Лекция 7

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ: определить производящую функцию и вычислить параметры биномиального, пуассоновского, геометрического и гипергеометрического распределений; ввести понятие потока событий и сформулировать условия, необходимые для существования пуассоновского потока.

Производящая функция

Пусть имеется случайная величина X, принимающая неотрицательные целочисленные значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, где $p_k = P\{X = k\}$.

Производящей функцией для случайной величины X называется функция вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k , \tag{4.14}$$

где z – аргумент функции $(0 < z \le 1)$.

Коэффициенты при z^k равны вероятностям того, что случайная величина X примет значение k. В случае, когда число возможных значений конечно $(k = \overline{0, n})$, выражение (4.14) сохраняет силу, так как при $k > n$ все вероятности p_k обращаются в нуль. При $z = 1$

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 .$$

Если взять первую производную по z от производящей функции, то

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1} .$$

При $z = 1$ получаем

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k .$$

Но это математическое ожидание случайной величины X, т. е. математическое ожидание неотрицательной целочисленной случайной величины равно первой производной ее производящей функции $\varphi(z)$ при $z=1$.

Возьмем вторую производную производящей функции

$$\varphi''(z)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)p_k z^{k-2}.$$

При $z=1$ имеем

$$\varphi''(1)=\sum_{k=0}^{\infty}(k^2-k)p_k=\sum_{k=0}^{\infty}k^2 p_k-\sum_{k=0}^{\infty}kp_k.$$

Первая сумма – это второй начальный момент α_2 случайной величины X, а вторая – ее математическое ожидание, откуда получаем

$$\alpha_2[X]=\alpha_2=\varphi''(1)+\varphi'(1)=\varphi''(1)+m_X,$$

т. е. второй начальный момент случайной величины равен сумме второй и первой производных производящей функции при $z=1$.

Аналогично, взяв третью производную, получаем при $z=1$

$$\alpha_3=\varphi'''(1)+3\alpha_2-2m_X.$$

Таким образом, в случае необходимости можно выразить начальные моменты более высокого порядка через моменты более низкого.

Биноминальное распределение

Дискретная случайная величина X имеет биноминальное распределение, если ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$ имеют соответствующие вероятности:

$$P_{m,n}=P\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4.15}$$

где $0<p<1;\ q=1-p;\ m=0, 1, 2, \ldots, n$.

Биноминальное распределение (4.15) зависит от двух параметров, n и p. Это распределение случайной величины X – числа появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью p.

Для определения числовых характеристик случайной величины X, распределенной по биноминальному закону, найдем ее производящую функцию

$$\varphi(z)=\sum_{m=0}^{n} p_m z^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m = (q+pz)^n . \tag{4.16}$$

Для нахождения математического ожидания продифференцируем (4.16)

$$\varphi'(z)=n(q+pz)^{n-1}p$$

и при $z=1$ получаем

$$\varphi'(1)=n(q+p)^{n-1}p=np .$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биноминальному закону, будет равно

$$M[X]=m_X=\varphi'(1)=np .$$

Аналогично вычисляем вторую производную:

$$\varphi''(z)=n(n-1)(q+pz)^{n-2}p^2 ,$$

при $z=1$ имеем

$$\varphi''(1)=n(n-1)(q+p)^{n-2}p^2=n(n-1)p^2 .$$

Второй начальный момент

$$\alpha_2=\varphi''(1)+\varphi'(1)=n(n-1)p^2+np ,$$

а дисперсия случайной величины X, распределенной по биноминальному закону, будет иметь вид

$$D_X=\alpha_2-m_X^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=n(p-p^2)=$$
$$=np(1-p)=npq .$$

Таким образом, получили

$$m_X=np;\ D_X=npq;\ \sigma_X=\sqrt{npq} . \tag{4.17}$$

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ (бесконечное, но счетное множество) имеют соответствующие вероятности:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \ m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.18}$$

Распределение Пуассона зависит лишь от одного параметра a, который является одновременно и математическим ожиданием, и дисперсией случайной величины X. Для доказательства этого утверждения запишем производящую функцию в виде

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} z^m = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{az^m}{m!} .$$

Учитывая, что $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{az^m}{m!} = e^{az}$, получаем

$$\varphi(z) = e^{-a} e^{az} = e^{a(z-1)} . \tag{4.19}$$

Первая производная производящей функции $\varphi'(z) = ae^{a(z-1)}$ при $z = 1$ равна математическому ожиданию случайной величины X:

$$\varphi'(1) = a = m_X .$$

Вторая производная $\varphi''(z) = a^2 e^{a(z-1)}$ при $z = 1$ будет равна $\varphi''(1) = a^2$, а второй начальный момент $\alpha_2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) = a^2 + a$. И наконец, дисперсия случайной величины

$$D_X = \alpha_2 - m_X^2 = a^2 + a - a^2 = a .$$

Пуассоновское распределение является предельным случаем биноминального, когда число независимых опытов неограниченно возрастает и одновременно вероятность p (успех в каждом опыте) неограниченно уменьшается, при этом произведение np в пределе становится равным a:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} np = a$$

Из предельного свойства следует, что распределение Пуассона с параметром $a = np$ можно применять вместо биноминального, когда число опытов n очень велико, а вероятность p очень мала, т. е. в каждом отдельном опыте событие A наступает крайне редко. Поэтому распределение Пуассона часто называют "законом редких событий".

Простейший поток событий

Рассматривается следующая задача: на временной оси $0t$ случайным образом возникают точки – моменты появления каких-то однородных событий, например телефонных вызовов или обращений к серверу. Последовательность таких моментов (вызовов) называют потоком событий. Хотя потоки могут быть самыми различными, предположим, что некий поток обладает следующими свойствами.

Стационарность. Это свойство означает, что вероятность попадания того или иного числа событий на временной интервал τ не зависит от того, где расположен этот участок, а зависит только от длины интервала τ, т. е. среднее число событий, появляющихся в единицу времени, постоянно. Обозначают его через λ и называют интенсивностью потока.

Ординарность. Это свойство означает, что события возникают по одному. Поэтому ординарность потока выражается в том, что вероятность попадания на малый участок Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него только одного события (это может быть только при малых λ). Другими словами, при $\Delta t \to 0$ вероятность попадания на этот участок более одного события – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем вероятность попадания на участок ровно одного события.

Отсутствие последействия. Свойство означает, что вероятность попадания того или иного числа событий на заданный участок оси $0t$ не зависит от того, сколько событий попало на любой другой, не перекрывающийся с ним участок. Иначе будущее потока не зависит от его прошлого.

Потоки, обладающие этими тремя свойствами, называются простейшими потоками событий. Простейший поток тесно связан с распределением Пуассона и поэтому часто называется стационарным пуассоновским потоком.

Возьмем на оси $0t$ временной интервал τ и докажем, что случайная величина X – число событий, попадающих на этот участок, имеет распределение Пуассона.

Участок τ разделим на n равных частей длиной $\Delta t = \tau/n$ (см. рис. 4.19). Математическое ожидание (среднее значение) числа событий, попадающих на участок Δt, будет равен $\lambda\Delta t$, где λ – интенсивность потока. Согласно свойству ординарности считаем, что на участок Δt попадает не более одного события. Сам факт попадания (или непопадания) события на участок Δt опишем с помощью индикатора событий

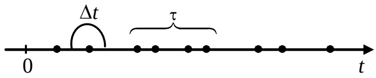

Рис. 4.19. Поток событий

$$U = \begin{cases} 1, \text{ если участок } \Delta t \text{ занят} \\ 0, \text{ если участок } \Delta t \text{ свободен} \end{cases}.$$

Ряд распределения случайной величины U

$$U: \begin{array}{|cc} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$$

позволяет вычислить математическое ожидание

$$M[U] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

где p – вероятность того, что участок занят.

Среднее значение $\lambda\Delta t$ равно математическому ожиданию $M[U]$ числа событий, попадающих на участок Δt, т. е. получаем

$$M[U] = p = \lambda\Delta t = \lambda\tau/n.$$

Появление события на любом из n участков можно рассматривать как независимые опыты (отсутствие последействия) с вероятностью появления (положительного исхода) $p = \lambda\tau/n$. В этом случае число занятых элементарных участков на интервале – это случайная величина X, имеющая биноминальное распределение:

$$P\{X = m\} = C_n^m \left(\frac{\lambda\tau}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda\tau}{n}\right)^{n-m}.$$

При неограниченном увеличении числа элементарных участков Δt (при $n \to \infty$) вероятность того, что на участок τ попадет ровно m событий, будет равна

$$P_{m,n} = \lim_{n \to \infty} C_n^m \left(\frac{\lambda\tau}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda\tau}{n}\right)^{n-m}.$$

Но поскольку при $n \to \infty$ и $p = \lambda\tau/n \to 0$ биноминальное распределение стремится к пуассоновскому с параметром $a = np = n(\lambda\tau/n) = \lambda\tau$, то окончательно получаем

$$P_m = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}.$$

Стационарность потока не является обязательным для того, чтобы число событий, попадающих на участок τ, имело распределение Пуассона. Если интенсивность потока не постоянна, а зависит от времени ($\lambda = \lambda(t)$), то случайная величина X – попадание ровно m событий на участок длиной τ, начинающийся в точке t_0 и оканчивающийся в точке $t_0 + \tau$, имеет также распределение Пуассона

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \; a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt.$$

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ (бесконечное, но счетное множество) имеют вероятности:

$$P_m = q^m p, \text{ для } m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.20}$$

где $0 < p < 1$.

Вероятности P_m для последовательных значений m образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q.

На практике геометрическое распределение появляется при независимых испытаниях с целью получения положительного результата – наступления события A, вероятность появления которого равна p. Случайная величина X – число неудачных попыток – имеет геометрическое распределение (4.20). В этом случае имеем:

$$P\{X=0\}=P\{\text{первая попытка успешная}\}=p;$$

$$P\{X=1\}=P\left\{\begin{matrix}\text{первая попытка безуспешная,}\\ \text{вторая успешная}\end{matrix}\right\}=qp;$$

$$\vdots$$

$$P\{X=m\}=P\left\{\begin{matrix}\text{первые } m \text{ попыток безуспешные,}\\ (m+1) \text{ успешная}\end{matrix}\right\}=q^m p.$$

Ряд распределения:

$$X:\ \begin{array}{|ccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & m \\ \hline p & qp & q^2p & \dots & q^m p \end{array}.$$

Определим числовые характеристики случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, используя производящую функцию

$$\varphi(z)=p\sum_{m=0}^{\infty}(qz)^m.$$

Суммируя члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $qz<1$, получаем

$$\varphi(z)=p\big/1-qz. \tag{4.21}$$

Продифференцировав по z производящую функцию (4.21), получаем

$$\varphi'(z)=pq\big/(1-qz)^2.$$

Значит,

$$m_X=\varphi'(1)=pq\big/(1-q)^2=q/p.$$

Вторая производная $\varphi''(z)=2pq^2\big/(1-q)^3$ при $z=1$ равна

$$\varphi''(1)=2pq\big/(1-q)^3=2q^2/p^2.$$

Отсюда находим второй начальный момент случайной величины X:

$$\alpha_2=\varphi''(1)+\varphi'(1)=\frac{2q^2}{p^2}+\frac{q}{p}.$$

Дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X вычисляем по формулам:

$$D_X = \alpha_2 - m_X^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}\,;\ \sigma_X = \sqrt{D_X} = \frac{\sqrt{q}}{p}\,.$$

Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами a, b, n, если ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, m$ имеют вероятности:

$$P_m = P\{X = m\} = \frac{C_a^m C_b^{n-m}}{C_{a+b}^n}, \text{ для } m = 0, 1, 2, \ldots, a\,.$$

Модель этого распределения такова: имеется урна, в которой a белых и b черных шаров; из урны вынимается n шаров. Случайная величина X – это число белых шаров среди вынутых.

Важнейшие числовые характеристики случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение (без вывода),

$$m_X = \frac{na}{a+b}; \tag{4.22}$$

$$D_X = \frac{nab}{(a+b)^2} + n(n-1)\left[\frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]. \tag{4.23}$$

При $a \to \infty, b \to \infty$ шаров так много, что вероятность достать из урны один белый шар $p = a/(a+b)$ не изменяется при вынимании из урны n шаров любого цвета. В этом случае гипергеометрическое распределение можно аппроксимировать биноминальным распределением с параметрами n и p. Из (4.22–4.23) получаем математическое ожидание и дисперсию в виде

$$m_X = np, D_X = npq\,,$$

где $q = b/(a+b)$ – вероятность достать один черный шар.