ЧАСТЬ 5

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Лекция 9

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ: ввести понятие системы случайных величин и закона распределения систем двух случайных величин; определить условия зависимости и независимости случайных величин, сформулировать условный закон распределения и правило умножения плотностей.

Понятие о системе случайных величин

При теоретико-множественной трактовке любая случайная величина X есть функция элементарного события, входящего в пространство элементарных событий Ω:

$$X = \varphi(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

т. е. каждому элементарному событию $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие некоторое действительное число $x \in \Xi$, где Ξ – множество возможных значений случайной величины X.

Теперь перейдем к рассмотрению системы случайных величин – двух и более, например координаты падения снаряда X и Y, набор оценок $X_1, X_2, \ldots, X_n$, выставленных в приложении к диплому.

Будем обозначать систему нескольких случайных величин $X, Y, \ldots, W$ как $(X, Y, \ldots, W)$. Эта система есть функция элементарного события

$$(X, Y, \ldots, W) = \varphi(\omega).$$

Таким образом, каждому элементарному событию ω ставится в соответствие несколько действительных чисел – значения, принятые случайными величинами $X, Y, \ldots, W$ в результате опыта.

Пример. Пространство элементарных событий состоит из 28 элементов – 28 костей домино: $\Omega = \{0/0, 0/1, \ldots, 1/1, 1/2, \ldots, 5/6, 6/6\}$. Если случайная величина X – сумма очков, а Y – их произведение, то совокупность значений этих случайных величин есть функция элементарного события ω: так, при выпадении кости $3/4$ $x = 7$, $y = 12$.

Случайные величины, входящие в систему, могут быть как дискретными, так и непрерывными. Систему двух непрерывных случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости с координатами X и Y (см. рис. 5.1). Систему трех случайных величин (X, Y, Z) – случайной точкой в 3-мерном пространстве с координатами X, Y, Z. И то и другое можно изобразить в виде вектора (см. рис. 5.2). Использование геометрической интерпретации удобно для системы n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ как вектора в n-мерном пространстве

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Свойства системы случайных величин определяются как свойствами отдельных величин, входящих в систему, так и зависимостями между случайными величинами.

Полной характеристикой системы случайных величин является закон распределения, который может быть представлен в виде функции распределения, плотности распределения, таблицы вероятностей отдельных значений случайного вектора и т. д.

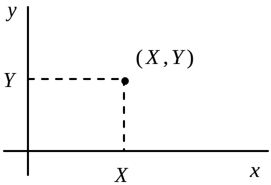

Рис. 5.1. Случайная точка

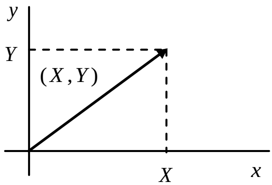

Рис. 5.2. Случайный вектор

Функция распределения системы двух случайных величин

Функцией распределения системы двух случайных величин (X,Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств – $X < x$ и $Y < y$

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\}. \tag{5.1}$$

Событие в фигурных скобках означает произведение событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$\{X < x, Y < y\} = \{X < x\}\{Y < y\}.$$

Геометрическое истолкование функции распределения $F(x,y)$ – это вероятность попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (X,Y), лежащей левее и ниже этой точки (см. рис. 5.3). Правая и верхняя границы в квадрант не включаются.

Из приведенной геометрической интерпретации можно вывести основные свойства функции распределения системы двух случайных величин:

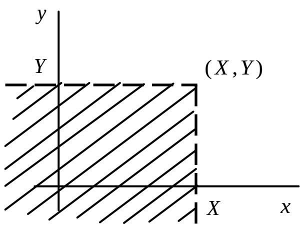

Рис. 5.3. Геометрическая интерпретация $F(x, y)$

1. Функция распределения $F(x,y)$ есть неубывающая функция обоих своих аргументов, т. е.

при $x_2 > x_1$, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$;

при $y_2 > y_1$, $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

На рис. 5.3 видно, что при увеличении x или y заштрихованная область возрастает.

2. Если x или y обращаются в $-\infty$, то функция распределения равна нулю:

$$F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0.$$

3. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице:

$$F(+\infty,+\infty) = 1.$$

В этом случае квадрант заполняет всю плоскость, и попадание в него случайной точки есть достоверное событие.

4. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, то функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x,+\infty) = F_1(x),\ F(+\infty, y) = F_2(y),$$

где $F_1(x) = P\{X < x\}$ – функция распределения случайной величины X; $F_2(y) = P\{Y < y\}$ – функция распределения случайной величины Y.
В этом случае квадрант превращается в полуплоскость, вероятность попадания в которую есть функция распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу (см. рис. 5.4–5.5).

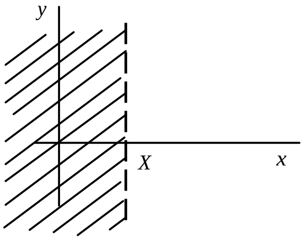

Рис. 5.4. Функция распределения $F_1(x)$

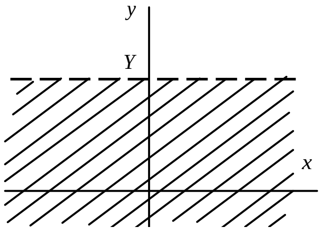

Рис. 5.5. Функция распределения $F_2(y)$

Из определения функции распределения $F(x, y)$ следует, что она непрерывна слева по любому аргументу. При геометрической интерпретации функции $F(x, y)$ – это некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами, а вид этой поверхности зависит от того, будут ли входящие в систему случайные величины дискретными или непрерывными.

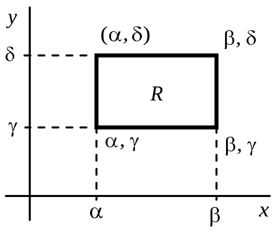

Рис. 5.6. Вероятность попадания в область R

Знание функции распределения $F(x, y)$ позволяет решить задачу о вычислении вероятности попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R (см. рис. 5.6). Решение оказывается достаточно простым, если учесть определение (5.1) функции $F(x, y)$:

$$P\{(X,Y) \in R\} = F(\beta,\delta) - F(\alpha,\delta) - F(\beta,\gamma) + F(\alpha,\gamma).$$

Вычисление сводится к вычитанию из большого квадранта двух других и добавке дважды вычтенного квадранта с вершиной в точке (α, γ).

Функции распределения $F(x, y)$ – наиболее универсальная форма закона распределения, пригодная как для дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Система двух дискретных случайных величин. Матрица распределения

Пусть множества возможных значений системы случайных величин (X, Y) конечны, т. е.

$$X : \Xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$
$$Y : \Theta = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}.$$

Обозначим через

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \tag{5.2}$$

где событие $\{X = x_i, Y = y_j\}$ есть произведение событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$.

Используя выражение (5.2), можно построить матрицу распределения – прямоугольную таблицу, в которой записаны все вероятности p_{ij} $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$.

(X, Y):

x_i \ y_j	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$	p_{2m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

.

Сумма всех вероятностей матрицы распределения равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

При наличии матрицы распределения системы двух дискретных случайных величин (X, Y) ее функция распределения находится суммированием всех вероятностей p_{ij}, для которых $x_i < x$ и $y_j < y$, т. е.

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij} .$$

Если множества возможных значений дискретных случайных величин X и Y бесконечные, но счетные, то тогда матрица распределения имеет бесконечные размеры, но ее свойства остаются теми же, что и при конечных n и m.

По матрице распределения системы (X, Y) можно найти законы (ряды) распределения отдельных случайных величин X и Y. Для это обозначим

$$P_{x_i} = P\{X = x_i\}; P_{y_j} = P\{Y = y_j\} .$$

Событие $\{X = x_i\}$ представим как сумму несовместных вариантов:

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i; Y = y_1\} + \{X = x_i; Y = y_2\} + \ldots +$$
$$+ \{X = x_i; Y = y_m\} .$$

Просуммировав соответствующие вероятности, получаем

$$P_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} ;$$

$$P_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} .$$

Таким образом, чтобы найти вероятность того, что отдельная случайная величина, входящая в систему, примет определенное значение, надо просуммировать вероятности p_{ij}, стоящие в соответствующей этому значению строке (столбце) матрицы распределения.

Система двух непрерывных случайных величин. Совместная плотность распределения

Система двух случайных величин (X,Y) называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x,y)$ есть непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, и у которой существует вторая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. Обе составляющие системы X и Y должны быть непрерывными случайными величинами.

Для определения плотности распределения рассмотрим на плоскости xy малый прямоугольник ΔR_{xy}, примыкающий к точке (X,Y) с размерами Δx на Δy (см. рис. 5.7). Вероятность попадания на этот прямоугольник равна

$$P\{(X,Y)\in \Delta R_{XY}\} = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) -$$
$$- F(x+\Delta x, y) + F(x,y).$$

При переходе к пределу получаем

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Так как условились, что $F(x,y)$ непрерывна и дифференцируема по каждому из аргументов, то последнее выражение есть не что иное, как вторая смешанная производная функции распределения

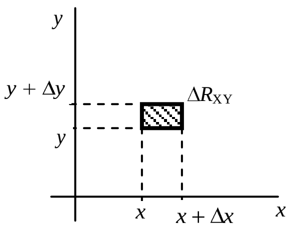

Рис. 5.7. Вероятность попадания в область ΔR_{XY}

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y), \qquad (5.3)$$

которая является совместной плотностью распределения $f(x,y)$ системы двух непрерывных случайных величин (X,Y).

Геометрически совместная плотность $f(x,y)$ изображается поверхностью распределения (см. рис. 5.8).

Свойства плотности распределения:

1. Совместная плотность распределения, положительно определенная функция по обоим аргументам,

$$f(x,y)\geq 0.$$

2. Двойной интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1, \tag{5.4}$$

т. е. объем под поверхностью распределения равен единице.

Вводится понятие элемента вероятности для системы двух непрерывных случайных величин в виде

$$f(x,y)dxdy,$$

который равен вероятности попадания случайной точки (X,Y) на элементарный прямоугольник $dxdy$. Приближенно эта вероятность равна объему элементарного параллелепипеда с высотой $f(x,y)$, опирающегося на прямоугольник $dxdy$.

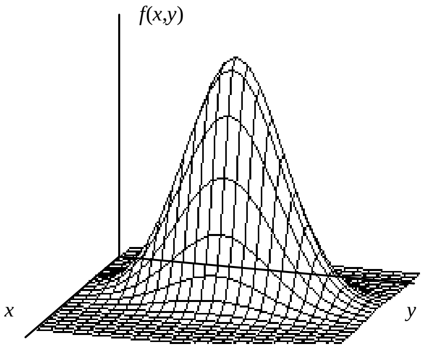

Рис. 5.8. Поверхность распределения

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в некоторую область (D) будет равна

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy.$$

Если область представляет собой прямоугольник R (см. рис. 5.6), то

$$P\{(X,Y)\in R\}=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dxdy. \tag{5.5}$$

Если использовать "опору на квадранты", то можно записать функцию распределения:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy. \tag{5.6}$$

Положив в выражении (5.6) $x=y=\infty$, докажем второе свойство (см. выражение (5.4)) совместной плотности распределения, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=F(\infty,\infty)=1.$$

Выразим законы распределения отдельных случайных величин, входящих в систему, через закон распределения системы двух случайных величин (X,Y).

Для того чтобы получить функцию распределения одной из случайных величин, входящих в систему, нужно положить в выражении (5.6) аргумент, соответствующий другой случайной величине, равным $+\infty$, т. е.

$$F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy, \tag{5.7}$$

$$F_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy. \tag{5.8}$$

Продифференцировав выражения (5.7) и (5.8) по соответствующим переменным, получим

$$f_1(x)=\frac{dF_1(x)}{dx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy, \tag{5.9}$$

$$f_2(y)=\frac{dF_2(y)}{dy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx. \tag{5.10}$$

Таким образом, чтобы получить плотность распределения одной из величин, входящих в систему, нужно проинтегрировать совместную плотность распределения в бесконечных пределах по другой случайной величине.

Зависимые и независимые случайные величины. Условные законы распределения

Решение обратной задачи – отыскание закона распределения системы по законам распределения входящих в систему случайных величин – в общем случае невозможно.

В частном случае, когда случайные величины независимы, задача решается достаточно просто.

Две случайные величины X и Y называются независимыми, если независимы все связанные с ними события: $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, $\{X = x_1\}$ и $\{Y = y_1\}$ и т. д.

Зависимость и независимость всегда взаимны. Таким образом, две случайные величины называются <u>независимыми</u>, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

Функция распределения $F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$ для независимых случайных величин будет иметь вид

$$F(x, y) = P\{X < x\}P\{Y < y\},$$

т. е.

$$F(x, y) = F(x)F(y). \tag{5.11}$$

Для зависимых случайных величин вводится понятие <u>условного закона распределения</u>.

Условным законом распределения случайной величины X, входящей в систему (X, Y), называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение. Условный закон распределения можно задавать или как условную функцию распределения $F(x/y)$, или как условную плотность $f(x/y)$.

Для произвольного типа систем случайных величин (X, Y) условная функция распределения может быть записана в виде

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\}P\{Y < y / X < x\} =$$
$$= F_1(x)P\{Y < y / X < x\}.$$

Условная вероятность $P\{Y < y / X < x\}$, т. е. вероятность события $\{Y < y\}$ при условии, что величина X приняла значение меньшее, чем x, и называется условной функцией распределения случайной величины Y при условии $\{X < x\}$. Ее обозначают так:

$$F_2(y / X < x) = P\{Y < y / X < x\}.$$

Таким образом, получаем

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y / X < x) = F_2(y) F_1(x / Y < y).$$

На практике чаще применяют другой вид условного закона распределения: закон распределения одной из случайных величин при условии, что другая приняла вполне определенное значение.

Теорема умножения плотностей (без доказательства). Совместная плотность системы двух зависимых непрерывных случайных величин (X, Y) равна произведению плотности одной из них на условную плотность другой при заданном значении первой:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y / x), \tag{5.12}$$

$$f(x, y) = f_2(y) f_1(x / y). \tag{5.13}$$

Теорема аналогична правилу умножения вероятностей в схеме событий и может быть выведена из него.

Для независимых случайных величин теорема умножения плотностей будет иметь вид

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \tag{5.14}$$

т. е. совместная плотность распределения независимых случайных величин равна произведению плотностей обеих случайных величин, входящих в систему.

Из формул (5.12) и (5.13) можно получить выражения для определения условных плотностей распределения

$$f_2(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}; \; f_1(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \tag{5.15}$$

Условные плотности $f_1(x / y)$ и $f_2(y / x)$ обладают свойствами обычных плотностей, т. е. они положительно определенные и интеграл от них в бесконечных пределах равен единице (условие нормировки).

Обе формулы (5.15) запишем следующим образом, учитывая выражения (5.9) и (5.10):

$$f_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy};\; f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}\,, \tag{5.16}$$

откуда следует, что геометрическая интерпретация кривой условной плотности $f_1(x/y)$ может быть получена путем сечения поверхности распределения $f(x,y)$ плоскостью, параллельной координатной плоскости $f0x$, отсекающей на оси $0y$ отрезок y (см. рис. 5.9). Коэффициент пропорциональности α служит для того, чтобы для кривой $f_1(x/y)\cdot\alpha$ выполнялось условие нормировки.

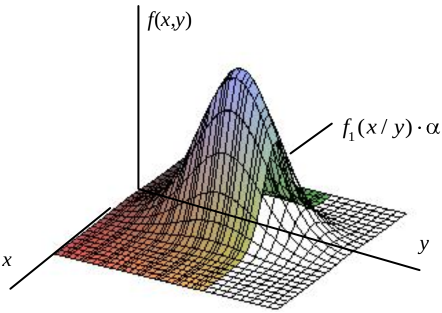

Рис. 5.9. Геометрическая интерпретация условной плотности распределения.