $l = 3a$ нагружена равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенными силами. Установить при каком значении силы P момент в заделке обратится в нуль. Построить эпюры Q и M при найденном значении силы.

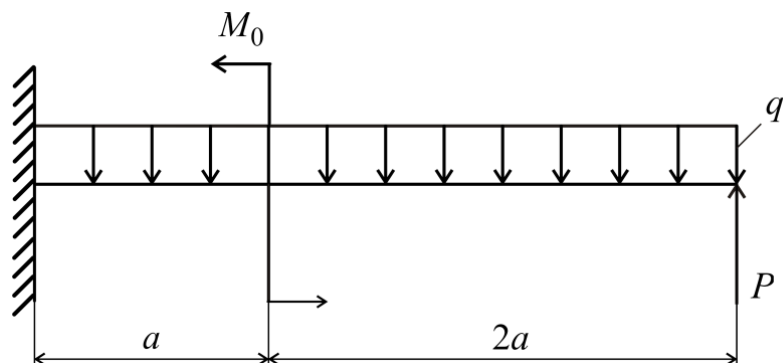


5. Построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов для рамы, схема которой приведена на рисунке.

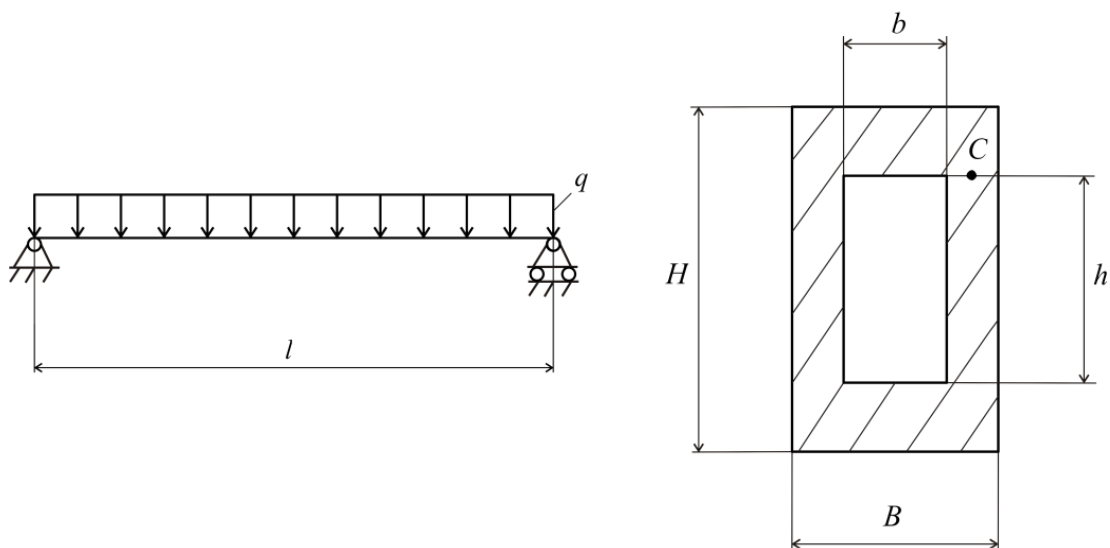


Нормальные напряжения при чистом изгибе.

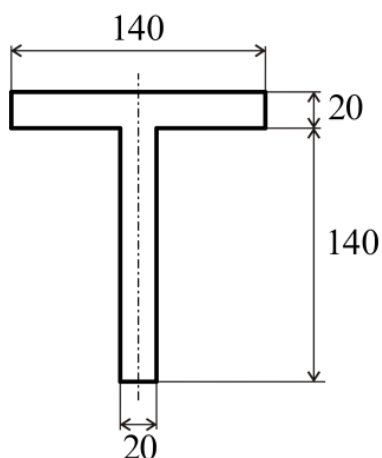
1. Для деревянной балки, схема нагружения и размеры которой показаны на рисунке, по наибольшему изгибающему моменту подобрать прямоугольное поперечное сечение при отношении высоты сечения к ширине $h/b = 3/2$. Сила $P = 20$ кН, момент $M = 20$ кНм и интенсивность распределенной нагрузки $q = 20$ кН/м. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 12$ МПа, $a = 1$ м.



2. Балка трубчатого поперечного сечения пролетом $l = 4$ м, шарнирно опертая по концам, несет равномерно распределенную нагрузку $q = 30$ кН/м. Определить величину напряжений в точке C опасного сечения балки, если его размеры $b_1 = 12$, $b_2 = 6$, $h_1 = 20$, $h_2 = 10$ см.

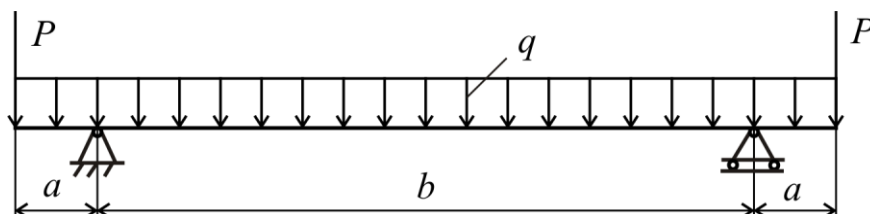


3. Балка таврового профиля длиной $l = 1,4$ м, защемленная одним концом, нагружена в вертикальной плоскости сосредоточенной силой P . Приложенной на другом свободном конце консоли. Размеры сечения даны на рисунке в миллиметрах. Определить величину силы P и значение наибольших сжимающих напряжений, если растягивающие напряжение в опасном сечении $\sigma_{\max} = 42,4$ МПа. Геометрические размеры сечения на схеме сформулированы в мм.



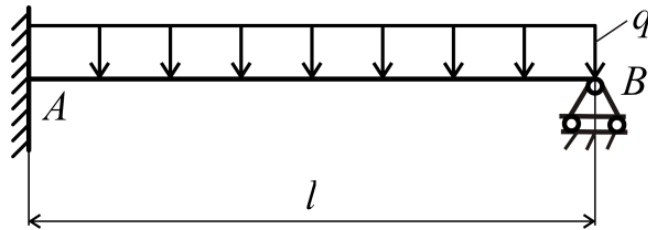
Напряжения при поперечном изгибе.

1. Подобрать сечение консольной балки двутаврового профиля, нагруженной, как показано на рисунке. Допускаемые напряжения принять $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

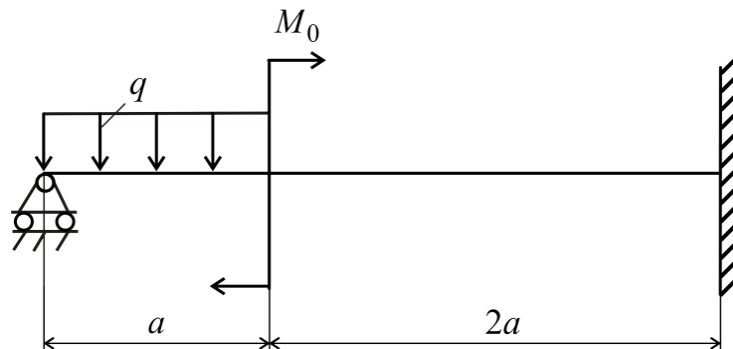


Дифференциальное уравнение упругой линии бруса при изгибе.

1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для статически неопределимой балки, представленной на рисунке.

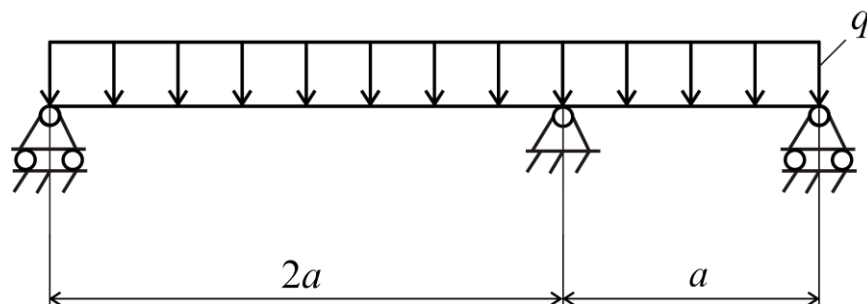


2. Раскрыть статическую неопределимость стальной балки, показанной на рисунке, определить опорные реакции, построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы ($M_0 = qa^2$).

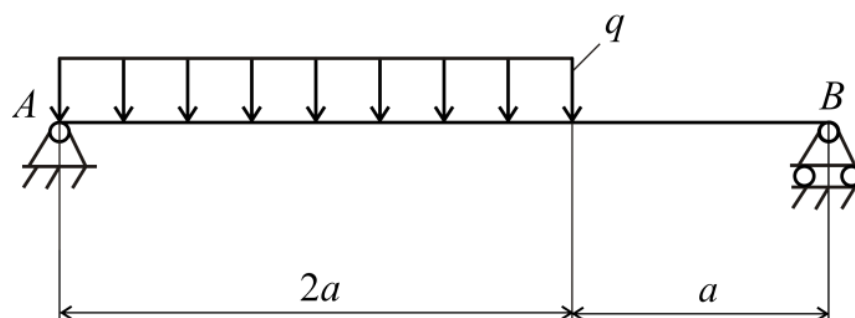


Метод начальных параметров.

1. Раскрыть статическую неопределимость стальной двутавровой балки с применением метода начальных параметров и определить опорные реакции.

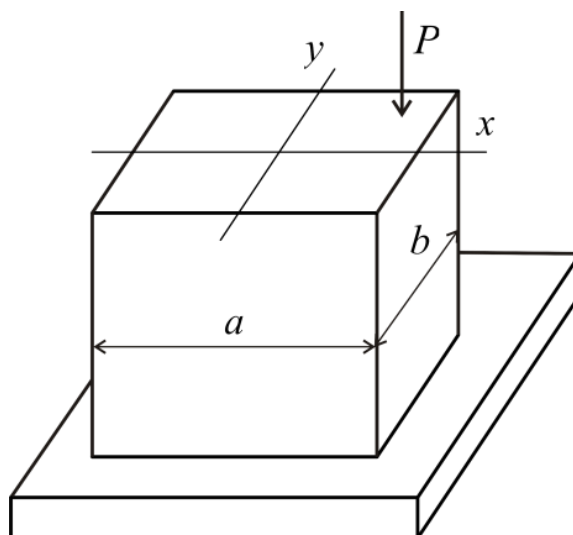


2. Пользуясь методом начальных параметров, определить величину наибольшего прогиба и угол поворота опорного сечения А деревянной балки, изображенной на рисунке. Сечение балки – прямоугольник со сторонами $b = 15$ см и $h = 20$ см, пролет $a = 2$ м. Интенсивность распределенной нагрузки $q = 3$ кН/м.

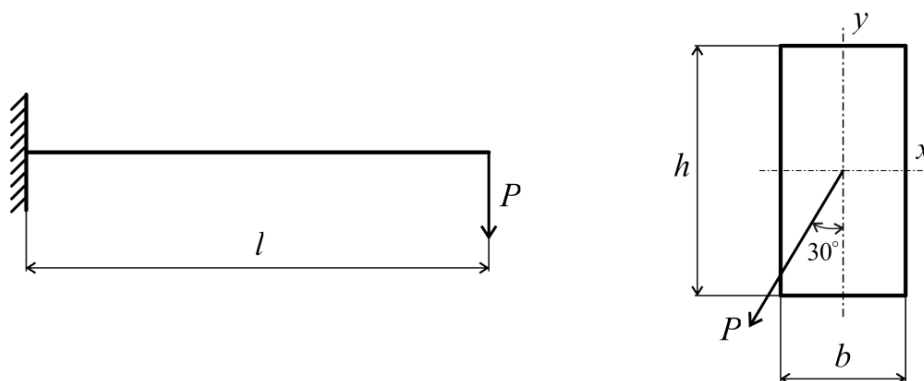


Сложное сопротивление. Косой изгиб. Внецентренное растяжение.

1. Столб прямоугольного поперечного сечения нагружен силой P , приложенной к точке A , имеющей координаты $e_x = 12$ см, $e_y = 5$ см. Размеры сечения $a = 30$ см, $b = 20$ см. Сила $P = 150$ кН. Найти положение нейтральной оси и построить эпюру нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении столба. Собственным весом пренебречь.

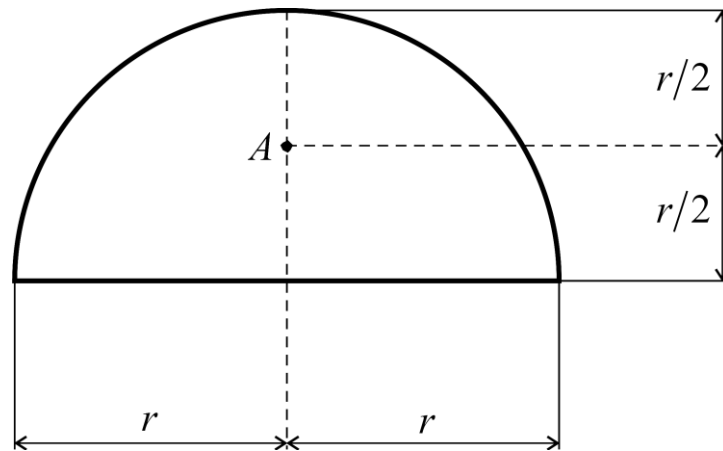


2. Определить положение нейтральной оси и перемещение свободного конца деревянной балки, нагруженной силой $P = 20$ кН, длина балки $l = 1$ м. Размеры прямоугольного поперечного сечения балки $b = 20$, $h = 30$ см. Модуль упругости $E = 10$ ГПа.

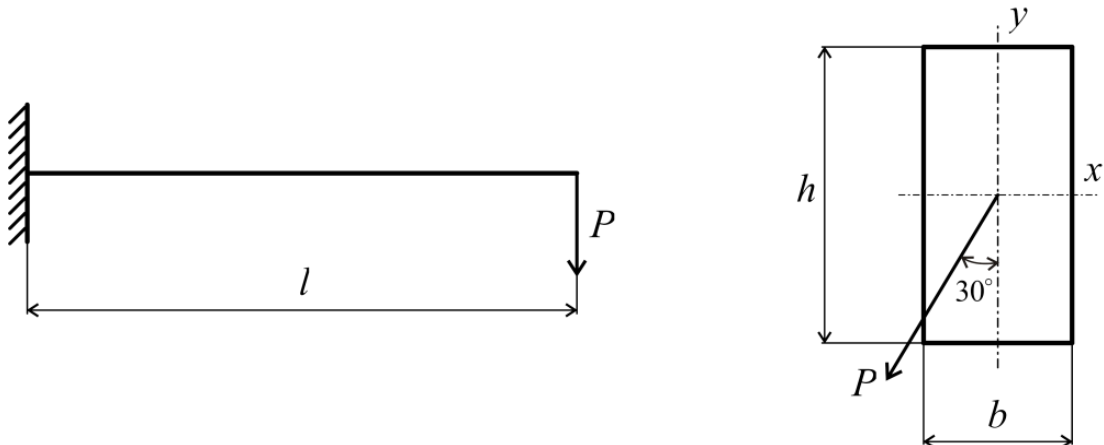


3. Построить ядро для поперечного сечения в виде швеллера №20.

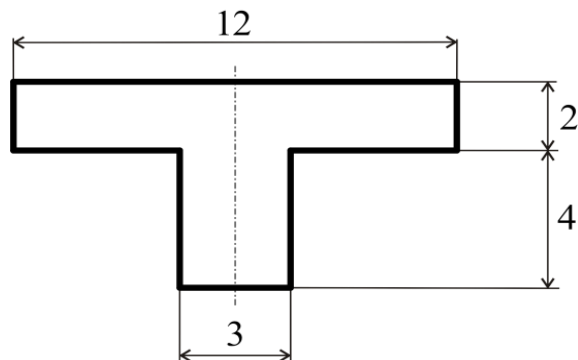
4. Короткая деревянная стойка с поперечным сечением в виде полукруга диаметром $d = 20$ см нагружена продольная сжимающей силой P , приложенной в точке A . Определить наибольшую допускаемую величину силы P , если допускаемое напряжение $[\sigma] = 10$ МПа. Модуль упругости $E = 10$ ГПа.



5. Подобрать размеры b и h прямоугольного поперечного сечения (при $h/b = 2$, $[\sigma] = 8$ МПа, $P = 20$ кН, $l = 1$ м), а также найти положение нейтральной оси и построить эпюру напряжений деревянной балки, изображенной на рисунке.

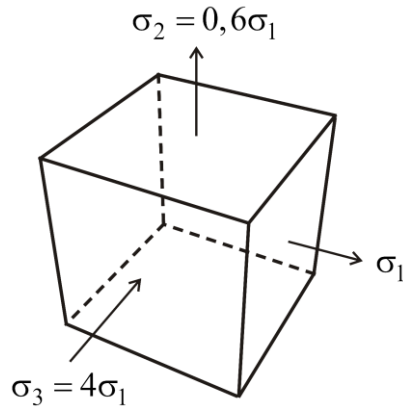


6. Построить ядро сечения для поперечного сечения в виде тавра, изображенного на рисунке. Геометрические характеристики сечения $F = 36$ см², $J_x = 96$ см⁴, $J_y = 297$ см⁴. Значения геометрических размеров сечения на схеме приведены в см.

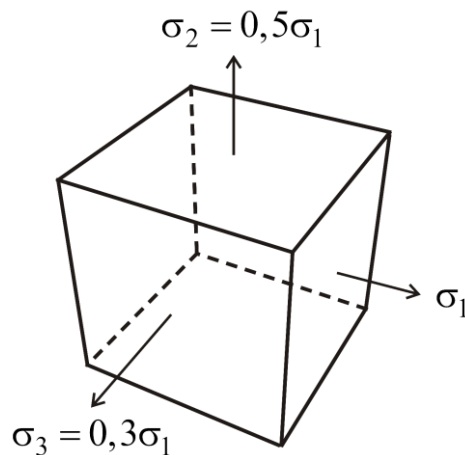


Проверка прочности при объемном напряженном состоянии. Теории прочности.

1. Определить допускаемые значения напряжений σ_1 по первой и второй теориям прочности для напряженного состояния, изображенного на рисунке. Допускаемые напряжения на растяжение $[\sigma_{\text{раст}}] = 60$ МПа, на сжатие $[\sigma_{\text{сж}}] = 180$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

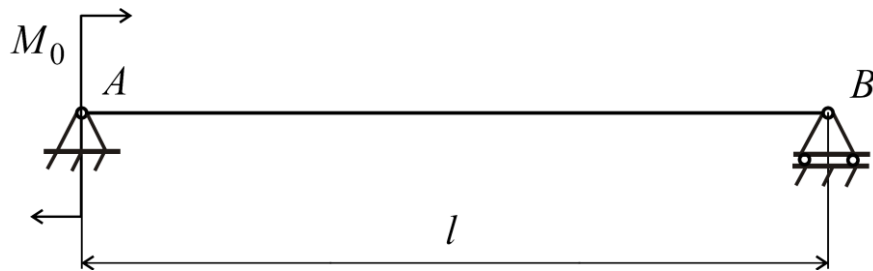


2. Определить допускаемые значения напряжений σ_1 по классическим и энергетической теориям прочности для напряженного состояния, изображенного на рисунке. Допускаемые напряжения на растяжение $[\sigma_{\text{раст}}] = 60$ МПа, на сжатие $[\sigma_{\text{сж}}] = 180$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 200$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

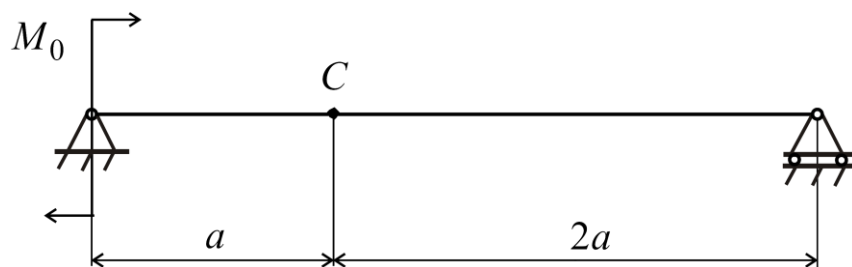


Потенциальная энергия деформированных тел.

1. Определить при помощи теоремы Кастильяно угол поворота концевое сечения B балки.

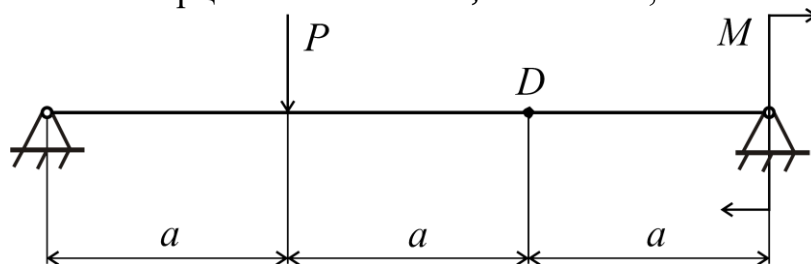


2. Определить при помощи теоремы Кастильяно прогиб балки в сечении C .

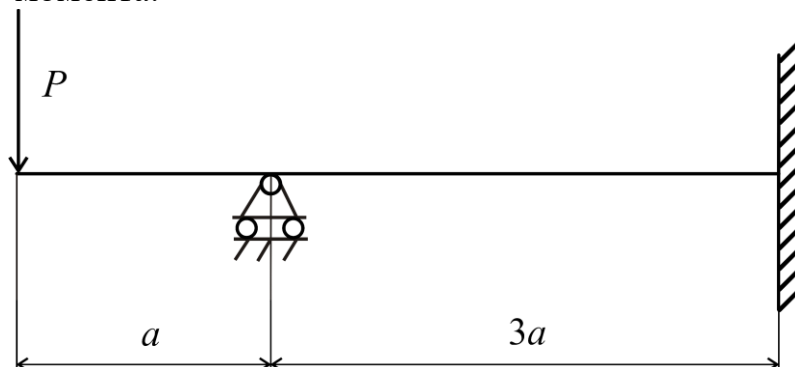


Применение энергетического метода для определения упругих перемещений.

1. Пользуясь правилом Верещагина определить величину угла поворота сечения D балки, показанной на рисунке. Модуль упругости материала балки $E = 200$ ГПа, момент инерции $J = 5500$ см², $P = 12$ кН, $M = 8$ кН·м, $a = 1$ м.

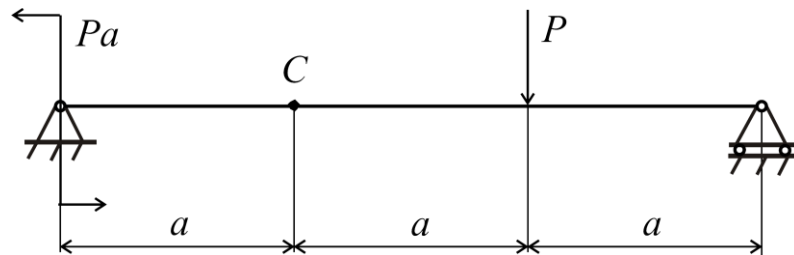


2. Раскрыть статическую неопределимость, используя правило Верещагина, определить опорные реакции, построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

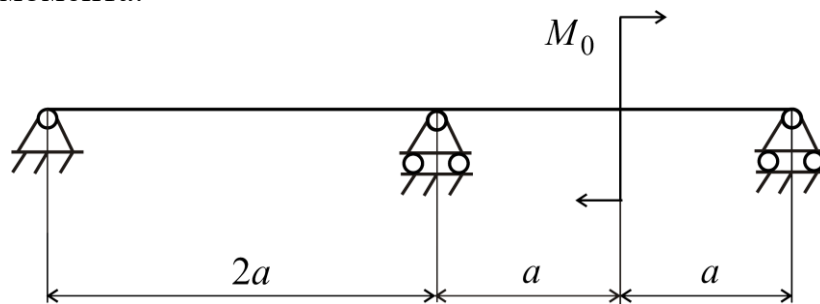


Расчет статически неопределимых систем по методу сил.

1. Определить величину прогиба сечения C балки, показанной на рисунке, на основании метода сил.

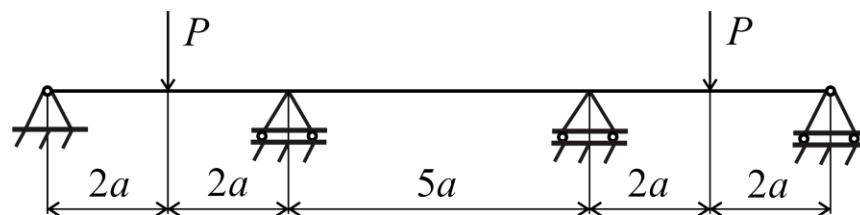


2. Раскрыть статическую неопределимость, используя метод сил, определить опорные реакции, построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

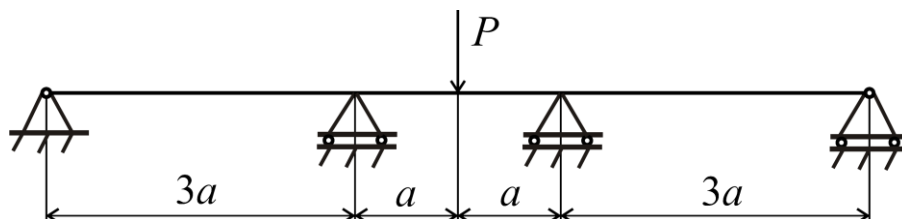


Неразрезные балки. Теорема о трех моментах.

1. Двутавровая неразрезная балка загружена симметричной нагрузкой $P = 60$ кН. С применением теоремы о трех моментах раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры Q и M ($a = 1$ м).

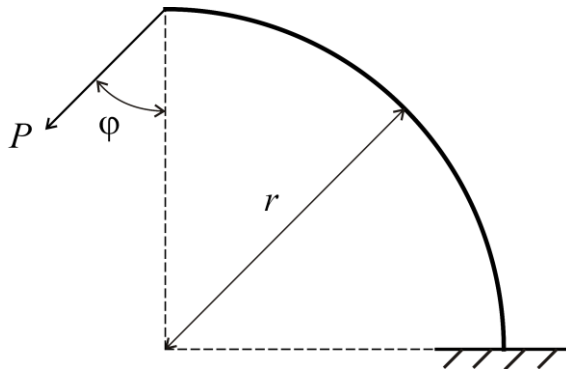


2. Двутавровые неразрезные балки загружены симметричной нагрузкой P . С применением теоремы о трех моментах раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры Q и M .

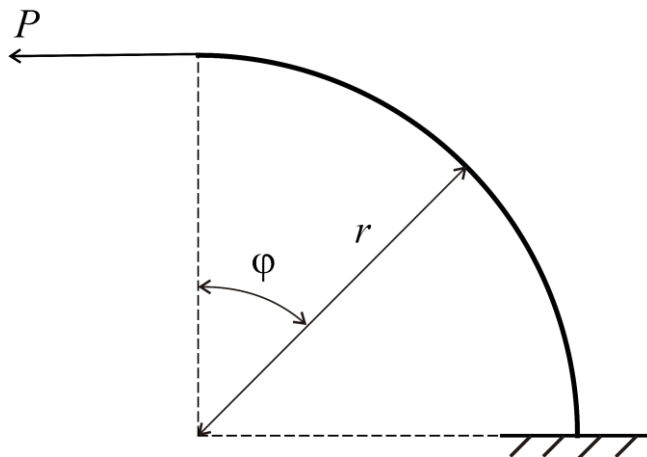


Расчет кривых брусьев.

1. Построить эпюры M , N и Q для кривого бруса с осью, очерченной по дуге окружности. Сила $P = 40$ кН, радиус $r = 0,6$ м, угол $\varphi = 45^\circ$.



2. Определить напряжения в сечении кривого бруса прямоугольного поперечного сечения, соответствующем углу $\varphi = 45^\circ$. Стороны прямоугольника $b = 5$, $h = 10$, $r_1 = 25$, $r_2 = 35$ см, сила $P = 40$ кН. Радиус кривизны нейтральной линии рассчитывать по приближенной формуле $r_0 = r \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)$.



Устойчивость упругих систем.

1. Из условия устойчивости с помощью таблицы значений коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения (коэффициента продольного изгиба) для сжатых стержней определить размеры поперечного сечения деревянной стойки, нагруженной продольной сжимающей силой $P = 200$ кН. Один конец стойки оперт шарнирно, второй защемлен. Длина $l = 3$ м, сечение стойки прямоугольное с отношением сторон $h/b = 2$. Основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 10$ МПа, $E = 10$ ГПа.

2. Определить величины критической силы и критического напряжения для сжатой стойки двутаврового поперечного сечения № 27. Оба конца стойки шарнирно закреплены. Длина стойки $l = 4$ м. Стойка изготовлена из стали с

пределом пропорциональности $\sigma_{pr} = 200$ МПа, модулем упругости $E = 200$ ГПа.

3. Определить величины критической силы и критического напряжения для сжатой стойки двутаврового поперечного сечения № 27. Оба конца стойки заделаны. Длина стойки $l = 4$ м. Стойка изготовлена из стали с пределом пропорциональности $\sigma_{pr} = 200$ ГПа, модулем упругости $E = 200$ ГПа.

4. Из условия устойчивости с помощью таблицы значений коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения (коэффициента продольного изгиба) для сжатых стержней определить размеры поперечного сечения двутавровой стойки, нагруженной продольной сжимающей силой $P = 1,2$ МН. Оба конца стойки зашпелены, длина стойки $l = 5$ м. Основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Динамические нагрузки и динамические напряжения.

1. Определить с учетом собственного веса нормальные напряжения в поперечном сечении двутаврового бруса № 16 высотой 2 м при продольном ударе. Модуль упругости $E = 200$ ГПа, плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³. Высота падения груза массой 50 кг составляет 5 см.

2. Определить без учета собственного веса нормальные напряжения в поперечном сечении двутаврового бруса (№ 16) высотой 2 м при продольном ударе. Модуль упругости $E = 200$ ГПа. Высота падения груза массой 50 кг составляет 5 см.

3. На середину стальной шарнирно опертой балки (двутавр № 20) длиной $l = 2$ м, с высоты $h = 4$ см падает груз массой 400 кг. Определить без учета собственного веса балки наибольшие нормальные напряжения в ее поперечном сечении при ударе. Модуль упругости $E = 200$ ГПа.

4. На середину стальной шарнирно опертой балки длиной $l = 2$ м, с высоты $h = 4$ см падает груз массой 400 кг. Определить с учетом собственного веса балки наибольшие нормальные напряжения в ее поперечном сечении при ударе. Балкой является двутавр № 20. Модуль упругости $E = 200$ ГПа, плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³.

2.2. Примерная тематика индивидуальных заданий.

Программой курса «Сопротивление материалов» предусматривается чтение лекций, проведение практических и лабораторных занятий, а также самостоятельная работа студентов, связанная с выполнением индивидуальных заданий. В течение двух семестров запланировано выполнение пяти индивидуальных заданий, охватывающие основные разделы «Сопротивления материалов». Первое задание посвящено расчету статически неопределимых стержневых систем с учетом изменения температуры и предварительного натяга стержней. Второе задание связано с подбором поперечного сечения балки, подвергающейся поперечному изгибу на основании проверок прочности по нормальным и касательным напряжениям, которые возникают в поперечном сечении балки. Третье задание направлено на реализацию метода начальных

параметров применительно к раскрытию статической неопределимости прямого бруса. Четвертое задание посвящено расчету статически неопределимой плоской стержневой системы с применением метода сил и правила Верещагина. Пятое задание связано с расчетом центрально-сжатых стержней на устойчивость и подбором сечения колонны. Каждое задание содержит 50 различных вариантов.

Задание 1. Расчет статически неопределимой стержневой системы с учетом изменения температуры. Абсолютно жесткий брус, нагруженный заданной нагрузкой, поддерживается шарнирно-неподвижной опорой A и двумя деформируемыми стальными стержнями 1 и 2. Температура стержня в период эксплуатации может повышаться на величину Δt °C. Кроме того, стержень 2 изготовлен на величину Δ короче проектного размера. Неточность изготовления Δ устраняется растяжением стержня при монтаже.

Определить усилия в стержнях 1 и 2 в период эксплуатации. При расчете принять $E = 210$ ГПа, $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ град⁻¹. Расчетные схемы представлены на рисунках 1.1 – 1.10.

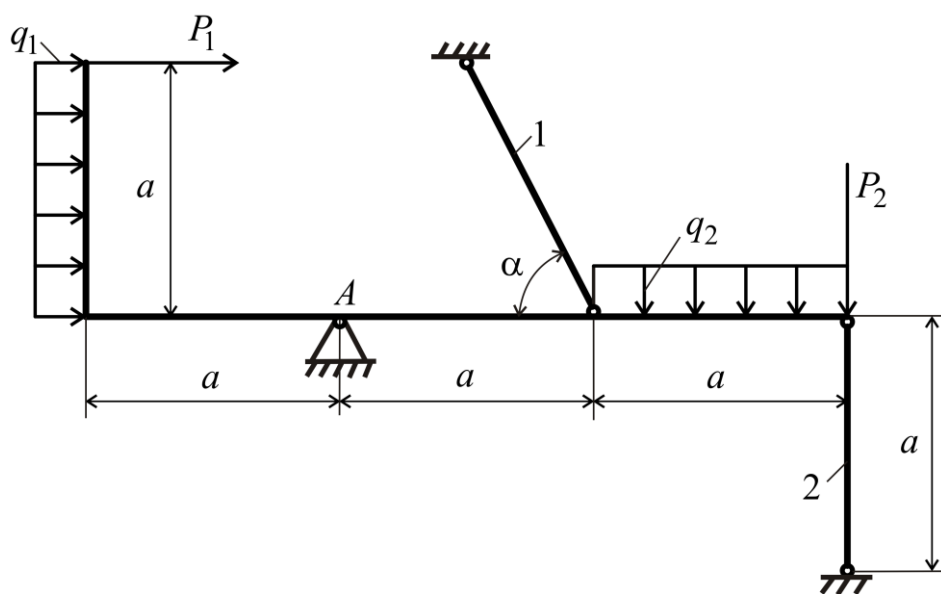


Рисунок 1.1

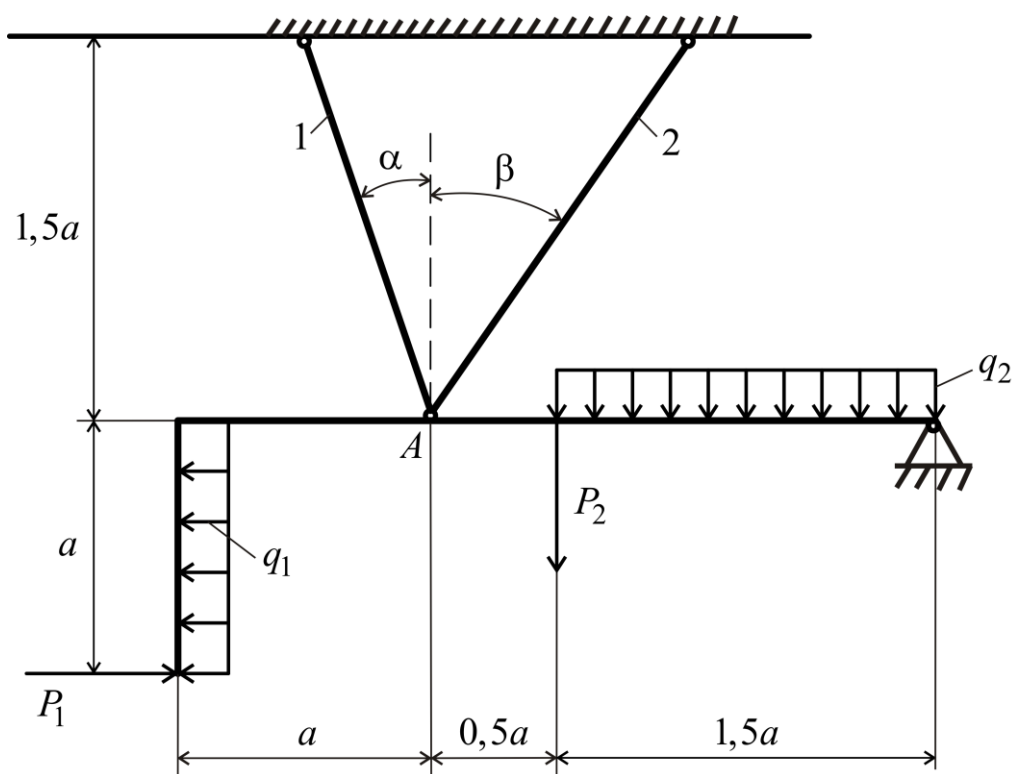


Рисунок 1.2

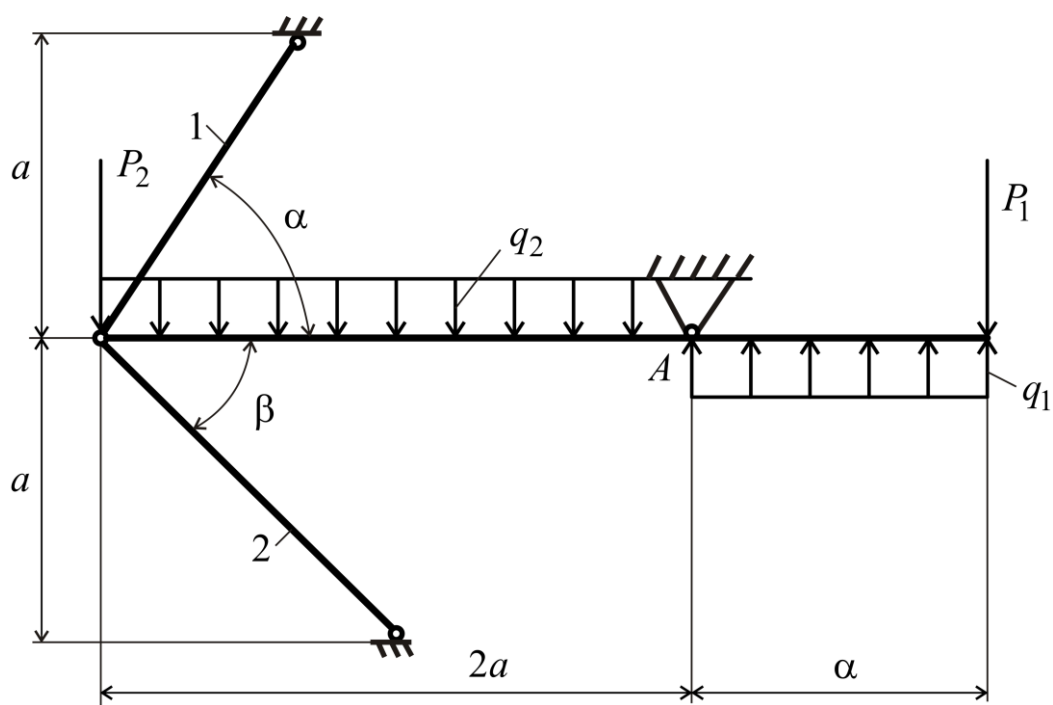


Рисунок 1.3

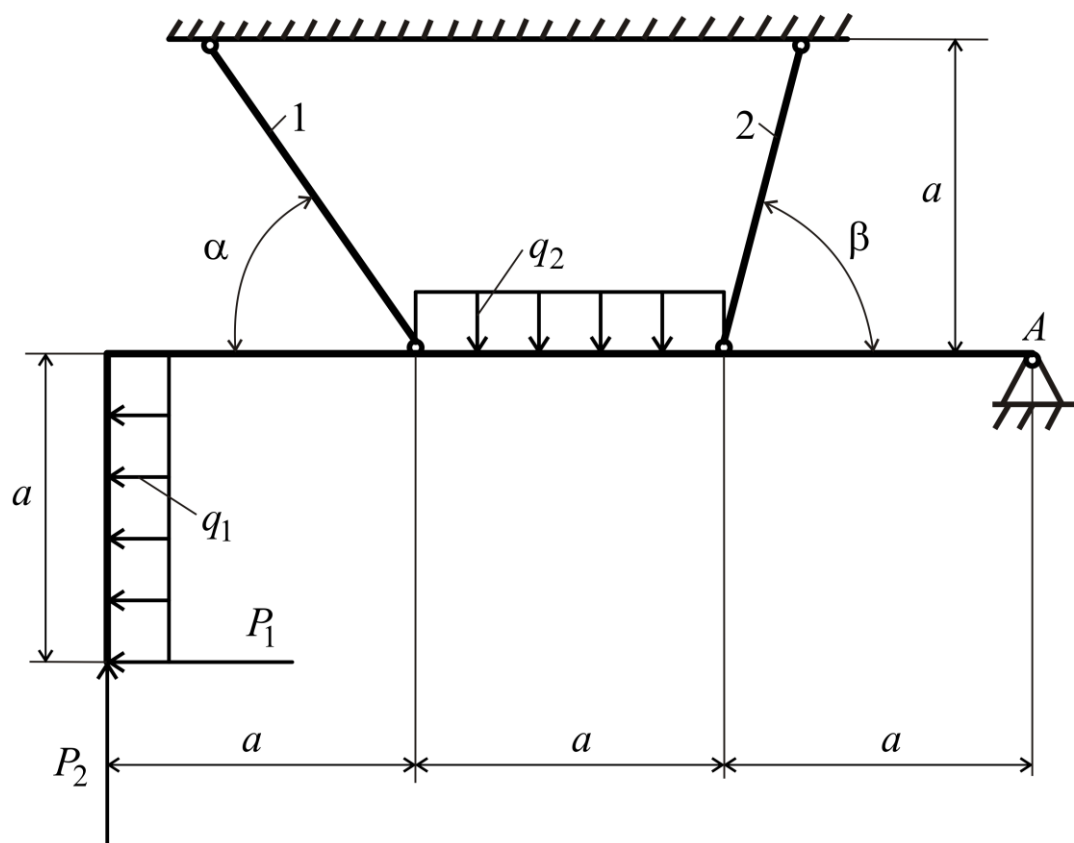


Рисунок 1.4

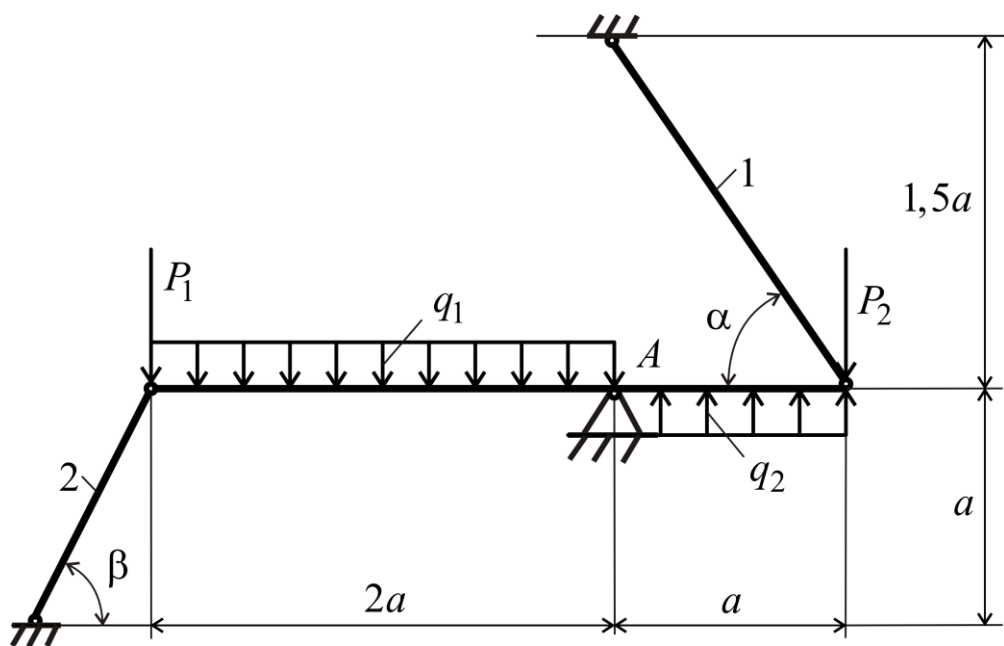


Рисунок 1.5

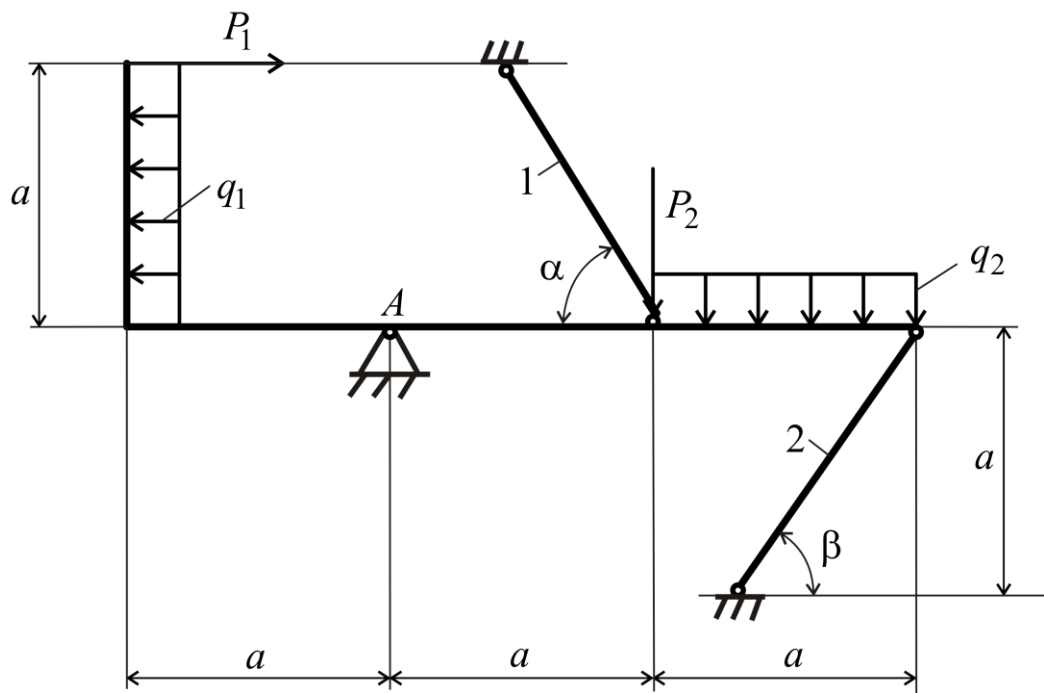


Рисунок 1.6

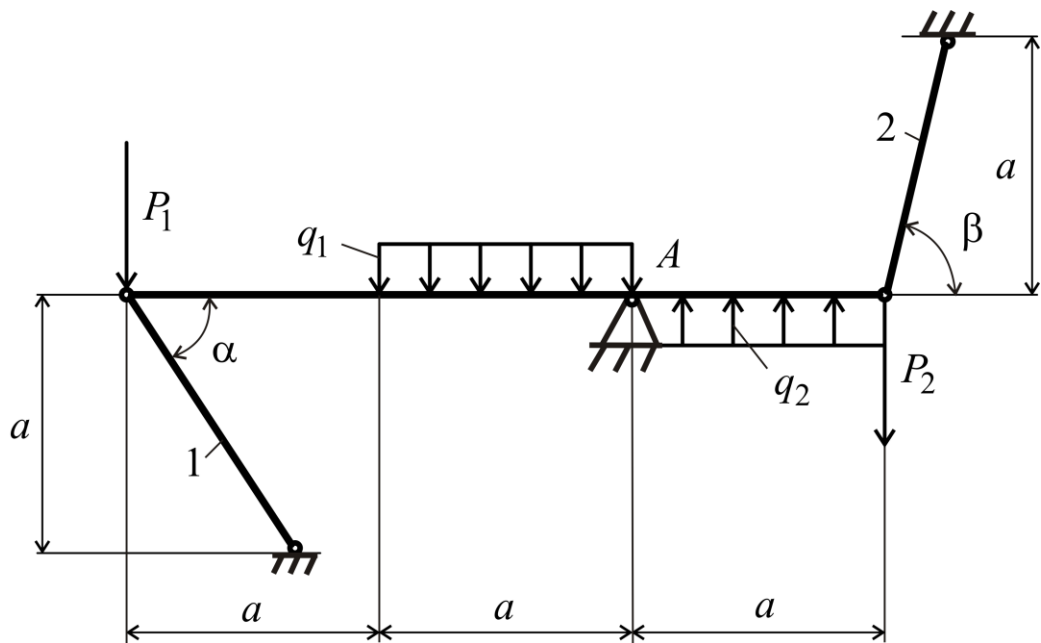


Рисунок 1.7

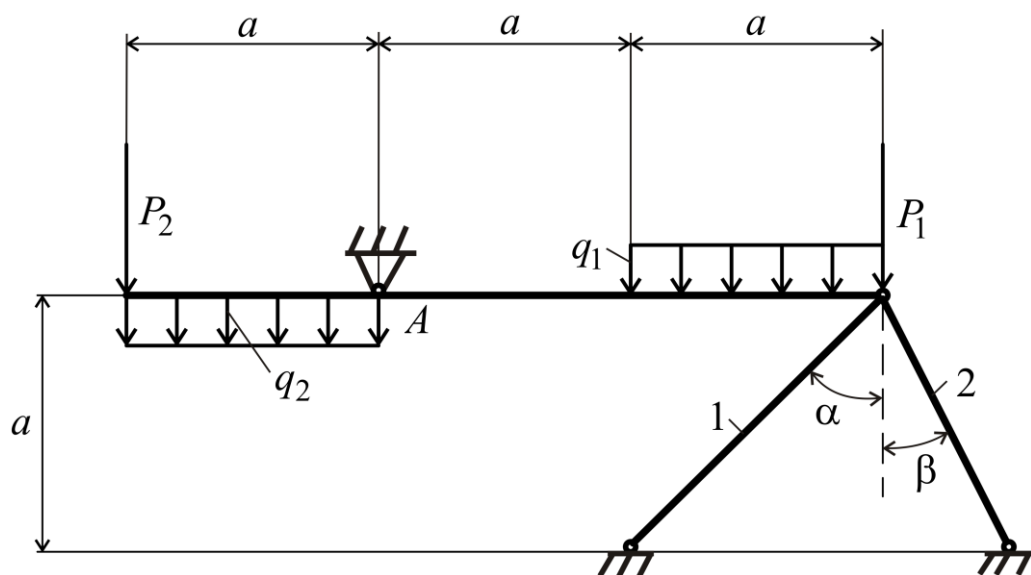


Рисунок 1.8

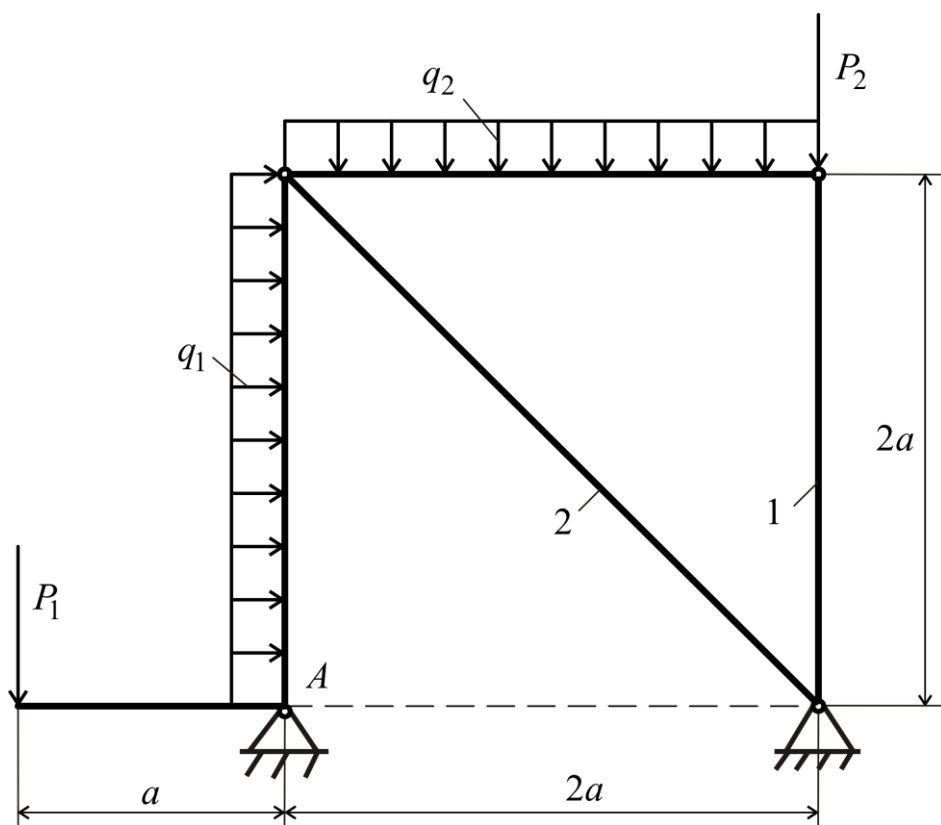


Рисунок 1.9

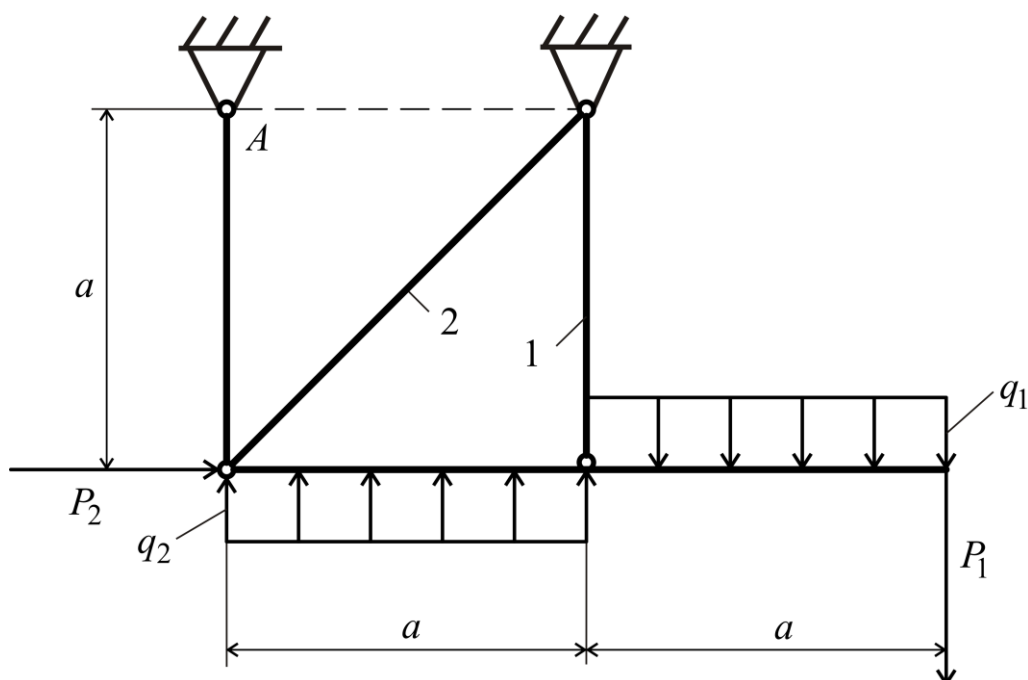


Рисунок 1.10

Таблица 1 – Числовые данные к заданию 1.

Вариант	Рисунок	P_1	P_2	q_1	q_2	α	β	a	Δt	Δ	F_1	F_2
		кН	кН	кН/м	кН/м	°	°	м	°С	мм	см ²	см ²
1	1.1	50	–	–	25	30	–	2,0	20	0,5	8,0	4,5
2	1.1	–	60	30	–	45	–	1,9	30	0,6	7,0	5,5
3	1.1	90	–	40	–	60	–	1,8	40	0,4	6,0	6,5
4	1.1	–	90	–	40	90	–	1,7	25	0,7	5,0	7,5
5	1.1	60	70	–	–	30	–	1,6	35	0,75	4,0	8,5
6	1.2	75	50	–	–	30	0	1,5	24	0,8	4,5	4,0
7	1.2	65	–	–	20	30	60	1,4	28	0,35	5,5	5,0
8	1.2	–	–	45	30	60	30	1,3	32	0,45	6,5	6,0
9	1.2	–	90	55	–	45	45	1,2	36	0,3	7,5	7,0
10	1.2	95	–	65	50	0	45	1,1	42	0,4	8,5	8,0
11	1.3	–	75	55	–	90	90	1,0	40	0,5	4,5	8,0
12	1.3	65	–	–	65	30	60	1,1	38	0,55	5,5	7,0
13	1.3	75	65	–	–	60	30	1,2	32	0,6	6,5	6,0
14	1.3	60	60	25	–	45	45	1,3	36	0,4	7,5	5,0
15	1.3	–	–	60	50	90	60	1,4	35	0,7	8,5	4,0
16	1.4	90	100	50	–	90	90	1,5	30	0,75	4,0	4,5
17	1.4	70	–	–	40	30	60	1,6	25	0,8	5,0	5,5
18	1.4	–	90	30	–	60	30	1,7	20	0,85	6,0	6,5
19	1.4	70	85	–	–	45	45	1,8	30	0,3	7,0	7,5
20	1.4	–	–	60	25	45	30	1,9	40	0,35	8,0	8,5
21	1.5	95	–	–	20	90	90	2,0	42	0,4	5,0	4,5
22	1.5	–	70	30	–	45	45	2,1	45	0,45	6,0	7,5
23	1.5	–	–	35	30	60	30	2,0	30	0,5	4,0	4,5
24	1.5	80	60	–	–	30	60	1,9	28	0,6	4,5	5,0
25	1.5	–	55	25	60	90	45	1,8	32	0,4	5,5	6,5

Вариант	Рисунок	P_1	P_2	q_1	q_2	α	β	a	Δt	Δ	F_1	F_2
26	1.6	70	—	—	55	90	90	1,7	25	0,3	6,5	4,0
27	1.6	—	60	45	—	45	45	1,6	30	0,35	7,0	4,5
28	1.6	—	—	50	45	30	60	1,5	28	0,6	8,0	4,0
29	1.6	55	70	—	—	60	30	1,4	32	0,65	8,5	5,0
30	1.6	50	75	—	35	90	45	1,3	36	0,5	7,5	4,0
31	1.7	70	—	—	30	90	90	1,2	38	0,55	6,0	5,5
32	1.7	—	85	35	—	45	45	1,1	40	0,4	6,5	5,0
33	1.7	—	—	40	20	30	60	1,0	42	0,45	5,5	4,5
34	1.7	60	95	—	—	60	30	0,9	28	0,5	4,0	8,0
35	1.7	75	—	50	40	90	45	1,0	26	0,55	7,0	6,5
36	1.8	65	—	—	50	0	45	1,1	25	0,6	6,5	7,0
37	1.8	—	85	40	—	45	0	1,2	20	0,65	4,5	5,0
38	1.8	—	—	35	60	45	45	1,3	22	0,7	5,0	4,0
39	1.8	95	75	—	—	60	30	1,4	24	0,75	8,0	4,5
40	1.8	90	70	25	—	30	60	1,5	30	0,8	8,5	5,0
41	1.9	85	—	—	40	—	—	1,6	32	0,85	7,5	6,0
42	1.9	—	60	30	—	—	—	1,7	28	0,9	6,5	5,0
43	1.9	—	—	35	30	—	—	1,8	36	0,6	5,0	4,0
44	1.9	70	50	—	—	—	—	1,9	38	0,65	4,5	5,0
45	1.9	65	—	—	40	—	—	2,0	35	0,5	8,0	7,0
46	1.10	60	—	—	45	—	—	2,1	33	0,55	7,5	5,5
47	1.10	—	65	40	—	—	—	1,9	30	0,4	6,5	6,0
48	1.10	—	—	35	55	—	—	1,8	28	0,7	5,0	4,5
49	1.10	60	80	—	—	—	—	1,7	25	0,75	6,0	7,0
50	1.10	65	—	25	60	—	—	1,6	20	0,8	8,5	4,0

Задание 2. Подбор сечения балки. Для стальной балки, представленной на рис. 2.4–2.6 требуется построить эпюры Q и M , а также подобрать двутавровое сечение. Допускаемые напряжения $[\sigma]=160$ МПа, $[\tau]=100$ МПа.

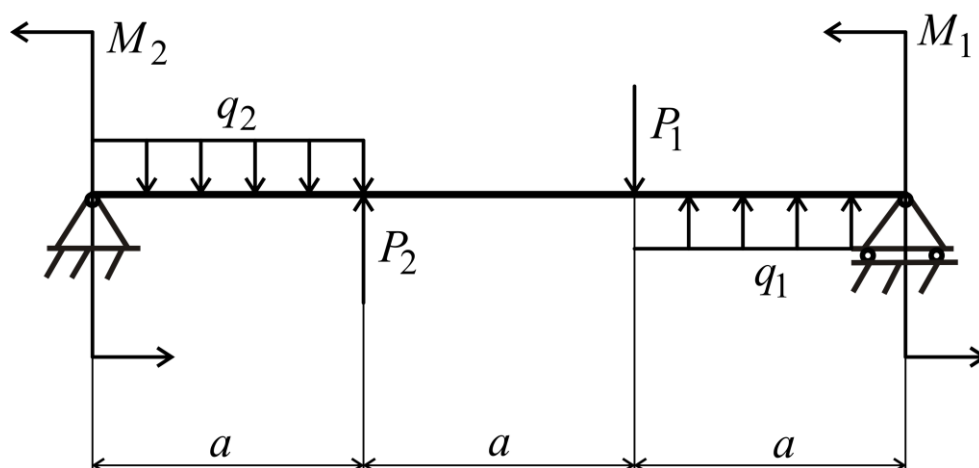


Рисунок 2.4

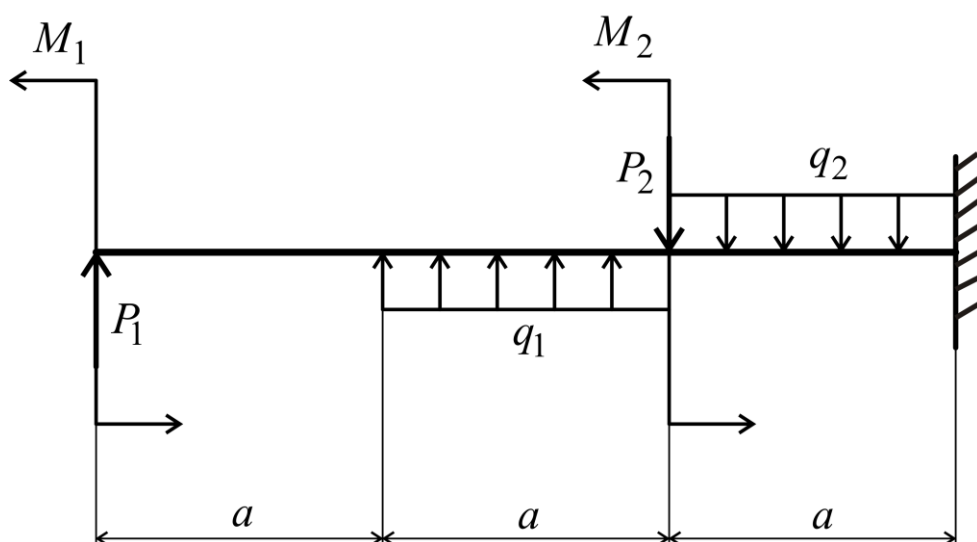


Рисунок 2.5

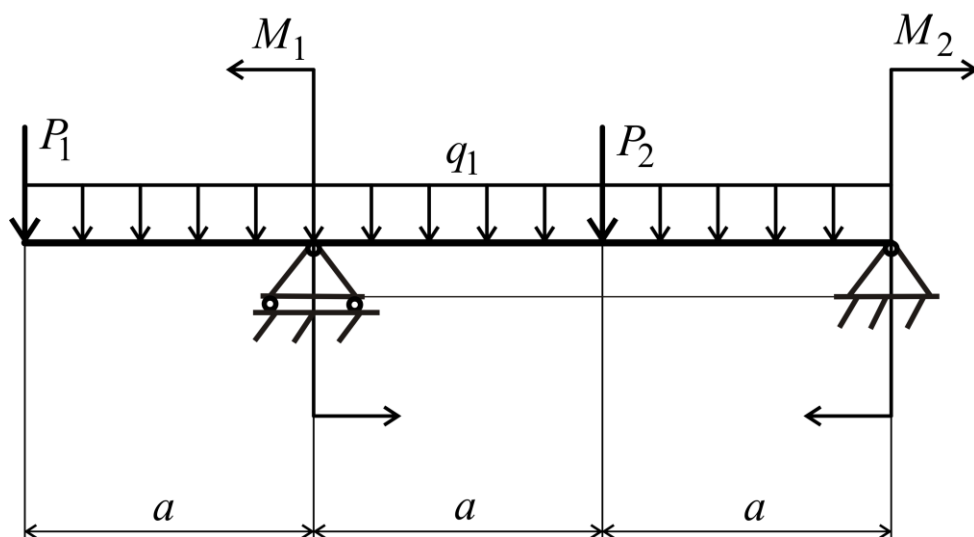


Рисунок 2.6

Данные для расчета приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Числовые данные к заданию 2.

Вариант	Рисунок	M_1	M_2	q_1	q_2	P_1	P_2	a , м
		кН·м		кН/м		кН		
1	2.4	55	–	20	–	35	–	1,0
2	2.4	–	25	10	50	–	40	1,1
3	2.4	–	40	–	35	20	–	1,2
4	2.4	–	40	–	30	–	25	1,3
5	2.4	–	30	35	–	–	50	1,4
6	2.4	60	–	35	–	10	–	1,5
7	2.4	40	–	–	50	–	15	1,4
8	2.4	–	30	20	–	–	15	1,3
9	2.4	–	25	35	–	–	35	1,2

Вариант	Рисунок	M_1	M_2	q_1	q_2	P_1	P_2	a , м
10	2.4	–	35	30	–	50	–	1,1
11	2.4	–	55	–	10	–	15	1,0
12	2.4	35	–	–	40	–	40	0,9
13	2.4	–	35	10	–	35	–	2,0
14	2.4	–	30	–	40	20	–	1,9
15	2.4	20	–	35	–	–	35	1,8
16	2.4	30	–	–	10	20	–	1,7
17	2.4	40	–	30	–	–	20	1,8
18	2.4	–	25	–	45	50	–	1,9
19	2.4	–	25	50	–	20	–	2,0
20	2.4	40	–	50	–	50	–	2,1
21	2.5	–	60	35	–	50	–	2,2
22	2.5	–	20	–	50	–	25	2,3
23	2.5	30	–	20	–	–	45	2,4
24	2.5	–	20	30	–	30	–	2,5
25	2.5	55	–	–	10	–	25	2,6
26	2.5	–	40	45	–	–	20	2,7
27	2.5	–	35	–	10	20	–	2,8
28	2.5	20	–	–	15	35	–	2,9
29	2.5	30	–	–	30	–	50	3,0
30	2.5	50	–	–	15	–	40	3,1
31	2.5	30	–	–	50	40	–	3,2
32	2.5	45	–	50	–	–	30	3,0
33	2.5	35	–	–	25	35	–	2,9
34	2.5	55	–	–	50	–	40	2,8
35	2.5	–	20	–	30	45	–	2,7
36	2.5	55	–	45	–	–	50	2,5
37	2.5	–	30	–	30	–	40	2,4
38	2.5	–	45	–	25	–	40	2,3
39	2.5	60	–	–	20	–	45	2,2
40	2.5	30	–	15	–	10	–	2,1
41	2.6	60	–	30	–	50	–	2,0
42	2.6	45	–	–	25	–	45	1,9
43	2.6	30	–	–	20	–	50	1,8
44	2.6	40	–	25	–	30	–	1,7
45	2.6	–	55	–	15	–	10	1,6
46	2.6	40	–	30	–	–	40	1,5
47	2.6	–	35	10	–	–	10	1,4
48	2.6	–	25	–	10	–	35	1,3
49	2.6	–	55	25	–	35	–	1,2
50	2.6	30	–	10	–	40	–	1,1

Задание 3. Применение метода начальных параметров к раскрытию статически неопределимой балки. Для балки постоянного сечения, представленной на рис. 3.2 – 3.4, найти опорные реакции, построить эпюры

поперечных сил, изгибающих моментов и упругую линию балки. Жесткость балки на изгиб принять равной EI .

При раскрытии статической неопределенности применить метод начальных параметров. Данные для расчета приведены в таблице 3.

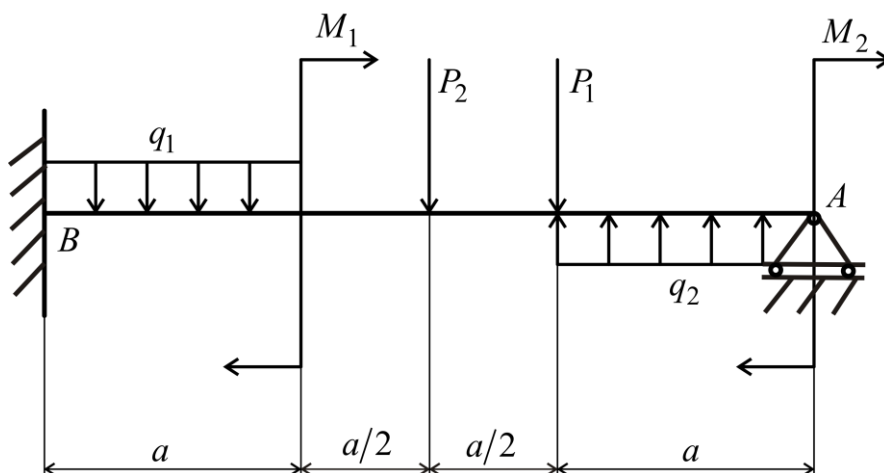


Рисунок 3.2

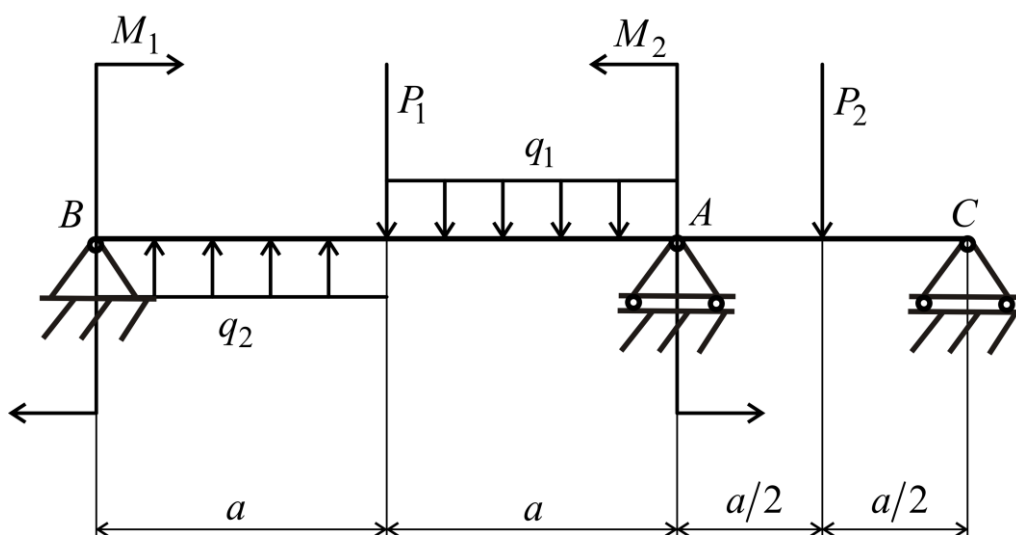


Рисунок 3.3

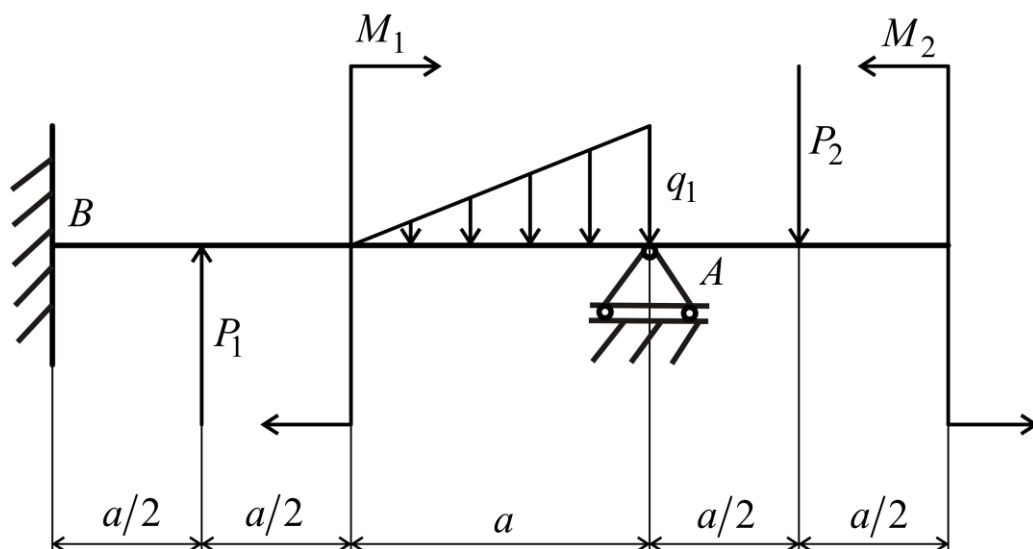


Рисунок 3.4

Таблица 3 – Числовые значения к заданию 3.

Вариант	Рисунок	P_1	P_2	q_1	q_2	M_1	M_2
1	3.2	–	$2qa$	$2q$	–	$2qa^2$	–
2	3.2	qa	–	–	$2q$	–	$2qa^2$
3	3.2	qa	–	q	–	–	$2qa^2$
4	3.2	–	$2qa$	$2q$	–	–	qa^2
5	3.2	qa	–	$2q$	–	qa^2	–
6	3.2	–	$2qa$	–	q	–	$2qa^2$
7	3.2	–	$2qa$	–	q	–	$2qa^2$
8	3.2	qa	–	$2q$	–	$2qa^2$	–
9	3.2	–	$2qa$	$2q$	–	qa^2	–
10	3.2	$2qa$	–	–	$2q$	$2qa^2$	–
11	3.2	$2qa$	–	–	$2q$	–	qa^2
12	3.2	qa	–	q	–	–	qa^2
13	3.2	–	$2qa$	–	$2q$	–	$2qa^2$
14	3.2	$2qa$	–	–	$2q$	–	$2qa^2$
15	3.2	qa	–	–	q	qa^2	–
16	3.2	–	qa	q	–	$2qa^2$	–
17	3.2	–	qa	q	–	qa^2	–
18	3.2	$2qa$	–	–	$2q$	qa^2	–
19	3.2	–	$2qa$	–	q	qa^2	–
20	3.2	$2qa$	–	–	q	qa^2	–

Вариант	Рисунок	P_1	P_2	q_1	q_2	M_1	M_2
21	3.3	$2qa$	–	q	–	–	$2qa^2$
22	3.3	qa	–	$2q$	–	$2qa^2$	–
23	3.3	–	$2qa$	$2q$	–	–	qa^2
24	3.3	–	qa	$2q$	–	–	qa^2
25	3.3	qa	–	–	$2q$	–	qa^2
26	3.3	–	qa	–	q	–	$2qa^2$
27	3.3	–	qa	q	–	–	qa^2
28	3.3	–	$2qa$	–	q	qa^2	–
29	3.3	–	$2qa$	–	q	–	qa^2
30	3.3	–	$2qa$	$2q$	–	–	$2qa^2$
31	3.3	qa	–	–	$2q$	–	qa^2
32	3.3	–	qa	$2q$	–	–	$2qa^2$
33	3.3	qa		–	q	qa^2	–
34	3.3	–	$2qa$		$2q$	$2qa^2$	–
35	3.3	$2qa$	–	q	–	–	qa^2
36	3.3	–	$2qa$	q	–	–	qa^2
37	3.3	–	$2qa$	$2q$	–	–	qa^2
38	3.3	qa	–	–	$2q$	–	$2qa^2$
39	3.3	–	qa	–	q	qa^2	–
40	3.3	qa	–	q	–	–	$2qa^2$
41	3.4	–	$2qa$	q	–	qa^2	–
42	3.4	–	qa	$2q$	–	–	$2qa^2$
43	3.4	–	qa	q	–	–	$2qa^2$
44	3.4	–	qa	–	q	$2qa^2$	–
45	3.4	$2qa$	–	–	$2q$	–	qa^2
46	3.4	–	$2qa$	$2q$	–	$2qa^2$	–
47	3.4	qa	–	–	$2q$	qa^2	–
48	3.4	–	qa	q	–	–	qa^2
49	3.4	$2qa$	–	–	$2q$	–	$2qa^2$
50	3.4	qa	–	–	$2q$	$2qa^2$	–

79

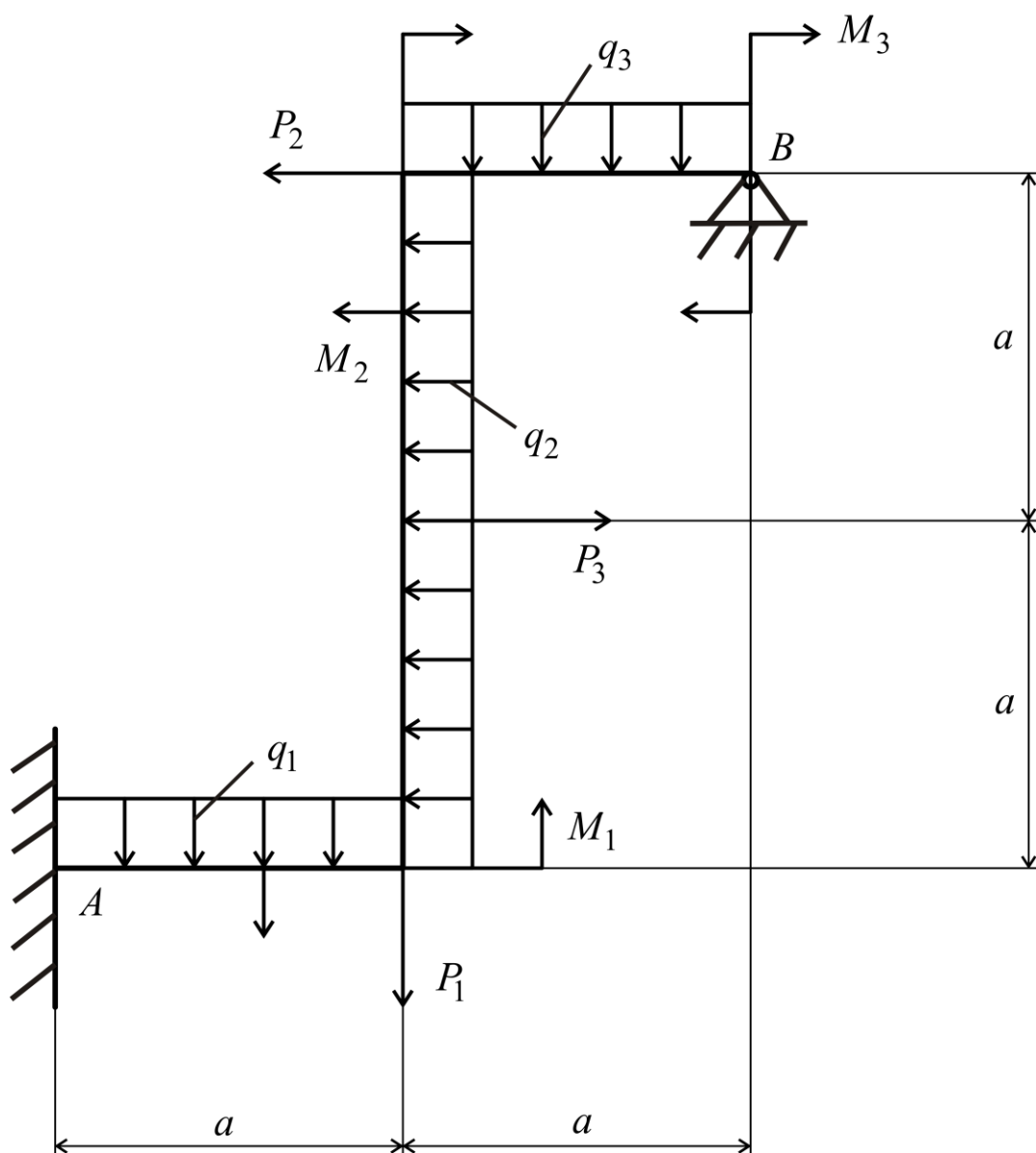


Рисунок 4.2

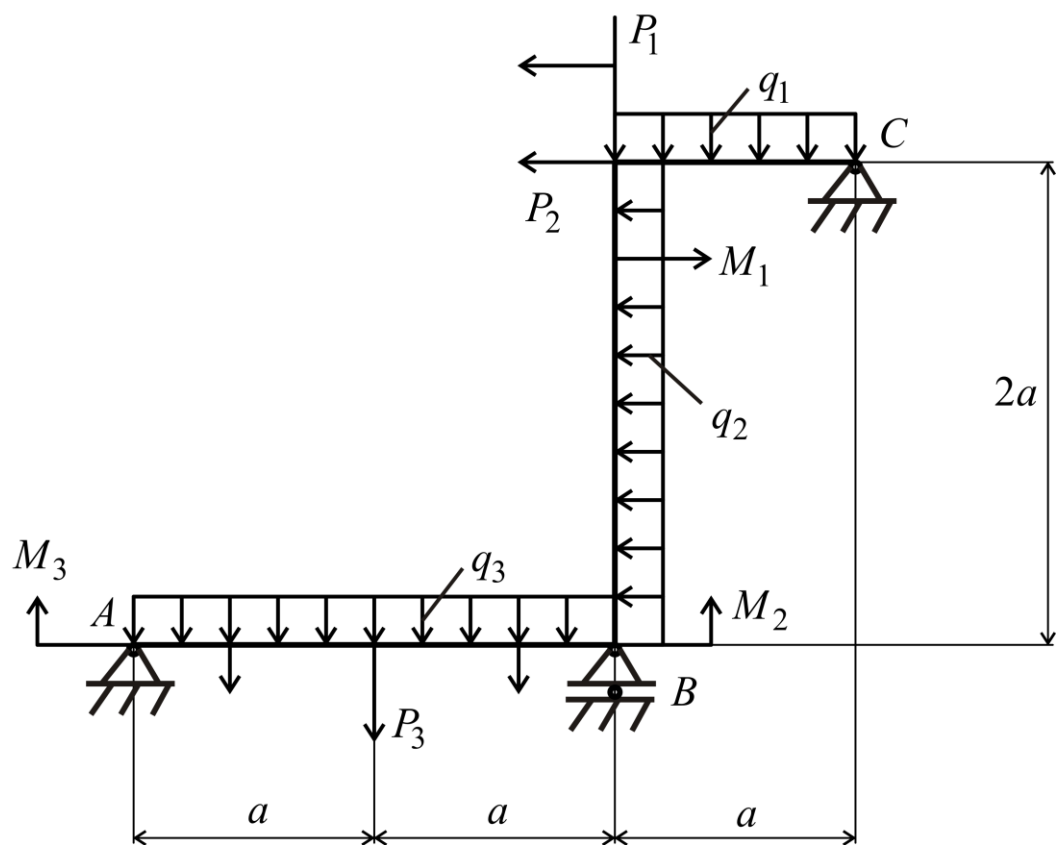


Рисунок 4.3

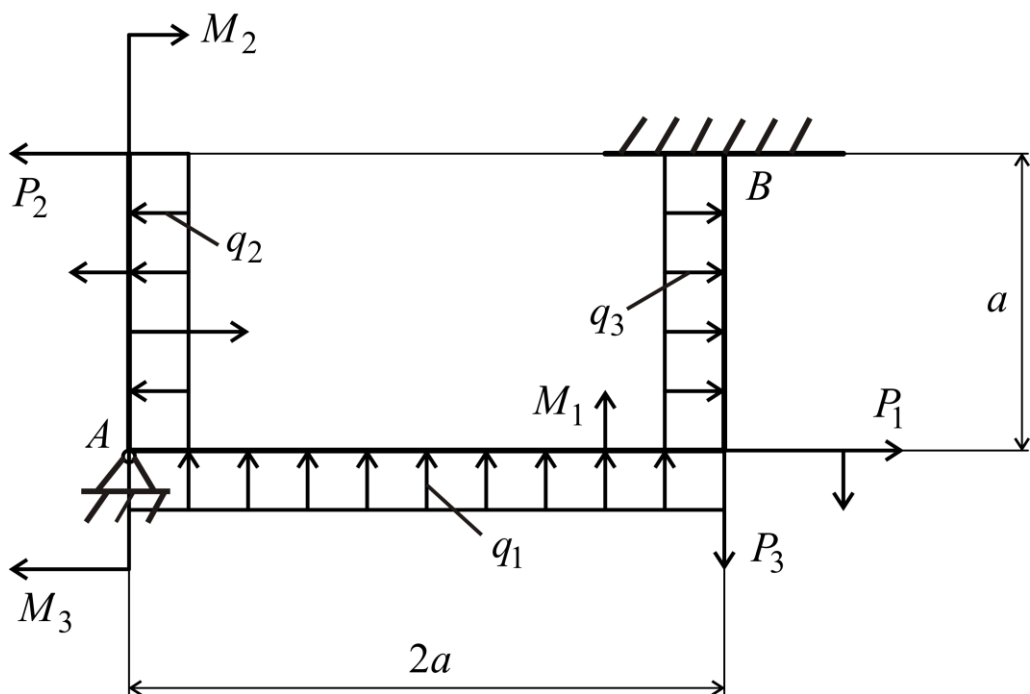


Рисунок 4.4

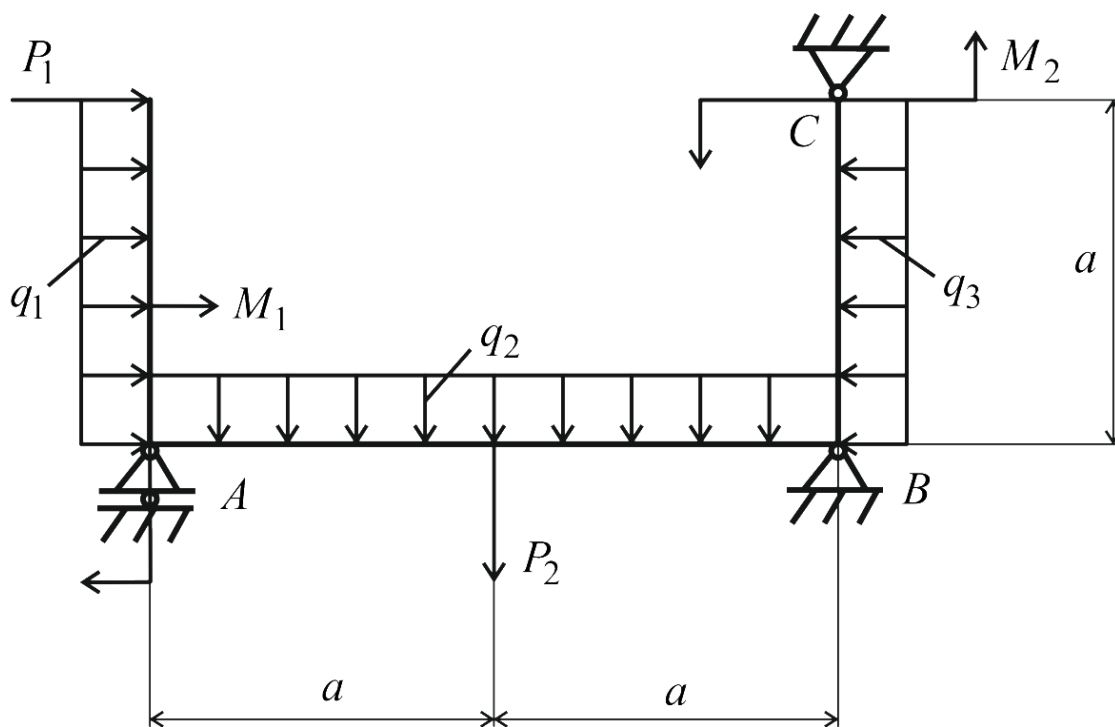


Рисунок 4.5

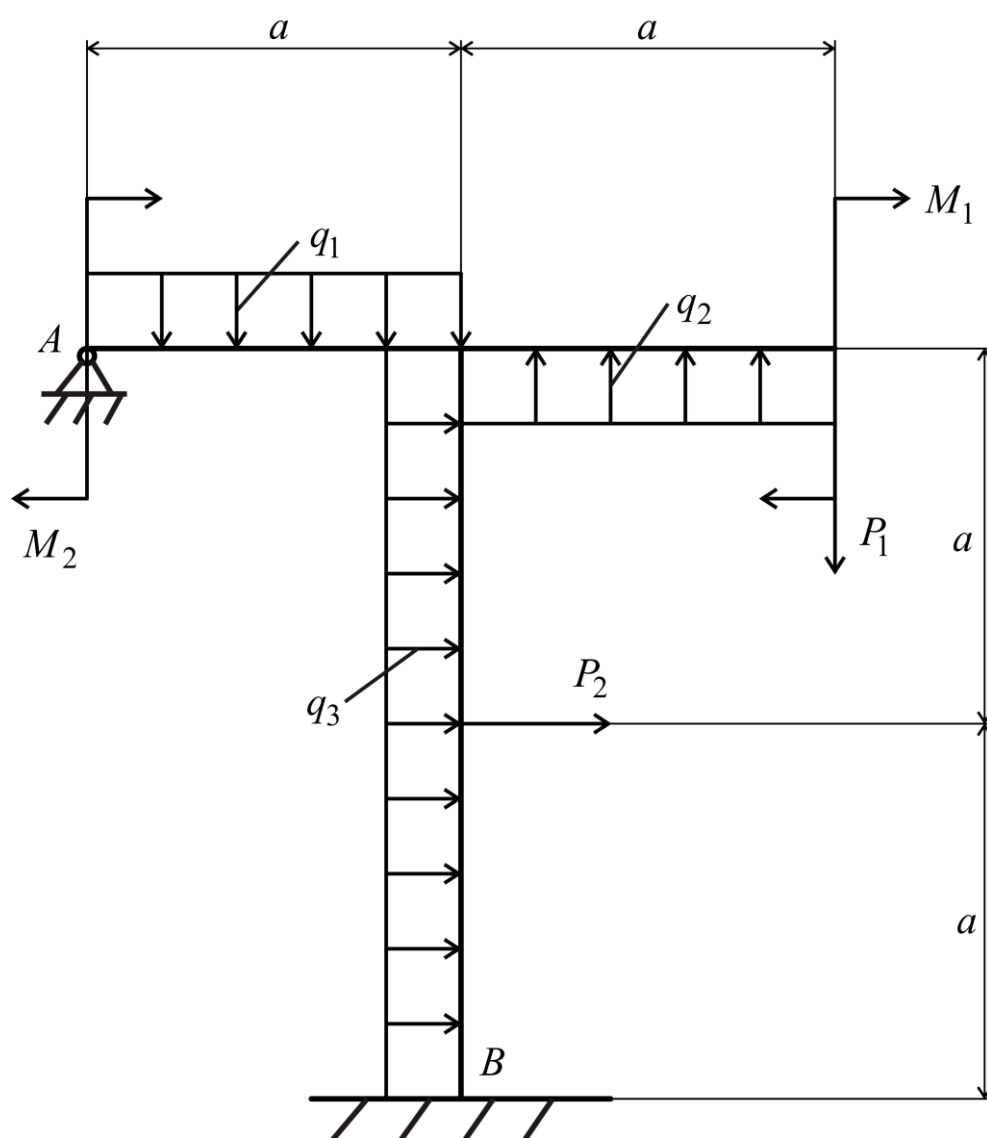


Рисунок 4.6

Таблица 4 – Численные данные к заданию 4.

Вариант	Рисунок	q_1	q_2	q_3	P_1	P_2	P_3	M_1	M_2	M_3
1	4.1	q	–	–	qa	–	–	–	–	qa^2
2	4.1	–	q	–	qa	–	–	qa^2	–	–
3	4.1	q	–	–	–	–	qa	–	qa^2	–
4	4.1	–	–	q	–	qa	–	qa^2	–	–
5	4.1	q	–	–	–	–	qa	–	–	qa^2
6	4.1	–	–	q	–	qa	–	qa^2	–	–
7	4.1	–	q	–	qa	–	–	–	qa^2	–
8	4.1	–	–	q	qa	–	–	–	qa^2	–
9	4.1	–	–	q	–	qa	–	–	qa^2	–
10	4.2	q	–	–	–	–	qa	qa^2	–	–
11	4.2	–	q	–	–	qa	–	–	–	qa^2
12	4.2	–	q	–	–	–	qa	–	qa^2	–
13	4.2	–	–	q	–	–	qa	qa^2	–	–
14	4.2	q	–	–	–	qa	–	–	qa^2	–
15	4.2	–	q	–	–	qa	–	–	qa^2	–
16	4.2	–	–	q	qa	–	–	–	qa^2	–
17	4.2	q	–	–	–	qa	–	–	–	qa^2
18	4.2	q	–	–	–	qa	–	–	qa^2	–
19	4.3	–	q	–	qa	–	–	–	qa^2	–
20	4.3	–	q	–	–	–	qa	–	qa^2	–
21	4.3	–	–	q	–	–	qa	–	–	qa^2
22	4.3	q	–	–	–	qa	–	–	–	qa^2
23	4.3	q	–	–	qa	–	–	–	qa^2	–
24	4.3	–	–	q	–	qa	–	qa^2	–	–
25	4.3	–	q	–	–	–	qa	qa^2	–	–
26	4.3	–	q	–	qa	–	–	qa^2	–	–
27	4.3	q	–	–	–	qa	–	–	–	qa^2
28	4.4	–	q	–	–	qa	–	–	–	qa^2
29	4.4	–	–	q	–	qa	–	–	–	qa^2
30	4.4	–	q	–	–	qa	–	qa^2	–	–
31	4.4	–	–	q	qa	–	–	qa^2	–	–
32	4.4	q	–	–	–	qa	–	–	–	qa^2
33	4.4	q	–	–	–	qa	–	–	–	qa^2

Вариант	Рисунок	q_1	q_2	q_3	P_1	P_2	P_3	M_1	M_2	M_3
34	4.4	—	q	—	qa	—	—	qa^2	—	—
35	4.4	q	—	—	qa	—	—	—	—	qa^2
36	4.4	—	q	—	—	—	qa	—	—	qa^2
37	4.5	q	—	—	qa	—	—	—	—	qa^2
38	4.5	—	q	—	—	—	qa	qa^2	—	—
39	4.5	—	—	q	—	—	qa	qa^2	—	—
40	4.5	—	q	—	—	—	qa	—	—	qa^2
41	4.5	q	—	—	—	—	qa	qa^2	—	—
42	4.5	—	q	—	qa	—	—	qa^2	—	—
43	4.5	q	—	—	—	—	qa	—	—	qa^2
44	4.6	—	—	q	—	qa	—	qa^2	—	—
45	4.6	—	—	q	qa	—	—	qa^2	—	—
46	4.6	q	—	—	qa	—	—	qa^2	—	—
47	4.6	—	q	—	—	qa	—	—	—	qa^2
48	4.6	q	—	—	qa	—	—	qa^2	—	—
49	4.6	—	—	q	—	qa	—	qa^2	—	—
50	4.6	—	q	—	—	—	qa	—	qa^2	—

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Примерный перечень вопросов к зачету по учебной дисциплине «Сопротивление материалов и основы строительной механики»

1. Классические теории прочности.
2. Внецентренное растяжение и сжатие брусев большой жесткости. Определение нейтральной линии. Нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при внецентренном сжатии.
3. Ядро сечения. Нахождение ядра для прямоугольного и круглого поперечного сечений.
4. Косой изгиб. Положение нейтральной линии. Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при косом изгибе.
5. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки. Уравнение метода начальных параметров.
6. Главные напряжения при плоском изгибе.
7. Напряженное состояние балки при плоском изгибе. Формула Журавского для касательных напряжений.
8. Плоский изгиб балок симметричного поперечного сечения. Дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом.
9. Чистый изгиб. Напряженное состояние балки при чистом изгибе.
10. Кручение. Закон Гука при кручении.
11. Предмет сопротивления материалов. Принцип Сен-Венана. Внешние и внутренние силы.
12. Определение внутренних усилий. Связь между напряжениями и внутренними усилиями.
13. Одноосное напряженное состояние. Главные и максимальные касательные напряжения при одноосном напряженном состоянии. Закон Гука.
14. Плоское напряженное состояние тела. Закон парности касательных напряжений. Уравнения равновесия.
15. Напряжения, действующие по любой площадке при плоском напряженном состоянии. Главные и максимальные касательные напряжения.
16. Главные напряжения при трехосном напряженном состоянии. Закон Гука.
17. Условие неразрывности тела при плоском напряженном состоянии.
18. Напряжения и деформации при чистом сдвиге. Закон Гука при сдвиге.

3.2. Примерный перечень вопросов к экзамену по учебной дисциплине «Сопротивление материалов и основы строительной механики»

1. Продольная сила. Напряжения в поперечных сечениях бруса. Перемещения поперечных сечений бруса.
2. Виды напряженного состояния. Плоское напряженное состояние.
3. Главные напряжения. Главные площадки.

4. Чистый сдвиг. Деформация при сдвиге. Закон Гука при сдвиге.
5. Статические моменты сечений. Моменты инерции сечений. Изменение моментов инерции при параллельном переносе и при повороте осей.
6. Крутящий момент. Кручение прямого бруса круглого поперечного сечения.
7. Расчет бруса круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении.
8. Прямой изгиб. Эпюры внутренних усилий. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки.
9. Главные напряжения при прямом поперечном изгибе. Расчеты на прочность при изгибе.
10. Определение перемещений в балках постоянного сечения методом начальных параметров. Расчет статически неопределимых систем.
11. Классические и энергетическая теория прочности.
12. Обобщенные силы и обобщенные перемещения. Теорема Кастильяно.
13. Применение энергетического метода для определения упругих перемещений. Графоаналитический способ вычисления интегралов при расчете перемещений (правило Верещагина).
14. Расчет статически неопределимых систем по методу сил.
15. Неразрезные балки. Теорема о трех моментах.
16. Косой изгиб. Напряжения при косом изгибе. Определение положения нейтральной линии.
17. Внецентренное растяжение и сжатие брусков большой жесткости. Расчет напряжений при внецентренном растяжении и сжатии. Определение положения нейтральной линии.
18. Ядро сечения. Расчет ядра сечения для брусков прямоугольного и круглого сечений.
19. Расчет кривых брусков. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса большой кривизны. Определение положения нейтральной линии при чистом изгибе.
20. Продольный изгиб. Эйлерова критическая сила. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности
21. Практические расчеты стержней с различными закреплениями концов на устойчивость.
22. Приближенная теория удара. Динамический коэффициент и определение наибольших напряжений при ударе в пренебрежении массой ударяемой системы.
23. Определение наибольших напряжений с учетом массы системы подвергающейся удару. Продольный и поперечный удар.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. Дудяк, А. И. Механика материалов: учебно-методическое пособие / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан, Ю. В. Василевич; М-во образования Республики Беларусь, БНТУ, Кафедра "Теоретическая механика и механика материалов". - Минск: БНТУ, 2023. - 107 с.
2. Лукьянов, М. А. Техническая механика: Учебник / Российский университет транспорта (МИИТ). - Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2024. - 486 с. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2099042>.
3. Молотников, В. Я. Сопротивление материалов: учебное пособие для вузов / Молотников В. Я. - Санкт-Петербург: Лань, 2024. - 312 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/385916>.
4. Котляров, А. А. Теоретическая механика и сопротивление материалов: компьютерный практикум: учебное пособие для вузов / Котляров А. А. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2023. - 304 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/293237>.
5. Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по специальностям "Механика и математическое моделирование", "Физика (по направлениям)", "Промышленное и гражданское строительство", "Автомобильные дороги" / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов; БГУ. - Минск: БГУ, 2021. - 535 с.

Дополнительная

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М., 2003. 560 с.
2. Сопротивление материалов: Учебник / Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин, Н.Н. Решетник; под общ. Ред. Г.Д. Межецкого, Г.Г. Загребина. - 5-е изд., - М. 2016. - 432с.
3. Старовойтов Э.И. Сопротивление материалов. Гомель: БелГУТ, 2004. 376 с.
4. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебное пособие / В.И. Феодосьев. — 17-е изд. — Москва : МГТУ им. Баумана, 2018. — 542 с.
5. Атапин, В. Г. Механика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов : [учебник] / В. Г. Атапин. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2019. - 377 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/1867821>. – Дата доступа: 03.02.2025.
6. Смирнов, В. А. Строительная механика : учебник для вузов / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий ; под редакцией В. А. Смирнова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 423 с. — (Специалист). — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт

[сайт]. – Режим доступа: <https://urait.ru/bcode/412694>. – Дата доступа: 03.02.2025.

7. Победря, Б.Е. Лекции по теории упругости / Б. Е. Победря, Д. В. Георгиевский. - Изд. 2-е. - Москва : URSS : Ленанд, 2018. - 205 с.

4.2. Электронные ресурсы

1. Сопротивление материалов и основы строительной механики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=42>. – Дата доступа: 03.02.2025.

2. Методические указания по выполнению индивидуальных заданий по учебному курсу «Сопротивление материалов и основы строительной механики» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/10843>. – Дата доступа: 03.02.2025.

3. Strength of Materials [Electronic resource]. – Mode of access: <https://mechanicalc.com/reference/strength-of-materials>. – Date of access: 03.02.2025.